NGUYỄN THÚC AN - NGUYỄN ĐÌNH CHIỀU - KHỔNG DOÃN ĐIỀN

GIÁO TRÌNH
CƠ HỌC LÝ THUYẾT

NHÀ XUẤT BẢN XÂY DỰNG

THÔNG TIN TÁC GIẢ

A. Tác giả của giáo trình: Lý thuyết dao động

1. GS.TS Nguyễn Thúc An

- **Năm sinh**: 25/02/1939
- **Nguyên quán**: Xã Tảo Dương văn, huyện Ứng hòa, Hà nội
- **Trú quán:** Phòng 101 nhà 9 tập thể trường Đại học Thủy lợi
- **Điện Thoại**: 04.38533673
- **Cơ quan công tác:** Đại học Thủy lợi

2. PGS.TS Nguyễn Đình Chiều

- **Năm sinh**: 19/9/1946
- **Nguyên quán**: Xã Yên Nam huyện Duy Tiên tỉnh Hà nam
- **Trú quán:** 515 Nguyễn Tam Trinh quận Hai Bà trưng, Hà nội
- **Điện Thoại**: 04.36241860
- **Cơ quan công tác:** Đại học Thủy lợi

3. PGS.TS Khổng Doãn Điền

- **Năm sinh**: 08/10/1946
- **Nguyên quán**: Phường Bạch hạc thành phố Việt trì, tỉnh Phú thọ
- **Trú quán:** Tập thể trường Đại học Thủy lợi, Đống Đa, Hà nội
- **Điện Thoại**: 38528515
- **Cơ quan công tác:** Đại học Thủy lợi

B. Phạm vi và đối tượng sử dụng:

1. Ngành học: Kỹ thuật công trình, Công nghệ kỹ thuật xây dựng, Thủy điện và năng lượng tái tạo, Kỹ thuật tài nguyên nước, Kỹ thuật cơ khí, Thủy văn, Kỹ thuật bờ biển.
2. Trường học: Đại học Thủy lợi
3. Từ khóa: Cơ học, Cơ lý thuyết.
4. Yêu cầu kiến thức: Toán cao cấp
5. Số lần xuất bản: 01
6. Nhà xuất bản: NXB Xây dựng

LỜI NÓI ĐẦU

Trong hơn 40 năm qua, giáo trình Cơ học lý thuyết dùng để giảng dạy và học tập ở Trường Đại học Thuỷ lợi được biên soạn nhiều lần. Chất lượng bản in ở từng thời kỳ có khác nhau, nhưng nội dung vẫn đảm bảo cho giảng dạy và học tập, đáp ứng yêu cầu của đào tạo và chương trình khung của Hội đồng Ngành Cơ học của Bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp trước đây, nay là Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Lần in năm 1977, chương trình có tới hơn 20 chương, nhiều năm liền sinh viên ở Trường Đại học Thuỷ lợi được học theo chương trình đầy đủ đó. Qua nhiều lần cải cách, chương trình bị rút bớt và gần đây theo chương trình khung của Hội đồng Ngành Xây dựng, không còn dạy các nội dung: Chuyển động của vật rắn có một điểm cố định, chuyển động của vật rắn tự do, Hợp chuyển động của vật rắn, động lực học vật rắn, lý thuyết va chạm, … và rút gọn cách trình bày phần Tĩnh học.

Để thuận tiện cho sinh viên có nguyện vọng học đầy đủ và nâng cao, đồng thời đáp ứng yêu cầu của tình hình mới, chúng tôi biên soạn lại giáo trình Cơ học lý thuyết, trong đó có các chương hiện không có trong chương trình khung (như Chương V phần thứ 2 và Phần phụ lục), vì theo chúng tôi, có như vậy chương trình mới đầy đủ. Cách sắp xếp các phần cũng không đáp ứng được cho tất cả các ngành, chúng tôi chia theo chương trình học của ngành học đầy đủ nhất.

Phân công trách nhiệm viết các phần như sau:

- *PGS. TS Khổng Doãn Điền viết các Chương: I, II, III phần thứ nhất; Phần mở đầu, Chương I, II, III, IV phần thứ hai và cùng GS Nguyễn Thúc An viết Chương II phần Một vài Nguyên lý Cơ học.*
- *PGS. TS Nguyễn Đình Chiều viết Chương V phần thứ hai; Chương I, II phần thứ ba và Chương I, III phần phụ lục.*
- *GS. TS Nguyễn Thúc An viết Chương I và cùng PGS Khổng Doãn Điền viết Chương II phần Một vài Nguyên lý Cơ học; Chương II phần phụ lục.*

Tập thể tác giả chân thành cảm ơn GS. TSKH Nguyễn Đông Anh và GS. TS Nguyễn Văn Phó về những ý kiến đóng góp quý báu trong quá trình biên soạn giáo trình này.

Chúng tôi rất mong nhận được góp ý của các đồng nghiệp và người học. Cảm ơn Th.S Nguyễn Ngọc Huyên vì sự đóng góp công sức vào hình thức thể hiện giáo trình này.

Xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, tháng 4 năm 2007
Các tác giả

MỞ ĐẦU

Cơ học lý thuyết là một trong những môn học cơ sở của Khoa học kỹ thuật hiện đại, nó là Khoa học nghiên cứu các quy luật tổng quát về sự chuyển động và sự cân bằng chuyển động của các vật thể.

Trong Cơ học lý thuyết, ta hiểu chuyển động là sự thay đổi vị trí của các vật thể trong không gian theo thời gian, còn vật thể được biểu diễn dưới dạng mô hình là chất điểm và cơ hệ.

Cơ học lý thuyết được xây dựng theo *phương pháp tiên đề,* tức là dựa vào một số khái niệm cơ bản và hệ tiên đề của Niutơn, bằng suy diễn toán học lôgíc mà suy ra các kết quả. Người ta gọi đó là Cơ học cổ điển hay Cơ học Niutơn, nó nghiên cứu chuyển động với vận tốc nhỏ so với vận tốc ánh sáng của những vật thể vĩ mô, tức là vật thể có kích thước lớn hơn kích thước của một nguyên tử rất nhiều.

Trên cơ sở những bài toán được nghiên cứu, Cơ học lý thuyết được chia ra làm ba phần: Tĩnh học, Động học và Động lực học.

Phần tĩnh học, nghiên cứu trạng thái cân bằng của vật rắn dưới tác dụng của các lực đặt lên vật đó.

Phần động học khảo sát chuyển động của chất điểm hay vật rắn về phương diện hình học mà không xét đến nguyên nhân gây ra chuyển động.

Phần động lực học nghiên cứu quy luật chuyển động của chất điểm và cơ hệ dưới tác dụng của lực.

Cơ học lý thuyết có vai trò và ý nghĩa rất lớn. Nó không chỉ là cơ sở khoa học của nhiều lĩnh vực Khoa học kỹ thuật hiện đại, mà những quy luật và phương pháp nghiên cứu của cơ học lý thuyết cho phép ta tìm hiểu và giải thích các hiện tượng tự nhiên của thế giới xung quanh ta. Đối với các Trường Đại học kỹ thuật nói chung và Trường Đại học Thuỷ lợi nói riêng, Cơ học lý thuyết là môn học rất quan trọng nó là cơ sở cho nhiều môn học khác, như Sức bền vật liệu, Nguyên lý máy, Thuỷ lực, Bê tông cốt thép, Thuỷ năng, Thi công, ...

Để học tốt môn học, cần phải nắm được cơ sở của giải tích toán học, hình học giải tích, Đại số cao cấp, phương pháp vi phân. Ngoài ra, những kiến thức về hình học và đại số sơ cấp, về lượng giác thì phải nắm thật vững.

Lịch sử phát triển của Cơ học lý thuyết gắn liền với với sự phát triển của sản xuất, đó là cả một quá trình rất lâu dài.

Từ xa xưa, để xây dựng những công trình vĩ đại như Kim tự tháp Ai cập, người ta đã dùng những kinh nghiệm tích lũy về cơ học để chuyên chở hay đưa vật nặng lên cao bằng những công cụ đơn giản như: Xe trượt, con lăn đòn bẩy, mặt phẳng nghiêng, ... Sự chuyển tiếp từ những hiểu biết đơn thuần do kinh nghiệm dẫn đến việc thiết lập những quy luật chung về cơ học đòi hỏi một thời gian dài tích luỹ dần những tài liệu thực tế phong phú do kết quả quan sát, do kinh nghiệm hoạt động sản xuất của con người.

Nhà thuỷ tổ Cơ học lý thuyết (phần tĩnh học) là Ácximét (287-212 TCN), đã giải quyết được nhiều vấn đề cơ học như: Xét điều kiện cân bằng của đòn, xây dựng lý thuyết về trọng tâm, sức đẩy của nước lên vật đặt trong nước và nhiều phát minh trong kỹ thuật Quân sự.

Dưới thời trung cổ, cơ học cũng như những môn học khác đều bị đình trệ do sự kìm hãm và sự thống trị hà khắc của chế độ phong kiến thần học.

Nhà hoạ sĩ và nhà Vật lý học người Ý tên là Lê-ô-na Đờvanhxi (1452-1513) là một trong những người đầu tiên dùng toán học trong cơ học. Ông đã nghiên cứu hiện tượng ma sát trong Máy, sự trượt của vật trên mặt phẳng nghiêng và đưa ra khái niệm mômen của lực.

Côpécních (1473-1543) đã lập ra lý thuyết "mặt trời là trung tâm", lật đổ lý thuyết "trái đất là trung tâm" đóng góp cho lịch sử phát triển cho lịch sử cơ học.

Kêple (1571-1630) tìm ra ba định luật nổi tiếng về sự chuyển động của các vì sao.

Galilê (1564-1642) đã đưa ra khái niệm về vận tốc, gia tốc và giải quyết chính xác vấn đề chuyển động của viên đạn, đã đặt nền móng cho phần động lực học.

Nhà Toán học và Cơ học nổi tiếng người Anh là Ixac Niutơn (1643-1727) đã có công lớn trong việc xây dựng hoàn chỉnh cơ sở của Cơ học cổ điển; trong đó, ông đã lập ra những định luật cơ bản và xuất phát từ những định luật này ông đã trình bày phần động lực học một cách có hệ thống. Ngoài ra ông còn tìm ra định luật vạn vật hấp dẫn và là người đầu tiên lập ra môn Cơ học các vì sao.

Sau đó nhà toán học Ơle (1707-1783) đã dùng giải tích để nghiên cứu cơ học một cách triệt để hơn, phương pháp nghiên cứu cơ học bằng giải tích được phát triển hơn nhờ các công trình nghiên cứu của Lagrăng (1736-1813).

Nhà khoa học người Pháp Đalămbe (1717-1813) dựa trên nguyên lý di chuyển ảo của Bécnulli, đã đưa ra nguyên lý nổi tiếng mang tên ông.

Ngoài ra, các nhà khoa học Pháp như Laplas, Poátxông và các nhà khoa học Đức như Gaoxơ, Écxơ đã đóng góp nhiều công trình giá trị cho sự phát triển của cơ học giải tích.

Vào giữa thế kỷ 19 do sự phát triển nhanh chóng của khoa học và kỹ thuật, để đáp ứng yêu cầu thực dụng, môn Cơ học kết cấu ra đời.

Vào thế kỷ 20, do công nghiệp và ngành hàng không phát triển nên các môn Đàn hồi, thuỷ khí động lực đã có những bước phát triển mạnh. Nhà khoa học người Nga Jucốpski (1847-1921) là người đầu tiên có những giả thiết táo bạo về ngành du hành vũ trụ và được coi là thuỷ tổ của ngành hàng không Nga.

Do những thành tựu sáng lạn của ngành Vật lý vào nửa thế kỷ 19, đầu thế kỷ 20. Môn Cơ học tương đối của nhà khoa học thiên tài người Đức là Anhxtanh ra đời, đã làm đảo lộn những quy luật của Cơ học cổ điển, phủ định khái niệm không gian và thời gian tuyệt đối, khối lượng không đổi, và mở ra cho Cơ học một bước tiến nhảy vọt. Nhưng vẫn phải nhấn mạnh rằng: Cơ học cổ điển vẫn không mất ý nghĩa vật lý của nó. Các tính toán trong kỹ thuật, trong thiên văn học vẫn căn cứ vào các định luật của cơ học cổ điển. Tính toán cho biết rằng: Khi vật chất chuyển động với vận tốc gần bằng vận tốc ánh sáng (300.000 Km/s) thì những kết quả đạt được trong cơ học cổ điển sẽ khác so với những kết quả đạt được trong cơ học tương đối.

PHẦN THỨ NHẤT: TĨNH HỌC

Tĩnh học là phần đầu của giáo trình Cơ học lý thuyết. Nội dung chủ yếu của phần này là khảo sát trạng thái cân bằng của vật rắn dưới tác dụng của hệ lực đặt lên nó.

Để nghiên cứu vấn đề này ta sẽ giải quyết hai bài toán sau:

1. Thu gọn hệ lực đặt lên vật rắn.
2. Tìm điều kiện cân bằng của hệ lực đặt lên vật rắn.

CHƯƠNG I: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN - HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC - LIÊN KẾT VÀ PHẢN LỰC LIÊN KẾT

1.1. Các khái niệm cơ bản

Trong tĩnh học có ba khái niệm cơ bản là: Lực, vật rắn tuyết đối và trạng thái cân bằng của vật rắn.

1.1.1. Lực

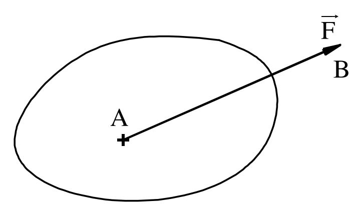
Khái quát hóa những kinh nghiệm và thực nghiệm về sự tác dụng giữa các vật thể, người ta xây dựng được khái niệm lực.

Lực là đại lượng đặc trưng cho sự tác dụng tương hỗ giữa các vật thể.

Tác dụng của lực được đặc trưng bởi ba yếu tố:

- Điểm đặt lực: Là phần tử vật chất thuộc vật chịu tác dụng, tại đó tác dụng cơ học mà ta nói đến được truyền sang vật ấy.
- Phương, chiều tác dụng của lực.
- Cường độ tác dụng của lực (còn gọi là môđun của lực).

Đơn vị lực thường dùng là niutơn, và được ký hiệu là N.



Hình 1-1

Từ ba yếu tố đặc trưng cho lực ta thấy lực là một đại lượng véctơ, được ký hiệu $\overrightarrow{F}$, hoặc $\overrightarrow{P}$, hoặc $\overrightarrow{R}$.

Véctơ lực như trên là một véctơ buộc.

Đường thẳng chứa véctơ lực gọi là *giá của lực* hay *đường tác dụng của lực.*

1.1.2. Vật rắn tuyệt đối

Vật rắn tuyệt đối là vật thể mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ thuộc vật không thay đổi đối với mọi tác dụng cơ học.

Thường trong thực tế, dưới tác dụng cơ học, vật rắn sẽ biến dạng, nhưng ta vẫn gọi là vật rắn tuyệt đối vì hai lý do sau:

– Biến dạng xảy ra ở vật rắn là bé, không ảnh hưởng đến kết quả tính toán trong kỹ thuật, sai số cho phép.

– Quan niệm như vậy bài toán sẽ đơn giản hơn. Từ đây về sau, ta gọi vật rắn tuyệt đối là vật rắn, nếu như không nói gì thêm.

1.1.3. Trạng thái cân bằng của vật rắn

Vật rắn ở trạng thái cân bằng là vật rắn đứng yên hay chuyển động tịnh tiến thẳng và đều so với một hệ quy chiếu nào đó.

Trong tĩnh học, vật rắn ở trạng thái cân bằng là vật rắn đứng yên so với hệ quy chiếu gắn liền với trái đất.

Chuyển động tịnh tiến thẳng và đều của vật rắn là chuyển động mà mọi điểm thuộc vật đều chuyển động thẳng với vận tốc không đổi.

1.1.4. Một số định nghĩa khác

a. Hệ lực. *Hệ lực là tập hợp các lực cùng tác dụng lên một vật rắn.*

Giả sử vật rắn chịu tác dụng bởi các lực: $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, ..., $\overrightarrow{F_n}$, ta ký hiệu hệ lực tác dụng lên vật rắn là: $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right)$.

b. Hệ lực tương đương. *Hai hệ lực được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tác dụng cơ học như nhau đối với một vật rắn.*

Hai hệ lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right)$ và $\left(\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, ..., \overrightarrow{P_m}\right)$ tương đương với nhau được ký hiệu như sau: $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim \left(\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, ..., \overrightarrow{P_m}\right)$.

c. Hợp lực của hệ lực. *Hợp lực của hệ lực là một lực duy nhất tương đương với hệ lực ấy*. Gọi $\overrightarrow{R}$ là hợp lực của hệ lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right)$ thì ta có thể viết: $\overrightarrow{R} \backsim \left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right)$

d. Hệ lực cân bằng. Hệ lực cân bằng là hệ lực tác dụng lên vật rắn mà không làm thay đổi trạng thái chuyển động mà vật có được khi chưa tác dụng hệ lực ấy. Giả sử hệ lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right)$ tác dụng lên vật rắn đứng yên, vật rắn vẫn ở trạng thái đứng yên, thì ta ta nói rằng hệ lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right)$ cân bằng và ký hiệu là: $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim 0$.

Hệ lực cân bằng còn được gọi là hệ lực tương đương với không.

e. Hệ quy chiếu. Trong Cơ học lý thuyết để khảo sát chuyển động của vật thể, ta phải so sánh vị trí của nó với vị trí của vật thể khác mà ta coi nó đứng yên. Vật dùng để so sánh đó gọi là vật quy chiếu, và hệ toạ độ gắn với vật quy chiếu gọi là hệ quy chiếu. Thường trong thực tế, người ta chọn hệ tọa độ đề các vuông góc gắn liền với trái đất làm hệ quy chiếu.

1.2. Hệ tiên đề tĩnh học

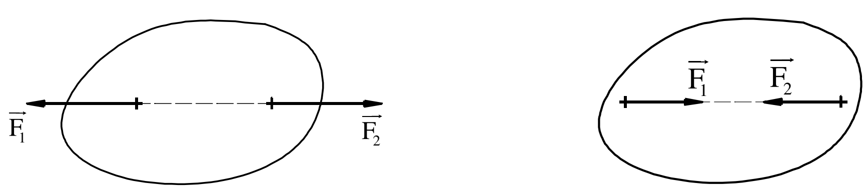
Tiên đề là mệnh đề cơ bản phát biểu công nhận tính chất của khái niệm cơ bản, là điều hiển nhiên nhất có thực tiễn kiểm nghiệm mà rút ra được.

Dưới đây ta sẽ lần lượt trình bày 5 tiên đề, còn lại tiên đề 6 sẽ được nêu ra ở cuối chương này. Đó là hệ tiên đề tĩnh học, làm cơ sở xây dựng lý luận cho cả phần tĩnh học.

Tiên đề 1. (Tiên đề về hai lực cân bằng)

Điều kiện cần và đủ để cho hệ hai lực cùng tác dụng lên một vật rắn cân bằng là chúng có cùng giá, cùng cường độ và ngược chiều nhau.

Ta có thể viết $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right) \backsim 0$.



Hình 1-2

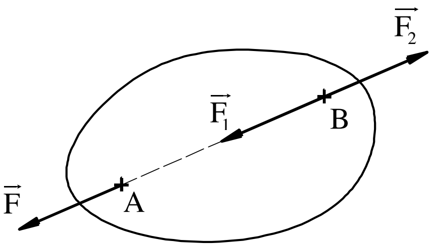
Tiên đề 1 nêu lên một hệ lực cân bằng chuẩn, đơn giản nhất.

Tiên đề 2 (Tiên đề thêm bớt hệ lực cân bằng)

Tác dụng của hệ lực lên vật rắn không thay đổi, nếu ta thêm vào hay bớt đi một hệ lực cân bằng.

Nếu $\left(\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, ..., \overrightarrow{P_m}\right) \backsim 0$ thì:

$\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}; \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, ..., \overrightarrow{P_m}\right)$



Hình 1-3

Từ tiên đề 2, ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 1 (Định lý trượt lực)

Tác dụng của một lực đặt lên vật rắn không thay đổi, nếu ta trượt lực dọc theo giá của nó.

Chứng minh: Giả sử lực $\overrightarrow{F}$ tác dụng lên vật rắn tại điểm A. Gọi B là một điểm nằm trên giá của lực $\overrightarrow{F}$ thuộc vật rắn, ta thêm vào tại B một hệ hai lực cân bằng ($\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$) $\backsim$ 0. Sao cho cùng phương với lực $\overrightarrow{F}$ và trị số $F_1 = F_2 = F$. (hình 1-3).

Theo tiên đề 2 ta có $\overrightarrow{F} \backsim \left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right)$ mặt khác theo tiên đề 1 thì $\left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F_2}\right) \backsim 0$ do đó, theo tiên đề 2, ta bớt đi hệ lực này thì không làm thay đổi trạng thái chuyển động của vật: $\overrightarrow{F} \backsim \left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right) \backsim \overrightarrow{F_1}$ đặt tại B.

Từ đó ta suy ra được rằng véctơ biểu diễn lực tác dụng lên vật rắn là một véctơ trượt.

Hệ quả 2

Nếu một hệ lực đặt lên vật rắn mà cân bằng thì một lực bất kỳ lấy theo chiều ngược lại sẽ là hợp lực của hệ lực còn lại.

Nếu $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim 0$ thì $-\overrightarrow{F_1} \backsim \left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, ..., \overrightarrow{F_n}\right)$

Chứng minh: Giả sử hệ lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim 0$

Tác dụng lên vật rắn lực $-\overrightarrow{F_1}$. Theo tiên đề 2 ta tác dụng thêm một hệ lực cân bằng đã cho thì:

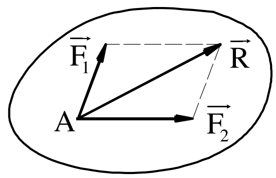
$$-\overrightarrow{F_1} \backsim \left(-\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right)$$

Vì hệ hai lực $\left(-\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1}\right)$ là hệ lực cân bằng nên theo tiên đề 2, ta bớt đi thì tác dụng lên hệ không thay đổi:

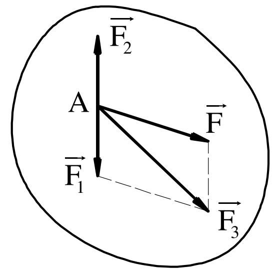
$$-\overrightarrow{F_1} \backsim \left(-\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \qquad (\textit{đpcm})$$

Tiên đề 3 (Tiên đề hình bình hành lực).

Hệ hai lực cùng đặt trên vật rắn tại một điểm có hợp lực đặt tại điểm chung ấy. Véctơ biểu diễn hợp lực là véctơ đường chéo của hình bình hành mà hai cạnh là hai véctơ biểu diễn hai lực đã cho (hình 1-4).



Hình 1-4



Hình 1-5

Theo định nghĩa hợp lực của hệ lực ta có: $\vec{R} \backsim \left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right)$

Theo tiên đề ta có: $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Từ tiên đề 3 ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1

Có thể phân tích một lực đã cho thành hai lực theo quy tắc hình bình hành lực.

Chứng minh: Giả sử lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật rắn, ta thêm vào đó hệ hai lực cân bằng $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right) \backsim 0$. Theo tiên đề 2 ta có: $\vec{F} \backsim \left(\vec{F}, \vec{F_1}, \vec{F_2}\right)$ (a)

Theo tiên đề 3 ta có: $\left(\vec{F}, \vec{F_1}\right) \backsim \vec{F_3}$ (b)

Từ (a) và (b) ta có: $\vec{F} \backsim \left(\vec{F_2}, \vec{F_3}\right)$

Hệ quả 2

Dưới tác dụng của một lực khác không thì vật rắn không ở trạng thái cân bằng.

Chứng minh: Giả sử vật rắn chịu tác dụng bởi lực $\vec{F}$ khác không. Theo hệ quả 1 ta có thể phân tích lực $\vec{F}$ ra hai lực thành phần theo hai phương khác nhau: $\vec{F} \backsim \left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right)$

Vì $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right)$ không thoả mãn tiên đề 1, nên vật rắn không ở trạng thái cân bằng.

Hệ quả 3 (Định lý ba lực phẳng cân bằng)

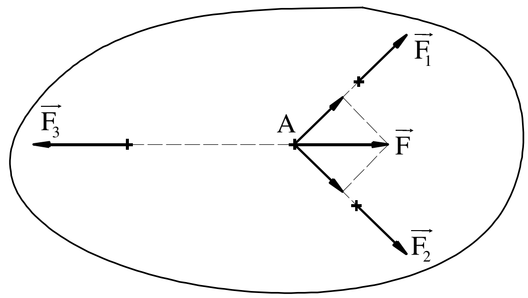
Nếu ba lực cùng nằm trong một mặt phẳng, không song song mà cân bằng thì giá của chúng cắt nhau tại một điểm.

Chứng minh: Giả sử vật rắn ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của hệ ba lực cùng nằm trong một mặt phẳng không song song $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}\right)$. Gọi A là giao điểm hai giá của hai lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$. Ta dời hai lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ dọc theo giá của chúng về A. Theo tiên đề 3 ta có:

$\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right) \backsim \vec{F}$ đặt tại A.

Do đó: $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}\right) \backsim \left(\vec{F}, \vec{F_3}\right) \backsim 0$

Theo tiên đề 1, $\vec{F}$ và $\vec{F_3}$ phải cùng giá, mà $\vec{F}$ đặt tại A do đó giá của lực $\vec{F_3}$ cũng phải đi qua A, suy ra rằng: Giá của ba lực cắt nhau tại một điểm.



Hình 1-6

Chú ý:

- Mệnh đề đảo của hệ quả này sẽ không đúng.
- Hệ quả này được sử dụng nhiều trong khi giải quyết bài tập.

Hệ quả 4 (Hợp lực của hệ lực đồng quy)

Hệ lực đồng quy có hợp lực đặt tại điểm đồng quy của nó. Véctơ biểu diễn hợp lực bằng tổng hình học các véctơ biểu diễn các lực đã cho của hệ.

Chứng minh: Giả sử cho hệ lực đồng quy $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}\right)$ tác dụng lên vật rắn. Gọi O là điểm đồng quy. Ta phải chứng minh rằng hệ lực đó có hợp lực $\vec{R}$ đặt tại O với:

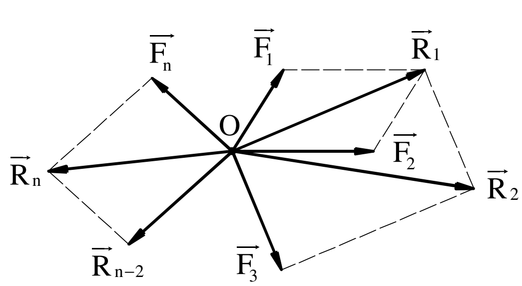
$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + ... + \vec{F_n} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F_k} \qquad (1\text{-}1)$$

Thật vậy, vì $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ có hợp lực $\vec{R}_1$ đặt tại O theo tiên đề 3: $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right) \backsim \vec{R}_1$ đặt tại O,

và $\vec{R}_1 = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

Tương tự $\left(\vec{R}_1, \vec{F_3}\right) \backsim \vec{R}_2$ đặt tại O và

$\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + \vec{F_3} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$



Hình 1-7

Tiếp tục hợp lần lượt với $\vec{F_4}$, $\vec{F_5}$ ... một cách tương tự như trên, cuối cùng ta sẽ có:

$$\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}\right) \backsim \left(\vec{R}_{n-2}, \vec{F_n}\right) \qquad \vec{R}$$

Trong đó $\vec{R}_{n-2}$ đặt tại O và $\vec{R}_{n-2} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + ... + \vec{F}_{n-1}$

Do đó $\vec{R}$ là hợp lực của hai lực $\vec{R}_{n-2}$ và $\vec{F_n}$ cùng đặt tại O, nó chính là hợp lực của hệ lực đồng quy đã cho, cũng đặt tại O và:

$$\vec{R} = \vec{R}_{n-2} + \vec{F_n} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + ... + \vec{F}_{n-1} + \vec{F_n} = \sum_{1}^{n} \vec{F_k}$$

đó là điều cần phải chứng minh.

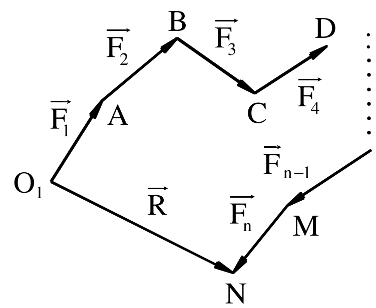
Kết luận: Hệ lực đồng quy tác dụng lên vật rắn bao giờ cũng có thể thu gọn về một lực duy nhất đặt tại điểm đồng quy của hệ.

Xác định véctơ biểu diễn hợp lực $\vec{R}$:

- Phương pháp hình học.

Giả sử cho hệ lực đồng quy $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}\right)$ tác dụng lên vật rắn trong đó những véctơ biểu diễn các lực của hệ lực là các véctơ đã biết.

Theo định lý trên ta có: $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + ... + \vec{F}_k + ... + \vec{F_n}$



Hình 1-8

Để xác định véctơ $\vec{R}$, ta có thể sử dụng phép cộng véctơ của hình học giải tích. Trước hết, ta chọn một điểm cố định O_1 nào đó, rồi lần lượt dựng các véctơ $\overrightarrow{O_1A} = \vec{F_1}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{F_2}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{F_3}$, ..., $\overrightarrow{MN} = \vec{F_n}$. Khi đó, véctơ $\overrightarrow{O_1N} = \vec{F_1}$ là véctơ biểu diễn hợp lực $\vec{R}$ cần tìm (hình 1-8).

Đa giác O_1ABC...MN được gọi là đa giác lực của hệ lực đã cho.

Vậy để xác định véctơ $\vec{R}$, trước hết ta dùng đa giác lực của hệ lực. Véctơ khép kín đa giác lực của hệ lực chính là véc tơ biểu diễn hợp lực $\vec{R}$ cần tìm. Nói chung, đa giác lực là một đa giác ghềnh trong không gian.

- Phương pháp giải tích.

Để xác định véc tơ hợp lực $\vec{R}$ bằng phương pháp giải tích, trước hết ta chọn hệ trục đề các vuông góc O_1xyz. Sau đó, chiếu (1-1) lần lượt lên các trục toạ độ, ta được:

$$\begin{cases} R_x = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \\ R_y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \\ R_z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k \end{cases} \qquad (1\text{-}2)$$

Trong đó, X_k, Y_k, Z_k (k = 1, 2, ..., n) là chiếu của lực $\vec{F_k}$ lên các trục Ox, Oy, Oz. Từ (1-2) ta xác định được phương, chiều và trị số của $\vec{R}$:

Trị số: $$R = \sqrt{(\Sigma X_k)^2 + (\Sigma Y_k)^2 + (\Sigma Z_k)^2} \qquad (1\text{-}3)$$

Phương chiều: $$\cos\left(\vec{R}, \vec{i}\right) = \frac{R_x}{R};\ \cos\left(\vec{R}, \vec{j}\right) = \frac{R_y}{R};\ \cos\left(\vec{R}, \vec{k}\right) = \frac{R_z}{R} \qquad (1\text{-}4)$$

Trong đó $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các véctơ đơn vị trên các trục tọa độ.

Ở trên ta nêu lên được hai bài toán thu gọn hệ lực đồng quy về một lực duy nhất là hợp lực $\vec{R}$ và các phương pháp để xác định véctơ $\vec{R}$ biểu diễn hợp lực đó. Sau đây ta sẽ xét đặc điểm của hệ lực đã cho khi véctơ hợp lực $\vec{R}$ của hệ triệt tiêu.

Điều kiện cân bằng của hệ lực đồng quy:

- Điều kiện cân bằng tổng quát.

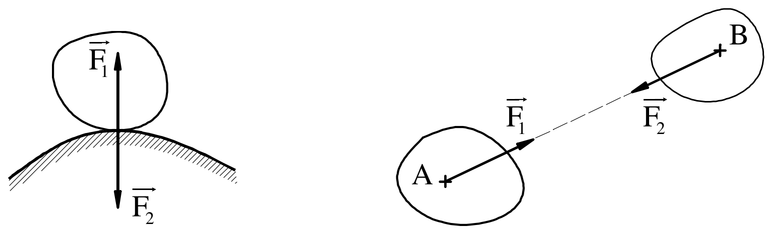
Điều kiện cần và đủ để hệ lực đồng quy cân bằng là véctơ hợp lực của hệ lực triệt tiêu.

Hệ lực đồng quy $$\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}, ..., \vec{F_n}\right) \backsim 0 \Leftrightarrow \vec{R} = \sum \vec{F_k} = 0 \qquad (1\text{-}5)$$

Chứng minh: Để chứng minh điều này, ta hãy đưa ra hệ lực đã cho về cặp hai lực rồi sử dụng điều kiện cân bằng.

Tiên đề 4 (Tiên đề về lực tác dụng và phản lực tác dụng)

Lực tác dụng và phản lực tác dụng giữa hai vật là hai lực có cùng giá, cùng cường độ và ngược chiều nhau.



Hình 1-9

Gọi $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ là lực do hai vật tác dụng lên nhau.

Theo tiên đề 4 ta có: $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$ và hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cùng giá.

Chú ý rằng lực tác dụng và lực phản tác dụng đặt vào hai vật khác nhau, cho nên hệ hai lực này không tạo thành hệ lực cân bằng.

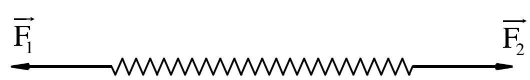
Tiên đề 5 (Tiên đề hoá rắn)

Khi vật biến dạng đã cân bằng thì hóa rắn lại nó vẫn cân bằng.

Chú ý:

- Tiên đề này cho phép ta coi vật biến dạng là vật rắn cân bằng, suy ra điều kiện cân bằng của vật rắn là điều kiện cần (nhưng không đủ) của vật biến dạng cân bằng.
- Tiên đề này là cơ sở để giải quyết một phần những bài toán cân bằng của vật biến dạng.

Ví dụ 1. Tác dụng hệ lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right)$ lên đầu mút của một lò xo (hình 1-10) với điều kiện hai lực này cùng giá và $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$. Sau khi lò xo đã biến dạng nó ở vị trí cân bằng. Khi đó ta có thể coi lò xo như một thanh cứng cân bằng và ta có: $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right) \backsim 0$.



Hình 1-10

1.3. Liên kết và phản lực liên kết

Trong thực tế, ta thường gặp những bài toán xét sự cân bằng không phải của một vật riêng rẽ, mà là nhiều vật có liên quan đến nhau. Vì thế, ta phải đưa vào khái niệm liên kết và phản lực liên kết.

1.3.1. Một số định nghĩa

a. Vật rắn tự do

Vật không bị cản trở chuyển động, có thể chuyển động theo mọi phương gọi là vật rắn tự do. Trong thực tế không tồn tại vật rắn tự do.

b. Vật rắn không tự do

Vật bị cản trở chuyển động gọi là vật rắn không tự do, hay là vật chịu liên kết.

c. Liên kết

Liên kết là những điều kiện cản trở chuyển động của vật.

Trong tĩnh học, ta chỉ khảo sát loại liên kết được thực hiện bằng sự tiếp xúc hình học giữa vật khảo sát và vật thể khác, mà ta gọi là liên kết hình học. Đồng thời ta cũng coi mặt tiếp xúc giữa các vật thể là nhẵn lý tưởng (bỏ qua ma sát).

d. Vật khảo sát và vật gây liên kết

Trong mỗi bài toán cụ thể, bao giờ ta cũng xét sự cân bằng của một vật thể nhất định, vật đó được gọi là vật khảo sát. Còn các vật thể khác có liên kết với vật khảo sát thì gọi là vật gây liên kết.

e. Lực liên kết và phản lực liên kết

Những đặc trưng tác dụng tương hỗ giữa các vật có liên kết với nhau ở chỗ tiếp xúc hình học được gọi là những lực liên kết.

Lực do vật khảo sát tác dụng lên vật gây liên kết được gọi là áp lực.

Lực do vật gây liên kết tác dụng lên vật khảo sát được gọi là phản lực liên kết.

1.3.2. Cách tìm phản lực liên kết

Để tìm phản lực liên kết trong từng liên kết cụ thể, người ta đưa vào những đặc tính sau đây của phản lực liên kết:

– Phản lực liên kết bao giờ cũng đặt vào vật khảo sát, ở chỗ tiếp xúc hình học của nó với vật gây lên liên kết.

– Phản lực liên kết bao giờ cũng cùng phương, ngược chiều với phương, chiều bị cản trở chuyển động bởi chính liên kết đó.

– Nếu theo một phương nào đó, chuyển động của vật khảo sát không bị cản trở thì theo phương đó không có thành phần của phản lực liên kết. Phản lực liên kết vuông góc với phương dịch chuyển tự do của vật khảo sát.

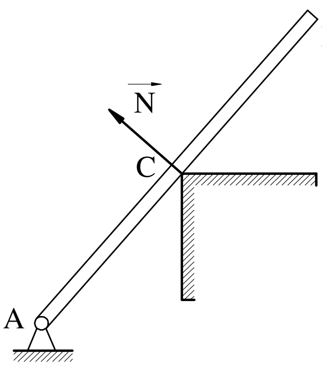
Những điều này luôn luôn đúng với liên kết những vật rắn và bỏ qua ma sát. Tuỳ từng điều kiên cụ thể mà ta vận dụng để xác định phản lực liên kết, chủ yếu là phương và chiều của chúng.

1.3.3. Các loại liên kết cơ bản thường gặp

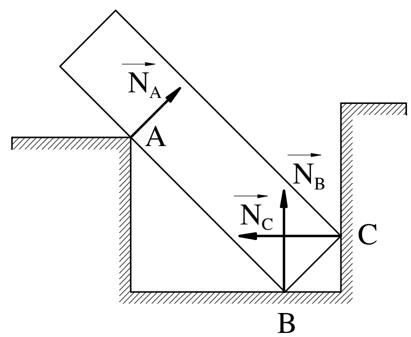
a. Loại I: Liên kết tựa

Bao gồm các liên kết tựa điểm nhọn, liên kết tựa đường, liên kết tựa mặt và liên kết tựa con lăn.

1. Liên kết tựa điểm nhọn (hình 1-11): Phản lực liên kết hướng theo pháp tuyến của mặt tiếp xúc của vật khảo sát với điểm nhọn $\left(\overrightarrow{N}_C\right)$.



Hình 1-11

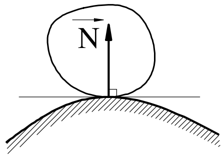


Hình 1-12

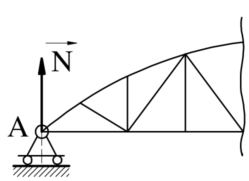
2. Liên kết tựa đường (hình 1-12): Phản lực liên kết vuông góc với đường tựa ở chỗ tiếp xúc với vật khảo sát $\left(\overrightarrow{N}_B, \overrightarrow{N}_C\right)$.

3. Liên kết tựa mặt (hình 1-13): Phản lực liên kết hướng theo phương pháp tuyến chung của mặt tiếp xúc của vật khảo sát và vật gây liên kết tại điểm tiếp xúc $\left(\overrightarrow{N}\right)$.

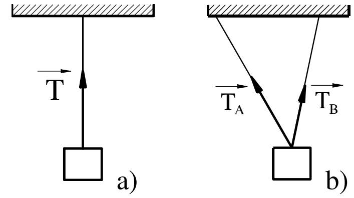
4. Liên kết tựa con lăn (hình 1-14).: Phản lực liên kết vuông góc với phương dịch chuyển tự do của vật khảo sát $\left(\overrightarrow{N}_K\right)$.



Hình 1-13



Hình 1-14



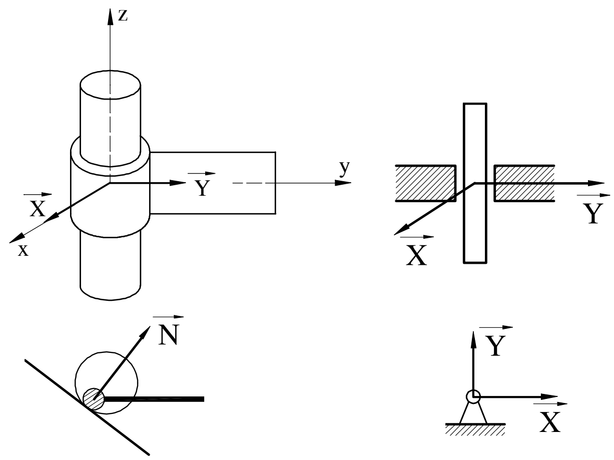
Hình 1-15

b. Loại II: Liên kết dây mền (hình 1-15a, b)

Phản lực liên kết hướng dọc dây $\vec{T}, \vec{T}_A, \vec{T}_B$.

c. Loại III: Liên kết bản lề

Liên kết bản lề bao gồm các loại liên kết bản lề tựa, liên kết bản lề cối và liên kết bản lề cầu.



Hình 1-16

– Vật khảo sát có chuyển động quay xung quanh trục bản lề. Phản lực do trục bản lề tác dụng lên vật chưa xác định nhưng phản lực này sẽ nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục bản lề. Trong tính toán, Phản lực $\vec{N}$ được phân tích thành hai thành phần $\vec{X}$ và $\vec{Y}$ đặt tại một điểm trên trục bản lề. Hình vẽ (hình 1-16) mô tả kết cấu và mô hình của bản lề trụ.

– Liên kết bản lề cối (hình 1-17): Còn có tên gọi là liên kết ổ chắn, nó khác với liên kết bản lề trụ ở chỗ: dọc theo trục ổ, vật bị cản trở chuyển động theo một phía, trên hình 1-17 là phía dưới, nên chắc chắn phản lực $\vec{N}$ có thành phần $\vec{X}$ hướng lên phía trên. Hai thành phần còn lại của phản lực $\vec{N}$ giống như ở bản lền trụ ($\vec{X}$, và $\vec{Y}$).

– Bản lề cầu (hình 1-18): Một đầu của vật khảo sát có dạng hình cầu được lồng vào trong ổ cố định có dạng hình cầu tâm O. Vật khảo sát có thể chuyển động quay xung quanh tâm O. Phản lực của ổ đỡ tác dụng lên vật khảo sát đi qua tâm O nhưng chưa xác định hướng. Khi tính toán ta thường phân tích phản lực này ra ba thành phần $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ vuông góc với nhau.

d. Loại IV: Liên kết thanh không trọng lượng

Giả thiết rằng thanh không có trọng lượng và trên thanh không có lực nào tác dụng, ngoài các lực liên kết ở hai đầu của nó. Những liên kết ở hai đầu thanh thường được thực hiện nhờ bản lề cầu hay tựa. Theo tiên đề 1, vì thanh cân bằng nên lực liên kết ở hai đầu thanh sẽ cùng giá, đó là đường thẳng đi qua hai đầu của thanh. Người ta quy ước thanh chịu kéo nếu các lực

Hình 1-19

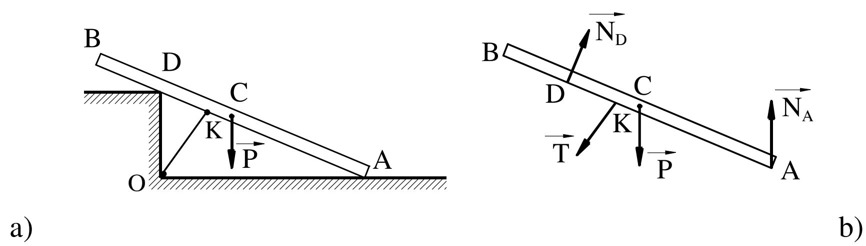
tác dụng như hình (1-19a) và thanh chịu nén nếu lực tác dụng như hình (1-19b).

1.3.4. Tiên đề giải phóng liên kết

Các tiên đề 1, 2, 3 và 5 chỉ phát biểu cho vật rắn tự do, còn tiên đề này đặt cơ sở cho việc giải quyết những bài toán về vật rắn không tự do và được gọi là Nguyên lý giải phóng liên kết:

Vật rắn không tự do cân bằng có thể coi là vật rắn tự do cân bằng nếu thay các liên kết bằng các phản lực liên kết tương ứng.

Ví dụ 2. Một dầm được giữ ở trạng thái cân bằng nhờ sợi dây OK buộc dầm vào tường và lực trên tường và nền (hình 1-20a).



Hình 1-20

Vật khảo sát là dầm AB cân bằng. Áp dụng tiên đề giải phóng liên kết ta có thể coi dầm là vật tự do cân bằng, bằng cách bỏ đi các liên kết: Dây OK, nền và tường, đồng thời thay bằng các phản lực liên kết tương ứng: $\vec{T}$, $\vec{N}_K$, $\vec{N}_D$. Trên hình (1-20b) ta có dầm AB cân bằng, đó là vật tự do cân bằng với điều kiện cân bằng là:

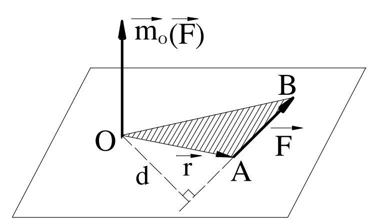
$$\left(\vec{P}, \vec{T}, \vec{N}_K, \vec{N}_D\right) \backsim 0$$

1.4. Mômen của lực

1.4.1. Mômen của lực đối với một tâm

1.4.2.a. Định nghĩa

Mômen của lực $\vec{F}$ đối với một tâm O, ký hiệu là $\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)$, là một véc tơ, được xác định bởi ba yếu tố sau:



Hình 1-21

– Phương của $\vec{m}_O\left(\vec{F}\right)$ là phương vuông góc với mặt phẳng chứa tâm O và lực $\vec{F}$.

– Chiều của $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)$ là chiều mà người quan sát nhìn từ mút của véctơ $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)$ xuống mặt phẳng chứa tâm O và lực $\overrightarrow{F}$ thấy lực $\overrightarrow{F}$ làm vật có xu hướng quay quanh tâm O theo chiều ngược kim đồng hồ (hình 1-21).

– Trị số của $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)$ bằng tích trị số của lực $\overrightarrow{F}$ và cánh tay đòn d (d là khoảng cách từ tâm O đến giá của lực $\overrightarrow{F}$).

$$m_O\left(\overrightarrow{F}\right) = \left|\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right| = F.d = 2.S_{AOB}$$

Từ đó ta có thể biểu diễn:

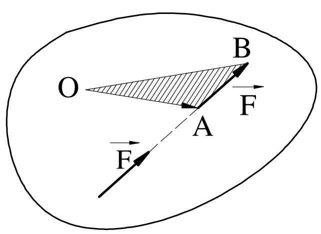
$$\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right) = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F} \qquad (1\text{-}9)$$

Trong đó $\vec{r}$ là véctơ biểu diễn vị trí điểm đặt A của lực $\overrightarrow{F}$ đối với tâm O.

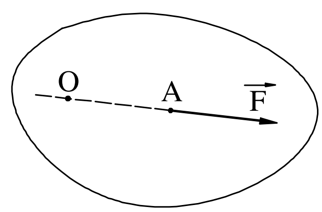
1.4.2.b. Tính chất

– Mômen của một lực đối với một tâm không thay đổi, nếu ta trượt lực dọc theo giá của nó, vì không làm thay đổi trị số của lực, cánh tay đòn cũng như hướng quay. (hình 1-22).

– Mômen của lực đối với một tâm bằng không khi đường tác dụng của lực ấy đi qua tâm đó, vì khi ấy cánh tay đòn d = 0 (hình 1-23).



Hình 1-22



Hình 1-23

1.4.2.c. Xác định mômen của lực đối với một tâm bằng giải tích

Chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc O trùng với tâm lấy mômen. Gọi (x, y, z) là tọa độ điểm đặt A của lực $\overrightarrow{F}$, gọi X, Y, Z là chiếu của lực $\overrightarrow{F}$ lên các trục tọa độ, thì theo (1-9) ta có:

$$\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right) = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức, ta có: $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right) = (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}$

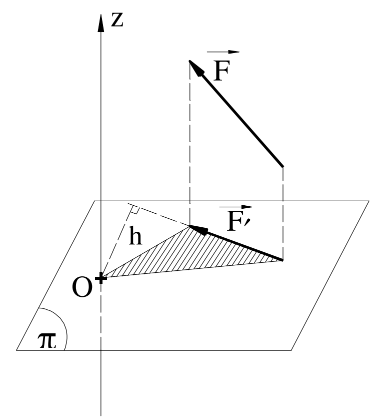
Từ đó rút ra giá trị chiếu của $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)$ trên các trục tọa độ:

$$\begin{cases} ch_x\left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right] = \left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right]_x = yZ - zY \\ ch_y\left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right] = \left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right]_y = zX - xZ \\ ch_z\left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right] = \left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right]_z = xY - yX \end{cases}$$

1.4.2. Mômen của lực đối với một trục

1.4.2.a. Định nghĩa

Có một lực $\overrightarrow{F}$ và một trục z. Qua điểm O trên trục z ta dựng mặt phẳng π ⊥ z. Gọi $\overrightarrow{F'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{F}$ lên mặt phẳng π.



Hình 1-24

Mômen của lực $\overrightarrow{F}$ đối với trục z, ký hiệu là $m_z(\overrightarrow{F})$, là một đại lượng đại số, bằng: $m_z(\overrightarrow{F}) = \pm F'.h$, trong đó h là khoảng cách từ O tới giá của $\overrightarrow{F}$. Lấy dấu (+) nếu nhìn từ mút của trục z xuống mặt phẳng π thấy $\overrightarrow{F}$ có xu hướng làm cho vật quay ngược chiều kim đồng hồ, và lấy dấu (–) trong trường hợp ngược lại.

1.4.2.b. Tính chất

– Mômen của lực đối với trục không đổi, nếu ta trượt lực dọc theo giá của nó, vì khi trượt lực $\overrightarrow{F}$ dọc theo giá của nó, thì không làm thay dổi giá trị (trị số) của $\overrightarrow{F}'$ cũng như chiều của $\overrightarrow{F}'$ và không làm thay đổi giá trị của khoảng cách h.

– Mômen của lực $\overrightarrow{F}$ đối với trục z bằng 0 khi lực $\overrightarrow{F}$ song song với trục z hoặc giá của lực $\overrightarrow{F}$ cắt trục z. Vì nếu lực $\overrightarrow{F}$ song song với trục z thì $F' = 0$ hoặc nếu giá của lực $\overrightarrow{F}$ cắt trục z thì h = 0.

– Nếu lực $\overrightarrow{F}$ vuông góc với trục z thì $F = F'$, do đó ta có: $m_z\left(\overrightarrow{F}\right) = \pm F.h$

Ví dụ 3. Tìm mômen của lực $\overrightarrow{F}$ đối với các trục tọa độ, lực đặt như hình vẽ (hình 1-25).

Bài giải:

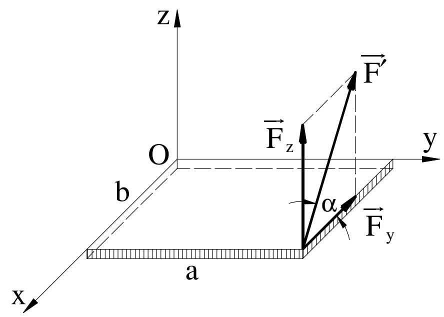
Phân tích lực $\overrightarrow{F}$ thành hai lực thành phần là $\overrightarrow{F}_z$ và $\overrightarrow{F}_y$ có trị số: $F_z = F\sin\alpha$; $F_y = F\cos\alpha$.

Theo định nghĩa ta có:

$$m_x\left(\overrightarrow{F}\right) = F_z.a = F\sin\alpha.a$$

$$m_y\left(\overrightarrow{F}\right) = -F_z.b = -F\sin\alpha.b$$

$$m_z\left(\overrightarrow{F}\right) = F_y.a = F\cos\alpha.a$$



Hình 1-25

1.4.2.c. Liên hệ mômen của lực đối với một tâm và mômen của lực đối với một trục đi qua tâm đó

Sự liên hệ này được biểu thị bằng định lý sau đây, được gọi là định lý liên hệ mômen.

a. Định lý

Chiếu véctơ mômen của một lực đối với một tâm lên trục đi qua tâm đó bằng mômen của lực đối với trục đó.

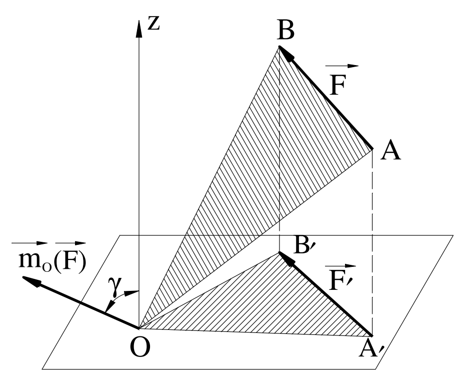
Chứng minh: Có lực $\overrightarrow{F}$ biểu diễn bằng véctơ $\overrightarrow{AB}$ và một tâm O bất kỳ. Qua tâm O dựng trục z. Phải chứng minh rằng: $\left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right]_{Oz} = m_{Oz}\left(\overrightarrow{F}\right)$.

Véctơ $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)$ vuông góc với mặt phẳng AOB và có trị số bằng: $m_O\left(\overrightarrow{F}\right) = 2.S_{OAB}$.

Mặt khác theo hình vẽ (hình 1-26), ta có:

$$m_{Oz}\left(\overrightarrow{F}\right) = F'.d = 2.S_{OA'B'} \qquad \text{(a)}$$

Gọi γ là góc giữa $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)$ và trục z, gọi α là góc nhị diện giữa hai mặt phẳng OAB và OA′B′ thì ta có quan hệ: $\gamma = \alpha$ hoặc $\gamma = \pi - \alpha$. Hay nói cách khác ta có: $\cos\gamma = \pm\cos\alpha$.



Hình 1-26

Chiếu $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)$ lên trục z ta có:

$$\left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right]_{Oz} = 2S_{OAB}.\cos\gamma = \pm 2S_{OA'B'}.\cos\alpha \qquad \text{(b)}$$

Do sự liên hệ diện tích giữa hai tam giác: OAB và OA′B′ qua phép chiếu ta có:

$$S_{OAB}.\cos\alpha = \pm S_{OA'B'}$$

Vì thế từ (b) ta có: $\left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right]_{Oz} = \pm 2.S_{OAB}.\cos\alpha = \pm 2.S_{OA'B'}$ (c)

Kết hợp hai đẳng thức (a) và (c) ta có: $\left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right]_{Oz} = m_{Oz}\left(\overrightarrow{F}\right)$

(1-10)

b. Công thức tính mômen của lực đối với các trục tọa độ

Theo định lý trên, với O là gốc tọa độ thì các trục x, y, z đều đi qua O, nên ta có:

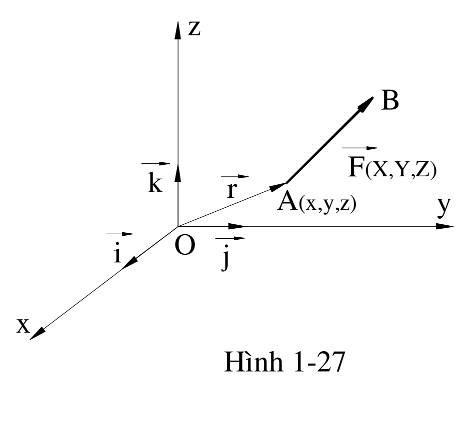
$$\begin{cases} \left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right]_{Ox} = m_{Ox}\left(\overrightarrow{F}\right) \\ \left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right]_{Oy} = m_{Oy}\left(\overrightarrow{F}\right) \\ \left[\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)\right]_{Oz} = m_{Oz}\left(\overrightarrow{F}\right) \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Theo công thức tính $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right)$ bằng giải tích ta có: $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right) = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$

Hay là: $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right) = (yZ - zY).\vec{i} + (zX - xZ).\vec{j} + (xY - yX).\vec{k}$ (b)

So sánh (a) và (b) ta có:

$$\begin{cases} m_{Ox}\left(\overrightarrow{F}\right) = yZ - zY \\ m_{Oy}\left(\overrightarrow{F}\right) = zX - xZ \\ m_{Oz}\left(\overrightarrow{F}\right) = xY - yX \end{cases} \qquad \text{(1-11)}$$



Hình 1-27

1.5. Ngẫu lực

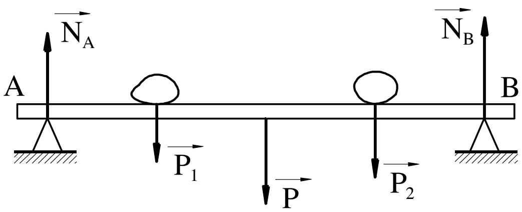
Trước khi nghiên cứu ngẫu lực, ta hãy khảo sát hệ lực song song.

1.5.1. Hệ lực song song

a. Định nghĩa

Hệ lực song song là hệ lực mà giá của các lực thành phần song song với nhau.

Trong thực tế, ta thường gặp nhiều thí dụ về hệ lực song song như một chiếc dầm có trọng lượng là P đặt trên hai gối tựa A và B. Trên dầm có đặt hai tải trọng P_1 và P_2. Hệ lực $\left(\vec{P}, \vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{N}_A, \vec{N}_B\right)$ là hệ lực song song đặt lên dầm (hình 1-28).



Hình 1-28

Dưới đây ta giới hạn chỉ xét hợp lực của hai lực song song trong hai trường hợp.

b. Hợp lực của hai lực song song cùng chiều

Giả sử vật rắn chịu tác dụng của hai lực song song sùng chiều $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ đặt tại A và B. Để tìm hợp lực của hệ lực $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right)$ ta đưa chúng về hệ lực đồng quy bằng cách đặt vào A và B hệ lực cân bằng $\left(\vec{T_1}, \vec{T_2}\right) \backsim 0$. Như vậy theo tiên đề 2 ta có:

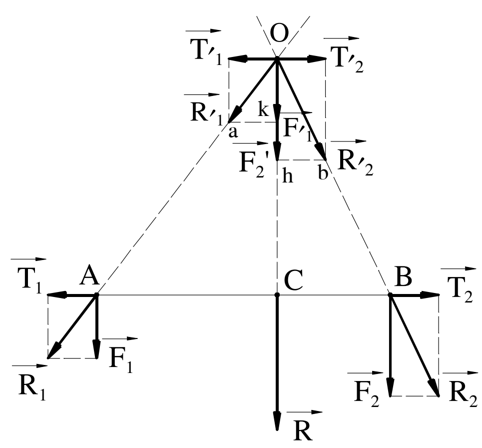
$$\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right) \backsim \left(\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{T_1}, \vec{T_2}\right)$$

Theo tiên đề 3: $\left(\vec{F_1}, \vec{T_1}\right) \backsim \vec{R_1}$; $\left(\vec{F_2}, \vec{T_2}\right) \backsim \vec{R}_2$

Do đó: $\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right) \backsim \left(\vec{R_1}, \vec{R_2}\right)$

Trượt hai lực $\vec{R_1}$, $\vec{R_2}$ dọc theo giá của chúng về điểm O là giao điểm của hai giá của chúng rồi phân tích chúng ra thành các thành phần như ban đầu ta có:

$\left(\vec{T_1'}, \vec{T_2'}\right) \backsim 0$ và hệ lực đồng quy $\left(\vec{F_1'}, \vec{F_2'}\right) \backsim 0$ với $\vec{T_1'} = \vec{T_1}$, $\vec{T_2'} = \vec{T_2}$, $\vec{F_1'} = \vec{F_1}$, $\vec{F_2'} = \vec{F_2}$ nhưng điểm đặt của $\vec{T_1'}$ và $\vec{T_1}$ cũng như $\vec{F_1}$, $\vec{F_1}$, ... khác nhau.



Hình 1-29

Theo tiên đề 2 và tiên đề 3 ta có:

$$\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_1'}, \overrightarrow{F_2'}\right) \backsim \overrightarrow{R}$$

Vậy $\overrightarrow{R}$ là hợp lực của hệ lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right)$.

Hợp lực $\overrightarrow{R}$ có trị số là: $R = F_1 + F_2$ (1-12)

Phương và chiều của lực $\overrightarrow{R}$ cùng phương và chiều của các lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$. Để xác định điểm đặt của hợp lực, ta trượt lực $\overrightarrow{R}$ dọc theo giá của nó về điểm C nằm trên đoạn thẳng AB.

Xét hai cặp tam giác đồng dạng OAH và OAC, OKB và OCB ta có:

$$\frac{CA}{CO} = \frac{AH}{HO} = \frac{T_1}{F_1} \quad \text{(a)}$$

$$\frac{CA}{CO} = \frac{AH}{HO} = \frac{T_1}{F_1} \quad \text{(b)}$$

Chia đẳng thức (a) cho đẳng thức (b) ta có:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1} \quad \text{(c)}$$

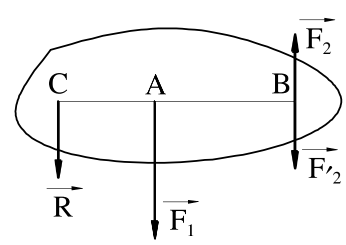
Dựa vào tính chất của tỷ lệ thức ta có:

$$\frac{CA}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R} \quad \text{(1-13)}$$

Vậy hợp lực của hai lực song song cùng chiều là một lực song song cùng chiều với hai lực đó, có trị số bằng tổng trị số của hai lực và có điểm đặt là điểm chia trong đoạn thẳng nối hai điểm của hai lực thành những đoạn tỷ lệ nghịch với trị số của hai lực.

c. Hợp hai lực song song ngược chiều

Giả sử vật rắn chịu tác dụng của hai lực song song ngược chiều $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_1}$ với giả thiết $F_1 > F_2$. Trường hợp $F_1 = F_2$ ta sẽ nghiên cứu ở phần sau.



Hình 1-30

Ta phân tích $\overrightarrow{F_1}$ ra hai thành phần $\overrightarrow{R}$, $\overrightarrow{F_2'}$ sao cho $\overrightarrow{F_2'}$ đặt tại B là điểm đặt của $\overrightarrow{F_2}$ và $F_2' = F_2$.

Vậy $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right) \backsim \left(\overrightarrow{R}, \overrightarrow{F_2'}, \overrightarrow{F_2}\right)$ trong đó hệ $\left(\overrightarrow{F_2'}, \overrightarrow{F_2}\right) \backsim 0$.

Theo tiên đề 2 ta có: $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right) \backsim \vec{R}$. Vậy $\vec{R}$ là hợp lực của hai lực song song ngược chiều $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_1}$, có cùng phương chiều với lực $\overrightarrow{F_1}$. Về trị số của hợp lực được xác định theo công thức (1-12).

$$F_1 = R + F_2 \text{ hay là } R = F_1 - F_2 \qquad (1\text{-}14)$$

Điểm đặt C của hợp lực xác định theo công thức (1-13):

$$\frac{CA}{F_2} = \frac{AB}{R} = \frac{CB}{F_1}.$$ Ở đây $\overrightarrow{F_1}$ là hợp lực của hai lực: $\vec{R}, \overrightarrow{F_2'}$.

Từ đó rút ra: $$\frac{CA}{F_2} = \frac{CB}{F_1} = \frac{AB}{R} \qquad (1\text{-}15)$$

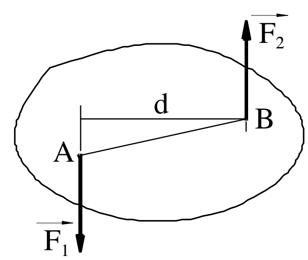
Vậy, hợp hai lực song song cùng chiều là một lực song song cùng chiều với lực có trị số lớn hơn, có trị số bằng hiệu trị số của hai lực thành phần và có điểm đặt là điểm chia ngoài (về phía lực có trị số lớn) đoạn thẳng nối hai điểm đặt của hai lực thành những đoạn tỷ lệ nghịch với trị số của hai lực.

1.5.2. Ngẫu lực

a. Định nghĩa

Hệ hai lực song song, khác giá, trái chiều có trị số bằng nhau gọi là ngẫu lực (hình 1-31).

Khoảng cách giữa hai giá của hai lực được gọi là cánh tay đòn, ký hiệu là d. Thường người ta trượt lực của ngẫu lực dọc theo giá của nó sao cho đoạn AB là cánh tay đòn.



Hình 1-31

Ta có thể chứng minh được rằng ngẫu lực không phải là hệ lực cân bằng và ngẫu lực không có hợp lực.

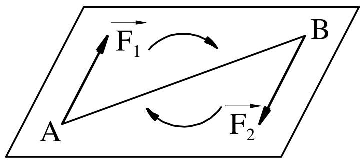
Thật vậy, theo quy tắc hợp hai lực song song ngược chiều ta có: $R = F_1 - F_2 = 0$. Nhưng $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_1}$ không cùng giá nên theo tiên đề 1 hệ lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right)$ không phải là hệ lực cân bằng.

Mặt khác, giả sử ngẫu $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right)$ có hợp lực là $\vec{R} \neq 0$ thì hệ ba lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, -\vec{R}\right) \backsim 0$. Nhưng điều đó không tồn tại vì $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \left(-\vec{R}\right) \neq 0$ $\left(do\ \vec{R} \neq 0 \text{ và } \overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}\right)$. Do đó ngẫu lực không có hợp lực.

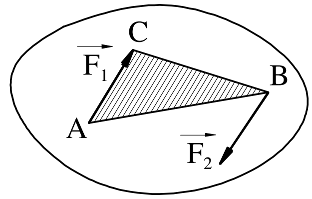
b. Các yếu tố đặc trưng cho ngẫu lực

Ngẫu lực được đặc trưng bởi ba yếu tố sau:

– Mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực là mặt phẳng chứa các lực của ngẫu (hình 1-33).



Hình 1-32



Hình 1-33

Ngẫu lực làm cho vật rắn quay xung quanh trục vuông góc với mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực.

– Chiều quay của ngẫu lực là chiều có xu hướng quay của vật rắn dưới tác dụng của ngẫu lực.

– Cường độ tác dụng của ngẫu lực được biểu thị bằng tích số giữa trị số của lực và cánh tay đòn, gọi là trị số mômen của ngẫu lực, ký hiệu là m hoặc $m\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)$:

$$m = F_1.d$$

Theo hình vẽ ta có: $F_1.d$ về hình thức, bằng hai lần diện tích tam giác ABC (hình 1-33).

Do đó: $m = F_1.d = 2.S_{ABC}$

Đơn vị tính mômen ngẫu là Nm.

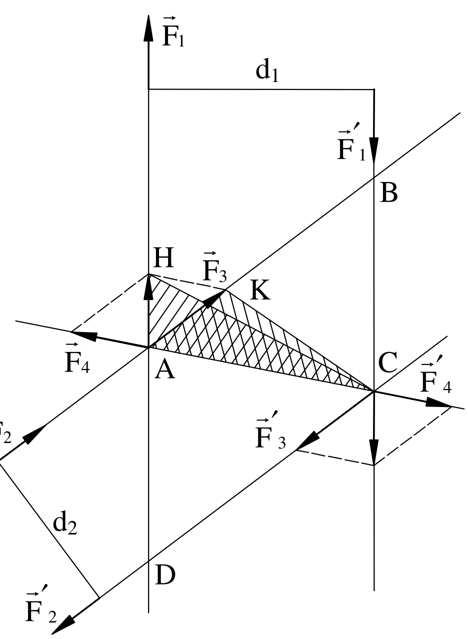
c. Sự tương đương của các ngẫu lực

Định lý 1

Hai ngẫu lực nằm trong cùng một mặt phẳng, có cùng chiều quay và trị số mômen bằng nhau thì tương đương với nhau.

Chứng minh:

– Trường hợp hai ngẫu lực $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_1'}\right)$ và $\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_2'}\right)$ không song song.



Hình 1-34

Giả sử đường tác dụng của các lực cắt nhau tại A, B, C, D. Ta trượt các lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_1'}$ về A và C, sau đó phân tích chúng ra hai thành phần theo phương AC và phương của lực $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_2'}$

(hình 1-34). Ta có: $\overrightarrow{F_3} = -\overrightarrow{F_3'}$, $\overrightarrow{F_4} = -\overrightarrow{F_4'}$

Theo tiên đề 1, hệ lực $\left(\overrightarrow{F_4}, \overrightarrow{F_4'}\right)$ cân bằng, còn hệ $\left(\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_3'}\right)$ lập nên một hệ ngẫu lực cùng giá và cùng chiều quay với ngẫu lực $\left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2'}\right)$.

Vậy: $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_3'}, \overrightarrow{F_4}, \overrightarrow{F_4'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_3'}\right)$

Hay là: $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_3'}\right)$ (a)

Ta gọi m_1, m_2 và m_3 là trị số mômen của ba ngẫu $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}\right)$, $\left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2'}\right)$ và $\left(\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_3'}\right)$.

Từ hình vẽ ta có: $m_1 = 2.S_{AHC}$; $m_2 = 2.S_{AKC}$ (ở đây ta ký hiệu S là diện tích).

Mà $S_{AHC} = S_{AKC}$ vì hai tam giác có cùng đáy AC và chiều cao bằng nhau (HK // AC).

Do đó: $m_1 = m_3$

Theo giả thiết $m_1 = m_2$ suy ra $m_2 = m_3$.

Biết rằng: $m_2 = F_2.d_2$ và $m_3 = F_3.d_2$

Do đó: $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3}$ và $\overrightarrow{F_2'} = \overrightarrow{F_3'}$

Nói cách khác, có thể trượt lực $\overrightarrow{F_3}$ trùng lên lực $\overrightarrow{F_2}$ và lực $\overrightarrow{F_3'}$ trùng lên lực $\overrightarrow{F_2'}$.

Vậy: $\left(\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_3'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2'}\right)$

(b)

So sánh (a) và (b) ta có: $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2'}\right)$

– Trường hợp hai ngẫu lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}\right)$ và $\left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2'}\right)$ có giá song song:

Ta lấy ngẫu lực $\left(\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_3'}\right)$ không song song với ngẫu lực đã cho và có cùng chiều quay, có cùng trị số mômen với hai ngẫu lực đó.

Áp dụng điều vừa chứng minh ở trên ta có:

$$\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_3'}\right); \quad \left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_3'}\right)$$

Suy ra: $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2'}\right)$

Từ định lý trên ta có thể rút ra các hệ quả sau đây:

Hệ quả 1

Tác dụng của một ngẫu lực lên vật rắn không phụ thuộc vào vị trí của ngẫu lực trong mặt phẳng của nó.

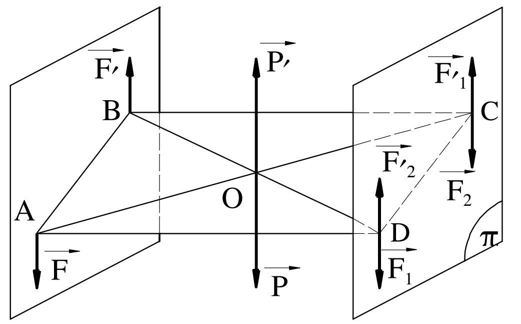
Hệ quả 2

Các ngẫu lực đã cho có thể đưa về cùng một cánh tay đòn hay có thể làm cho những lực của chúng có trị số mômen và chiều quay của các ngẫu lực không đổi.

Định lý 1 xét sự tương đương của hai ngẫu lực có cùng mặt phẳng tác dụng. Đính lý 2 dưới đây xét sự tương đương của hai ngẫu lực trong không gian.

Định lý 2

Một ngẫu lực có thể dời trong không gian tới một mặt phẳng bất kỳ song song với mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực mà không làm thay đổi tác dụng của nó lên vật rắn.



Hình 1-35

Chứng minh:

Giả sử ngẫu lực đã cho là: $\left(\vec{F},\vec{F}'\right)$ nằm trong mặt phẳng R. Muốn chứng minh định lý trên, ta phải chứng tỏ rằng có một ngẫu lực $\left(\vec{F_1},\vec{F_1}'\right)$ trên mặt phẳng Q song song với R, mà nếu dời $\left(\vec{F},\vec{F}'\right)$ song song từ R sang Q thì nó hoàn toàn trùng với ngẫu $\left(\vec{F_1},\vec{F_1}'\right)$.

Trên mặt phẳng Q ta lấy đoạn thẳng CD song song và bằng đoạn thẳng AB trên mặt phẳng R. Tứ giác ABCD là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Tại C và điểm D ta đặt hai hệ lực cân bằng: $\left(\vec{F_1}',\vec{F_2}\right) \backsim 0$ và $\left(\vec{F_1},\vec{F_2}'\right) \backsim 0$ sao cho các trị số lực này bằng trị số lực $\vec{F}$ và chúng đều song song với lực $\vec{F}$ (hình 1-36).

Theo tiên đề 2 ta có: $\left(\vec{F},\vec{F}'\right) \backsim \left(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F_1}, \vec{F_2}', \vec{F_1}', \vec{F_2}\right)$

(a)

Mặt khác ta lại có: $\left(\vec{F}', \vec{F_2}'\right) \backsim \vec{P}$ đặt tại O, mà P′ = 2.F

$\left(\vec{F}, \vec{F_2}\right) \backsim \vec{P}$ đặt tại O, mà P = 2.F

Do đó: $\left(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F_1}, \vec{F_2}', \vec{F_1}', \vec{F_2}\right) \backsim \left(\vec{F_1}, \vec{F_1}', \vec{P}, \vec{P}'\right)$ (b)

Nhìn trên hình vẽ và kết quả thu được ta có: $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{P'}$

Do đó theo tiên đề 1 thì: $\left(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{P'}\right) \backsim 0.$

Suy ra: $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{P'}\right)$

(c)

Kết hợp (a), (b) và (c) ta có: $\left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}\right)$

Vậy ngẫu lực $\left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F'}\right)$ tương đương với ngẫu lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1'}\right)$ giống hệt nó đặt ở mặt phẳng song song với mặt phẳng tác dụng của nó, hay có thể nói cách khác, dời $\left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F'}\right)$ đến mặt phẳng song song với mặt phẳng tác dụng của nó thì tác dụng của nó lên vật rắn không thay đổi.

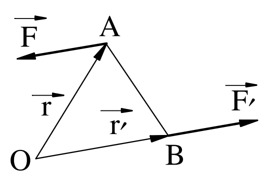
Từ định lý này có thể rút ra hệ quả sau:

Hệ quả

Tác dụng của một ngẫu lực lên vật rắn không phụ thuộc vào vị trí mặt phẳng tác dụng của nó, mà chỉ phụ thuộc vào phương pháp tuyến của mặt phẳng tác dụng, chiều quay và trị số mômen ngẫu lực.

Định lý 3

Tổng mômen các lực của ngẫu đối với một tâm bất kỳ không phụ thuộc vào vị trí của tâm đó, và bằng mômen của ngẫu đó.



Hình 1-36

Thật vậy:

$$\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right) + \overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F'}\right) = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F} + \vec{r}' \wedge \overrightarrow{F'} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F} - \vec{r}' \wedge \overrightarrow{F}$$

$$= (\vec{r} - \vec{r}') \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F} = \vec{m}\left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F'}\right)$$

Vậy: $\overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F}\right) + \overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F'}\right) = \vec{m}\left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F'}\right)$

(1-16)

Kết hợp ba định lý và các hệ quả trên, ta đưa vào khái niệm mới sau đây để xét ngẫu lực một cách thực tiễn hơn và cô đọng định lý tương đương ngẫu.

Véctơ mômen ngẫu lực

Từ hai định lý trên và các hệ quả của chúng, ta thấy rằng tác dụng của một ngẫu lực lên vật rắn được xác định bởi ba yếu tố: Trị số mômen ngẫu lực, chiều quay của ngẫu lực và phương pháp tuyến của mặt phẳng tác dụng. Ta có thể biểu thị tác dụng của ngẫu lực bằng một véctơ mômen ngẫu lực, ký hiệu là $\vec{m}$ hay $\vec{m}\left(\vec{F},\vec{F'}\right)$.

Véctơ mômen ngẫu lực được xác định bởi ba yếu tố sau đây:

– Có phương là phương pháp tuyến của mặt phẳng tác dụng.

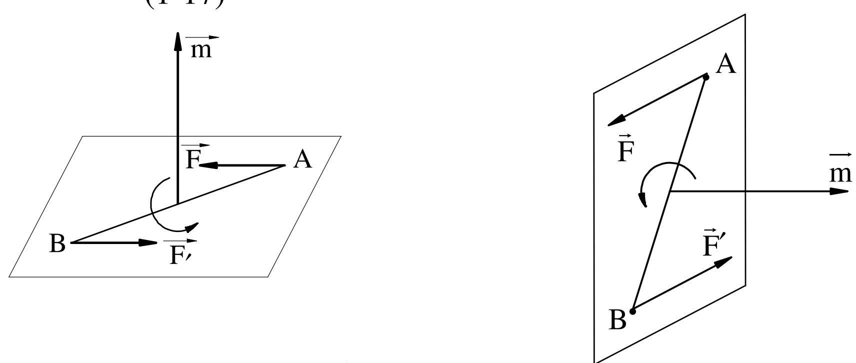
– Có chiều sao cho người quan sát đứng dọc theo véctơ mômen, nhìn từ mút véctơ mômen xuống mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực, thấy ngẫu lực có xu hướng làm cho vật quay theo chiều ngược chiều kim đồng hồ (hình 1-37).

– Trị số bằng trị số mômen ngẫu lực: $m = F.d = 2.S_{ABC}$

Từ định nghĩa trên ta có thể biểu diễn mômen ngẫu lực như sau:

$$\vec{m}\left(\vec{F},\vec{F'}\right) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F'}$$

(1-17)



Hình 1-37

Chú ý

a. Sau khi biểu diễn ngẫu lực bằng véctơ mômen ngẫu lực, ta có thể phát biểu định lý tương đương ngẫu lực dưới dạng tổng quát hơn.

Hai ngẫu lực có véctơ mômen bằng nhau thì tương đương với nhau.

b. Ta thấy rằng véctơ mômen ngẫu lực có thể đặt bất kỳ trong không gian, do đó nó là *véctơ tự do*. Véctơ tự do là véctơ vẫn giữ được tính chất vật lý của nó khi thay đổi điểm đặt đến một điểm bất kỳ trong không gian.

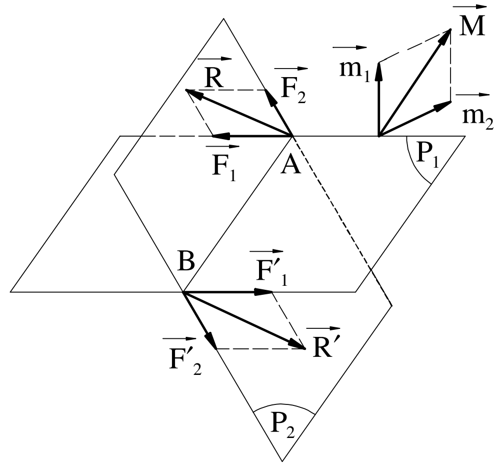
Vậy véctơ mômen ngẫu lực là véctơ tự do, khác với véc tơ lực là véctơ trượt.

1.5.3. Hợp ngẫu lực

a. Định lý

Hợp hai ngẫu lực nằm trong hai mặt phẳng cắt nhau thì được một ngẫu lực có véctơ mômen bằng tổng véctơ mômen của hai ngẫu lực đã cho.

Chứng minh: Giả sử có hai ngẫu lực $\overrightarrow{m_1}\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_1'}\right)$ và $\overrightarrow{m_2}\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_2'}\right)$ nằm trong hai mặt phẳng giao nhau P_1 và P_2. Giả thiết rằng hai ngẫu đó có chung cánh tay đòn là AB nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng mà không mất tổng quát, vì theo định lý tương đương ngẫu và các hệ quả, ta có thể đưa hai ngẫu trên hai mặt phẳng về vị trí như thế được.



Hình 1-38

b. Ta chứng minh rằng: Hợp hai ngẫu lực nói ở trên là một ngẫu lực:

Ta có: $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right) \backsim \overrightarrow{R}$ và $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{R}$

$\left(\overrightarrow{F_1'},\overrightarrow{F_2'}\right) \backsim \overrightarrow{R'}$ và $\overrightarrow{F_1'}+\overrightarrow{F_2'}=\overrightarrow{R'}$

Hai véctơ $\overrightarrow{R}$ và $\overrightarrow{R'}$ đặt tại A và B là hai lực song song ngược chiều có cùng trị số nên hệ $\left(\overrightarrow{R},\overrightarrow{R'}\right)$ là một ngẫu lực.

Vậy: $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_1'},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_2'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{R},\overrightarrow{R'}\right)$

Hay là hợp hai ngẫu lực đã cho được một ngẫu lực tổng hợp.

c. Ta còn chứng minh: $\overrightarrow{m_1}\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_1'}\right)+\overrightarrow{m_2}\left(\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_2'}\right)=\overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{R},\overrightarrow{R'}\right)$

Thật vậy:

$$\overrightarrow{m_1}+\overrightarrow{m_2}=\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{BA}\wedge\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)$$
$$=\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{R}=\overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{R},\overrightarrow{R'}\right)$$

Nhận xét:

– Từ định lý trên, có thể hợp nhiều ngẫu lực trong những mặt phẳng không song song, bằng cách cộng từng cặp lần lượt, rồi cuối cùng được một ngẫu lực tổng hợp có véctơ mômen bằng tổng hình học các véctơ mômen của các ngẫu lực đã cho. Và ta có định lý tổng quát sau: Hệ ngẫu lực tương đương với một ngẫu lực tổng hợp, có véctơ mômen bằng tổng hình học véctơ mômen của những ngẫu lực thành phần:

$$\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_1'};\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_2'};...;\overrightarrow{F_n},\overrightarrow{F_n'}\right) \backsim \left(\overrightarrow{R},\overrightarrow{R'}\right)$$

mà $$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{R},\overrightarrow{R'}\right)=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{m_k}\left(\overrightarrow{F_k},\overrightarrow{F_k'}\right)=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{m_k} \qquad (1\text{-}18)$$

– Trường hợp ngẫu lực thành phần nằm trên những mặt phẳng song song với nhau thì theo định lý tương đương ngẫu, ta đưa các ngẫu đó về cùng một mặt phẳng, các ngẫu lực thành phần có véctơ mômen có cùng phương là phương vuông góc với mặt phẳng chứa các ngẫu lực. Phép cộng các véctơ mômen ngẫu chỉ là phép cộng tác các véctơ cùng phương.

Điều kiện cân bằng của hệ ngẫu lực.

Định lý

Điều kiện cần và đủ để hệ ngẫu lực cân bằng là véctơ mômen của ngẫu lực tổng hợp triệt tiêu.

$$(\overrightarrow{m_1}, \overrightarrow{m_1}, ..., \overrightarrow{m_1}) \backsim 0 \;\Leftrightarrow \overrightarrow{M} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_k} = 0 \qquad (1\text{-}19)$$

Chứng minh:

– Điều kiện cần: Hệ ngẫu lực cân bằng thì véctơ của ngẫu lực tổng hợp triệt tiêu.

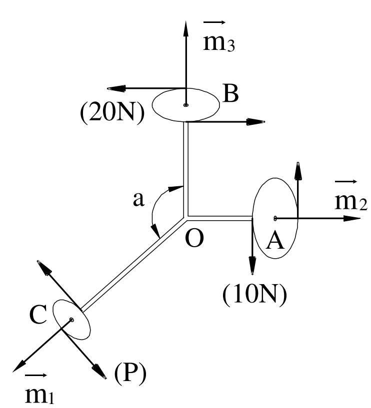
Giả sử mômen ngẫu lực tổng hợp khác không thì suy ra hệ ngẫu lực tương đương với một ngẫu lực làm cho vật rắn chuyển động quay. Điều đó sẽ trái với giả thiết là hệ ngẫu lực cân bằng. Vậy mômen của ngẫu lực tổng hợp phải triệt tiêu.

– Điều kiện đủ: Mômen của ngẫu lực tổng hợp triệt tiêu thì hệ ngẫu lực cân bằng.

Giả sử hệ ngẫu lực không cân bằng thì hệ ngẫu lực đó sẽ tương đương với một ngẫu lực có M ≠ 0. Điều đó trái với giả thiết là mômen ngẫu lực tổng hợp triệt tiêu. Vậy hệ ngẫu lực cân bằng.

Chú ý rằng, khi hệ ngẫu lực cân bằng thì đa giác mômen ngẫu lực tự khép kín.

Ví dụ 4. Trên ba đĩa tròn A, B, C có bán kính lần lượt là 15cm, 10cm và 5cm, đặt các ngẫu lực có các lực tương ứng là 10N, 20N và P. Các trục OA, OB và OC cùng nằm trong một mặt phẳng với góc AOB = 90^0. Xác định trí số của lực $\overrightarrow{P}$ và góc BOC = α để cho cơ cấu trên cân bằng.



Hình 1-39

Bài giải:

Gọi $\overrightarrow{m_1}$ là véctơ mômen biểu diễn ngẫu lực $\left(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{P'}\right)$ đặt lên đĩa C với trị số mômen:

$$m_1 = 2r_C.P = 10P \text{ (N.cm)}$$

Gọi $\overrightarrow{m_2}$ là véctơ mômen biểu diễn ngẫu lực nằm trên đĩa A có trị số mômen:

$$m_2 = 2r_A.10 = 300 \text{ (N.cm)}$$

Gọi $\overrightarrow{m_3}$ là véctơ mômen biểu diễn ngẫu lực nằm trên đĩa B có trị số mômen là m_3:

$$m_3 = 2r_B.20 = 400 \text{ (N.cm)}$$

Điều kiện để ba ngẫu lực cân bằng là:

$$\overrightarrow{m_1} + \overrightarrow{m_2} + \overrightarrow{m_3} = 0 \qquad (1)$$

gọi $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{m_2} + \overrightarrow{m_3}$ thì ta có: $m = \sqrt{m_2^2 + m_3^2} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500\,N.cm$

Ta có thể viết đẳng thức (1) dưới dạng:

$$\overrightarrow{m_1} + \overrightarrow{m} = 0 \qquad (2)$$

Suy ra ta được: $m_1 = m = 500$ (N.cm) mặt khác vì $m_1 = 2r_C.P = 10P$ nên ta có:

$$P = \frac{m_1}{2r_C} = \frac{500}{10} = 50\,N$$

Chiếu đẳng thức (1) lên phương OB ta có: $m_3 - m_1\cos(\pi - \alpha) = 0$

Vậy $\cos\alpha = -\frac{m_3}{m_1} = -\frac{400}{500} = -0,80$

Suy ra: $\alpha = \arccos(-0,80) = 143^0 10'$.

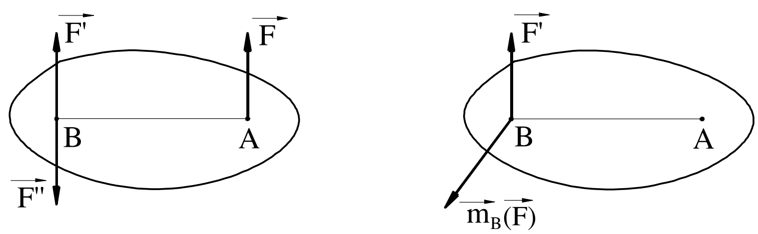
CHƯƠNG II: HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA TĨNH HỌC

2.1. Bài toán thu gọn hệ lực

2.1.1. Định lý dời lực song song

a. Định lý

Tác dụng của một lực lên vật rắn không thay đổi, khi ta dời lực ấy song song với chính nó đến một vị trí bất kỳ thuộc vật và thêm vào đó ngẫu lực phụ có mômen bằng mômen của lực đặt tại điểm cũ đối với điểm mới dời đến.



Hình 2-1

Chứng minh:

Giả sử lực $\overrightarrow{F}$ đặt lên vật rắn tại điểm A thuộc vật. Gọi B là một điểm bất kỳ thuộc vật không nằm trên giá của lực $\overrightarrow{F}$. Ta thêm vào tại B một hệ hai lực cân bằng $\left(\overrightarrow{F'}, \overrightarrow{F''}\right) \backsim 0$ sao cho $\left|\overrightarrow{F'}\right| = \left|\overrightarrow{F}\right|$.

Theo tiên đề 2 ta có: $\overrightarrow{F} \backsim \left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F'}, \overrightarrow{F''}\right)$

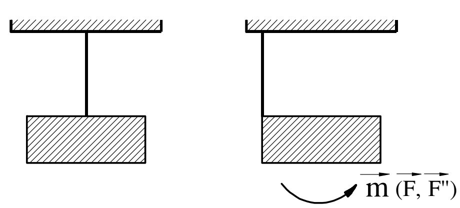
Vì $\overrightarrow{F}$ và $\overrightarrow{F''}$ tạo thành ngẫu lực, ta có: $\overrightarrow{F} \backsim \left[\overrightarrow{F'}, \text{ngẫu}\left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F''}\right)\right]$

Ở đây $\overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F''}\right) = \overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{m}_B\left(\overrightarrow{F}\right)$

Định lý đã được chứng minh

Định lý dời lực song song là công cụ chủ yếu để thu gọn hệ lực không gian về một tâm O bất kỳ mà ta sẽ xét đến ở chương này.

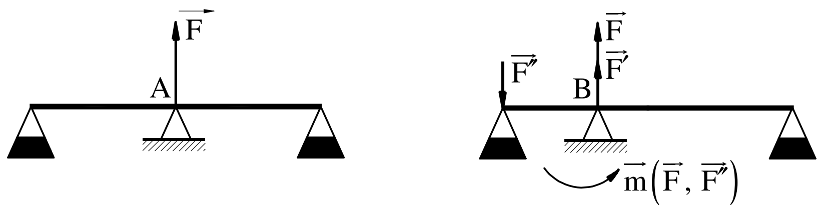
b. Ví dụ



Hình 2-2

− Một vật được treo ở điểm A thì cân bằng, nhưng nếu buộc dây treo ở điểm B thì vật sẽ quay. Muốn vật ở trạng thái cân bằng, ta phải tác dụng lên vật một ngẫu lực phụ như hình vẽ (hình 2-2).

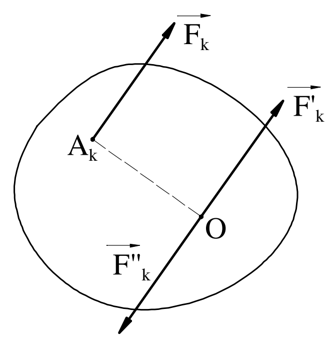
– Một người gánh hai vật nặng như nhau. Nếu vai người đặt ở giữa đòn gánh thì đòn nằm ngang (cân bằng). Nếu dịch vai về một phía (gánh kênh) thì phải dùng tay vít đầu đòn gánh, tức là tác dụng một lực $\overrightarrow{F}$ để nó hợp với một lực tác dụng do vai người lên đòn tạo thành ngẫu lực phụ nói trên (hình 2-3).



Hình 2-3

2.1.2. Bài toán thu gọn hệ lực

a. Thu gọn hệ lực về một tâm



Hình 2-4

– Giả sử cho hệ lực không gian $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right)$ bất kỳ tác dụng lên vật rắn có kích thước đủ lớn đặt tại các điểm A_1, A_2, ..., A_n. Lấy một điểm O bất kỳ thuộc vật. Dời lần lượt các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}$ về tâm O, theo định lý dời lực song song ta có:

$$\overrightarrow{F_1} \backsim \left[\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1''}\right), \overrightarrow{F_1'}\right] \text{ với } \overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1''}\right) = \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_1}\right)$$

$$\overrightarrow{F_2} \backsim \left[\left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2''}\right), \overrightarrow{F_2'}\right] \text{ với } \overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2''}\right) = \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_2}\right)$$

....

$$\overrightarrow{F_n} \backsim \left[\left(\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{F_n''}\right), \overrightarrow{F_n'}\right] \text{ với } \overrightarrow{m}(\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{F_n''}) = \overrightarrow{m}_O(\overrightarrow{F_n})$$

Như vậy sau khi dời tất cả các lực thuộc hệ về tâm O, ta được một hệ lực đồng quy tại O là $\left(\overrightarrow{F_1'}, \overrightarrow{F_2'}, ..., \overrightarrow{F_n'}\right)$ và một ngẫu $\left[\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1''}\right), \left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2''}\right), ..., \left(\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{F_n''}\right)\right]$, ngẫu này có mômen lần lượt là: $\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_1}\right)$, $\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_2}\right)$, ..., $\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_n}\right)$.

Hệ lực đồng quy $\left(\overrightarrow{F_1'}, \overrightarrow{F_2'}, ..., \overrightarrow{F_n'}\right)$ có hợp lực là $\overrightarrow{R}_O$ đặt tại O và có véctơ biểu diễn được xác định theo kết quả ở Chương I.

$$\overrightarrow{R}_O = \overrightarrow{F_1'} + \overrightarrow{F_2'} + ... + \overrightarrow{F_n'} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k'} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} \qquad (\text{vì } \overrightarrow{F_k'} = \overrightarrow{F_k})$$

Vậy: $$\overrightarrow{R}_O = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} \tag{2-1}$$

$\overrightarrow{R}_O$ bằng tổng hình học các véctơ biểu diễn tất cả các lực thành phần của hệ lực được gọi là *véctơ chính của hệ lực không gian.*

Thu gọn hệ ngẫu: $\left[\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1''}\right), \left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2''}\right), ..., \left(\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{F_n''}\right)\right]$ ta được một ngẫu lực tổng hợp mới có mômen là $\overrightarrow{M}_O$ với:

$$\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_1''}\right) + \overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_2''}\right) + ... + \overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{F_n''}\right)$$

Vì $\overrightarrow{m}\left(\overrightarrow{F_k}, \overrightarrow{F_k''}\right) = \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_k}\right)$ nên ta có:

$$\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_2}\right) + ... + \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_k}\right)$$

Vậy: $$\overrightarrow{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \wedge \overrightarrow{F_k} \tag{2-2}$$

$\overrightarrow{M}_O$ được gọi là *mômen chính của hệ lực không gian*, tại tâm thu gọn O. $\overrightarrow{M}_O$ bằng tổng hình học mômen của tất cả các lực thuộc hệ lấy đối với tâm O.

Kết luận: Khi thu gọn hệ lực không gian về một tâm, ta được một lực biểu diễn bằng véctơ chính $\overrightarrow{R}_O$ và một ngẫu có mômen bằng mômen chính $\overrightarrow{M}_O$ của hệ lực đó:

$$\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim \left(\overrightarrow{R}_O, \overrightarrow{M}_O\right)$$

b. Biểu thức giải tích của véctơ chính và mômen chính

Biểu thức giải tích của véctơ chính $\overrightarrow{R}_O$:

$$R_{Ox} = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$R_{Oy} = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

$$R_{Oz} = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

Vậy: $$R_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)^2} \qquad (2\text{-}3)$$

Để xác định hướng của $\overrightarrow{R_O}$, ta dùng biểu thức cosin chỉ phương:

$$\cos\left(\overrightarrow{R_O}, \vec{i}\right) = \frac{R_x}{R_O};\ \cos\left(\overrightarrow{R_O}, \vec{j}\right) = \frac{R_y}{R_O};\ \cos\left(\overrightarrow{R_O}, \vec{k}\right) = \frac{R_z}{R_O} \qquad (2\text{-}4)$$

Biểu thức giải tích của mômen chính:

Để có biểu thức giải tích của $\overrightarrow{M}_O$, ta chiếu lần lượt (2-2) lên các trục toạ độ Ox, Oy, Oz thu được:

$$M_{Ox} = m_{Ox}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + m_{Ox}\left(\overrightarrow{F_2}\right) + \ldots + m_{Ox}\left(\overrightarrow{F_n}\right)$$

$$M_{Oy} = m_{Oy}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + m_{Oy}\left(\overrightarrow{F_2}\right) + \ldots + m_{Oy}\left(\overrightarrow{F_n}\right)$$

$$M_{Oz} = m_{Oz}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + m_{Oz}\left(\overrightarrow{F_2}\right) + \ldots + m_{Oz}\left(\overrightarrow{F_n}\right)$$

Vậy: $$M_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} m_{Ox}\left(\overrightarrow{F_k}\right);\ M_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} m_{Oy}\left(\overrightarrow{F_k}\right);\ M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} m_{Oz}\left(\overrightarrow{F_k}\right)$$

Do đó ta được:

$$M_O = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} m_{Ox}\left(\overrightarrow{F_k}\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} m_{Oy}\left(\overrightarrow{F_k}\right)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} m_{Oz}\left(\overrightarrow{F_k}\right)\right)^2} \qquad (2\text{-}5)$$

Để xác định hướng của $\overrightarrow{M}_O$, ta dùng biểu thức cosin chỉ phương:

$$\cos\left(\overrightarrow{M}_O, \vec{i}\right) = \frac{M_{Ox}}{M_O};\ \cos\left(\overrightarrow{M}_O, \vec{j}\right) = \frac{M_{Oy}}{M_O};\ \cos\left(\overrightarrow{M}_O, \vec{k}\right) = \frac{M_{Oz}}{M_O} \qquad (2\text{-}6)$$

Trong đó $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các véctơ đơn vị trên các trục tọa độ Oxyz; X_k, Y_k, Z_k là chiếu của véctơ $\overrightarrow{F_k}$ lên các trục tọa độ còn $m_{Ox}\left(\overrightarrow{F_k}\right)$, $m_{Oy}\left(\overrightarrow{F_k}\right)$, $m_{Oz}\left(\overrightarrow{F_k}\right)$ là mômen của lực $\overrightarrow{F_k}$ đối với ba trục tọa độ.

2.1.3. Biến đổi tâm thu gọn

a. Định lý biến thiên mômen chính

Khi tâm thu gọn thay đổi, mômen chính sẽ thay đổi một lượng bằng mômen của véctơ chính đặt tại tâm cũ lấy đối với tâm mới:

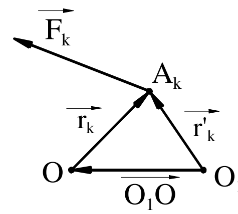
$$\overrightarrow{M}_{O_1} - \overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{m}_{O_1}\left(\overrightarrow{R}_O\right) \qquad (2\text{-}7)$$

Chứng minh:

Giả sử thu gọn hệ lực về tâm O, ta được $\overrightarrow{R}_O$ và $\overrightarrow{M}_O$ với:

$$\overrightarrow{R}_O = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}\,;\ \overrightarrow{M}_O = \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k \wedge \overrightarrow{F_k}\right) \qquad (1)$$

Lấy một điểm O_1 bất kỳ thuộc vật rắn và gọi $\overrightarrow{O_1A_k} = \vec{r}_k'$



Hình 2-5

Ta có: Khi thu gọn về tâm O_1 được kết quả:

$$\overrightarrow{R}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M}_{O_1} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k' \wedge \overrightarrow{F_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{O_1O} + \vec{r}_k\right) \wedge \overrightarrow{F_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{O_1O} \wedge \overrightarrow{F_k}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k \wedge \overrightarrow{F_k}\right)\end{aligned} \qquad (2)$$

vì $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{O_1O} \wedge \overrightarrow{F_k}\right) = \overrightarrow{O_1O} \wedge \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} = \overrightarrow{O_1O} \wedge \overrightarrow{R}_O = \overrightarrow{m}_{O_1}\left(\overrightarrow{R}_O\right)$ (3)

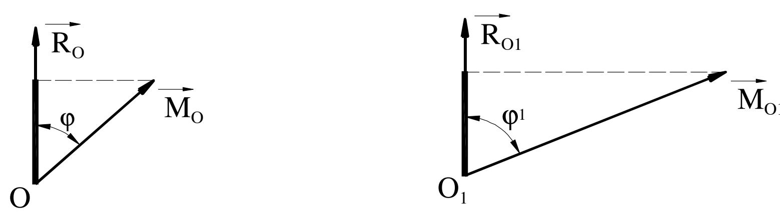
Do đó kết hợp (1), (2) và (3) ta có:

$$\overrightarrow{M}_{O_1} = \overrightarrow{m}_{O_1}(\overrightarrow{R}_O) + \overrightarrow{M}_O \text{ Hay } \overrightarrow{M}_{O_1} - \overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{m}_{O_1}(\overrightarrow{R}_O)$$

b. Các đại lượng bất biến

− Bất biến thứ nhất: Khi thay đổi tâm thu gọn, véctơ chính $\overrightarrow{R}_O$ của hệ lực là một đại lượng không đổi, đó là bất biến thứ nhất của hệ lực không gian:

$$\overrightarrow{R}_O = \overrightarrow{const}$$



Hình 2-6

− Bất biến thứ hai: Khi thay đổi tâm thu gọn, tích vô hướng giữa véctơ chính và mômen chính của hệ lực là một hằng số. Đó là bất biến thứ hai của hệ lực không gian:

$$\overrightarrow{R}_O.\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{R}_{O_1}.\overrightarrow{M}_{O_1} = const$$

Chứng minh:

Thật vậy, xuất phát từ định lý biến thiên mômen chính:

$$\overrightarrow{M}_{O_1} - \overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{m}_{O_1}\left(\overrightarrow{R}_O\right) \qquad (*)$$

Vì $\overrightarrow{m}_{O1}\left(\overrightarrow{R}_O\right) \perp \overrightarrow{R}_O$ nên chiếu đẳng thức (*) lên phương của $\overrightarrow{R}_O$ ta có:

$$M_{O_1}\cos\varphi_1 - M_O\cos\varphi = 0$$

Trong đó φ và φ_1 là góc hợp giữa véctơ $\overrightarrow{M}_O$ và $\overrightarrow{M}_{O_1}$ với véctơ $\overrightarrow{R}_O$ (hoặc $\overrightarrow{R}_{O_1}$)

Do đó ta có: $M_{O_1}\cos\varphi_1 = M_O\cos\varphi = const$ (**)

Mặt khác ta có: $R_{O_1} = R_O$ nên nhân hai vế của đẳng thức (**) với R_O và R_{O_1} ta có:

$$M_{O_1}\cos\varphi_1.R_{O_1} = M_O\cos\varphi.R_O = const$$

Suy ra $\overrightarrow{M}_{O_1}.\overrightarrow{R}_{O_1} = \overrightarrow{M}_O.\overrightarrow{R}_O = const$ (2-8)

2.1.4. Các trường hợp xảy ra khi thu gọn hệ lực

Giả sử thu gọn hệ lực về tâm O, ta được một véctơ chính $\overrightarrow{R}_O$ và một mômen chính $\overrightarrow{M}_O$. Sau đây ta sẽ khảo sát các trường hợp sẽ xảy ra khi thu gọn hệ lực dựa vào tính chất của bất biến thứ hai: $\overrightarrow{R}_O.\overrightarrow{M}_O = const$.

a. Hệ lực thu về một lực nếu $\overrightarrow{R}_O \neq 0$ và $\overrightarrow{R}_O.\overrightarrow{M}_O = 0$.

- Nếu $\overrightarrow{R}_O \neq 0$, $\overrightarrow{M}_O = 0$ thì ta có ngay rằng:

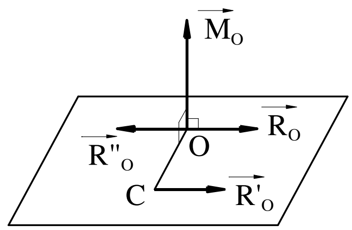
$$\left(\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2, ..., \overrightarrow{F}_n\right) \backsim \left(\overrightarrow{R}_O, \overrightarrow{M}_O\right) \backsim \overrightarrow{R}_O \text{ vì } \overrightarrow{M}_O = 0$$

Khi đó $\overrightarrow{R}_O$ chính là hợp lực của hệ lực, đặt tại O.

Suy ra rằng: Tại điểm đặt của hợp lực, mômen chính của hệ lực bằng không.

– Nếu $\overrightarrow{R}_O \neq 0$, $\overrightarrow{M}_O \neq 0$ và $\overrightarrow{R}_O \perp \overrightarrow{M}_O$:

Thay $\overrightarrow{M}_O$ bằng ngẫu lực $\left(\overrightarrow{R'}_O, \overrightarrow{R''}_O\right)$ trong đó $\overrightarrow{R''}_O$ đặt ở O và $\overrightarrow{R'}_O$ đặt ở C với điều kiện $\overrightarrow{R}_O = \overrightarrow{R'}_O = -\overrightarrow{R''}_O$ (hình 2-7).



Hình 2-7

Do đó: $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \backsim \left(\vec{R}_O, \vec{M}_O\right) \backsim \left(\vec{R}_O, \vec{R}'_O, \vec{R}''_O\right) \backsim \vec{R}'_O$ vì $\left(\vec{R}_O, \vec{R}''_O\right) \backsim 0$

Vậy trường hợp này hệ lực thu về một lực $\vec{R}'_O$ đặt tại C ở về một phía của O trên đoạn OC vuông góc với mặt phẳng chứa $\vec{R}_O$, $\vec{M}_O$ sao cho nhìn từ mút của $\vec{M}_O$ xuống thấy $\vec{R}'_O$ có xu hướng quay quanh O theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Thông thường ta dựng $OC \perp \vec{R}_O$ và khi đó ta có:

$$M_O = R'_O.OC = R_O.OC$$

Suy ra: $OC = \dfrac{M_O}{R_O}$

Tóm lại, cả hai trường hợp nêu ra ở trên cho ta thấy: Khi $\vec{R}_O \neq 0$ và $\vec{R}_O.\vec{M}_O = 0$ thì hệ lực bao giờ cũng thu gọn được về một lực duy nhất là hợp lực của hệ lực. Tại điểm đặt của hợp lực, mômen chính của hệ lực bằng không.

Khi hệ lực có hợp lực, ta có định lý Varinhông:

Định lý Varinhông

Khi hệ lực có hợp lực, mômen của hợp lực đối với một tâm (hay một trục) nào đó bằng tổng mômen của các lực thuộc hệ lấy đối với cùng tâm (hay trục) đó.

Nếu $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \backsim \vec{R}$ thì:

$$\begin{cases} \vec{m}_O\left(\vec{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right) \\ m_{Oz}\left(\vec{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} m_{Oz}\left(\vec{F}_k\right) \end{cases} \qquad (2\text{-}9)$$

Chứng minh: Giả sử hệ lực dã cho có hợp lực là $\overrightarrow{R}$ đặt tại điểm C nào đó. Khi ấy ta có ngay $\overrightarrow{M}_C = 0$. Gọi O là tâm thu gọn của hệ lực thì khi thu gọn hệ lực về O ta được $\overrightarrow{R}_O$ và $\overrightarrow{M}_O$ với $\overrightarrow{R}_O = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}$ và $\overrightarrow{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_k}\right)$ (a′)

Áp dụng định lý biến thiên mômen chính đối với hai tâm thu gọn là C và O ta có:

$$\overrightarrow{M}_O - \overrightarrow{M}_C = \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{R}_C\right)$$

Nhưng vì $\overrightarrow{M}_C = 0$ nên $\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{R}\right)$ (b′)

Kết hợp (a′) và (b′) ta có: $\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_k}\right)$

Để chứng minh đẳng thức (b) của (2-9), ta chỉ cần chiếu (a) của (2-9) lên trục z đi qua O. Thậy vậy, ta có:

$$\left[\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{R}\right)\right]_{Oz} = m_z\left(\overrightarrow{R}\right) = \left[\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_k}\right)\right]_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} m_{Oz}\left(\overrightarrow{F_k}\right)$$

b. Hệ lực thu về một ngẫu nếu $\overrightarrow{R}_O.\overrightarrow{M}_O = 0$ với $\overrightarrow{R}_O = 0$, $\overrightarrow{M}_O \neq 0$

Thật vậy, vì: $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim \left(\overrightarrow{R}_O, \overrightarrow{M}_O\right) \backsim \overrightarrow{M}_O$ vì $\overrightarrow{R}_O = 0$

Vậy trường hợp hệ lực thu về một ngẫu có mômen bằng $\overrightarrow{M}_O$. Theo định lý biến thiên mômen chính: $\overrightarrow{M}_{O1} - \overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{m}_{O1}(\overrightarrow{R}_O) = 0$ vì $\overrightarrow{R}_O = 0$ ta có: $\overrightarrow{M}_{O1} = \overrightarrow{M}_O$ vì O_1 là một điểm bất kỳ thuộc vật rắn nên suy ra rằng: Trong trường hợp hệ lực thu về một ngẫu thì mômen chính của hệ lực không phụ thuộc vào tâm thu gọn, nó không đổi đối với bất cứ tâm thu gọn nào, và là một bất biến của hệ lực.

c. Hệ lực thu về một xoắn nếu $\overrightarrow{R}_O.\overrightarrow{M}_O \neq 0$

Định nghĩa

Nếu hệ lực đã cho sau khi thu gọn về tâm O mà $\overrightarrow{R}_O$ *song song với* $\overrightarrow{M}_O$ *thì ta nói hệ lực đã cho thu về một xoắn tại điểm O.*

Nếu $\overrightarrow{R}_O$ cùng chiều với $\overrightarrow{M}_O$ ta có xoắn thuận, ngược lại ta có xoắn nghịch. Trục chứa $\overrightarrow{R}_O$ và đi qua O được gọi là trục trung tâm của xoắn hay là trục đinh ốc.

Nếu ta có $\overrightarrow{R}_O.\overrightarrow{M}_O \neq 0$: Hệ lực sẽ thu về một xoắn có trục trung tâm đi qua một điểm O_1 nào đó xác định.

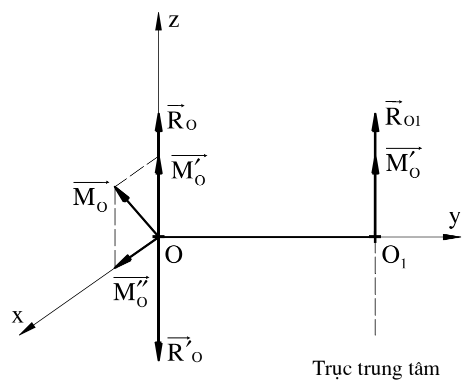
Thậy vậy, phân $\overrightarrow{M}_O$ ra hai thành phần: $\overrightarrow{M'_O}$ nằm trên giá của $\overrightarrow{R}_O$ và $\overrightarrow{M''_O} \perp \overrightarrow{R}_O$.

Ta thay $\overrightarrow{M''_O}$ nằm trên trục x bằng ngẫu $\left(\overrightarrow{R'}_O\ \overrightarrow{R}_O\right)$ nằm ở trong mặt phẳng yOz (hình 2-8) sao cho: $\overrightarrow{R}_O = \overrightarrow{R}_{O1} = -\overrightarrow{R'}_O$ khi đó vì $\left(\overrightarrow{R}_O,\ \overrightarrow{R'}_O\right) \backsim 0$ nên ta có:

$$\left(\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2, ..., \overrightarrow{F}_n\right) \backsim \left(\overrightarrow{R}_O, \overrightarrow{M'}_{O1}, \overrightarrow{M''}_O\right) \backsim \left(\overrightarrow{R}_O, \overrightarrow{M'}_O, \overrightarrow{R}_{O1}, \overrightarrow{R'}_O\right) \backsim \left(\overrightarrow{R}_{O1}, \overrightarrow{M'}_O\right)$$

$\overrightarrow{R}_{O1}$ song song với $\overrightarrow{M}_{O1}$, vậy hệ lực đã cho thu về một xoắn tại điểm O_1 $\left(\overrightarrow{R}_{O1}, \overrightarrow{M}_{O1}\right)$ trong đó O_1 nằm trên trục y cách gốc O một khoảng là:

$$OO_1 = \frac{M'_O}{R_O} = \frac{M_O \sin\varphi}{R_O}$$



Hình 2-8

Chú ý rằng vì $\overrightarrow{M'_O}$ song song với $\overrightarrow{R}_{O1}$ nên ta có thể viết: $\overrightarrow{M'_O} = p.\overrightarrow{R}_{O1} = \overrightarrow{M}_{O1}$

Vậy: $$p = \frac{M_{O1}}{R_{O1}}$$

p được gọi là tham số đinh ốc của xoắn.

Một điều cần chú ý nữa là: Nếu gọi φ là góc lập giữa $\overrightarrow{R}_O$ và $\overrightarrow{M}_O$ thì ta có hai trường hợp:

Nếu $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ thì ta có xoắn thuận.

Nếu $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ thì ta có xoắn nghịch.

d. Hệ lực đã cho cân bằng nếu $\overrightarrow{R}_O = 0$, $\overrightarrow{M}_O = 0$. Ta sẽ khảo sát kỹ trường hợp này ở mục sau.

2.2. Điều kiện cân bằng của hệ lực tổng quát

2.2.1. Điều kiện cân bằng tổng quát

Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian đặt lên một vật rắn cân bằng là véctơ chính và mômen chính của hệ lực đối với một tâm thu gọn nào đó bằng không.

$$(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}) \backsim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{R}_O = 0 \\ \overrightarrow{M}_O = 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}10)$$

Chứng minh:

a. Điều kiện cần

Cho $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim 0$. Chứng minh $\overrightarrow{R}_O = 0$, $\overrightarrow{M}_O = 0$.

Phản chứng:

Giả sử rằng hệ lực cân bằng nhưng $\overrightarrow{R}_O \neq 0$, $\overrightarrow{M}_O \neq 0$ khi đó:

$$\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim \left(\overrightarrow{R}_O, \overrightarrow{M}_O\right)$$

Nhưng ngẫu $\overrightarrow{M}_O$ không cân bằng được với lực $\overrightarrow{R}_O$ do đó $\left(\overrightarrow{R}_O, \overrightarrow{M}_O\right) \neq 0$, nghĩa là hệ lực đã cho không cân bằng, điều đó vô lý. Vậy không có trường hợp $\overrightarrow{R}_O$ và $\overrightarrow{M}_O$ đồng thời khác không.

Bây giờ giả sử $\overrightarrow{R}_O \neq 0$, $\overrightarrow{M}_O = 0$ hoặc $\overrightarrow{R}_O = 0$, $\overrightarrow{M}_O \neq 0$ thì hệ lực thu về một lực hoặc một ngẫu khác không. Cả hai trường hợp này đều dẫn đến hệ lực đã cho không cân bằng.

Tất cả những trường hợp kể trên đều dãn đến kết luận trái với giả thiết. Vậy là vô lý, và bắt buộc cả $\overrightarrow{R}_O$ và $\overrightarrow{M}_O$ đồng thời phải triệt tiêu.

b. Điều kiện đủ

Cho $\overrightarrow{R}_O = 0$, $\overrightarrow{M}_O = 0$. Chứng minh $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}\right) \backsim 0$. Thật vậy, vì $\overrightarrow{R}_O$ thì hệ thu về một ngẫu có mômen là $\overrightarrow{M}_O$ nhưng $\overrightarrow{M}_O = 0$, vậy hệ lực sẽ cân bằng theo điều kiện cân bằng của hệ ngẫu.

Vậy $\overrightarrow{R}_O = 0,\ \overrightarrow{M}_O = 0$ thì hệ lực không gian cân bằng.

2.2.2. Phương trình cân bằng của hệ lực không gian

Xuất phát từ điều kiện cân bằng tổng quát của hệ lực không gian.

$$\left(\overrightarrow{F}_1,\ \overrightarrow{F}_2, ...,\ \overrightarrow{F}_n\right) \backsim 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{R}_O = 0,\ \overrightarrow{M}_O = 0$$

ta suy ra: $\left|\overrightarrow{R}_O\right| = \sqrt{\left(\sum X_k\right)^2 + \left(\sum Y_k\right)^2 + \left(\sum Z_k\right)^2} = 0$

$$\left|\overrightarrow{M}_O\right| = \sqrt{\left[\sum m_x\left(\overrightarrow{F}_k\right)\right]^2 + \left[\sum m_y\left(\overrightarrow{F}_k\right)\right]^2 + \left[\sum m_z\left(\overrightarrow{F}_k\right)\right]^2} = 0$$

Từ đó ta có:

$$\begin{cases} \sum X_k = 0 & (1) \\ \sum Y_k = 0 & (2) \\ \sum Z_k = 0 & (3) \\ \sum m_x(\overrightarrow{F}_k) = 0 & (4) \\ \sum m_y(\overrightarrow{F}_k) = 0 & (5) \\ \sum m_z(\overrightarrow{F}_k) = 0 & (6) \end{cases} \qquad (2\text{-}11)$$

(2-11) là hệ phương trình cân bằng của hệ lực không gian ở dạng đầy đủ nhất.

2.2.3. Phương trình cân bằng của một số hệ lực đặc biệt

Chúng ta có thể thiết lập được phương trình cân bằng của các hệ lực đặc biệt như là hệ lực đồng quy, hệ lực song song, hệ lực phẳng, ... bằng cách suy trực tiếp từ hệ phương trình cân bằng của hệ lực không gian như sau:

a. Hệ lực đồng quy không gian

Giả sử hệ lực đồng quy đã cho có tâm đồng quy là điểm C. Khi đó, nếu ta chọn gốc của hệ trục tọa độ xyz trùng với điểm C thì các lực của hệ sẽ có giá cắt cả ba trục tọa độ, do đó ba phương trình (4), (5), (6) sẽ tự thoả mãn. Vì vậy, nếu ta chọn gốc của hệ trục tọa độ tại điểm đồng quy, hệ lực đồng quy sẽ có ba phương trình cân bằng như sau:

$$\begin{cases} \sum X_k = 0 \\ \sum Y_k = 0 \\ \sum Z_k = 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}12)$$

Chú ý: Nếu hệ lực đồng quy phẳng thì ta chọn mặt phẳng xOy trùng với mặt phẳng hệ lực ấy phương trình thứ ba của (2-12) tự thoả mãn và phương trình cân bằng của hệ lực đồng quy phẳng còn là:

$$\begin{cases} \sum X_k = 0 \\ \sum Y_k = 0 \end{cases} \tag{2-13}$$

b. Hệ lực song song không gian

Chọn hệ trục Oxyz sao cho trục Oz song song với giá của các lực thuộc hệ. Khi đó phương trình (1), (2), và (6) của hệ (2-11) sẽ tự thoả mãn. Vậy phương trình cân bằng của hệ lực song song không gian là:

$$\begin{cases} \sum Z_k = 0 \\ \sum m_x\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0 \\ \sum m_y\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0 \end{cases} \tag{5-14}$$

Chú ý: Trường hợp hệ lực song song phẳng thì ta chọn mặt phẳng yOz trùng với mặt phẳng của hệ lực, khi đó thêm phương trình thứ ba của (5-14) tự thoả mãn, và phương trình cân bằng của hệ lực song song phẳng có dạng:

$$\begin{cases} \sum Z_k = 0 \\ \sum m_x\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0 \end{cases} \tag{2-15}$$

Trong đó Oz song song với giá các lực, Ox vuông góc với mặt phẳng hệ lực.

c. Hệ lực phẳng

Ta chọn mặt phẳng tọa độ xOy nằm trong mặt phẳng của hệ lực, còn trục z thì vuông góc với mặt phẳng hệ lực. Khi đó phương trình (3), (4) và (5) của hệ (2-11) sẽ tự thoả mãn. Vậy ta có phương trình cân bằng của hệ lực phẳng như sau:

$$\begin{cases} \sum Z_k = 0 \\ \sum Y_k = 0 \\ \sum m_z(\overrightarrow{F_k}) = 0 \end{cases} \tag{2-16}$$

Chú ý:

Khi lập phương trình cân bằng trong các bài toán cụ thể cần chú ý rằng: Nếu hệ đặt lên vật khảo sát có cả lực và ngẫu thì trong các phương trình cân bằng dạng chiếu sẽ không có mặt các lực của ngẫu, còn trong các phương trình cân bằng dạng mômen thì có mặt chiếu của véctơ mômen ngẫu lên trục tương ứng với phương trình mômen theo trục mà ta đang thiết lập. Điều này có thể giải thích dễ dàng bằng các kiến thức đã học ở Chương I.

Ví dụ 1. Tải trọng P treo tại nút A được giữ cân bằng nhờ sợi dây không dãn AB và hai thanh không trọng lượng AC, AD gắn bản lề cầu ở A, C và D. Các góc cho trên hình vẽ, xác định các phản lực tác dụng lên bản lề cầu A (hình 2-9).

Bài giải:

Bước 1: Vật khảo sát: Nút A.

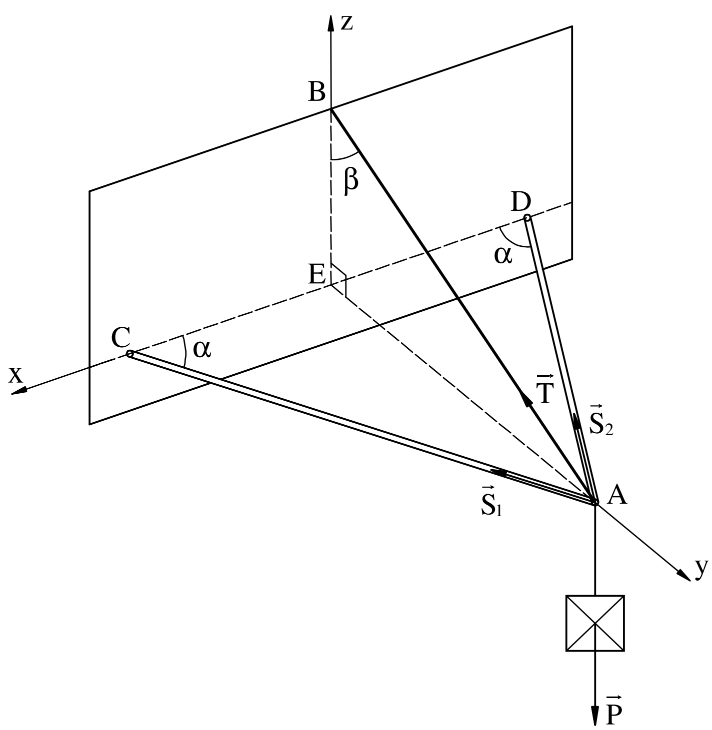
Lực tác dụng lên nút A là lực $\vec{P}$.

Phản lực liên kết: $\vec{T}$ (của dây), $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ (của hai thanh).

Nút A cân bằng dưới tác dụng của hệ lực cân bằng: $(\vec{P}, \vec{T}, \vec{S}_1, \vec{S}_2) \quad 0$

Đây là hệ lực đồng quy không gian cân bằng.

Bước 2: Chọn hệ trục toạ độ Exyz như hình vẽ, hệ phương trình cân bằng là:



Hình 2-9

$$\sum X_k = S_1 \cos\alpha - S_2 \cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = -T \sin\beta - S_1 \sin\alpha - S_2 \sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

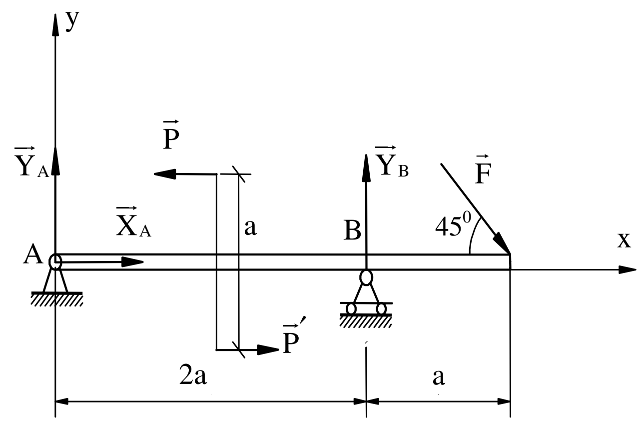
$$\sum Z_k = -P + T\cos\beta = 0 \qquad (3)$$

Phương trình (3) có ẩn là T: $T = \dfrac{P}{\cos\alpha}$

Từ (1): $S_1 = S_2$ thay vào (2) ta có: $S_1 = S_2 = -\dfrac{P}{2}.\dfrac{tg\beta}{\sin\alpha}$

Bước 3: Biện luận S_1 và S_2 mang dấu trừ chứng tỏ chiều đúng của $\vec{S}_1, \vec{S}_2$ ngược với chiều giả sử trên hình vẽ.

Ví dụ 2. Cho một dầm ABD nằm ngang, trên đó tác dụng ngẫu $(\vec{P}, \vec{P}')$ và một lực $\vec{F}$ như hình vẽ. Kích thước cho trên hình vẽ. Xác định phản lực ở bản lề A và gối tựa B (hình 2-10).



Hình 2-10

Bài giải:

Vật khảo sát: Dầm ABD cân bằng.

Lực tác dụng: $(\vec{P}, \vec{P}')$ và $\vec{F}$.

Phản lực liên kết: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B$.

Hệ lực cân bằng: $(\vec{P}, \vec{P}', \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Y}_B) \backsim 0$

Hệ phương trình cân bằng:

$$\sum X_k = F\cos 45^0 + X_A = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y_k = -F\sin 45^0 + Y_A + Y_B = 0 \qquad (2)$$

$$\sum m_{Az}(\vec{F}_k) = P.a - F.3a\sin 45^0 + Y_B.2a = 0 \qquad (3)$$

Giải ra ta có: $X_A = -F\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $Y_B = \dfrac{3F\sqrt{2} - 2P}{4}$; $Y_A = \dfrac{2P - F\sqrt{2}}{4}$

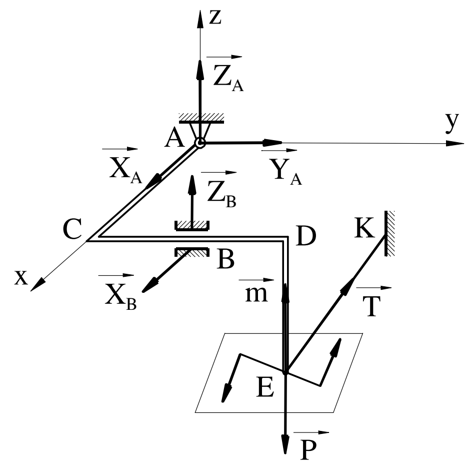
Dấu của X_A chứng tỏ chiều đúng của $\vec{X}_A$ ngược chiều trên hình vẽ.

Ví dụ 3

Thanh gẫy khúc ACDE có ACD nằm ngang và CDE thẳng đứng. Thanh được giữ bởi bản lề cầu cố định A và có thể quay quanh bản lề trụ B. Tại E được giữ bởi sợi dây EK đã nêu ở trên. Thanh chịu tác dụng của lực thẳng đứng $\vec{P}$ tại đầu E và một ngẫu lực nằm ngang có mômen là m. Cho biết AC = 40cm, BC = 20cm, CD = 60cm, DE = 40cm, P = 10N, m = 60N.m, góc ACD = góc CDE = 90^0 và bỏ qua trọng lượng của các thanh. Xác định các phản lực tại A, B và dây EK.

Bài giải

1. Phân tích: Khảo sát thanh gẫy khúc ACDE chịu liên kết bản lề cầu ở A, bản lề trục ở B và liên kết dây mền ở E.



Hình 2-11

Phản lực ở A có ba thành phần là $\overrightarrow{X}_A$, $\overrightarrow{Y}_A$ và $\overrightarrow{Z}_A$ ở B có hai thành phần là $\overrightarrow{X}_A$ và $\overrightarrow{X}_A$. Ở E có phản lực dây là $\overrightarrow{T}$.

Thay ngẫu lực bằng véctơ mômen ngẫu hướng theo ED.

Hệ tác dụng lên thanh gẫy khúc cân bằng là:

$$\left(\overrightarrow{X}_A, \overrightarrow{Y}_A, \overrightarrow{Z}_A, \overrightarrow{X}_B, \overrightarrow{Z}_B, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{P}, \overrightarrow{m}\right) \backsim 0$$

2. Lập điều kiện cân bằng và giải

Hệ phương trình cân bằng lập được là:

$$\sum X_k = X_A + X_B - T = 0 \qquad (1)$$
$$\sum Y_k = Y_A = 0 \qquad (2)$$
$$\sum Z_k = Z_A + Z_B - P = 0 \qquad (3)$$
$$\sum m_x(\overrightarrow{F_k}) = Z_B.BC - P.CD = 0 \qquad (4)$$
$$\sum m_y(\overrightarrow{F_k}) = P.AC - Z_A.AC - T.DE = 0 \qquad (5)$$
$$\sum m_z(\overrightarrow{F_k}) = m - X_B.BC + T.CD = 0 \qquad (6)$$

Thay các giá trị của tải trọng P và giá trị cuả các độ dài đã cho vào hệ phương trình trên rồi giải ra ta được kết quả:

$X_A = -43N$; $Y_A = 0$; $Z_A = -20N$;

$X_B = 63N$; $Z_B = 30N$; $T = 20N$.

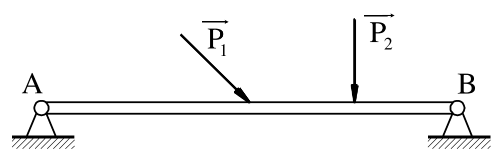
3. Nhận xét kết quả

Hình chiếu của $\overrightarrow{X}_B$, $\overrightarrow{Z}_B$ và $\overrightarrow{T}$ giả thiết như hình vẽ là đúng. Còn X_A và Z_A mang dấu trừ (−) chứng tỏ chiều của $\overrightarrow{X}_A$ và $\overrightarrow{Z}_A$ ngược với chiều giả thiết trên hình vẽ.

CHƯƠNG III: MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẶC BIỆT CỦA TĨNH HỌC

3.1. Bài toán tĩnh định và bài toán siêu tĩnh

Trong một số bài toán tĩnh học, bao giờ ta cũng thành lập được một số phương trình độc lập nhất định và phải tìm một số ẩn độc lập nào đó. Nếu số phương trình lập được nhiều hơn hoặc đúng bằng số ẩn phải tìm thì bài toán được gọi là bài toán tĩnh định. Ngược lại, nếu số phương trình lập được ít hơn số ẩn số, không đủ để giải bài toán thì bài toán được gọi là bài toán siên tĩnh (hình 3-1).



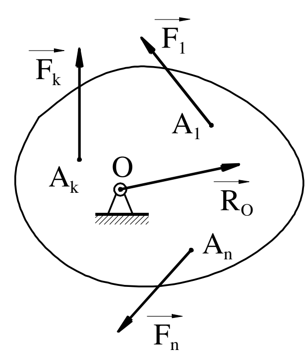
Hình 3-1

Trong giáo trình này, ta chỉ nghiên cứu các bài toán tĩnh định mà thôi. Còn bài toán siêu tĩnh thì sẽ được nghiên cứu ở các giáo trình khác.

3.2. Bài toán cân bằng của đòn và vật lật

3.2.1. Bài toán cân bằng của đòn

Đòn phẳng là một vật rắn quay quanh một trục cố định chịu tác dụng của hệ lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục quay của vật (hình 3-2). Phản lực $\vec{R}_O$ của trục quay tác dụng lên vật cũng nằm trên mặt phẳng hệ trục đã nói ở trên.



Hình 3-2

Khi đó điều kiện cần và đủ để đòn cân bằng là hệ lực tác dụng lên nó cân bằng:

$$\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_k, ..., \vec{F}_n, \vec{R}_O\right) \backsim 0$$

Điều đó có nghĩa là hệ lực $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ có hợp lực $\vec{R}$ cân bằng với phản lực $\vec{R}_O$. Do đó điểm đặt của hợp lực $\vec{R}$ phải là O, hay nói cách khác, giá của $\vec{R}$ phải đi qua O và ta có: $\vec{m}_O\left(\vec{R}\right) = 0$.

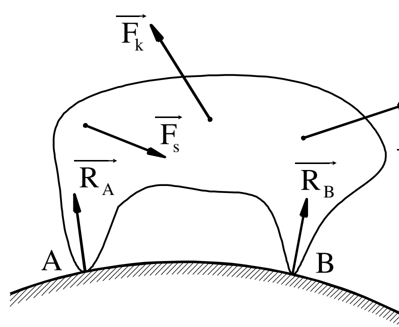
Theo định lý Varinhông: $\vec{m}_O\left(\vec{R}\right) = \sum \vec{m}_O\left(\vec{F}_k\right)$

Vậy ta có: $\sum \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0$

Hoặc, nếu gọi Oz là trục quay của vật thì ta có: $\sum m_{Oz}\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0$. Đó là điều kiện cần và đủ để cho đòn cân bằng.

3.2.2. Bài toán cân bằng của vật lật

Khảo sát vật rắn (s) chịu tác dụng của hệ lực $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_k}, ..., \overrightarrow{F_n}\right)$ và chịu liên kết tựa với mặt tựa cố định AB. Khi đó, vật rắn còn chịu tác dụng của các phản lực $\overrightarrow{R}_A$, $\overrightarrow{R}_B$ (hình 3-3).



Hình 3-3

Khi (s) cân bằng, ta có hệ lực phẳng cân bằng như trên hình vẽ:

$$\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_k}, ..., \overrightarrow{F_n}, \overrightarrow{R}_A, \overrightarrow{R}_B\right) \backsim 0$$

Với những sự thay đổi nhất định của các lực đã cho $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}$, có thể xảy ra hiện tượng mất liên kết tại một trong hai điểm tựa A và B, nghĩa là hoặc $\overrightarrow{R}_A = 0$, hoặc $\overrightarrow{R}_B = 0$. Khi đó sẽ có hiện tượng mất cân bằng và vật (s) sẽ trở thành cái đòn quay được quanh B (nếu $\overrightarrow{R}_A = 0$) hoặc quanh B (nếu $\overrightarrow{R}_B = 0$).

Vậy điều kiện cân bằng của vật (s) có thể lật được viết như sau:

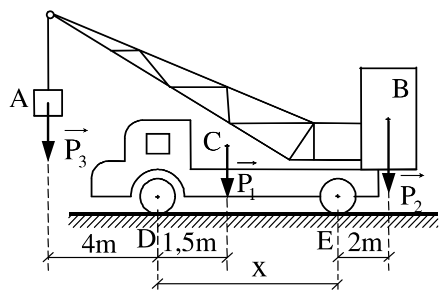
$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_A\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0 \text{ (Vật không lật quanh A)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_B\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0 \text{ (Vật không lật quanh B)}$$

Căn cứ vào xu hướng lật của vật quanh một điểm, người ta phân các lực đã cho: $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, ..., $\overrightarrow{F_k}$, ..., $\overrightarrow{F_n}$ ra thành hai loại là lực lật và lực giữ, và gọi tổng mômen của tất cả các lực của từng loại đối với các trục đi qua điểm tựa và vuông góc với mặt phẳng hệ lực lần lượt là mômen lật ($M_{lật}$) và mômen giữ ($M_{giữ}$). Như thế, điều kiện cân bằng của vật lật có thể viết ở dạng:

$$M_{giữ} \geq M_{lật} \quad \text{(quanh điểm tựa còn lại).}$$

Ví dụ 1. Một cần trục được bắt chặt trên một ô-tô vận tải. Trọng lượng của đối trọng B là P_2 = 20KN. Trọng lượng của ô-tô và cần trục không kể đối trọng là P_1 = 20KN, đặt tại điểm C. Xác định khoảng cách ngắn nhất DE giữa hai trục của bánh xe ôtô, và tải trọng P_3 lớn nhất mà cần trục có thể nâng để ô-tô không bị lật khi có tải trọng cũng như khi không có tải trọng với các kích thước cho trên hình vẽ (hình 3-4).



Hình 3-4

Bải giải

Khi không có tải trọng A, chỉ có đối trọng B thì cần cẩu chỉ có khả năng lật quanh E.

Điều kiện giới hạn để nó không lật quanh E là:

$$\sum m_{Ez}\left(\overrightarrow{F_k}\right) = P_2.2 - P_1.(x - 1,5) = 0 \qquad (1)$$

Khi có tải trọng A và đối trọng B, với giá trị giới hạn của A, cần trục chỉ có thể lật quanh D, điều kiện để nó không lật quanh D là:

$$\sum m_{Dz}\left(\overrightarrow{F_k}\right) = P_3.4 - P_1.1,5 - P_2.(x + 2) = 0 \qquad (2)$$

Kết hợp hai phương trình (1) và (2) và thay các giá trị của P_1 và P_2 và, ta có:

$$\begin{cases} 20.2 - 20.(x - 1,5) = 0 & (3) \\ P_3.4 - 20.(x + 2) - 20.1,5 = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (3) ta có: $x = \dfrac{20.2 + 20.1,5}{20} = 3,5\text{m}$

Thay giá trị này vào (4) rồi rút ra được: $P_3 = \frac{20.1,5 + 20.(3,5 + 2)}{4} = 35KN$

Vậy với giá trị giới hạn của P_3 = 35KN và DE = 3,5m thì cả Ô-tô cân bằng.

Nếu P_3 > 35KN thì ôtô bị lật quanh D.

3.3. Bài toán cân bằng của hệ vật rắn phẳng

Ở các phần trên, ta đã nghiên cứu điều kiện cân bằng của hệ lực tác dụng lên một vật rắn. Nhưng trong thực tế ta thường gặp không phải chỉ một vật rắn mà nhiều vật rắn có liên quan với nhau. Vì vậy vấn đề đặt ra ở đây là áp dụng các kết quả đã nghiên cứu ở trên đối với một vật để khảo sát hệ lực tác dụng lên một hệ gồm nhiều vật rắn có liên kết chặt chẽ với nhau.

Chẳng hạn cho hệ n vật rắn s_1, s_2, ..., s_n có liên kết với nhau chịu tác dụng của hệ lực phân bố trong mặt phẳng: $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, ..., $\vec{F_n}$. Hãy tìm điều kiện cân bằng của hệ này, khi nó tác dụng lên hệ vật và xác định các phản lực liên kết tác dụng lên hệ. Đó là nội dung bài toán cân bằng của hệ vật rắn phẳng.

Để giải bài toán này, ta có hai phương pháp sau đây:

a. Phương pháp thứ nhất: Tách rời riêng rẽ từng vật và xét cân bằng của từng vật.

Mỗi vật riêng rẽ nói chung có ba phương trình cân bằng, như thế sẽ có n vật với 3n phương trình cân bằng độc lập, đủ để giải một bài toán tĩnh định.

b. Phương pháp thứ hai: Hệ gồm nhiều vật rắn có liên kết với nhau có thể xem như là một vật biến dạng. Vật biến dạng đó cân bằng nên theo tiên đề hoá rắn, ta có thể xem cả hệ vật như một vật rắn cân bằng. Do đó lập điều kiện cân bằng cho cả hệ vật, ta được ba phương trình cân bằng.

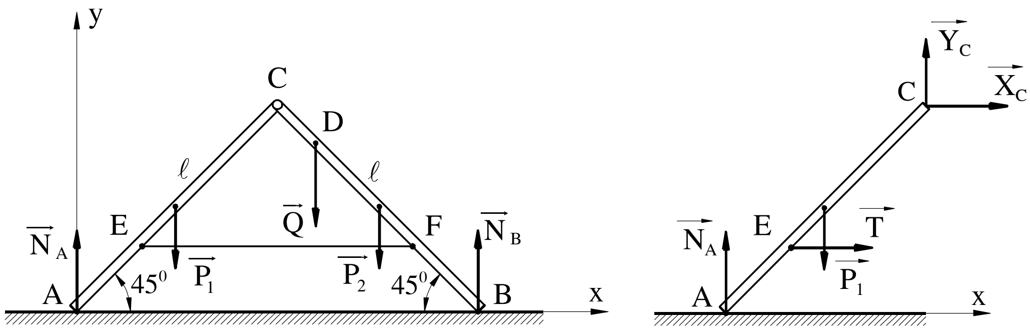
Sau đó tách riêng từng vật của hệ ra, ta sẽ được 3(n-1) phương trình nữa do xét (n-1) vật như phương pháp thứ nhất. Kết quả phương pháp này cũng cho ta 3n phương trình cân bằng như phương pháp thứ nhất để giải baì toán đã cho.

Căn cứ vào điều kiện cụ thể của từng bài toán mà ta dùng phương pháp thứ nhất hay thứ hai để giải.

Ví dụ 2. Thang di động cấu tạo bằng hai phần AC và BC bắt bản lề ở C. Đầu A và B tựa trên nền ngang nhẵn. Biết AC = BC = ℓ = 3 m và hai thanh AC, BC cùng có trọng lượng P = 12 KN. AC và BC được nối với nhau bằng dây EF. Biết BF = AE = 1 m. Tại điểm D cách C một khoảng 0,6m có đặt một vật nặng Q = 72 KN. Tìm phản lực tại A, B, C và sức căng của dây EF. Cho góc BAC = góc ABC = 45^0.

Bài giải

Có thể dùng một trong hai phương pháp trên để giải bài toán này. Ở đây ta dùng phương pháp thứ hai.



Hình 3-5

1. Xét cả hai hệ gồm AC và BC cân bằng

Hệ lực đặt lên hệ này cân bằng là: $\left(\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{N}_A, \overrightarrow{N}_B, \overrightarrow{Q}\right) \backsim 0$

với: $P_1 = P_2 = P$.

Hệ phương trình cân bằng lập được là:

$$\sum X_k = -P_1 - P_2 + N_A + N_B - Q = 0 \qquad (1)$$

$$\sum m_{Cz}\left(\overrightarrow{F_k}\right) = N_B.\ell.\cos 45^0 - N_A.\ell.\cos 45^0 - Q.CD.\cos 45^0 = 0 \qquad (2)$$

2. Tách vật và xét cân bằng của nửa AC

Hệ lực cân bằng đặt lên nửa AC là: $\left(\overrightarrow{N}_A, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{X}_C, \overrightarrow{Y}_C\right) \backsim 0$

Hệ phương trình cân bằng lập được là:

$$\sum X_k = X_C + T = 0 \qquad (3)$$

$$\sum Y_k = N_A - P_1 + Y_C = 0 \qquad (4)$$

$$\sum m_{Cz}\left(\overrightarrow{F_k}\right) = T.EC.\cos 45^0 - P_1.\frac{AC}{2}.\cos 45^0 - N_A.AC.\cos 45^0 = 0 \qquad (5)$$

Thay thế các giá trị đã cho vào hệ phương trình (1), (2), (3), (4), và (5) và giải, ta được kết quả sau:

$$N_A = 40{,}8N;\ N_B = 55{,}2N;\ T = 52{,}2\,N;\ X_C = -52{,}2\,N;\ Y_C = -28{,}8\,N.$$

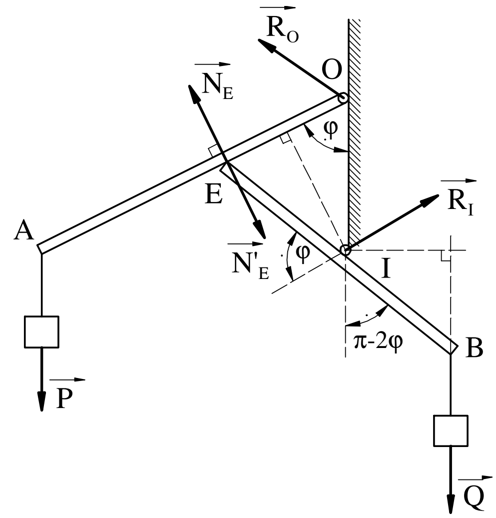
Kết quả X_C, Y_C mang dấu trừ (−) chứng tỏ rằng chiều đúng của $\overrightarrow{X}_C$, $\overrightarrow{Y}_C$ là chiều ngược lại với chiều trên hình vẽ.

Ví dụ 3. Hệ thanh OA, EB và hai vật nặng C, D được treo cân bằng trong mặt phẳng thẳng đứng như trên hình vẽ. OA và EB có trọng lượng không đáng kể và dài như nhau, quay được quanh hai trục Oz và Iz cố định và vuông góc với mặt Phẳng như hình vẽ. Cho biết OI = IE = IB. Hai vật nặng có trọng lượng lần lượt là P và Q. Bỏ qua ma sát, hãy tính góc nghiêng của OA với phương thẳng đứng khi hệ ở cân bằng.

Bài giải

Khảo sát hệ thanh OA và EB cân bằng. Các lực tác dụng lên hệ gồm các trọng lực P, Q các phản lực liên kết $\overrightarrow{R}_O$, $\overrightarrow{R}_I$. Ngoài ra khi tách rời OA và EB, tại điểm E trên hai thanh còn xuất hiện phản lực liên kết $\overrightarrow{N}_E$ và $\overrightarrow{N'}_E$ nữa.

Ở đây các phản lực liên kết $\overrightarrow{R}_O$ và $\overrightarrow{R}_I$ là không cần tìm, do đó để cho $\overrightarrow{R}_O$, $\overrightarrow{R}_I$ không có mặt trong các phương trình cân bằng lập được, ta phải sử dụng phương pháp thứ nhất, tách rời OA, EB rồi xét sự cân bằng của từng vật.



Hình 3-6

1. Xét thanh OA cân bằng, ta có:

$$\left(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{R}_O, \overrightarrow{N}_E\right) \backsim 0$$

Đây là bài toán cân bằng của đòn phẳng nên ta có phương trình cân bằng là:

$$\sum m_{Oz}(\overrightarrow{F_k}) = -P.O.\sin\varphi + N_E.2.(OI\cos\varphi) = 0$$

Vì 2.OI = OA nên phương trình trên có dạng: $-P.\sin\varphi + N_E.\cos\varphi = 0$ (1)

2. Xét cân bằng của thanh EB, ta có: $\left(\overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}_I, \overrightarrow{N'}_E\right) \backsim 0$

Đây cũng là bài toán cân bằng của đòng phẳng nên ta có phương trình cân bằng:

$$\sum m_{Iz}(\overrightarrow{F_k}) = N'_E.EI\cos\varphi - Q.IB\sin(\pi - 2\varphi) = 0$$

Vì EI = IB nên phương trình trên trở thành:

$$N'_E.\cos\varphi - Q.\sin 2\varphi = 0 \qquad (2)$$

Chú ý rằng $N_E = N'_E$, do đó kết hợp (1) và (2) ta được: $P.\sin\varphi - Q.\sin 2\varphi = 0$

Giải ra ta được kết quả: $\cos\varphi = \dfrac{P}{2Q}$.

3.4. Bài toán ma sát

Trong Chương I ta đã xét phản lực liên kết của mặt tựa với giả thiết, vật khảo sát và mặt tựa rắn tuyệt đối, hoàn toàn trơn nhẵn. Thực tế điều này không xảy ra. Ở đây, ta áp dụng các kết quả đã có của Cơ học lý thuyết để một loại bài toán thực tế, đồng thời hoàn chỉnh thêm về phản lực liên kết ở mặt tựa. Đó là sự cân bằng của vật thể khi kể đến liên kết ma sát.

Sự cản xuất hiện khi vật này chuyển động trên một vật khác gọi là ma sát.

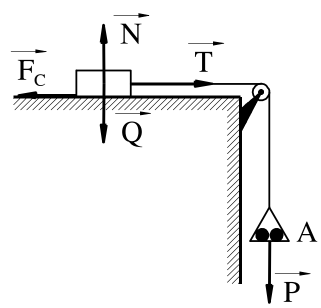
Trong thực tế kỹ thuật, ma sát có lợi cũng như có hại. Người ta cố gắng tăng ma sát để phát huy mặt có lợi của dây curoa trong bộ truyền đai, băng truyền tải vật lên cao, ... Song cũng cần thiết giảm tới mức tối đa sự phá hoại do ma sát gây ra: Bôi trơn tốt các ổ bi bằng dầu mỡ, chế tạo các bề mặt làm việc trơn nhẵn, có hình dạng đặc biệt với tàu, máy bay, ... chuyển động trong môi trường nước, không khí, ...

Dựa vào sự chuyển động của các vật đối với nhau. Ta có thể chia ma sát ra: Ma sát trượt, ma sát lăn, ...

3.4.1. Ma sát trượt

a. Thí nghiệm Culông

Vật B đặt trên tấm cố định D gắn vào sợi dây không dãn và vắt qua ròng rọc C. Đầu kia của dây treo đĩa A có chất tải trọng (hình 3-7).



Hình 3-7

Tải trọng ở đĩa A tăng dần lên sẽ làm tăng lực $\vec{T}$ tác dụng vào B. Thí nghiệm chứng tỏ rằng: Khi tăng tải trọng ở A không quá lớn thì B vẫn ở cân bằng. Điều này chỉ có thể giải thích được nếu thêm vào lực cản $\vec{F}_C$. Tác dụng lên vật B ngoài trọng lực $\vec{P}$, phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ và lực $\vec{T}$ còn có $\vec{F}_C$ (hình 3-7).

Đặt $\vec{F}_C = \vec{F}_{ms}$: Gọi là lực *ma sát trượt*. Theo điều kiện cân bằng của hệ lực phẳng đã biết suy ra được: $N = P$; $F_{ms} = T$.

Tiếp tục tăng tải trọng ở A đến một giá trị nào đó thì F_C đạt F_{ms}^{max} và vật B mất cân bằng, bắt đầu trượt trên tấm D.

b. Định luật culông (Định luật ma sát trượt)

Năm 1781 nhà bác học người Pháp Culông dựa trên những thí nghiệm đã phát biểu định luật gần đúng về ma sát trượt, gọi là định luật culông:

- Lực ma sát trượt nằm trong mặt phẳng tiếp xúc chung của vật tiếp xúc, chiều ngược với chiều trượt (hoặc xu hướng trượt) của vật dưới tác dụng của lực tích cực. Giá trị của nó biến đổi, đạt tới F_{ms}^{max} lúc vật thể bắt đầu trượt và được biểu thị:

$$0 \le F_C \le F_{ms}^{max}$$

- Trị số cực đại của lực ma sát trượt tỷ lệ thuận với trị số của phản lực pháp tuyến nghĩa là:

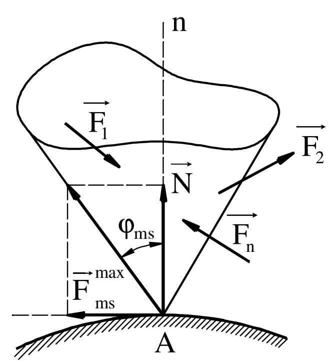
$$F_{ms}^{max} = f.N \qquad (3\text{-}1)$$

trong đó: $f = \dfrac{F_{ms}^{max}}{N}$ là một số không thứ nguyên gọi là *hệ số ma sát trượt*.

- Hệ số ma sát trượt phụ thuộc vào bản chất của vật liệu và trạng thái vật lý của bề mặt tiếp xúc mà không phụ thuộc vào diện tích bề mặt tiếp xúc và các lực đã cho tác dụng lên vật. Nó được xác định bằng thực nghiệm và cho ở các bảng tra.

c. Góc và nón ma sát

Nhiều bài toán về sự cân bằng của vật thể khi kể đến liên kết ma sát được giải thuận lợi bằng phương pháp hình học. Do đó ta cần đưa ra khái niệm góc và nón ma sát.



Hình 3-8

Xét sự cân bằng của vật trên mặt tựa nhám, điểm tiếp xúc A. Phản lực $\vec{R}$ của mặt tựa gồm hai thành phần: Phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ và lực ma sát $\vec{F}_{ms}$. Các góc giữa phản lực toàn phần $\vec{R}_{max}^{ms}$ (được xây dựng từ lực $\vec{F}_{ms}^{max}$ và phản lực pháp tuyến đã cho) với phương phản lực pháp tuyến gọi là *góc ma sát* ký hiệu φ_{ms} (hình 3-8) ta có:

$$tg\varphi_{ms} = \frac{F_{max}^{ms}}{N} = \frac{f.N}{N} = f \qquad (3\text{-}2)$$

Góc ma sát phụ thuộc vào hệ số ma sát. Vì tại điểm tiếp xúc A vật có xu hướng trượt theo mọi phương, ứng với mỗi phương có phản lực $\vec{F}_{max}^{ms}$ tương ứng.

Quỹ tích phản lực $\overrightarrow{R}^{ms}_{max}$ tạo thành mặt nón tại điểm tiếp xúc gọi là hình *nón ma sát* (hình 3-4).

Nếu mọi hướng đều có hệ số ma sát như nhau thì ta có hình nón ma sát tròn xoay.

d. Giải bài toán cân bằng khi có liên kết ma sát trượt

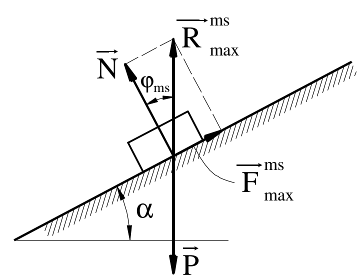
Điều kiện cân bằng của vật trên mặt tựa khi kể đến liên kết ma sát trượt là:

Các lực tích cực đã cho, các phản lực pháp tuyến, các lực ma sát trượt tạo thành hệ lực cân bằng. Từ đó viết được phương trình cân bằng ứng với từng loại hệ lực. Ngoài ra còn cần kèm theo các điều kiện không trượt sau:

$$F_{ms} \le F^{ms}_{max} = f.N$$

Về mặt hình học: Điều kiện để cho vật rắn cân bằng là phản lực $\overrightarrow{R}$ phải đi qua A và nằm trong nón ma sát. Lúc sắp xảy ra trượt phản lực $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}^{ms}_{max}$ nằm trên biên của nón ma sát.

Ví dụ 4. Vật nặng B có trọng lượng P được đặt trên mặt phẳng nghiêng, hệ số ma sát trượt giữa mặt tiếp xúc của B với mặt phẳng nghiêng là f. Tìm giá trị của góc nghiêng α lúc vật sắp trượt xuống (hình 3-9).



Hình 3-9

Bài giải

Xét vật B cân bằng giới hạn. Trên mặt phẳng nghiêng có ma sát. Lực tác dụng lên nó gồm: Trọng lượng $\overrightarrow{P}$, phản lực pháp tuyến $\overrightarrow{N}$ và lực ma sát $\overrightarrow{F}^{ms}_{max}$ ta có:

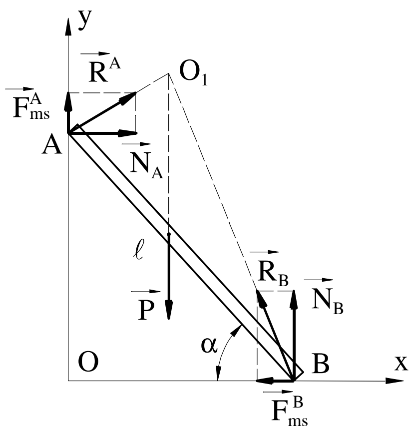
$$\left(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{F}^{ms}_{max}\right) \backsim 0 \quad \text{hay} \quad \left(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{R}^{ms}_{max}\right) \backsim 0$$

Vậy, lực $\overrightarrow{P}$ trực đối với phản lực $\overrightarrow{R}^{ms}_{max}$ ta suy ra: $\alpha = \varphi_{ms}$ hay $tg\alpha = f$.

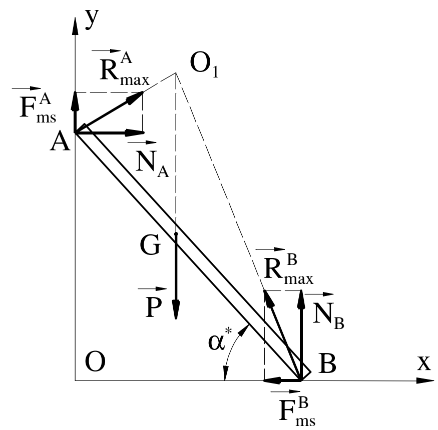
Nhận xét: Nếu $\alpha \le \varphi_{ms}$ thì vật A cân bằng trên mặt phẳng nghiêng không cần giữ. đó là hiện tượng tự hãm, hiện tượng này rất quan trọng trong kỹ thuật.

Do đó tác dụng của lực ma sát thông số xác định trạng thái cân bằng của vật có thể lấy một miền giá trị.

Ví dụ 5. Một chiếc thang AB có trọng lượng P được tựa lên tường và sàn không nhẵn với hệ số ma sát là f. Xác định góc α để thang cân bằng (hình 3-10).



Hình 3-10



Hình 3-11

Bài giải

a. Phương trình giải tích

Điều kiện để thang AB ở cân bằng là: $\left(\vec{P},\ \vec{N}_A,\ \vec{F}_{ms},\ \vec{N}_B,\ \vec{F}^B_{ms}\right) \backsim 0$

Chọn hệ trục Oxy ta có:

$$\sum X_i = N_A - F^B_{ms} = 0 \tag{1}$$

$$\sum Y_i = N_B + F^A_{ms} - P = 0 \tag{2}$$

$$\sum m_{Az}\left(\vec{F}_i\right) = N_B.\ell.\cos\alpha - P.\frac{\ell}{2}\cos\alpha - F^B_{ms}.\ell\sin\alpha = 0 \tag{3}$$

Điều kiện để thang không trượt: $F^A_{ms} \le f.N_A$; $F^B_{ms} \le f.N_B$ (4)

Từ (1) ta có: $N_A = F^{ms}_B \le f.N_B$ (5)

Từ (2) ta có: $N_B = P - F^{ms}_A \ge P - f.N_A$ kết hợp với (5) ta có: $N_B \ge P - fN_A \ge P - f^2 N_B$

suy ra: $N_B \ge \dfrac{1}{1+f^2}P$ (6)

Từ (3): $N_B = \dfrac{P}{2} + F^B_{ms}.tg\alpha \le \dfrac{P}{2} + fN_B.tg\alpha$ suy ra: $N_B \le \dfrac{P}{2(1-f.tg\alpha)}$ (7)

Từ (6) và (7) ta có: $\dfrac{P}{2(1-f.tg\alpha)} \ge N_B \ge \dfrac{1}{1+f^2} \Rightarrow 1+f^2 \ge 2(1-f.tg\alpha)$ hay $tg\alpha \ge \dfrac{1-f^2}{2f}$

Thay f = $tg\varphi_{ms}$ vào trên: $tg\alpha \geq \dfrac{1 - tg^2\varphi_{ms}}{2tg\varphi_{ms}} = \cot g2\varphi_{ms} = tg(90^0 - \varphi_{ms})$

Vậy: $\alpha \geq 90^0 - 2\varphi_{ms}$

Mặt khác $\alpha \leq 90^0$ vậy góc α cần thiết để thang ở cân bằng là: $90^0 - 2\varphi_{ms} \leq \alpha \leq 90^0$

b. Phương pháp hình học: Xét thang AB ở vị trí cân bằng giới hạn. Lực tác dụng biểu diễn trên (hình 3-11) ta có:

$$\left(\vec{P}, \vec{R}^A_{max}, \vec{R}^B_{max}\right) \backsim 0$$

Góc $\left(\vec{R}^A_{Max}, \vec{N}_A\right) = \left(\vec{R}^B_{Max}, \vec{N}_B\right) = \varphi_{ms}$

Vì $\vec{N}_A \perp \vec{N}_B$ nên cũng có $\vec{R}^A_{Max} \perp \vec{R}^B_{Max}$ suy ra: góc $AO_1B = 90^0$

Do đó góc $GO_1B = \varphi_{ms}$ = góc GBO_1.

Theo hình vẽ: $\alpha^* = 90^0 - 2\varphi_{ms}$

Gọi α là góc nghiêng của thang so với phương ngang khi thang ở cân bằng. Phản lực $\vec{R}_B$ phải nằm trong góc ma sát, nên: $\alpha \geq \alpha^*$ hay $\alpha \geq 90^0 - 2\varphi_{ms}$

Mặt khác $\alpha \leq 90^0$. Do đó ta cũng suy được kết quả tương tự phương pháp trên:

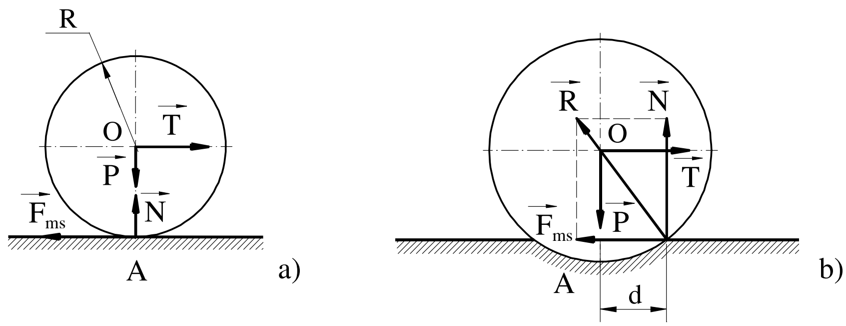
$90^0 - 2\varphi_{ms} \leq \alpha \leq 90^0$

3.4.2. Ma sát lăn

a. Thí nghiệm

Khảo sát vật có dạng con lăn trọng lượng $\vec{P}$ đặt trên mặt phẳng ngang chịu tác dụng của lực kéo nằm ngang $\vec{T}$ đặt vào trục của nó. Thí nghiệm chứng tỏ rằng: Khi $\vec{T}$ khá bé con lăn vẫn đứng yên trên mặt phẳng ngang. Điều này không thể giải thích được nếu như hệ lực tác dụng lên con lăn biểu diễn như (hình 3-12a). Theo sơ đồ này vật không thể cân bằng vì: Mômen chính của hệ lực tác dụng lên vật là $M_{Oz} = -$ T.r khác không và một trong những điều kiện cân bằng không thỏa mãn.

Để phù hợp giữa lý thuyết và thực nghiệm ta phải giả thiết: Tại điểm tiếp xúc A mặt phẳng ngang biến dạng và con lăn tiếp xúc với mặt tựa ở một diện tích nhỏ bên phải điểm A. Do đó phản lực $\vec{N}$ đặt ở điểm A_1 cách A một khoảng d. Ta nhận được sơ đồ tác dụng lực lên con lăn thoả mãn thực nghiệm (hình 3-12b). Ngẫu lực $\left(\vec{N}, \vec{P}\right)$ cân bằng với ngẫu $\left(\vec{T}, \vec{F}_{ms}\right)$.



Hình 3-12

Ngẫu lực $\left(\overrightarrow{N}, \overrightarrow{P}\right)$ gọi là ngẫu lực ma sát lăn. Nó cản không cho con lăn lăn trên mặt phẳng ngang. Ký hiệu mômen của ngẫu lực này là M_{ms}.

$$M_{ms} = N.d = P.d = T.r$$

Tiếp tục tăng lực kéo $\overrightarrow{T}$ đến một giá trị nào đó con lăn bắt đầu lăn trên mặt phẳng ngang. Điều này chứng tỏ M_{ms} đạt tới M_{max} và vì: M_{max} = F.d với P không đổi nên $d = d_{max}$.

Vậy ngẫu lực ma sát lăn biến thiên và đạt giá trị giới hạn M_{max}. ta có:

$$0 \le M_{ms} \le M_{max}$$

b. Định luật

Qua thí nghiệm người ta cùng thiết lập được định luật gần đúng về ma sát lăn.

- Trị số cực đại của mômen ngẫu lực ma sát lăn M_{max} tỷ lệ thuận với trị số của phản lực pháp tuyến N:

$$|M_{max}| = k.|N| \tag{3-3}$$

Trong đó $k = \dfrac{|M_{max}|}{|N|}$, gọi là hệ số ma sát lăn, có thứ nguyên là độ dài. Ở đây $k = d_{max}$.

Chiều của ngẫu lực ma sát lăn ngược chiều lăn của vật.

- Hệ số ma sát lăn phụ thuộc vào bản chất của vật liệu và trạng thái của bề mặt tiếp xúc. Nó được xác định bằng thực nghiệm.

Trong các bảng tra người ta thường đưa vào tỷ số $\lambda = \dfrac{k}{r}$ ứng với từng loại vật liệu.

c. Giải bài toán cân bằng khi có ma sát lăn

Điều kiện để cho con lăn không lăn là: $M_{ms} \le M_{max} = k.N$

hay: $T.r \le k.N \quad \Rightarrow \quad T \le \frac{k}{r}N$ (a)

Điều kiện để con lăn không trượt là: $F_{ms} \le F_{max} = f.N$ hay: $T \le f.N$ (b)

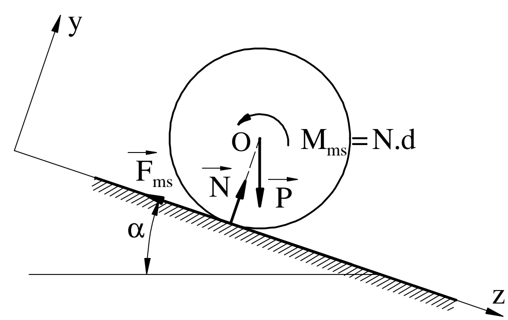
Từ (a) và (b) ta có điều kiện cân bằng của con lăn:

$$T \le \frac{k}{r}N \text{ và } T \le f.N \qquad (3\text{-}4)$$

Nếu con lăn không thỏa mãn điều kiện (3-4) thì nó vừa lăn vừa trượt hoặc chỉ lăn, chỉ trượt.

Thực nghiệm chứng tỏ $\frac{k}{r} << f$ nên thực tế con lăn đã trượt thì cũng lăn được.

Ví dụ 6. Một hình trụ đặt trên mặt phẳng nghiêng. Tìm góc nghiêng α của mặt nghiêng với phương ngang để hình trụ cân bằng trên mặt nghiêng. Bán kính hình trụ là R, trọng lượng P. Hệ số ma sát trượt là f, hệ số ma sát lăn là k.



Hình 3-13

Bài giải

Xét sự cân bằng của hình trụ trên mặt phẳng nghiêng. Sơ đồ lực tác dụng được biểu diễn trên (hình 3-13) khi đó phương trình cân bằng là:

$$\sum X_i = -F_{ms} + P.\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = N - P.\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$\sum m_{Az}\left(\overrightarrow{F_k}\right) = N.d - P.r.\sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

Ngoài ra điều kiện để hình trụ không trượt và không lăn là:

$$F_{ms} << f.N$$

$$M_{ms} = N.d \le k.N$$

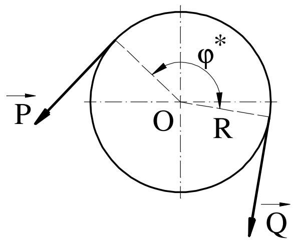
Từ (1), (2) và (3) xác định được N, F_{ms}, M_{ms}. Thay vào (4). Ta có góc α phải đồng thời thoả mãn điều kiện:

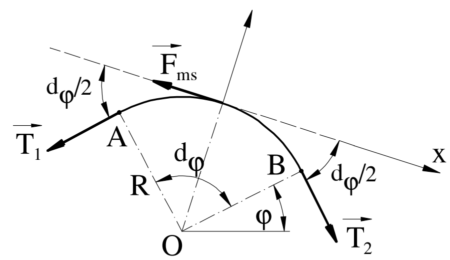
$$\begin{cases} tg\alpha \le f \\ tg\alpha \le \frac{k}{r} \end{cases}$$

d. Công thức Ơ-le

Để dẫn ra công thức Ơ-le, ta xét bài toán sau: Một sợi dây không dãn vắt qua trục của hình trụ. Người ta đặt vào đầu dây một lực Q. Tìm P nhỏ nhất đặt ở đầu dây còn lại để sợi dây cân bằng. Giữa dây và trụ có ma sát, hệ số ma sát là f (hình 3-14a). Thực nghiệm chứng tỏ rằng nhờ ma sát mà lực P nhỏ hơn nhiều so với lực Q.

Xét yếu tố dây AB là ds ở cân bằng giới hạn (hình 3-14b).





Hình 3-14

Khi đó: $\left(\overrightarrow{T_1}, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{T}_{ms}, \overrightarrow{N}\right) \backsim 0$; $\overrightarrow{T_1} = \overrightarrow{T} + d\overrightarrow{T}$; $F_{ms} = f.N$.

Phương trình cân bằng viết được:

$$\sum X_i = T\cos\frac{d\varphi}{2} - (T + dT)\cos\frac{d\varphi}{2} - F_{ms}ds = 0$$

$$\sum Y_i = N.ds - T\sin\frac{d\varphi}{2} - (T + dT)\sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

Ở đây: $ds = R.d\varphi$

Nếu góc φ khả nhỏ, ta thay $\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}; \cos\frac{d\varphi}{2} \cong 1$ và bỏ qua vô cùng bé bậc cao $\frac{dT.d\varphi}{2}$ ở phương trình trên suy ra:

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{d\varphi} + f.N.R = 0 \\ N.R - T = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có: $dT = -\,f.T.d\varphi$ => $\frac{dT}{T} = -f.d\varphi$

Lấy tích phân trong khoảng từ $\varphi = 0$ đến $\varphi = \varphi^*$.

$$\int_T^{T^*} \frac{dT}{T} = -f\int_0^{\varphi^*} d\varphi \quad \text{hay} \quad \ell n\frac{T^*}{T} = -f.\varphi^*$$

T_0 là sức căng của dây tại $\varphi = 0$, tức $T_0 = Q$; T^* là sức căng của dây tại $\varphi = \varphi^*$, tức $T^* = P$

Do đó: $\ell n\dfrac{P}{Q} = -f.\varphi^*$ => $P = Q.e^{-f.\varphi^*}$ (3-5)

(3-5) là công thức Ơ-le phải tìm, cho ta xác định lực P nhỏ nhất giữ dây cân bằng.

Chú ý rằng: Có thể thiết lập vấn đề ngược lại và tìm được lực P lớn nhất giữ dây cân bằng: $P = Q.e^{f.\varphi^*}$.

Như vậy, nếu P thỏa mãn điều kiện: $Qe^{-f\varphi^*} \le P \le Qe^{f.\varphi^*}$ thì dây sẽ ở cân bằng.

Rõ ràng từ (3-5) nếu f = 0 thì P = Q.

Góc φ^* là góc ôm của dây. Công thức Ơ-le cho thấy tỷ số $\dfrac{Q}{P} = e^{f\varphi^*}$ tăng nhanh theo góc ôm φ^*. Nếu f = 0,1; $\varphi^* = \dfrac{30T}{2}$ thì $\dfrac{P}{Q} = e^5 \approx 150$.

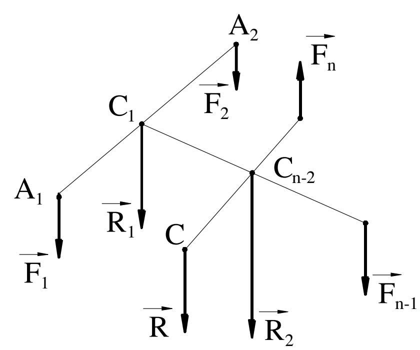
Người ta lợi dụng tính chất này để truyền động bằng dây đai và giữ tầu, thuyền bằng cách cuốn dây cáp vào cọc.

3.5. Bài toán trọng tâm

3.5.1. Tâm của hệ lực song song

Định lý

Trong trường hợp hệ lực song song có hợp lực, nếu giữ nguyên điểm đặt, cường độ và quan hệ song song giữa các lực, nhưng đổi phương chung của chúng một cách tuỳ ý thì hợp lực của chúng cũng đổi phương theo nhưng luông đi qua một điểm C cố định. Điểm này được gọi là tâm của hệ lực song song đã cho.



Hình 3-15

Định lý có thể chứng minh được bằng cách áp dụng kết quả xác định hợp lực của hai lực song song.

3.5.2. Toạ độ tâm C

Gọi x_k, y_k, z_k là toạ độ điểm đặt A_k của lực $\overrightarrow{F_k}$ trong hệ tọa độ Đề các Oxyz và gọi x_C, y_C, z_C là tọa độ của tâm C trong hệ tọa độ ấy. Công thức xác định tọa độ của C được xác định từ định lý Varinhông:

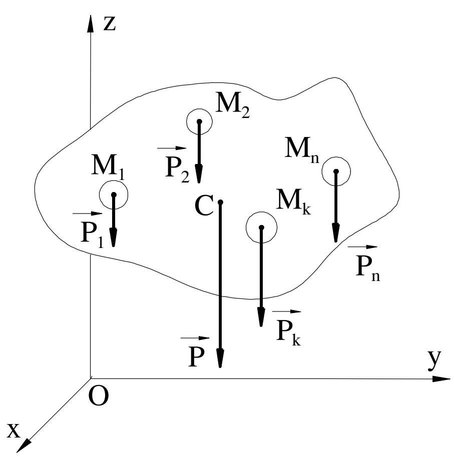
$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k.F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}; \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k.F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}; \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k.F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} \tag{3-6}$$

Dạng véctơ: $$\overrightarrow{r_C} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k}.F_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} \tag{3-7}$$

Ở đây $\overrightarrow{r_k}$, $\overrightarrow{r_C}$ là các véctơ định vị của A_k và C.

3.5.3. Trọng tâm và công thức tổng quát xác định tọa độ của trọng tâm

Giả sử có vật rắn (s) được đặt gần quả đất. Ta tưởng tượng rằng (s) được chia ra làm n phần khá bé để có thể coi mỗi phần tử ấy là một chất điểm, ta ký hiệu: M_1, M_2, ..., M_n và gọi lực hút của quả đất lên các phần tử tương ứng là: $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$, ..., $\overrightarrow{P_n}$. Vì vật (s) đặt rất xa tâm quả đất nên hệ lực ($\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$, ..., $\overrightarrow{P_n}$) được coi là hệ lực song song, cùng chiều và có hợp lực là $\overrightarrow{P}$. Hệ lực này có tính chất là: Nếu thay đổi vị trí của vật (s) thì chúng vẫn giữ nguyên cường độ, vẫn song song cùng chiều và vẫn đặt tại các điểm tương ứng M_1, M_2, ..., M_n của vật (s) do đó theo định lý về tâm hệ lực song song, hợp lực $\overrightarrow{P}$ của hệ lực nói trên có điểm đặt C^* là trọng tâm gần đúng của vật (s). Đi đến định nghĩa trọng tâm của vật rắn.



Hình 3-16

Trọng tâm của vật rắn là điểm đặt của trọng lực tổng hợp tác dụng lên vật rắn ấy.

Ký hiệu trọng tâm là C ta có: $$C = \lim_{\substack{n\to\infty \\ P_k \to 0}} C^* \tag{3-8}$$

a. Công thức xác định tọa độ trọng tâm

Gọi tọa độ xác định của vật (s) trong hệ tọa độ Oxyz nào đó (thường gắn với vật) là x_k, y_k, z_k, từ (3-6) và (3-7) ta có:

$$\vec{r}_{C^*} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P.\vec{r}_C}{\sum_{k=1}^{n} P} \Rightarrow x_{C^*} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k.x_k}{P};\quad y_{C^*} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k.y_k}{P};\quad z_{C^*} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k.z_k}{P}$$

Trong đó $\vec{P} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{P_k}$ là trọng lượng của vật rắn khảo sát. Kết hợp với (3-8) ta tìm được công thức tổng quát xác định trọng tâm O của vật rắn như sau:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{P} \lim_{\substack{n\to\infty \\ P_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} P_k.\vec{r}_k = \frac{1}{P}\int_{(s)} \vec{r}.dP \qquad (3\text{-}9)$$

trong đó $P = \lim_{\substack{n\to\infty \\ P_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} P_k = \int_{(s)} dP$ là trọng lượng của vật khảo sát.

Từ (3-9) ta có công thức xác định tọa độ trọng tâm sau:

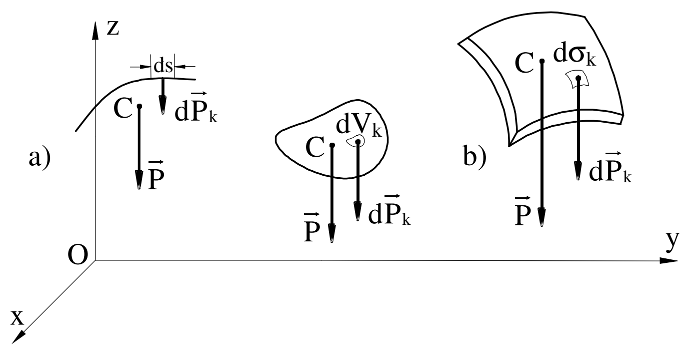
$$x_C = \frac{1}{P} \lim_{\substack{n\to\infty \\ P_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} x_k.P_k = \frac{1}{P}\int_{(s)} x.dP$$

$$y_C = \frac{1}{P} \lim_{\substack{n\to\infty \\ P_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} y_k.P_k = \frac{1}{P}\int_{(s)} y.dP \qquad (3\text{-}10)$$

$$z_C = \frac{1}{P} \lim_{\substack{n\to\infty \\ P_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} z_k.P_k = \frac{1}{P}\int_{(s)} z.dP$$

b. Trường hợp của vật rắn đồng chất

− *Đường đồng chất*



Hình 3-17

Gọi L là chiều dài của đường đồng chất C, có trọng lượng riêng γ (tức là trọng lượng của một đoạn dây dài 1 đơn vị). Ta có $P = \gamma.L$ và $dP = \gamma dS$. Trong đó dS là vi phân cung của đường cong (hình 3-17a). Các công thức (3-10) khi đó có dạng:

$$x_C = \frac{1}{\gamma.L}\int_{(C)} x.\gamma.ds = \frac{1}{L}\int_{(C)} x.ds$$

$$y_C = \frac{1}{\gamma.L}\int_{(C)} y.\gamma.ds = \frac{1}{L}\int_{(C)} y.ds \qquad (3\text{-}11)$$

$$z_C = \frac{1}{\gamma.L}\int_{(C)} z.\gamma.ds = \frac{1}{L}\int_{(C)} z.ds$$

− *Mặt đồng chất*

Tương tự trên các công thức (3-10) cho ta:

$$x_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} x.d\sigma; \quad y_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} y.d\sigma; \quad z_C = \frac{1}{S}\int_{(S)} z.d\sigma \qquad (3\text{-}12)$$

Trong đó S là diện tích của tất cả mặt cong khảo sát $d\sigma$ là vi phân diện tích của mặt cong ấy (hình 3-17b).

Nếu vật là tâm phẳng đồng chất thì chọn ngay mặt phẳng của tâm ấy làm mặt phẳng tọa độ Oxy, ta có:

$$x_C = \frac{1}{F}\int_{(F)} x.dF; \quad y_C = \frac{1}{F}\int_{(F)} y.dF \qquad (3\text{-}13)$$

trong đó F, dF thay cho S và $d\sigma$ trong công thức (3-12).

Trong kỹ thuật người ta còn gọi đại lượng $\int_{(F)} x.dF; \int_{(F)} y.dF$ là mômen tĩnh của tấm phẳng đối với các trục x, y và ký hiệu $S_{y(F)} = \int x.dF; \ S_{x(F)} = \int y.dF$. Từ đó suy ra, nếu $S_x = 0$ thì trọng tâm G của vật ở trên trục y, và nếu $S_y = 0$ thì trọng tâm G của vật ở trên trục x. Nếu $S_x = 0$, $S_y = 0$ thì trọng tâm G ở ngay trên gốc tọa độ.

− *Khối đồng chất* (hình 3-17).

Tương tự như trên ta có:

$$x_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} x.dV; \quad y_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} y.dV; \quad z_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} z.dV \qquad (3\text{-}14)$$

Trong đó V và dV là thể tích và vi phân thể tích của vật khảo sát.

3.5.4. Các phương pháp xác định trọng tâm của vật rắn

Từ định nghĩa và các công thức tổng quát nêu trên ta có thể tìm được trọng tâm của vật rắn bằng các định lý sau (không chứng minh).

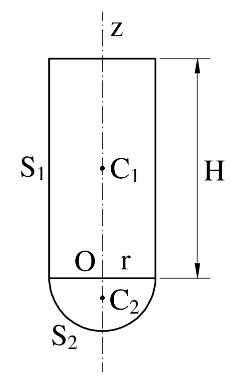
a. Định lý 1

Nếu vật rắn đồng chất có tâm đối xứng hình học (hoặc có trục đối xứng hay mặt phẳng đối xứng) thì trọng tâm của vật ấy ở ngay tâm đối xứng của nó (hoặc ở trên trục đối xứng hay trên mặt phẳng đối xứng).

b. Định lý 2

Nếu vật rắn khảo sát gồm những phần tử mà trọng tâm của chúng phân bố trên cùng một đường thẳng (hay trên cùng một mặt phẳng) thì trọng tâm của vật cũng thuộc đường thẳng ấy (hay thuộc mặt phẳng ấy).

Ví dụ 7. Tìm trọng tâm của vật (S) đồng chất gồm khối trụ tròn xoay với bán kính đáy R và chiều cao H, và một khối nửa hình cầu cùng bán kính R (hình 3-18). Cho biết khoảng cách từ trọng tâm C_2 của khối nửa cầu đến đáy của nó là $\frac{3R}{8}$.



Hình 3-18

Bài giải

Vật khảo sát (S) gồm hai phần ghép lại là (S_1) và (S_2) (hình 3-18) vì ta có khối đồng chất đối xứng qua trục z bên trọng tâm C của vật và các trọng tâm C_1 và C_2 của từng phần thuộc (S) đều thuộc z. Do đó ta chỉ cần tìm z_C. Áp dụng công thức ta có:

$$z_C = \frac{V_1.z_1 + V_2.z_2}{V_1 + V_2}$$

$$V_1 = \pi R^2.H;\ z_1 = \frac{H}{2};\ V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3;\ z_2 = \frac{3}{8}R$$

Do đó: $$z_G = \frac{\pi R^2.H.\frac{H}{2} - \frac{2}{3}\pi R^3.\frac{3}{8}R}{\pi R^2.H + \frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}.\frac{2H^2 - R^2}{3H + 2R}$$

Ngoài cách dùng hai phương pháp trình bày ở trên còn có thể tìm trọng tâm của các vật bằng phương pháp phân tích và bằng cách để dùng các định lý Guynđanh mà ta không trình bày ở đây.

Các phương pháp trên chỉ cho phép tìm trọng tâm của các vật thể đồng chất có dạng hình học đơn giản. Muốn xác định được trọng tâm của các vật thể thực người ta phải dùng phương pháp thực nghiệm như: Phương pháp treo, phương pháp cân, phương pháp tâm lắc, .v.v....

PHẦN THỨ HAI: ĐỘNG HỌC

Mở đầu

1. Vị trí đối tượng và nội dung nghiên cứu của động học

a. Vị trí. Động học là phần thứ hai của giáo trình Cơ học lý thuyết, nghiên cứu chuyển động của đối tượng về mặt hình học tức chỉ xét mối liên hệ giữa không gian và thời gian xảy ra chuyển động mà không kể đến nguyên nhân gây ra chuyển động. Vì vậy Lagrăng quan niệm là "Hình học trong không gian bốn chiều", trong đó chiều thứ tư là thời gian.

b. Đối tượng nghiên cứu. Đối tượng ta nghiên cứu trong động học là điểm hình học và vật rắn tuyệt đối. Điểm hình học là một vật thể rắn có kích thước "khá bé" và không mang khối lượng. Khi xét chuyển động của vật thể mà không kể đến kích thước ta coi vật là điểm hình học. Vật thể rắn là tập hợp vô số điểm hình học mà khoảng cách giữa mỗi cặp điểm không thay đổi trong quá trình chuyển động. Trong động học, khi khảo sát chuyển động ta có thể coi vật lớn vô hạn (mặc dầu trong thực tế không tồn tại) và các vật thể rắn trong chuyển động có thể xuyên qua nhau mà không bị cản trở.

c. Nội dung nghiên cứu. Trong động học nghiên cứu chuyển động của đối tượng là phải giải quyết các vấn đề: Thiết lập phương trình chuyển động, tính vận tốc, tính gia tốc ... ta lần lượt nghiên cứu chuyển động của điểm, chuyển động của vật rắn. Cuối cùng ta nghiên cứu chuyển động tổng hợp của điểm và của vật rắn. Những kết quả nghiên cứu chuyển động đối với điểm là cơ sở để nghiên cứu chuyển động của vật rắn.

2. Các khái niệm cơ bản của động học

a. Không gian. Không gian ở đây được xem là tuyệt đối, thỏa mãn các tính chất: Đồng nhất, đẳng hướng, và trống rỗng. Đó là không gian Ơclít ba chiều thông thường. Các phép tính của hình học Ơclít nghiệm đúng trong không gian này.

b. Thời gian. Trong động học, đối tượng chuyển động trong không gian theo thời gian. Thời gian được quan niệm là sự trôi đi của quá trình diễn ra chuyển động, "sự trôi" của thời gian theo một chiều nhất định, liên tục và tuyệt đối. Vì vậy để đo thời gian ta xác định nó trên trục số thực t gọi là trục thời gian. Thời điểm là một "lúc"của quá trình, được xác định bằng một số thực trên trục thời gian. Khoảng thời gian (Δt) là khoảng thời gian giữa hai thời điểm gọi là thời đoạn. Đơn vị cơ bản để đo thời gian là giây, ký hiệu s.

$$1s = \frac{1}{24.60.60} \text{ ngày mặt trời trung bình.}$$

Trong khi khảo sát các bài toán, để thuận lợi ta lấy thời điểm ban đầu $t_0 = 0$, từ đó về sau thời gian xảy ra chuyển động đều dương.

c. Hệ quy chiếu. Để xác định vị trí của một đối tượng trong không gian ta phải chọn một đối tượng làm mốc. Thông thường người ta gắn tọa độ (đề các) vào vật chuẩn đó. Hệ tọa độ gắn liền với vật chuẩn để nghiên cứu chuyển động của đối tượng gọi là hệ quy chiếu. Hệ quy chiếu khác nhau thì dạng chuyển động của cùng một đối tượng là khác nhau.

d. Chuyển động. Chuyển động cơ học của một đối tượng là sự thay đổi vị trí của đối tượng trong không gian theo thời gian.

Vị trí của đối tượng trong hệ quy chiếu được xác định bằng các thông số định vị của nó.

Phương trình chuyển động của đối tượng là những biểu thức liên hệ giữa thông số định vị và thời gian (thời gian là đối số độc lập).

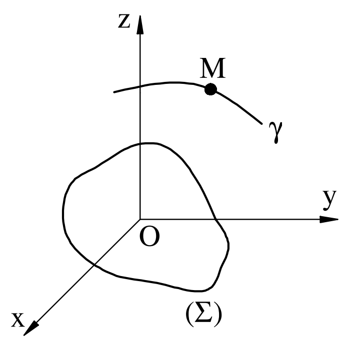
Vận tốc chuyển động là đại lượng biểu thị hướng và tốc độ chuyển động của đối tượng ở thời điểm đang xét (nói chung nó phụ thuộc vào thời gian).

Gia tốc chuyển động là đại lượng biểu thị sự biến đổi của véctơ vận tốc chuyển động theo thời gian. Gia tốc chuyển động cho biết tính đều hay tính biến đổi của chuyển động (gia tốc cũng phụ thuộc vào thời gian).

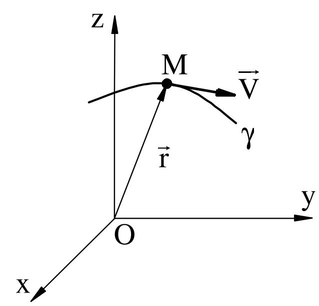
Các khái niệm trên đây sẽ rõ ràng và cụ thể trong khi khảo sát chuyển động của điểm hay chuyển động của vật rắn.

CHƯƠNG I: ĐỘNG HỌC ĐIỂM

Vấn đề đặt ra ở đây là khảo sát chuyển động của điểm (M) với hệ quy chiếu đã chọn (hình 1-1). Để trình bày ngắn gọn những đặc điểm của chuyển động ta dùng véctơ làm công cụ. Nhưng để tính toán được thuận lợi ta thường dùng các loại tọa độ khác nhau, nhất là tọa độ đề các và tọa độ tự nhiên trên quỹ đạo.



Hình 1-1



Hình 1-2

1.1. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp véctơ

1.1.1. Phương trình chuyển động của điểm

Xét điểm M trong hệ quy chiếu Oxyz (hình 1-2). Rõ ràng vị trí của M được xác định duy nhất bằng véctơ: $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Ta gọi $\vec{r}$ là véctơ định vị của động điểm trong hệ quy chiếu ấy.

Khi động điểm chuyển động véctơ $\vec{r}$ sẽ biến thiên liên tục theo thời gian cả về hướng và về độ dài, do đó ta viết được:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1\text{-}1)$$

Như vậy, véctơ định vị $\vec{r}$ là một véctơ hàm theo thời gian. Biểu thức (1-1) là phương trình chuyển động của điểm viết dưới dạng véctơ.

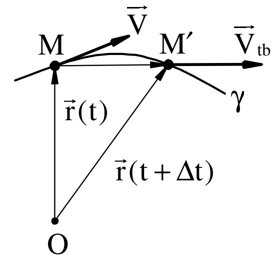
Quỹ tích các vị trí của động điểm trong không gian quy chiếu được gọi là qũy đạo của động điểm trong hệ quy chiếu ấy.

Phương trình (1-1) cũng là phương trình quỹ đạo dưới dạng tham số.

Nếu quỹ đạo là đường thẳng thì chuyển động được gọi là chuyển động thẳng. Nếu quỹ đạo là đường cong thì chuyển động được gọi là chuyển động cong. Người ta thường lấy tên đường cong để gọi tên chuyển động, chẳng hạn, nếu quỹ đạo là đường tròn thì ta có chuyển động tròn. Chuyển động thẳng và chuyển động tròn là hai dạng chuyển động quan trọng của động điểm.

1.1.2. Vận tốc chuyển động của điểm

Giả sử tại thời điểm t động điểm ở vị trí M với véctơ định vị là $\vec{r}(t)$ và tại thời điểm t + Δt động điểm ở vị trí M' với véctơ định vị là $\vec{r}(t+\Delta t)$. Gia số véctơ $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \overrightarrow{NM}$ mô tả gần đúng hướng đi và quãng đường đi được của động điểm trong khoảng thời gian Δt đó. Ta gọi véctơ $\Delta\vec{r}$ là véctơ di chuyển của động điểm trong khoảng thời gian Δt kể từ thời điểm t (hình 1-3).



Hình 1-3

Véctơ $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ được gọi là vận tốc trung bình của động điểm trong khoảng thời gian Δt, ký hiệu $\vec{V}_{tb}$. Véctơ này mô tả gần đúng hướng đi và tốc độ của động điểm trong khoảng thời gian Δt từ thời điểm t đến thời điểm t + Δt. Khi Δt càng nhỏ véctơ $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ mô tả càng chính xác vận tốc của động điểm ở thời điểm t.

Vận tốc tức thời ở thời điểm t của động điểm, ký hiệu $\vec{V}(t)$ là giới hạn của tỷ số $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ (nếu tồn tại) khi Δt → 0.

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{V}_{tb} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1\text{-}2)$$

Nghĩa là, vận tốc tức thời của động điểm là đạo hàm cấp một theo thời gian véctơ định vị của động điểm ấy. Trong Cơ học người ta dùng thay ký hiệu $\dfrac{d}{dt}$ bằng dấu chấm đặt trên ký hiệu của đại lượng cần lấy đạo hàm theo thời gian và ta viết được $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$.

Về mặt hình học véctơ di chuyển $\Delta\vec{r}$ và vận tốc trung bình $\vec{V}_{tb}$ đều nằm trên cát tuyến MM' tại điểm M của quỹ đạo và hướng từ M đến M'. Vì vậy khi tới giới hạn vận tốc tức thời $\vec{V}(t)$ phải hướng tuyếp tuyến với quỹ đạo của động điểm tại điểm M và thuận theo chiều chuyển động qua đó của động điểm.

Thứ nguyên của vận tốc là:

$$[V] = \frac{[\text{do dai}]}{[\textit{thoi gian}]} \quad \text{ký hiệu} \quad \frac{[L]}{[\mathrm{T}]} = [L\mathrm{T}^{-1}]$$

Đơn vị cơ bản thường dùng là m/s hay ms^{-1}.

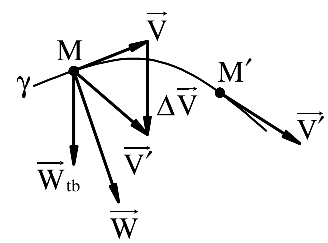
1.1.3. Gia tốc chuyển động của điểm

Nói chung véctơ vận tốc $\vec{V}(t)$ biến đổi cả hướng lẫn độ lớn theo thời gian: $\vec{V} = \vec{V}(t)$.

Đại lượng $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ cho ta tốc độ biến thiên của véctơ $\vec{V}$. Nghĩa là nó đặc trưng cho tốc độ đổi hướng và đổi độ nhanh chuyển động của điểm. Vì vậy, ta định nghĩa: Gia tốc tức thời $\vec{W}$ của động điểm là đại lượng véctơ bằng đạo hàm cấp một theo thời gian của vận tốc hoặc bằng đạo hàm cấp hai theo thời gian véctơ định vị của động điểm.

$$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}} \qquad (1\text{-}3)$$

Về mặt hình học, gia lượng $\Delta\vec{V}$ bao giờ cũng hướng về phía lõm của quỹ đạo, nên véctơ $\vec{W}$ cũng hướng về phía lõm của quỹ đạo (hình 1-4). Nên nói chung hai véctơ $\vec{V}$ và $\vec{W}$ không cùng phương với nhau.



Hình 1-4

Thứ nguyên của gia tốc là: $[W] = \dfrac{[L]}{[T^2]} = [LT^{-2}]$.

Đơn vị thường dùng là m/s^2 hay ms^{-2}.

Căn cứ vào quan hệ của vận tốc và gia tốc ta có thể phán đoán được tính chất của chuyển động.

Trước hết ta xét tích véctơ $\vec{V} \wedge \vec{W}$:

- Nếu $\vec{V} \wedge \vec{W}$ triệt tiêu thì $\vec{V}$ và $\vec{W}$ luôn luôn cùng phương, véctơ $\vec{V}$ có phương không đổi và chuyển động là thẳng.
- Nếu $\vec{V} \wedge \vec{W}$ không triệt tiêu thì chuyển động là chuyển động cong vì khi đó véctơ $\vec{V}$ đổi hướng.

Sau đây ta xét tính chất đều hay biến đổi của chuyển động:

Chuyển động của điểm là đều nếu như giá trị vận tốc V (tốc độ chuyển động) là hằng số.

Chuyển động của điểm là biến đổi (nhanh dần hay chậm dần) là biến đổi theo thời gian (tăng hay giảm theo thời gian t).

Chú ý rằng sự thay đổi của V^2 đặc trưng cho sự thay đổi của giá trị V và:

$$V^2 = \left(\vec{V}\right)^2$$

nên: $\dfrac{dV^2}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{V}\right)^2$ hay $2\vec{V}\vec{W} = 2V.W$

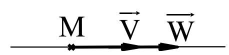
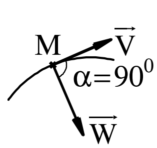
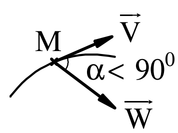
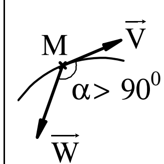
Từ đó ta có kết luận sau:

Nếu tích vô hướng $\vec{V}.\vec{W}$ đồng nhất triệt tiêu thì động điểm chuyển động đều trên quỹ đạo của nó.

Nếu tích vô hướng $\vec{V}.\vec{W} > 0$ thì động điểm chuyển động nhanh dần.

Nếu tích vô hướng $\vec{V}.\vec{W} < 0$ thì động điểm chuyển động chậm dần.

Cuối cùng tất cả những nhận xét về tính chất thẳng hay cong, đều hay biến đổi của chuyển động nói ở trên có thể tóm tắt và biểu diễn theo hình vẽ sau (hình 1-5).

Chuyển động	Đều	Nhanh dần	Chậm dần
Thẳng			
Cong			

Hình 1-5

1.1.4. Hôđôgráp của một véctơ biến thiên và Hôđôgráp của vận tốc

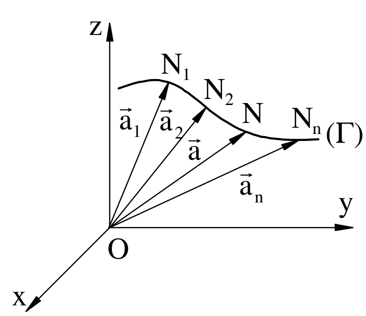
Xét véctơ biến thiên $\vec{a} = \vec{a}(t)$ ta tìm cách biểu diễn hình học đạo hàm $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$. Từ gốc O chọn tuỳ ý, ta vẽ lần lượt các véctơ:

$$\overrightarrow{ON}_1 = \vec{a}(t_1) = \vec{a}_1$$

$$\overrightarrow{ON}_2 = \vec{a}(t_2) = \vec{a}_2$$

$$..............$$

$$\overrightarrow{ON}_n = \vec{a}(t_n) = \vec{a}_n$$



Hình 1-6

Nếu coi đối số t là thời gian ta sẽ có $\overrightarrow{ON} = \vec{a}(t)$ là véctơ định vị của động điểm N. Điểm này khi t biến thiên sẽ chạy trên đường cong (Γ) nào đó (hình 1-6). Người ta gọi N là điểm ảnh của véctơ biến thiên $\vec{a} = \vec{a}(t)$, và đường cong (Γ) là Hôđôgráp của véctơ $\vec{a}(t)$. Rõ ràng ta có:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{ON}) = \vec{V}_N$$

Vậy đạo hàm theo đối số độc lập của hàm véctơ (biến thiên) đúng bằng vận tốc của điểm ảnh trên đường hôđôgráp của véctơ biến thiên ấy.

Kết luận trên cho ta quy tắc thực hành để biểu diễn cụ thể đạo hàm của những véctơ biến thiên theo một đối số độc lập nào đó.

Ta có thể nói rằng: Quỹ đạo chuyển động của động điểm bằng vận tốc của điểm ảnh trên đường hôđôgáp của véctơ vận tốc của điểm ấy.

Như vậy là bằng công cụ véctơ ta đã xây dựng được những đại lượng mô tả rất gọn chuyển động của điểm trong một hệ quy chiếu. Bây giờ ta chuyển qua các phương pháp khảo sát chuyển động của động điểm bằng những tọa độ khác nhau nhằm phục vụ những tính toán cụ thể sau này.

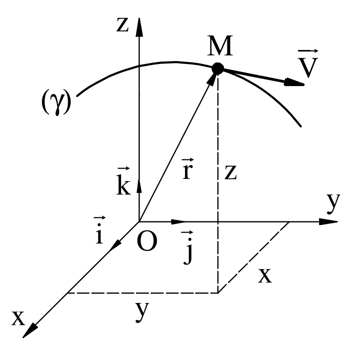
1.2. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp tọa độ đề các

1.2.1. Phương trình chuyển động của điểm

Ta biết phương trình chuyển động của điểm viết ở dạng véctơ là: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Chọn tọa độ Đề các vuông góc Oxyz. Véctơ đơn vị trên các trục là: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (hình 1-7).

Ta có: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$



Hình 1-7

Trong đó x(t), y(t), z(t) là ba thông số định vị của động điểm trong hệ quy chiếu đã chọn.

Vậy phương trình chuyển động của động điểm ở tọa độ Đề các là:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (1\text{-}4)$$

Các phương trình (1-4) cũng là những phương trình quỹ đạo viết dưới dạng thông số t.

Nếu khử thông số t trong hệ phương trình (1-4) ta được phương trình quỹ đạo (giao tuyến của hai mặt) liên hệ giữa ba tọa độ Đề các.

1.2.2. Vận tốc chuyển động của điểm

Trong hệ toạ độ Đề các ta đã có: $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

Gọi V_x, V_y, V_z là ba phần chiếu của vận tốc $\vec{V}$ trên ba trục tọa độ, ta có thể viết:

$$\vec{V}(t) = V_x.\vec{i} + V_y.\vec{j} + V_z.\vec{k} \tag{a}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k} \tag{b}$$

Từ đẳng thức (a) và (b) ta suy ra:

$$V_x = \dot{x}\,;\ V_y = \dot{y}\,;\ V_z = \dot{z} \tag{1-5}$$

Nghĩa là, chiếu vận tốc của điểm lên ba trục tọa độ bằng đạo hàm cấp 1 theo thời gian của chính tọa độ ấy của điểm.

Từ hệ thức (1-5) ta có thể xác định được giá trị và hướng của vận tốc:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

và: $\cos\left(\vec{V}, Ox\right) = \dfrac{V_x}{\left|\vec{V}\right|}$; $\cos\left(\vec{V}, Oy\right) = \dfrac{V_y}{\left|\vec{V}\right|}$; $\cos\left(\vec{V}, Oz\right) = \dfrac{V_z}{\left|\vec{V}\right|}$.

1.2.3. Gia tốc chuyển động của điểm

Tương tự như đối với vận tốc, dựa vào công thức (1-5) ta sẽ xác định được những phần chiếu của gia tốc $\vec{W}$ của điểm trên các trục tọa độ:

$W_x = \dot{V}_x\,;\ W_y = \dot{V}_y\,;\ W_z = \dot{V}_z$

hay là: $$W_x = \ddot{x}\,;\ W_y = \ddot{y}\,;\ W_z = \ddot{z} \tag{1-6}$$

Ta dễ dàng xác định giá trị và hướng gia tốc của điểm theo các công thức sau:

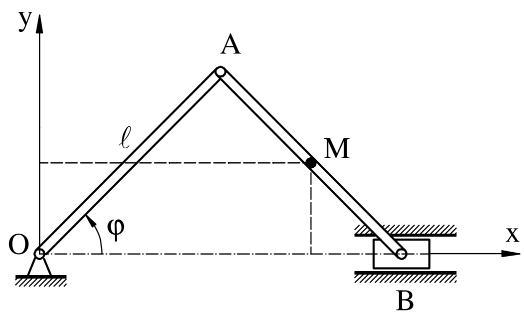
$$\left|\vec{W}\right| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

và: $\cos\left(\vec{W}, Ox\right) = \dfrac{W_x}{\left|\vec{W}\right|}$; $\cos\left(\vec{W}, Oy\right) = \dfrac{W_y}{\left|\vec{W}\right|}$; $\cos\left(\vec{W}, Oz\right) = \dfrac{W_z}{\left|\vec{W}\right|}$.

Như vậy là, phần chiếu của gia tốc của điểm trên một trục tọa độ bằng đạo hàm cấp một theo thời gian của phần chiếu trên trục ấy của vận tốc hoặc bằng đạo hàm cấp hai theo thời gian của tọa độ tương ứng của điểm ấy.

Dựa vào các phần chiếu của vận tốc $\vec{V}$ và của gia tốc $\vec{W}$ ta có thể viết tường minh những hệ thức véctơ mô tả các đặc điểm thẳng hay cong, đều hay biến đổi của chuyển động của điểm.

Ví dụ 1. Cho cơ cấu tay quay thanh truyền OAB như hình vẽ. Độ dài OA = AB = ℓ, tay quay OA quay theo quy luật: $\varphi = \omega_0 t$ (trong đó ω_0 là hằng số). Khảo sát chuyển động của điểm B và điểm giữa M của đoạn AB (hình 1-8).



Hình 1-8

Bài giải:

a. Trước hết ta khảo sát chuyển động của điểm B. Trong hệ quy chiếu Oxy, điểm B sẽ chuyển động thẳng dọc theo trục Ox.

Lập phương trình chuyển động: Theo hình vẽ, ta có:

$$x_B = 2\ell\cos\omega_0 t$$

$$y_B = 0$$

Qũy đạo của điểm B là đường thẳng trùng với trục vận tốc của điểm B:

$$V_{Bx} = \dot{x}_B = -2\omega_0\ell\sin\omega_0 t$$

$$V_{By} = 0$$

Gia tốc điểm B: $W_{Bx} = \dot{V}_{Bx} = \ddot{x}_B = -2\omega_0^2\ell\cos\omega_0 t$

$$W_{By} = 0$$

b. Khảo sát chuyển động của điểm M.

Phương trình chuyển động: $\begin{cases} x_M = \dfrac{3}{2}\ell\cos\omega_0 t \\ y_M = \dfrac{1}{2}\ell\sin\omega_0 t \end{cases}$

Khử tham số t trong hệ phương trình trên, ta có phương trình quỹ đạo của động điểm M:

$$\begin{cases} \sin\omega_0 t = \dfrac{2y_M}{\ell} \\ \cos\omega_0 t = \dfrac{2x_M}{3\ell} \end{cases}$$

Bình phương hai vế và cộng lại: $\dfrac{x_M^2}{\left(\dfrac{3}{2}\ell\right)^2} + \dfrac{y_M^2}{\left(\dfrac{1}{2}\ell\right)^2} = 1$

Quỹ đạo của động điểm M là một đường ellíp với các bán trục $\frac{3\ell}{2}$ và $\frac{\ell}{2}$.

Vận tốc của điểm M: $\begin{cases} V_{My} = \dot{y}_M = \frac{1}{2}\omega_0\ell\cos\omega_0 t \\ V_{Mx} = \dot{x}_M = -\frac{3}{2}\omega_0\ell\sin\omega_0 t \end{cases}$

Ta có: $\left|\overrightarrow{V}_M\right| = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \frac{\omega_0\ell}{2}\sqrt{1+8\sin^2\omega_0 t}$

Gia tốc của điểm M: $\begin{cases} W_{My} = \ddot{y}_M = -\frac{1}{2}\omega_0^2\ell\sin\omega_0 t \\ W_{Mx} = \ddot{x}_M = -\frac{3}{2}\omega_0^2\ell\cos\omega_0 t \end{cases}$

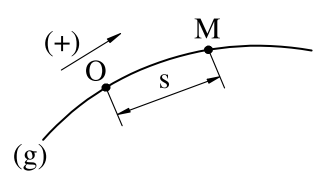
$$\left|\overline{W}\right| = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = \frac{\omega_0^2\ell}{2}\sqrt{1+8\cos^2\omega_0 t}$$

Cần lưu ý rằng, ta có thể xác định được hướng của véctơ vận tốc và véctơ gia tốc theo những công thức đã học.

1.3. Khảo sát chuyển động của điểm bằng phương pháp tọa độ tự nhiên

1.3.1. Phương trình chuyển động của điểm

Giả sử đã biết trước quỹ đạo (γ) của động điểm trong không gian quy chiếu. Ta hãy tìm cách lập phương trình chuyển động của động điểm ấy (hình 1-9a).



Hình 1-9a

Chọn điểm O tùy ý trên quỹ đạo (γ) làm gốc và định một chiều dương để tính cung trên đường cong (γ). Ta gọi góc OM = s là tọa độ cong của động điểm trên quỹ đạo (s là lượng đại số).

Rõ ràng vị trí của M được xác định duy nhất bởi toạ độ cong s. Tọa độ s là thông số định vị của động điểm M trên quỹ đạo (γ). Vậy phương trình chuyển động của điểm M có dạng:

$$s = s(t) \tag{1-7}$$

Để xác định vận tốc, gia tốc của động điểm ở dạng tọa độ tự nhiên ta cần nắm một số tính chất của đường cong đã được trình bày kỹ trong giáo trình hình học vi phân.

1.3.2. Một số tính chất hình học của quỹ đạo

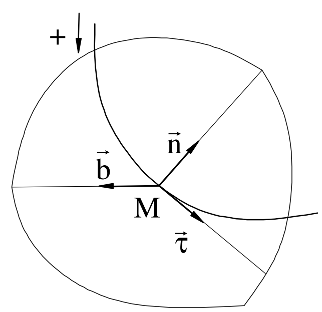
a. Hệ tọa độ tự nhiên (hình 1-9b)

Hệ tọa độ tự nhiên là một hệ gồm ba trục vuông góc với nhau, được xác định như sau:

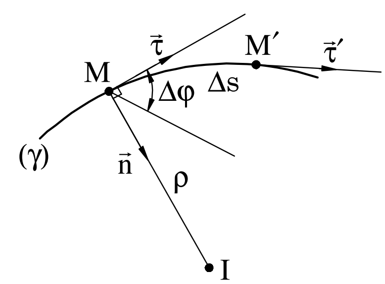
Trục tiếp tuyến thuận là đường tiếp tuyến tại M, có hướng dương đã chọn trên quỹ đạo.

Véctơ đơn vị trên trục này được ký hiệu $\vec{\tau}$.

Lấy cung vô cùng bé MM' của quỹ đạo có giá trị tự do. Ta có thể xem gần đúng rằng cung MM' nằm trong một mặt phẳng (π) duy nhất qua M và chứa tiếp tuyến $\vec{\tau}$. Mặt phẳng (π) được gọi là mặt phẳng mật tiếp tại điểm M của quỹ đạo. Trong mặt phẳng (π) ta kẻ đường vuông góc với tiếp tuyến của quỹ đạo tại điểm M và định hướng về phía lõm của quỹ đạo. Đó là pháp tuyến chính của quỹ đạo tại điểm M. Véctơ đơn vị trên pháp tuyến chính được ký hiệu là $\vec{n}$.



Hình 1-9b



Hình 1-10

Trục vuông góc với mặt phẳng (π) tại điểm m được gọi là trục trùng pháp tuyến của quỹ đạo: Véctơ đơn vị trên trục này được ký hiệu là $\vec{b}$. Thường người ta chọn $\vec{b}$ sao cho $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ lập thành bộ ba thuận.

Rõ ràng hệ trục toạ độ tự nhiên Mτnb được xác định như trên sẽ thay đổi theo vị trí của động điểm M trên quỹ đạo và phản ánh được một phần tính chất hình học của quỹ đạo.

b. Độ cong và bán kính cong của quỹ đạo tại một điểm (hình 1-10)

Cho đường cong quỹ đạo (γ) của động điểm M. Như đã biết từ toán học:

Độ cong của quỹ đạo tại điểm M là một số dương k được xác định theo công thức:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$$

khi đó: $\left|\frac{ds}{d\varphi}\right| = \frac{1}{k} = \rho$ là bán kính cong của quỹ đạo tại M.

Rõ ràng bán kính cong ρ thay đổi theo đường cong quỹ đạo (γ). Với đường tròn thì ρ = R = const. Với đường thẳng thì ρ = ∞. Điểm I trên đường pháp tuyến chính cách M một khoảng bằng ρ được gọi là tâm cong của đường cong tại M. Về mặt hình học người ta đã chứng minh được rằng với độ chính xác cao có thể coi cung $MM' = ds$ là một cung tròn có tâm I bán kính MI = ρ. Đường trong trên tâm I bán kính NI đó gọi là đường tròn mật tiếp tại M của đường cong.

1.3.3. Xác định vận tốc và gia tốc chuyển động của điểm

Ta sẽ xác định những hình chiếu vận tốc và gia tốc của điểm M trên các trục toạ độ tự nhiên.

a. Xác định vận tốc $\vec{V}$ của điểm M

Theo kết quả trên, ta biết rằng: Vận tốc $\vec{V}$ hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo tại M, nên có thể viết:

$$\vec{V} = V_\tau.\vec{\tau}$$

Và do đó chỉ cần xác định giá trị đại số V_τ. Ta luôn luôn có:

$$|V_\tau| = |\vec{V}| = |\dot{\vec{r}}| = |\dot{s}|$$

Bây giờ ta xác định quan hệ dấu giữa V_τ và $\dot{s}$. Có thể xảy ra hai trường hợp: Điểm M chuyển động theo chiều dương và theo chiều âm đã chọn trên quỹ đạo:

Khi M chuyển động theo chiều dương thì một mặt véctơ $\vec{V}$ và $\vec{\tau}$ cùng chiều, nghĩa là $V_\tau > 0$, mặt khác khi đó s luôn luôn tăng theo thời gian, nghĩa là $\dot{s} > 0$. Vậy V_τ và $\dot{s}$ cùng dấu.

Ngược lại khi M chuyển động theo chiều âm thì một mặt $\vec{V}$ và $\vec{\tau}$ trái chiều, nghĩa là $V_\tau < 0$, mặt khác s lại giảm theo thời gian, nên $\dot{s} < 0$. Vậy trong trường hợp này V_τ và $\dot{s}$ cùng dấu. Nói tóm lại V_τ và $\dot{s}$ luôn luôn cùng dấu với nhau. Ta có:

$$V_\tau = \dot{s}(t) \qquad (1\text{-}8)$$

Nghĩa là: Giá trị đại số của vận tốc của điểm M trên tiếp tuyến thuận bằng đạo hàm cấp một theo thời gian của toạ độ cong của điểm ấy trên quỹ đạo.

Giá trị tuyệt đối $\left|\vec{V}\right| = \left|V_\tau\right|$ cho biết tốc độ chuyển động của điểm M, còn dấu V_τ cho biết chiều chuyển động của điểm thuận hay ngược với chiều dương đã chọn trên quỹ đạo.

b. Xác định gia tốc $\overrightarrow{W}$ của điểm M

Gọi W_τ, W_n, W_b là các thành phần gia tốc của điểm M trên trục tọa độ tự nhiên. Ta có:

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}_\tau + \overrightarrow{W}_n + \overrightarrow{W}_b = W_\tau.\vec{\tau} + W_n.\vec{n} + W_b.\vec{b}$$

Từ (1-3) và (1-8): $\overrightarrow{W} = \dot{\vec{V}} = \dfrac{d}{dt}(V_\tau.\dot{\tau}) = \dot{V}_\tau.\vec{\tau} + V_\tau.\dot{\vec{\tau}}$

Trong hình học vi phân người ta đã chứng minh được: $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{\rho}$

Vì vậy: $\dot{\vec{\tau}} = \dot{s}\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = V_\tau.\dfrac{\vec{n}}{\rho}$

Và do đó biểu thức gia tốc có dạng: $\overrightarrow{W} = \dot{V}_\tau.\vec{\tau} + V_\tau^2.\dfrac{\vec{n}}{\rho}$

Từ đó suy ra: $W_\tau = \dot{V}_\tau = \ddot{s}$; $W_n = \dfrac{V_\tau^2}{\rho} = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}$; $W_b = 0$.

Nghĩa là, gia tốc của điểm M nằm trong mặt phẳng mật tiếp của quỹ đạo ở vị trí đang xét và được phân tích ra hai thành phần là gia tốc tiếp tuyến $\overrightarrow{W}_\tau$ và gia tốc pháp tuyến $\overrightarrow{W}_n$:

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}_\tau + \overrightarrow{W}_n$$

Trong đó: $W_\tau = \dot{V}_C = \ddot{s}$; $W_n = \dfrac{V_\tau^2}{\rho} = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}$

nên: $\left|\overrightarrow{W}\right| = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + \dfrac{\dot{S}^4}{\rho^2}}$

Chú ý rằng: Gia tốc pháp tuyến luôn luôn hướng về phía lõm của quỹ đạo. Còn gia tốc tiếp tuyến thì có thể hường cùng chiều hay ngược chiều với vận tốc $\vec{V}$.

c. Ý nghĩa của gia tốc tiếp tuyến và gia tốc pháp tuyến trong chuyển động

Nói chung $\vec{V}$ khác không. Do đó gia tốc pháp tuyến chỉ đồng thời triệt tiêu khi chuyển động của chất điểm là thẳng ($\rho = \infty$). Trong chuyển động cong nói chung $W_n \neq 0$. Như vậy gia tốc pháp tuyến khác không hay luôn luôn bằng không cho ta biết chuyển động là cong hay là thẳng. *Vậy W_n đặc trưng cho sự biến đổi về hướng của véctơ vận tốc.*

Với gia tốc tiếp tuyến: Vì $W_\tau = \dot{V}_\tau$, nên nó phản ánh tính đều hay biến đổi của chuyển động. *Vì vậy W_τ đặc trưng cho sự biến đổi về độ lớn của véctơ vận tốc.*

– Nếu W_τ đồng nhất triệt tiêu thì V_τ = const, động điểm chuyển động đều.

– Nếu W_τ không đồng nhất triệt tiêu thì V_τ biến đổi, chuyển động là biến đổi. Trong trường hợp này, khi $V_\tau.W_\tau > 0$ (vận tốc và gia tốc tiếp tuyến cùng chiều) thì chuyển động là nhanh dần, còn khi $V_\tau.W_\tau < 0$ (vận tốc và gia tốc tiếp tuyến ngược chiều) thì chuyển động là chậm dần.

1.3.4. Chuyển động đều và chuyển động biến đổi đều

a. Chuyển động đều là chuyển động trong đó tốc độ luôn luôn không đổi. Ta có:

$$V_\tau = V = \text{const}; \quad W_\tau = 0$$

Bây giờ nếu ta chọn chiều chuyển động không đổi làm chiều dương trên quỹ đạo, thì phương trình chuyển động được viết như sau:

$$s(t) = V_0 t + s_0$$

$s_0 = 0$ là tọa độ tự nhiên ban đầu của động điểm.

b. Chuyển động biến đổi đều là chuyển động trong đó gia tốc tiếp tuyến không đổi (hay gọi là gia tốc đều: $W_\tau = a$ = const).

Từ đó suy ra biểu thức của vận tốc: $V_\tau = V = at + V_0$

Trong đó V_0 là vận tốc ban đầu của động điểm, và phương trình chuyển dộng của động điểm có dạng:

$$s(t) = \frac{at^2}{2} + V_0 t + s_0$$

Cuối cùng ta cần chú ý rằng: Chuyển động biến đổi đều gồm chuyển động nhanh dần đều và chuyển động chậm dần đều theo chiều dương hay chiều âm. Thông thường ta chọn chiều dương theo vận tôc ban đầu $\vec{V_0}$ và khi đó nếu $a > 0$ là chuyển động nhanh dần đều, còn ngược lại $a < 0$ là chuyển động chậm dần đều.

Ví dụ 2. Một con tầu chuyển động chậm dần đều trên quãng đường vòng cung AB = 1200m, có bán kính cong đều và bằng R = 600m. Lúc vào đường cong con tầu có vận tốc V1 = 54 km/h và lúc đến cuối đường ấy nó có vận tốc

V2 = 36 km/h. Tìm gia tốc của con tầu khi nó ở vị trí ban đầu và vị trí cuối quãng đường.

Bài giải:

Con tầu được coi như động điểm chuyển động chậm dần đều trên cung tròn AB. Chọn chiều dương trên quỹ đạo là chiều chuyển động của con tầu. Chọn gốc thời gian là lúc con tầu chạy vào đường vòng, gốc tọa độ cong là vị trí của động điểm lúc ấy. Ta có: $t = t_0 = 0$ và $s_0 = 0$.

***a.** Gia tốc của con tầu ở vị trí A (ban đầu).*

Ta có: $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}_\tau + \overrightarrow{W}_n$ và $\left|\overrightarrow{W}\right| = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}$

Chuyển động chậm dần đều nên: W_τ = hằng số < 0.

Đặt $W_\tau = a$, vậy ta có: $V = V_1 - at$

$$s = V_1 t - \frac{at^2}{2}$$

Theo đầu bài ta có: V_1 = 54 km/h = 15m/s; V_2 = 36 km/h = 10 m/s; s_1 = 1200m.

Vậy: $10 = 15 - at$

$$1200 = 15t - \frac{at^2}{2}$$

Suy ra a = 0,052 m/s^2.

Từ đó: $W_\tau = -\,0,052$ m/s^2 ; $W_n = \frac{V^2}{R} = \frac{15^2}{600} = 0,375\ m/s^2$

$$W_1 = \sqrt{(-0,052)^2 + (0,375)^2} \cong 0,4 m/s^2$$

***b.** Gia tốc của con tầu ở vị trí B (vị trí cuối):*

$$W_\tau = -\,0,052 \text{ m/s}^2 \quad W_n = \frac{V^2}{R} = \frac{10^2}{600} = \frac{1}{6}\ m/s^2$$

Vậy: $W_2 = \sqrt{(-0,052)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} \cong 0,2 m/s^2$

Ví dụ 3. Một chất điểm chuyển động theo phương trình: x = 2cos4t; y = 2sin4t; z = 2t (đường ren-vít). Xác định bán kính cong của quỹ đạo của điểm.

Bài giải:

Bán kính cong của quỹ đạo được xác định theo công thức $R = \frac{V^2}{W_n}$

Ta tìm V và W_n.

Theo công thức đã biết, ta có:

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (-2.4\sin 4t)^2 + (2.4\cos 4t)^2 + 2^2 = 68$$

$$W_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$$

$$W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Hay: $W_n = \sqrt{(-2.4.4\cos 4t)^2 + (-2.4.4\sin 4t)^2} = 52$

Cuối cùng ta có: $\rho = \frac{V^2}{W_n} = \frac{68}{32} = 2\frac{1}{8}\ m$.

CHƯƠNG II: CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

Trong chương này ta sẽ khảo sát hai dạng chuyển động cơ bản của vật rắn là chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay quanh một trục cố định. Như sẽ thấy về sau, mọi dạng chuyển động phức tạp khác của vật rắn đều được phân tích ra thành các dạng chuyển động đó. Vì vậy người ta gọi hai chuyển động nói trên là những chuyển động cơ bản của vật rắn.

Việc khảo sát chuyển động được tiến hành qua hai bước: Bước khảo sát chuyển động của toàn vật rắn và bước khảo sát chuyển động của các điểm thuộc vật rắn ấy.

A. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Vì chuyển động tịnh tiến là đơn giản nên việc khảo sát chuyển động của toàn vật và chuyển động của các điểm thuộc vật được khảo sát đồng thời.

2.1. Định nghĩa và đặc điểm chuyển động tịnh tiến

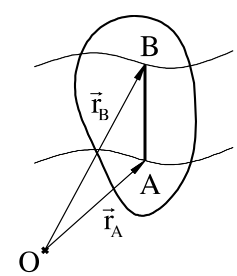
2.1.1. Định nghĩa. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn là chuyển động trong đó mọi đường thẳng thuộc vật đều luôn luôn không đổi phương. Ví dụ: Tầu hỏa chuyển động tịnh tiến đối với mặt đất khi con tầu chạy trên đường ray thẳng, biến tàu hỏa luôn luôn chuyển động tịnh tiến đối với khung giá mang đầu máy . v. v...

2.1.2. Đặc điểm của chuyển động

a. Định lý

Trong chuyển động tịnh tiến, các điểm thuộc vật rắn đều có quỹ đạo như nhau và tại mỗi thời điểm chúng có cùng vận tốc và gia tốc.

Chứng minh: Cho vật rắn chuyển động tịnh tiến. Ta chỉ cần khảo sát hai điểm bất kỳ A, B thuộc vật, phải chứng minh:



Hình 2-1

− *Quỹ đạo như nhau* (nghĩa là quỹ đạo điểm A trùng khít quỹ đạo điểm B). Từ hình vẽ (hình 2-1) thông số xác định các điểm A và B là: $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$. Ta có đẳng thức:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$$

Trong đó véctơ $\overrightarrow{AB}$ là không đổi, nghĩa là có môđun không đổi vì khoảng cách giữa hai điểm thuộc vật rắn có chiều không đổi vì vật rắn chuyển động.

Từ đẳng thức đó ta thấy rằng, vị trí của điểm B có thể nhận được sau khi dịch chuyển điểm A lên một đại lượng bằng véctơ hằng $\overrightarrow{AB}$ đối với một thời điểm bất kỳ.

Như vậy quỹ đạo điểm B cũng giống như quỹ đạo điểm A.

− *Vận tốc và gia tốc*

Ta có: $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$, đạo hàm theo thời gian ta có:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A \quad (\text{vì } \overrightarrow{AB} = \text{const})$$

$\vec{W}_B = \vec{W}_A$ do A và B là hai điểm bất kỳ thuộc vật rắn nên định lý đã được chứng minh.

b. Hệ quả

Để khảo sát chuyển động tịnh tiến của vật rắn ta chỉ cần khảo sát chuyển động của một điểm thuộc vật. Nên thông thường người ta lấy tên chuyển động của điểm đặt tên cho chuyển động tịnh tiến của vật.

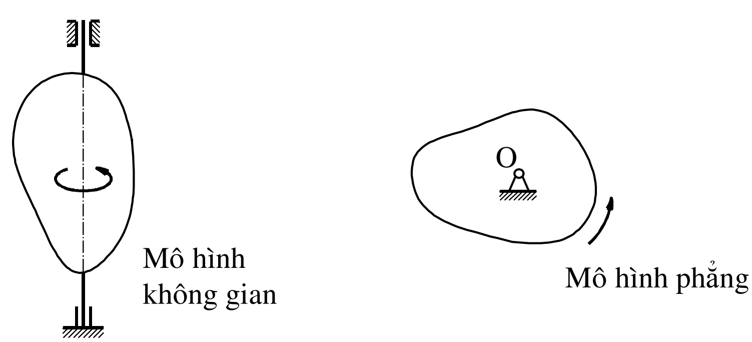
Và lấy vận tốc, gia tốc của điểm làm vận tốc, gia tốc của vật. Ví dụ: Xe Ô-tô chuyển động tịnh tiến thẳng với vận tốc 5m/s và gia tốc 0,2m/s^2 ...

B. Chuyển động quay của vật rắn xung quanh trục cố định

Định nghĩa: *Nếu trong quá trình chuyển động vật rắn có hai điểm luôn luôn cố định, ta nói rằng vật rắn quay xung quanh trục cố định, trục cố định đi qua hai điểm ấy. Trục đó gọi là trục quay.*

Mọi điểm nằm trên trục quay có vận tốc bằng không, và một điểm bất kỳ thuộc vật không nằm trên trục quay vạch nên quỹ đạo tròn có mặt phẳng quỹ đạo vuông góc với trục quay, có tâm quỹ đạo nằm trên trục quay và bán kính quỹ đạo bằng khoảng cách từ điểm đó đến trục quay.

Ví dụ. Cánh cửa quay xung quanh hai bản lề cố định là vật rắn quay xung quanh trục cố định. Vật rắn chuyển động như vậy có thể biểu diễn bằng hai mô hình: Không gian và phẳng (hình 2-2).



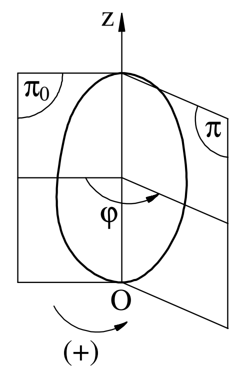
Hình 2-2

2.2. Khảo sát chuyển động của vật rắn

2.2.1. Phương trình chuyển động

Chọn trên trục quay z một hướng dương. Chọn chiều quay dương của vật là chiều mà khi nhìn từ mút trục z xuống vật, thấy vật quay theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Dựng hai mặt phẳng π_0 và π qua trục quay của vật. Trong đó π_0 là mặt phẳng cố định còn π là mặt phẳng gắn với vật (hình 2-3). Rõ ràng vị trí của π sẽ xác định vị trí của vật. Gọi φ là góc đại số giữa hai mặt phẳng π_0 và π. Ta có thể chọn φ làm thông số để xác định vị trí của vật quay quanh trục cố định Oz. Khi vật quay thì góc φ biến thiên phụ thuộc thời gian, do đó phương trình chuyển động của vật có dạng:



Hình 2-3

$$\varphi = \varphi(t) \qquad (2\text{-}1)$$

Người ta đo góc φ bằng radian (rad).

2.2.2. Vận tốc góc và gia tốc góc chuyển động quay của vật

Để đặc trưng cho trạng thái chuyển động quay của vật, người ta đưa vào khái niệm vận tốc góc và gia tốc góc, được định nghĩa như sau:

a. Vận tốc góc của vật

Vận tốc góc trung bình của vật trong khoảng thời gian Δt là lượng đại số ký hiệu ω_{tb}.

$$\omega_{tb} = \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Vận tốc góc tức thời là lượng đại số ký hiệu ω.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \qquad (2\text{-}2)$$

nghĩa là: Vận tốc góc của vật rắn quay xung quanh một trục cố định là đạo hàm cấp một theo thời gian góc định vị của vật ấy.

Rõ ràng dấu của ω cho biết chiều quay của vật quanh trục. Thật vậy nếu $\omega > 0$ thì $\dot{\varphi} > 0$ nghĩa là φ tăng theo thời gian và vật quay theo chiều dương đã chọn để tính φ. Ngược lại $\omega < 0$ thì $\dot{\varphi} < 0$ vật quay theo chiều âm để tính φ.

Véctơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ đặc trưng cho sự quay của vật được xác định:

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k} \qquad (2\text{-}2a)$$

Thứ nguyên của vận tốc góc $[\omega] = \frac{1}{T}$, đơn vị là $\frac{rad}{s}$, ký hiệu $\frac{rad}{s} = s^{-1}$.

Trong kỹ thuật người ta còn tính tốc độ góc bằng đơn vị vòng/phút. Giả sử vật quay n vòng trong một phút khi đó ta đổi ra rad/s sẽ là:

$$|\omega| = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}\left(\frac{rad}{s}\right) \tag{2-3}$$

b. Gia tốc góc của vật

Để biết trực tiếp sự biến thiên của vận tốc góc, người ta đưa vào khái niệm gia tốc góc được định nghĩa như sau:

Gia tốc góc của vật được ký hiệu ε là đạo hàm cấp một theo thời gian của vận tốc góc.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \tag{2-4}$$

Véctơ gia tốc góc của vật quay: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{k}$ (2-4a)

Thứ nguyên của gia tốc góc $[\varepsilon] = \frac{1}{T^2}$, đơn vị là $\frac{rad}{s^2}$, ký hiệu $\frac{rad}{s^2} = s^{-2}$.

Bây giờ kết hợp dấu của ω và ε để biết chuyển động là quay đều hay biến đổi (nhanh dần, chậm dần). Ta có định nghĩa sau:

Chuyển động quay được gọi là đều nếu tốc độ góc không đổi theo thời gian nghĩa là $\omega = \omega_0$ = const. Trái lại nếu tốc độ góc thay đổi thì chuyển động quay được gọi là biến đổi nếu $|\omega|$ tăng thì chuyển động quay là nhanh dần, nếu $|\omega|$ giảm xuống thì chuyển động quay là chậm dần.

Chú ý:

Sự biến đổi của vận tốc góc ω được đặc trưng bởi sự biến đổi của ω^2.

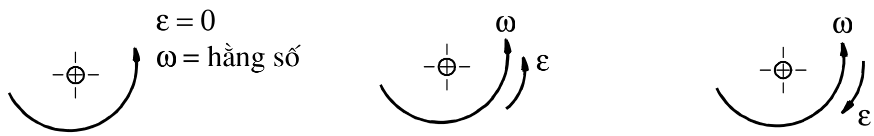
Xét: $\frac{d}{dt}(\omega)^2 = 2\omega.\varepsilon$, ta có:

- Nếu ε = 0 thì ω = const suy ra chuyển động quay đều.
- Nếu ε ≠ 0 thì ω ≠ const suy ra chuyển động quay biến đổi.

Khi ω, ε > 0 thì ω^2 tăng (tức là ω cũng tăng) vật quay nhanh dần.

Khi ω, ε < 0 thì ω^2 giảm (tức là ω cũng giảm) vật quay chậm dần.

Những điều nói trên có thể biểu diễn cụ thể trên hình vẽ (hình 2-4).



Quay đều　　Quay nhanh đều　　Quay chậm dần

Hình 2-4

Chiều mũi tên vòng biểu diễn ω dùng để chỉ chiều quay của vật, còn chiều mũi tên vòng biểu diễn ε không có liên quan gì đến chiều quay của vật mà chỉ để biết vật quay nhanh dần hay chậm dần.

Tùy cách xác định chiều âm dương mà ta có chuyển động quay nhanh dần hoặc chậm dần theo chiều âm hay theo chiều dương.

2.2.3. Khảo sát vài chuyển động đặc biệt

a. Chuyển động quay đều

Với ω = const thì chuyển động là quay đều, chọn chiều quay của vật làm chiều dương để tính góc, khi đó ta có:

$\omega = \omega_0 > 0$, do đó: $\begin{cases} \varepsilon = 0 \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \end{cases}$ với φ_0 là góc quay ban đầu.

b. Chuyển động quay biến đổi đều

Với ε = const thì vật quay biến đổi đều ta suy ra ω và φ như sau:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t;\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Công thức này mô tả hai quá trình chuyển động quay nhanh dần và chậm dần đều. Ta có thể viết công thức:

$$\begin{cases} \varepsilon = const \\ \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \end{cases}$$

Với điều kiện chọn chiều dương trùng với chiều quay ban đầu của vật, trong các phương trình đó dấu (+) ứng với trường hợp quay nhanh dần còn dấu (–) ứng với trường hợp quay chậm dần. Các phương trình chỉ đúng cho đến khi vật dừng lại.

Ví dụ 1. Một động cơ khởi động từ trạng thái nghỉ, quay nhanh dần đều với gia tốc góc $\varepsilon = 2s^{-2}$. Hỏi tới khi đạt tốc độ n = 3000v/p thì động cơ đã quay được bao nhiêu vòng.

Bài giải:

Vì vật quay nhanh dần từ trạng thái nghỉ nên chọn $\varphi_0 = 0$ ta có các phương trình chuyển động sau đây:

$$\varepsilon = \text{hằng số};\ \omega = \varepsilon t\ ;\ \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

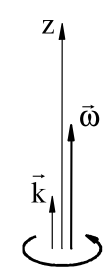
Từ đó suy ra hệ thức: $\omega^2 = 2\varepsilon\varphi$ nên $\varphi = \dfrac{\omega^2}{2\varepsilon}$, nhờ đó ta tính được góc quay của vật khi tốc độ góc đạt n = 3000 vòng/phút.

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2\varepsilon} = \frac{1}{2.(2\pi)} \cdot \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 = \frac{\pi^2.3000^2}{2.2\pi.30} = 2500\pi$$

2.2.4. Véctơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ và véctơ gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$

Đây là hai khái niệm nhằm biểu diễn cụ thể và gọn gàng những đặc điểm nói trên của chuyển động quay của vật.

a. Véctơ vận tốc góc



Hình 2-5

Véc tơ vận tốc góc kí hiệu là $\vec{\omega}$ được xác định như sau: $\vec{\omega}$ nằm trên trục quay của vật sao cho khi nhìn từ ngọn đến gốc véctơ $\vec{\omega}$ sẽ thấy vật quay ngược chiều kim đồng hồ và:

$$|\vec{\omega}| = |\omega| = |\dot{\varphi}|$$

Gọi $\vec{k}$ là véc tơ đơn vị trên trục quay thì ta có:

$$|\vec{\omega}| = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k} \qquad \text{(2-5)}$$

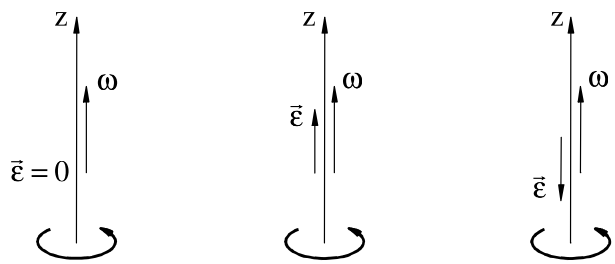
Hệ thức (2-5) được nghiệm đúng trong cả 2 trương hợp vật quay ngượcvà thuận chiều kim đồng hồ quanh trục quay.

b. Véc tơ gia tốc góc

Véc tơ gia tốc góc được định nghĩa như sau: $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ (2-6)

Ta có thể viết như sau: $\vec{\varepsilon} = \varepsilon.\vec{k} = \dot{\omega}.\vec{k} = \ddot{\varphi}.\vec{k}$ (2-7)

Như vậy véctơ $\vec{\varepsilon}$ cũng nằm trên trục quay.



Hình 2-6

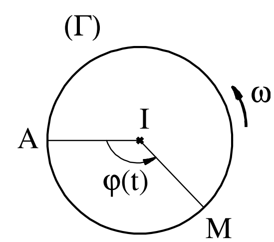
c. Biểu thức tính biến đổi chuyển động theo $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$

- Chuyển động quay đều $\varepsilon = 0$, $\omega = const$.
- Chuyển động quay nhanh dần: $\omega.\varepsilon > 0$ suy ra $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ cùng chiều.
- Chuyển động quay chậm dần $\omega.\varepsilon < 0$ suy ra $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ ngược chiều (hình 2-6).

2.3. Khảo sát chuyển động của các điểm thuộc vật

2.3.1. Quỹ đạo và phương trình chuyển động

Quỹ đạo của điểm M bất kỳ thuộc vật là đường tròn, có tâm I nằm trên trục quay, có bán kính IM là khoảng cách từ điểm đó đến trục quay (hình 2-7) ta khảo sát điểm theo tọa độ tự nhiên.



Hình 2-7

Tại thời điểm ban đầu t = 0, giả sử mặt phẳng $\pi \equiv \pi_0$, gọi A là giao điểm qua mặt phẳng π_0 với quỹ đạo (π) của điểm M. Sau khoảng thời gian t thì phương trình chuyển động của vật quay quanh trục là $\varphi(t)$ khi đó điểm M quay đi một góc $\widehat{AIM} = \varphi(t)$. Lấy cung $\overset{\frown}{AM} = S$ ta có:

$$S = IM.\varphi(t) = R.\varphi(t)$$

Phương trình chuyển động của điểm M là: $S = R.\varphi(t)$ (2-8)

2.3.2. Vận tốc và gia tốc các điểm thuộc vật

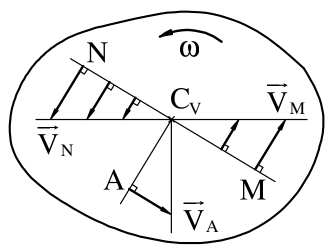
Giả sử biết chuyển động quay của vật hãy tính giá trị vận tốc và giá trị gia tốc, xác định chiều của chúng.

a. Vận tốc các điểm thuộc vật $\vec{V}$

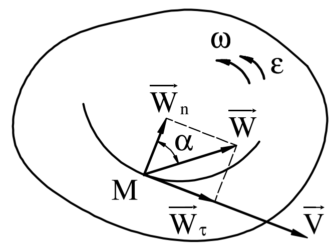
Ta đã biết vận tốc của điểm tiếp xúc với quỹ đạo của nó, và $\vec{V}$ hướng theo chiều chuyển động, nên véctơ $\vec{V}$ hướng thuận theo chiều quay của vật. Còn giá trị $\left|\vec{V}\right|$ được tính như sau:

$$\left|\vec{V}\right| = |\dot{S}| = R\,|\dot{\varphi}| = R\,|\omega| \qquad (2\text{-}9)$$

Hình (2-8) biểu thị sơ đồ phân bố vận tốc các điểm thuộc vật trên một tiết diện vuông góc với trục quay, quanh trục quay.



Hình 2-8



Hình 2-9

b. Gia tốc $\vec{W}$ của điểm thuộc vật

Điểm M chuyển động tròn nên ta có (hình 2-9): $\vec{W} = \vec{W}_\tau + \vec{W}_n$

– Trong đó $\vec{W}_n$ hướng vào tâm I của quỹ đạo và có giá trị:

$$\left|\vec{W}_n\right| = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(R.\omega^2)^2}{R} = R.\omega^2$$

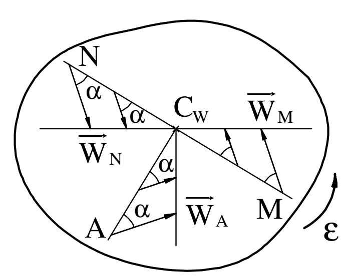
– Còn gia tốc tiếp tuyến $\vec{W}_\tau$ hướng cùng hay ngược chiều với $\vec{V}$ và có giá trị là:

$$\left|\vec{W}_\tau\right| = |\ddot{S}| = R\,|\varepsilon| \qquad (2\text{-}10)$$

– Gia tốc toàn phần $\vec{W}$ có giá trị: $\left|\vec{W}\right| = \sqrt{W_r^2 + W_n^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$ (2-11)

và hợp với $\vec{W}_n$ một góc α, có:

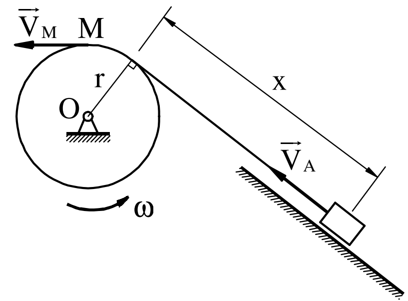
$$tg\alpha = \frac{\left|\vec{W}_\tau\right|}{\left|\vec{W}_n\right|} = \frac{R\,|\varepsilon|}{R.\omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \qquad (4\text{-}12)$$



Hình 2-10

Từ những kết quả trên ta suy ra sơ đồ phân bố gia tốc các điểm thuộc vật trên một tiết diện vuông góc với trục quay, xung quanh trục quay (hình 2-10).

Ví dụ 2. Vật nặng A được kéo lên theo quy luật $x = \frac{at^2}{2}$. Thông qua dây cáp mềm không dãn nó kéo vật bằng trục tời có bán kính r quay quanh trục O cố định. Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của trục tời lúc $t_1 = 3s$ (hình 2-11).



Hình 2-11

Bài giải:

Theo đầu bài vì dây không dãn nên vận tốc của một điểm trên vành tời cũng bằng vận tốc một điểm thuộc dây và cùng trị số vận tốc của vật nặng A vậy ta có:

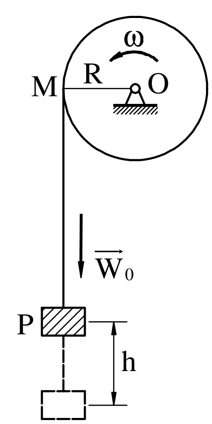
$$V_M = V_A = \dot{x} = at$$

Suy ra: $V_M = r\omega \rightarrow \omega = \frac{at}{r}$

còn $\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{a}{r}$. Kết quả đó chỉ ra rằng trục tời quay biến đổi đều.

Tại $t_1 = 3s$ thì $\omega = \frac{3a}{r} s^{-1}$ và $\varepsilon = \frac{a}{r} s^{-2}$.

Ví dụ 3. Một sợi dây không dãn được cuốn vào vành bánh xe có trục quay nằm ngang buộc tải trọng P. Ở thời điểm nào đó tải trọng bắt đầu rơi với gia tốc W_0 và làm quay bánh xe. Hãy tìm gia tốc toàn phần của một điểm trên vành bánh xe là hàm số của độ cao h (là độ dịch chuyển của tải trọng P), bán kính bánh xe là R. Vận tốc ban đầu của tải trọng P bằng 0 (hình 2-12).



Hình 2-12

Bài giải:

Vì dây không dãn nên gia tốc tiếp tuyến của điểm M thuộc vành bánh xe cũng bằng gia tốc một điểm trên dây và cũng bằng $\vec{W}_0$. Vậy ta có:

$$\vec{W}_0 = \vec{W}_\tau^M \rightarrow W_0 = R\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{W_0}{R}$$

Bánh xe quay quanh nhanh dần đều. Chọn thời điểm ban đầu $t_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$; $\omega_0 = 0$. Để xác định gia tốc toàn phần của điểm B thuộc vành bánh xe ta dùng công thức:

$$\left|\vec{W}_B\right| = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (1)$$

Trong đó: $\varepsilon = \frac{W_0}{R} = const$

Vậy: $\omega = \int_0^t \varepsilon dt = \dfrac{W_0}{R} t$ (2)

Suy ra: $\varphi = \int_0^t \omega dt = \dfrac{W_0 t^2}{2R}$ vì h = φR.

Vậy $t = \sqrt{\dfrac{2h}{W_0}}$ thay vào (2) ta có: $\omega = \dfrac{W_0}{R}\sqrt{\dfrac{2h}{W_0}}$

Thay giá trị ε và ω vào (1) ta có: $\left|\overrightarrow{W_B}\right| = R\sqrt{\left(\dfrac{W_0}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{W_0}{R}\sqrt{\dfrac{2h}{W_0}}\right)^4} = \dfrac{W_0}{R}\sqrt{R^2 + 4h^4}$

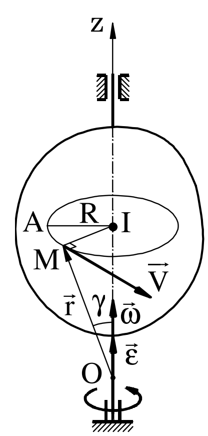
c. Biểu diễn véctơ vận tốc $\vec{V}$ và gia tốc $\vec{W}$ theo véctơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ và gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$

Cho vật rắn quay xung quanh trục cố định có $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ như hình vẽ (hình 2-13). Theo cách xác định vận tốc $\vec{V}$ ở trên ta có giá trị: $\left|\vec{V}\right| = R\,|\,\omega\,|$

Lấy điểm O cố định trên trục quay ta có: $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ gọi $\gamma = (\vec{\omega}, \vec{r})$ ta có:

$$\left|\vec{V}\right| = R.|\,\omega\,| = |\,r\sin\alpha\,|.|\,\omega\,|$$

Mặt khác: $\vec{V}$ thẳng góc với mặt phẳng chứa MI và trục quay, nên cũng vuông góc với mặt phẳng $(\vec{\omega}, \vec{r})$. Chiều của $\vec{V}$ hướng theo chiều quay của vật nên nó tạo với $\vec{\omega}, \vec{r}$ thành bộ ba thuận.



Hình 2-13

Vậy ta có công thức tính vận tốc của M:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (2\text{-}13)$$

Từ đó: $\overrightarrow{W} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Trong đó: $\overrightarrow{W_\tau} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}$; $W_\tau = \varepsilon.R$

$\overrightarrow{W_n} = \vec{\omega} \wedge \vec{V}$; $W_n = ự^2.R$

Các công thức này sẽ được sử dụng khi khảo sát các chuyển động phức tạp, như chuyển động quay quanh một điểm cố định, chuyển động tự do của vật rắn.

Công thức (2-13) là công thức cơ bản của động học vật rắn, gọi là công thức Ơ-le.

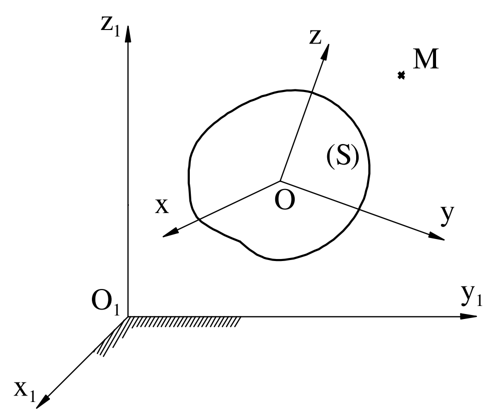
CHƯƠNG III: CHUYỂN ĐỘNG PHỨC HỢP CỦA ĐIỂM

Trong Chương I ta đã khảo sát chuyển động của điểm so với hệ quy chiếu đã chọn được coi là cố định. Trong chương này ta sẽ khảo sát chuyển động của điểm đối với hệ quy chiếu đang chuyển động với hệ quy chiếu khác đã chọn được coi là cố định.

3.1. Các định nghĩa

3.1.1. Chuyển động tuyệt đối, chuyển động tương đối và chuyển động kéo theo

Cho động điểm M chuyển động với vật (S), vật (S) lại chuyển động đối với hệ $O_1x_1y_1z_1$ đã chọn làm hệ cố định. Người ta gắn hệ toạ độ Oxyz với vật (s). Khi đó thì hệ quy chiếu $O_1x_1y_1z_1$ là hệ quy chiếu cố định hay là hệ quy chiếu tuyệt đối, còn hệ quy chiếu Oxyz là hệ quy chiếu động hay hệ quy chiếu tương đối (hình 3-1).



Hình 3-1

Chuyển động của điểm M đối với hệ quy chiếu cố định (hệ quy chiếu tuyệt đối) $O_1x_1y_1z_1$ là chuyển động tuyệt đối. Chuyển động của điểm M đối với hệ quy chiếu tương đối Oxyz là chuyển động tương đối. Chuyển động của vật (s) (hay hệ động Oxyz) đối hệ cố định $O_1x_1y_1z_1$ là chuyển động kéo theo.

3.1.2. Vận tốc, gia tốc tuyệt đối, kéo theo của điểm

Vận tốc, gia tốc của động điểm M trong chuyển động tuyệt đối (đối với hệ quy chiếu $O_1x_1y_1z_1$) là vận tốc và gia tốc tuyệt đối, ký hiệu $\vec{V}_a^M$ và $\vec{W}_a^M$.

Vận tốc và gia tốc của động điểm M trong chuyển động tương đối (đối với hệ quy chiếu Oxyz) là vận tốc và gia tốc tương đối của nó. Ký hiệu $\vec{V}_r^M$ và $\vec{W}_r^M$.

Vận tốc và gia tốc kéo theo của động điểm M là vận tốc và gia tốc của điểm M^* gắn chặt với hệ động, tại thời điểm khảo sát trùng với vị trí của M. Ký hiệu $\vec{V}_e^M$ và $\vec{W}_e^M$.

Mối quan hệ giữa vận tốc và gia tốc đã trình bày ở trên được thể hiện trong các định lý hợp vận tốc và hợp gia tốc dưới đây.

3.2. Định lý hợp vận tốc

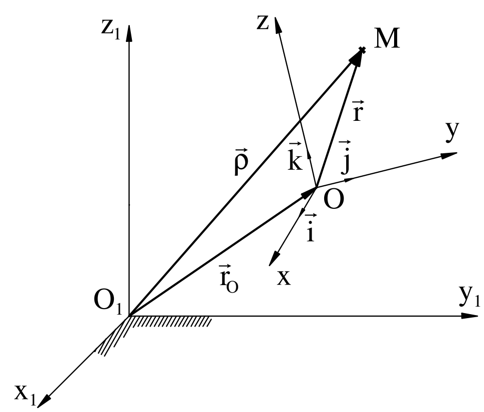
Phát biểu:

Tại mỗi thời điểm vận tốc tuyệt đối của động điểm bằng tổng hình học vận tốc tương đối và vận tốc kéo theo của nó.

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

Chứng minh:

Bằng cách dùng định nghĩa các loại chuyển động ở trên để tính trực tiếp các vận tốc $\vec{V}_a$, $\vec{V}_r$ và $\vec{V}_e$, sau đó so sánh với hệ thức (3-1).



Hình 3-2

Xét điểm M chuyển động đối với hệ động Oxyz, đồng thời hệ Oxyz lại chuyển động với hệ cố định $O_1x_1y_1z_1$. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các véctơ đơn vị trên các trục của hệ toạ độ động Oxyz. Khi đó phương trình chuyển động tuyệt đối của M là: $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$, phương trình chuyển động tương đối của điểm M là $\vec{r} = \vec{r}(t) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ nhìn vào hình vẽ (hình 3-2) ta có:

$$\vec{\rho} = \vec{r}_0 + \vec{r} = \vec{r} + x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

Ta có: $\vec{V}_a = \dfrac{d\vec{\rho}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_0}{dt} + \dfrac{dx}{dt}.\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}.\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}.\vec{k} + x\dfrac{d\vec{i}}{dt} + y\dfrac{d\vec{j}}{dt} + z\dfrac{d\vec{k}}{dt}$

$\vec{V}_r = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}.\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}.\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}.\vec{k}$; ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các véctơ hằng)

Bây giờ tính vận tốc $\vec{V}_e$: $\vec{V}_e = \vec{V}_{M*}$. Theo định nghĩa vận tốc kéo theo thì điểm M^* tại thời điểm khảo sát trùng với điểm M, nên phương trình chuyển động là $\vec{\rho}_{M*} = \vec{\rho}(t)$ trong đó x, y, z là các hằng số. Vậy:

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{M^*} = \frac{d\vec{\rho}_{M^*}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Nhìn vào các biểu thức vận tốc của $\vec{V}_a$, $\vec{V}_r$, $\vec{V}_e$ ta suy ra hệ thức (3-1) và định lý được chứng minh.

Cuối cùng cần chú ý rằng:

a) Từ hệ thức (3-1) ta suy ra độ lớn của vận tốc $\vec{V}_a$: Nếu gọi góc giữa hai véctơ $\vec{V}_r$ và $\vec{V}_e$ bằng α, ta có:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\alpha}$$

b) Ta có thể coi hệ động Oxyz như một vật rắn chuyển động tổng quát, cá vận tốc góc là $\vec{\omega}_e$, khi đó theo công thức ơle:

$$\dot{\vec{i}} = \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{i}\ ;\ \ \dot{\vec{j}} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}_e\wedge\vec{j}\ ;\ \ \dot{\vec{k}} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}_e\wedge\vec{k}$$

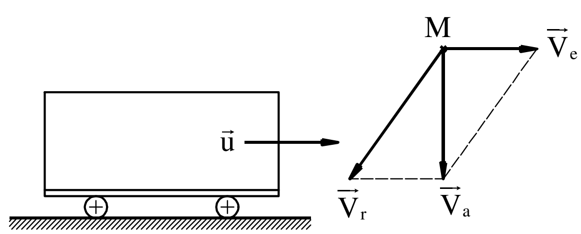
Từ đó vận tốc kéo theo của điểm M có thể viết dưới dạng:

$$\vec{V}_e = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_e(x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}) = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_e\wedge\vec{r}$$

Vậy hệ thức (3-1) có dạng: $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_0 + \vec{\omega}_e\wedge\vec{r}$ (3-1a)

Nếu hệ động chuyển động tịnh tiến thì: $\vec{\omega}_e = 0$ và $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_0$ (3-1b)

Ví dụ 1. Giải thích hiện tượng: Trong điều kiện lặng gió hạt mưa xiên đối với người ngồi trong xe hay là đang chuyển động (hình 3-3).



Hình 3-3

Giả sử con tàu đang chuyển động với vận tốc $\vec{u}$ đối với mặt đường. Còn hạt mưa rơi thẳng đứng với vận tốc $\vec{V}$. Ta sẽ tìm vận tốc tương đối của hạt mưa đối với con tàu.

Khảo sát chuyển động của hạt mưa. Chọn mặt đất làm hệ quy chiếu cố định, toa tàu làm hệ quy chiếu động.

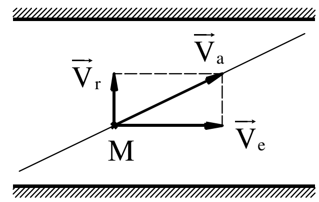
Vận tốc của hạt mưa đối với mặt đường là vận tốc tuyệt đối $\vec{V}_a = \vec{V}$. Vận tốc theo của nó tìm được như sau: Tưởng tượng gắn M với toa tàu nó sẽ lại bị kéo đi với vận tốc $\vec{u}$. Vậy theo định nghĩa $\vec{V}_e = \vec{u}$.

Áp dụng hệ thức (2-1) ta có: $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{u}$

Dựa trên hình vẽ (hình 3-3) ta thấy hạt mưa rơi xiên đối với toa tàu và có trị số:

$$V_r = \sqrt{u^2 + V^2}$$

Ví dụ 2. Giải thích hiện tượng con thuyền sang chéo dòng sông (hình 3-4). Giả sử con thuyền sang ngang dòng nước chảy. Vận tốc của dòng nước là $\vec{V}$, vận tốc của con thuyền trên mặt nước là $\vec{u}$ hướng vuông góc với $\vec{V}$. Tìm vận tốc tuyệt đối của con thuyền với bờ sông.



Hình 3-4

Bài giải:

Ta khảo sát chuyển động của con thuyền xem như một động điểm. Chọn hệ động là dòng nước chảy, hệ cố định là hai bờ sông.

Rõ ràng vận tốc tương đối của động điểm bằng $\vec{V}_r = \vec{u}$, vận tốc kéo theo của nó là $\vec{V}_e = \vec{V}$.

Theo (3-1), ta có: $\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{u}$

Từ hình vẽ ta thấy, đối với bờ sông thì con thuyền qua sông chéo dòng nước với vận tốc: $V_a = \sqrt{V^2 + u^2}$

3.3. Định lý hợp gia tốc – Gia tốc Côriôlít

3.3.1. Định lý hợp gia tốc

Tại mọi thời điểm gia tốc tuyệt đối của động điểm bằng tổng hình học gia tốc tương đối, gia tốc kéo theo và gia tốc Côriôlít.

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_C$$

Chứng minh:

Cũng giống như chứng minh định lý hợp vận tốc, dùng định nghĩa tính trực tiếp .., $\vec{W}_r$, $\vec{W}_e$. Sau đó so sánh $\vec{W}_a$ và tổng $\vec{W}_r + \vec{W}_e$, đại lượng còn lại là gai tốc Côriôlít $\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_C$.

Ta có:

$$\overrightarrow{W}_a = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_e\right) = \overrightarrow{W}_B + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k}$$
$$+ 2\left(\frac{dx}{dt}.\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}.\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{W}_r = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{k} \quad \text{(trong đó } \vec{i}\text{, } \vec{j}\text{, } \vec{k} \text{ là các véctơ hằng)}$$

$$\overrightarrow{W}_e = \overrightarrow{W}_B + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \quad \text{(x, y, z là các hằng số)}$$

Ta gọi lượng $2\left(\frac{dx}{dt}.\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}.\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$ là gia tốc Côriôlít, ký hiệu $\overrightarrow{W}_C$.

Từ đó: $\overrightarrow{W}_a = \overrightarrow{W}_r + \overrightarrow{W}_e + \overrightarrow{W}_C$ và định lý được chứng minh.

Rõ ràng độ lớn của gia tốc tuyệt đối $\overrightarrow{W}_a$ bằng độ dài đường chéo hình hộp mà ba cạnh là ba thành phần gia tốc $\overrightarrow{W}_r$, $\overrightarrow{W}_e$, $\overrightarrow{W}_C$.

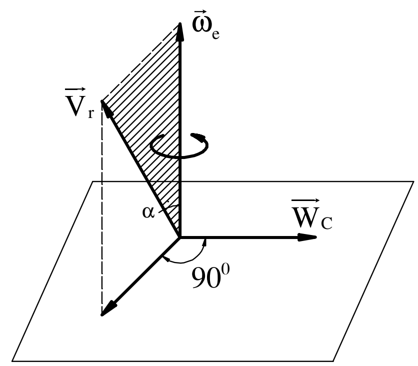
3.3.2. Biểu thức gia tốc Côriôlít

Biểu thức Côriôlít có dạng sau:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{W}_C &= 2\left(\frac{dx}{dt}.\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}.\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{k}}{dt}\right)\\ &= 2\left(\frac{dx}{dt}\left(\vec{\omega}_e \wedge \vec{i}\right) + \frac{dy}{dt}\left(\vec{\omega}_e \wedge \vec{j}\right) + \frac{dz}{dt}\left(\vec{\omega}_e \wedge \vec{k}\right)\right)\\ &= 2\left[\vec{\omega}_e \wedge \left(\frac{dx}{dt}.\vec{i} + \frac{dy}{dt}.\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}\right)\right]\end{aligned}$$

Vậy: $\overrightarrow{W}_C = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$

Từ đó ta suy ra: Phương $\overrightarrow{W}_C$ vuông góc với mặt phẳng chứa $\vec{\omega}_e$ và $\vec{V}_r$, chiều của $\overrightarrow{W}_C$ sao cho lập với $\vec{\omega}_e$ và $\vec{V}_r$ một bộ ba thuận (hình 3-5).



Hình 3-5

Độ lớn của $\overrightarrow{W}_C$ bằng:

$$\left|\overrightarrow{W}_C\right| = 2\left|\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r\right| = 2\,|\,\vec{\omega}_e\,|.\left|\vec{V}_r\right|.\sin\alpha$$

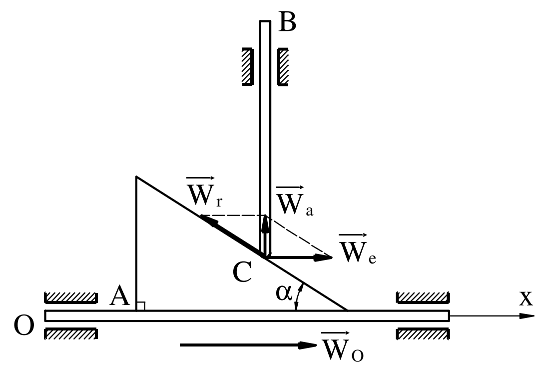
Rõ ràng gia tốc Côriôlít triệt tiêu khi xảy ra một trong các trường hợp sau:

a. $\vec{\omega}_e = 0$, tức là chuyển động kéo theo (chuyển động của hệ động) là chuyển động tịnh tiến.

b. $\vec{V}_r = 0$ tức là động điểm điểm đứng yên với hệ động (trường hợp cân bằng tương đối).

c. $\vec{\omega}_e$ cùng phương với $\vec{V}_r$ (trường hợp đinh ốc động học).

Ví dụ 3. Vấu chuyển động tịnh tiến có dạng hình tam giác, mặt dẫn của nó nghiêng với trục Ox một góc α. Hãy xác định gia tốc của thanh tựa trên vấu và trượt tự do trong các ổ bi, biết rằng vấu chuyển động với gia tốc không đổi W_e và thanh trực giao với trục Ox.



Hình 3-6

Bài giải:

Do thanh BC chuyển động tịnh tiến, nên để xác định gia tốc của nó, ta chỉ cần xác định gia tốc của điểm C (điểm tiếp xúc giữa thanh và vấu tam giác A) thuộc thanh.

Gắn hệ cố định vào mặt ngang, hệ động vào vấu, C là điểm khảo sát. Khi đó:

– Chuyển động của điểm C đối với vấu là chuyển động tương đối của điểm C hướng dọc theo mặt nghiêng của vấu.

– Chuyển động tịnh tiến theo trục Ox là chuyển động kéo theo. Gia tốc kéo theo của điểm C theo định nghĩa sẽ bằng $\vec{W}_e = \vec{W}_O$.

– Điểm C thuộc thanh BC chuyển động tịnh tiến theo phương thẳng đứng là tuyệt đối. Gia tốc tuyệt đối hướng dọc BC. Theo định lý hợp gia tốc ta có:

$$\vec{W}_a^C = \vec{W}_r^C + \vec{W}_e^C + \vec{W}_C^C$$

vì $\vec{\omega}_e = 0$(vấu chuyển động tịnh tiến), nên gia tốc Côriôlít triệt tiêu, và: $\vec{W}_a^C = \vec{W}_r^C + \vec{W}_e^C$

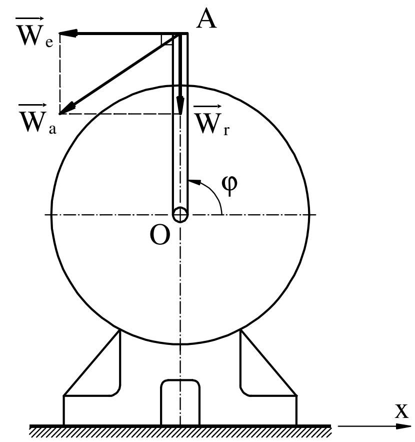
Nhìn hình vẽ (hình 3-6) ta tính được: $W_a^C = W_e^C tg\alpha = W_0 tg\alpha$

Ví dụ 4. Một động cơ quay theo quy luật φ = ωt (ω = hằng số) người ta gắn thanh $OA = \ell$ vuông góc với trục của nó. Trong khi đó động cơ điện đặt tự do, nên thực hiện dao động điều hòa theo phương nằm ngang trên bộ máy theo quy luật $x = a\sin\omega t$. hãy xác định gia tốc tuyệt đối của điểm A tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ giây (hình 3-7).

Bài giải:

Gắn hệ động vào động cơ, hệ cố định vào bệ máy. Theo bài ra ta có:

Chuyển động điểm A quay tròn quanh trục động cơ (hệ động) là chuyển động tương đối, với vận tốc góc bằng $\dot{\varphi} = \omega =$ hằng số. Do đó gia tốc tương đối của điểm A bằng $\overrightarrow{W}_r = \overrightarrow{W}_r^n$ hướng từ A vào O và $W_r = \omega^2.OA = \omega^2.\ell$.



Hình 3-7

Chuyển động của động cơ theo phương ngang đối với bệ máy là chuyển động kéo theo. Vậy gia tốc kéo theo của A là $W_e = \ddot{x} = -a\omega^2 \sin \omega t$, hướng theo phương ngang. Chuyển động của điểm A so với bệ máy là chuyển động tuyệt đối.

Ta có: $\overrightarrow{W}_a = \overrightarrow{W}_r + \overrightarrow{W}_e + \overrightarrow{W}_C$

vì chuyển động kéo theo là tịnh tiến nên $\overrightarrow{W}_C = 0$: $\overrightarrow{W}_a = \overrightarrow{W}_r + \overrightarrow{W}_e$

Tại thời điểm $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ thì $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ nên $W_e\big|_{t=\frac{\pi}{2\omega}} = -a\omega^2$

và các thành phần gia tốc biểu thị như hình vẽ (hình 3-7).

Do $\overrightarrow{W}_e \perp \overrightarrow{W}_r$, ta suy ra: $\left|\overrightarrow{W}_a\right| = \sqrt{(\ell\omega^2)^2 + (-a\omega^2)^2} = \omega^2\sqrt{\ell^2 + a^2}$

Nhận xét: Hai ví dụ trên cho ta trường hợp gia tốc khi chuyển động kéo theo là tịnh tiến. Dưới đây ta sẽ làm quen trường hợp gia tốc điểm khi chuyển động kéo theo quay quanh trục cố định.

Ví dụ 5. Tam giác vuông ABC quay quanh cạnh AB với gia tốc góc là hằng số ε = 0,5s^{-2}, vận tốc góc ban đầu bằng không. Theo cạnh huyền BC có điểm M chuyển động theo quy luật sau s = BM = 10t (cm). Xác định gia tốc tuyệt đối của điểm M tại thời điểm t = 2s, cho AC = BC.

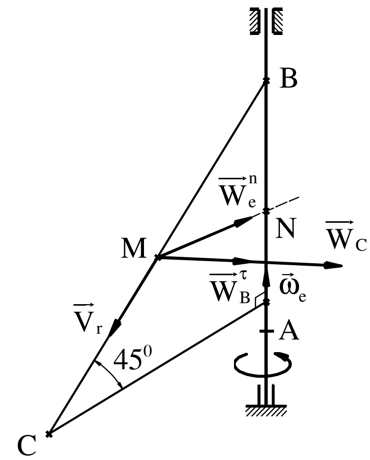
Bài giải:

Theo đầu bài ta có thể phân tích chuyển động như sau:

− Chuyển động của điểm M đối với trục quay là tuyệt đối.

− Chuyển động của điểm M dọc theo BC đối với tam giác là không đổi. Khi đó $V_r = \dot{s} = 10cm/s$ và $W = \ddot{s} = 0$.

Tam giác ABC quay quanh trục AB là chuyển động kéo theo, vì quay biến đổi đều nên ta có $\omega = \varepsilon t$ (lúc đầu $\omega_0 = 0$). Gia tốc kéo theo của điểm M là gia tốc tuyệt đối của M^* thuộc BC, nên được phân làm hai thành phần $\vec{W}_e^\tau$ và $\vec{W}_e^n$. Theo định lý hợp gia tốc ta có:



Hình 3-12

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_C$$

vì $\quad \vec{W}_r = 0$, $\vec{W}_e = \vec{W}_e^\tau + \vec{W}_e^n$, $\vec{W}_C = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$,

nên: $\quad \vec{W}_a = \vec{W}_e^\tau + \vec{W}_e^n + 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$

Tại thời điểm t = 2s thì: s = BM = 20cm.

$$MN = BM \sin 45^0 = 20\frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}\ cm$$

Do đó: $\quad \left|\vec{W}_e^\tau\right| = \varepsilon.MN = 0,5.10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ cms^{-2}$

$$\left|\vec{W}_e^n\right| = \omega^2.MN = 0,5.2.10\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\ cms^{-2}$$

$$\left|\vec{W}_c\right| = 2\left|\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r\right| = 2\omega_e.V_r.\sin 45^0 = 2.1.10\frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}\ cms^{-2}$$

Chiều của các thành phần gia tốc được chỉ ra trên hình vẽ.

Ta suy ra gia tốc tuyệt đối của điểm M là:

$$W_a = \sqrt{(W_e^n)^2 + (W_e^\tau + W_c)^2} = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2} + 10\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (15\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{6,5} = 25,5\ cms^{-2}$$

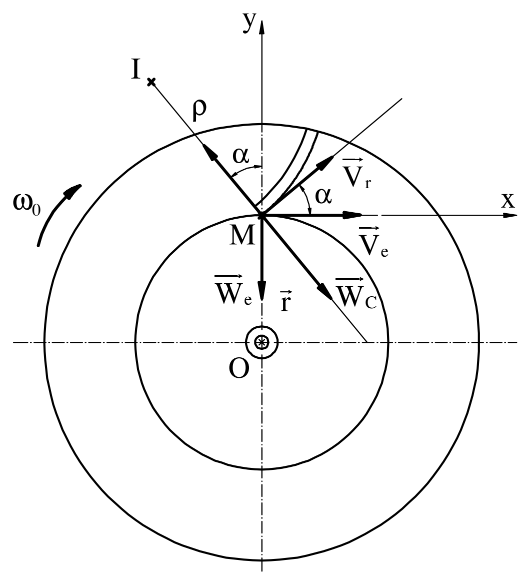
Ví dụ 6. Khảo sát chuyển động của hạt lỏng chạy dọc theo một rãnh cong trên rôto quay quanh trục O cố định. Giả thiết rằng rôto quay quanh trục O là quay đều với tốc độ góc là ω và hạt lỏng chuyển động đều với vận tốc tương đối V_r trong rãnh. Ở vị trí cửa vào bán kính cong của rãnh là ρ và bán kính quay của rôto là r, góc nghiêng của bán kính quay là α. Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của hạt lỏng với giá máy (xem hình 3-9).

Bài giải:

Khảo sát chuyển động phức hợp của hạt lỏng là một động điểm.

Chọn rôto là hệ quy chiếu động và giá máy làm hệ quy chiếu cố định.

Chuyển động tương đối của hạt chất lỏng là chuyển động cong đều trong rãnh, chuyển động kéo theo là chuyển động quay đều của rôto quanh trục O, chuyển động của hạt lỏng đối với giá máy là tuyệt đối cần xác định.



Hình 3-9

a) Xác định vận tốc tuyệt đối

Áp dụng định lý hợp vận tốc ta có: $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

Ở đây: $\vec{V}_r$ đã cho, tiếp xúc với rãnh; còn $\vec{V}_e$ hướng vuông góc với bán kính quay OM theo chiều quay của rôto và có giá trị bằng:

$$V_e = OM.\omega_0 = r.\omega_0$$

$\vec{V}_r$ và $\vec{V}_e$ tạo với nhau một góc α, nên theo (hình 3-9) ta có:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\alpha}$$

Hoặc có thể tính:

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2} = \sqrt{(V_e + V_r\cos\alpha)^2 + (V_r\sin\alpha)^2} = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\alpha}$$

b) Xác định gia tốc tuyệt đối của hạt lỏng

Áp dụng định lý hợp gia tốc: $\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_C$ (*)

Theo gải thiết hạt lỏng chuyển động đều trong rãnh nên $W_r = W_r^n = \dfrac{V_r^2}{\rho}$ véctơ $\vec{W}_r$ hướng từ M về I.

Vì rôto quay đều, nên gia tốc kéo theo của điểm M (là gia tốc tuyệt đối của trùng điểm M* thuộc rôto trùng với M) chỉ có một thành phần $\overrightarrow{W}_e = \overrightarrow{W}_e^n$ $(\overrightarrow{W}_e^\tau = 0)$, hướng từ M về O, với trị số: $W_e = r\omega_0^2$.

Gia tốc Côriôlít được xác định theo công thức: $\overrightarrow{W}_C = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$

Ở đây $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_0$, hướng vuông góc với mặt phẳng hình vẽ qua O vào phía trong, nên chiều $\overrightarrow{W}_C$ được xác định như (hình 3-9).

Còn trị số: $\left|\overrightarrow{W}_C\right| = 2\left|\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r\right| = 2\omega_0.V_r \sin 90^0 = 2\omega_0 V_r$

Chiếu hệ thức (*) lên các trục tọa độ Mxy ta có:

$$W_{ax} = (W_C - W_r^n)\sin\alpha$$

$$W_{ay} = (W_r^n - W_C)\cos\alpha - W_e^n$$

Nên:

$$W_a^2 = (W_C - W_r^n)^2\sin^2\alpha + [(W_r^n - W_C)\cos\alpha - W_e^n]^2$$

$$= \left(2r\omega_0 - \frac{V_r^2}{\rho}\right)^2 + (r\omega_0^2)^2 + 2(2\omega_0 V_r - \frac{V_r^2}{\rho})r\omega_0\cos\alpha$$

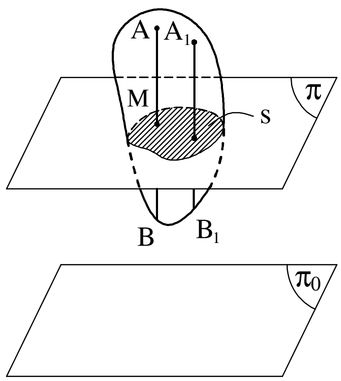
$$W = \sqrt{\left(2r\omega_0 - \frac{V_r^2}{\rho}\right)^2 + (r\omega_0^2)^2 + 2r\omega_0(2\omega_0 V_r - \frac{V_r^2}{\rho})\cos\alpha}$$

CHƯƠNG IV: CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

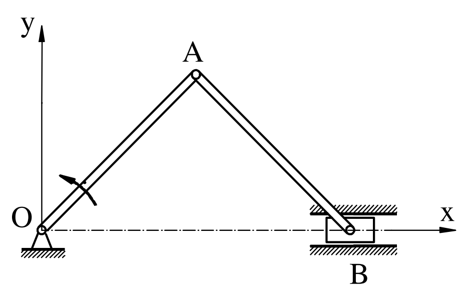
4.1. Khảo sát chuyển động của cả vật

4.1.1. Định nghĩa – Mô hình khảo sát

Chuyển động song phẳng của vật rắn là chuyển động trong đó mỗi điểm thuộc vật luôn luôn di chuyển trong một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cố định cho trước, gọi là mặt phẳng cơ sở (còn gọi là mặt phẳng quy chiếu, hay mặt phẳng nền).



Hình 4-1



Hình 4-2

Ví dụ. Cơ cấu thanh truyền tay quay, chuyển động trong mặt phẳng hình vẽ (hình 4-2), có AB thực hiện chuyển động song phẳng, ...

Nhận xét

Từ định nghĩa vật rắn chuyển động song phẳng, ta thấy rằng một đoạn thẳng AB bất kỳ gắn với vật và vuông góc với mặt phẳng quy chiếu sẽ chuyển động tịnh tiến, tức là chuyển động của mọi điểm trên đoạn thẳng AB là như nhau (hình 4-1).

Nếu cắt vật bằng một mặt phẳng π song song với π_0, ta được hình phẳng S. Nếu biết chuyển động của một điểm M_1 bất kỳ thuộc s thì sẽ biết chuyển động của mọi điểm trên đoạn thẳng A_1B_1 vuông góc với mặt phẳng π_0 và qua M_1. Từ đó suy ra, nếu ta biết chuyển động của hình phẳng S thì sẽ biết chuyển động của cả vật. Như vậy, từ việc xét chuyển động song phẳng của cả vật chuyển về chỉ cần xét chuyển động của hình phẳng (thuộc vật) trong mặt phẳng của nó.

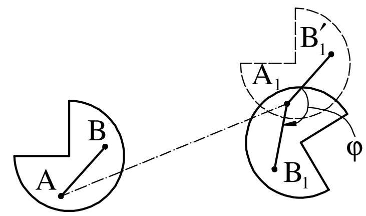
Chú ý: Để thuận lợi cho việc khảo sát sau này ta coi mặt phẳng π_0 trùng với mặt phẳng π. Hình phẳng S gắn chặt với mặt phẳng π chuyển động trong mặt phẳng π_0. π_0 được gọi là mặt phẳng cố định, còn π gọi là mặt phẳng động.

4.1.2. Phân tích chuyển động của hình phẳng

Định lý 1

Mọi dịch chuyển của hình phẳng trong mặt phẳng của nó đều có thể thực hiện được bằng một phép tịnh tiến cùng với cực và một phép quay quanh cực đó.

Chứng minh: Cho hình phẳng dịch chuyển từ vị trí I đến vị trí II. Ta phải chứng minh rằng, bằng phép tịnh tiến cùng với cực A và phép quay quanh A một góc φ thì vị trí I đến vị trí II (hình 4-3).



Hình 4-3

Thật vậy, nếu chọn cực là A thì phép tịnh tiến cùng với cực A sẽ đưa hình phẳng (AB) về (A_1B_1') và phép quay quanh A_1 một góc φ sẽ đưa hình phẳng về II. Còn nếu chọn cực là B thì phép tịnh tiến cùng với cực sẽ đưa hình phẳng (AB) về $(A_1'B_1)$ và phép quay quanh B_1 một góc φ cũng sẽ đưa hình phẳng về II.

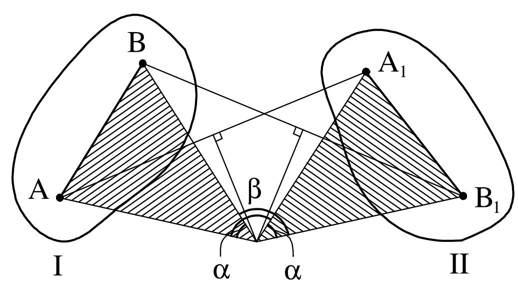
Qua định lý ta thấy rằng phép tịnh tiến phụ thuộc vào việc chọn cực, còn phép quay không phụ thuộc vào việc chọn cực. Vì vậy góc quay φ đặc trưng cho góc quay của toàn hình phẳng.

Định lý 2

Mọi dịch chuyển không tịnh tiến của hình phẳng trong mặt phẳng của nó đều có thể thực hiện được bằng một phép quay quanh một tâm xác định với một góc xác định.

Chứng minh: Giả sử hình phẳng ở vị trí I được đặc trưng bằng AB, ở vị trí II được đặc trưng bằng A_1B_1 do AB chuyển dịch đến.

Trong trường hợp AB không song song với A_1B_1, khi đó ta xác định tâm quay P như sau. Dựng hai đường trung trực của AA_1 và BB_1, giao điểm chính là P. Rõ ràng hai tam giác PAB và PA_1B_1 bằng nhau. Vì vậy khi quay hình phẳng ở vị trí I quanh P một góc $\alpha+\beta$ thì trùng với hình phẳng ở vị trí II. Tâm P gọi là tâm quay hữu hạn (hình 4-4).



Hình 4-4

Tâm quay tức thời, đường lăn, đường căn cứ

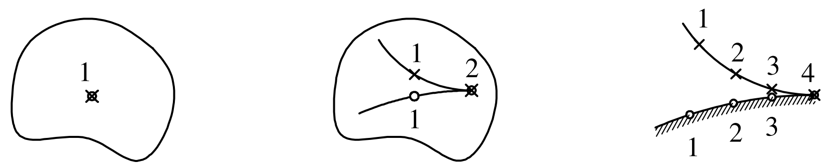
Ta coi chuyển động của hình phẳng như một dãy các yếu tố di chuyển vô cùng bé. Theo định lý trên, ứng với mỗi yếu tố di chuyển vô cùng bé có thể thực hiện bằng một phép quay quanh một tâm xác định. Hình phẳng sẽ quay quanh tâm tại thời điểm cho trước, ta gọi tâm đó là tâm quay tức thời.

Khi hình phẳng chuyển động tâm quay tức thời sẽ biến thiên liên tục và vạch lên đường cong liên tục.

Quỹ tích tâm quay tức thời nằm trên mặt phẳng động gọi là đường lăn.

Quỹ tích tâm quay tức thời nằm trên mặt phẳng cố định gọi là đường căn cứ.

Tại mỗi thời điểm đường lăn và đường căn cứ tiếp xúc nhau ở một điểm, điểm đó chính là tâm quay tức thời.



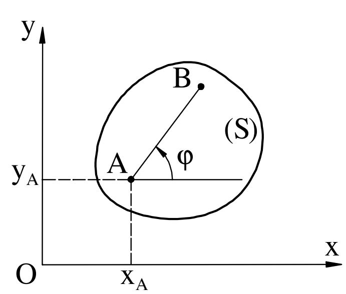
Hình 4-5

Thật vậy, tại thời điểm nào đó tâm quay tức thời (1_0) của mặt phẳng cố định trùng với tân quay tức thời (1_x) của mặt phẳng động. Sang thời điểm sau hai điểm (1_0) và (1_x) tách rời nhau, (1_0) đứng yên trong mặt phẳng cố định, (1_x) đứng yên trong mặt phẳng động nhưng lại chuyển động trong mặt phẳng cố định. Lý luận tương tự cho tâm quay tức thời (2_0) và (2_x), ... (hình 4-5). Như vậy, tâm quay tức thời tương ứng với các thời điểm sẽ vạch lên đường cong liên tục đó là đường lăn và đường căn cứ. Tại mỗi thời điểm hai đường này sẽ tiếp xúc với nhau ở một điểm duy nhất, điểm đó là tâm quay tức thời.

Ví dụ. Vòng tròn O lăn không trượt trên đường thẳng d, thì vành ngoài của vòng tròn D sẽ là đường lăn, còn đường thẳng d là đường căn cứ. Điểm tiếp xúc giữa chúng chính là tâm quay tức thời P.

4.1.3. Phương trình chuyển động của hình phẳng

Cho hình phẳng S chuyển động trong mặt phẳng quy chiếu π_0 có gắn hệ toạ độ xOy (hình 4-6). Rõ ràng vị trí của S sẽ được xác định duy nhất, nếu biết được vị trí của đoạn thẳng AB bất kỳ thuộc S. Vị trí của đoạn thẳng AB sẽ được xác định khi biết tọa độ của điểm A là x_A, y_A và góc quay φ lập giữa AB với trục Oy. Vậy x_A, y_A, φ là ba thông số xác định vị trí của hình phẳng S. Khi S chuyển động thì phương trình chuyển động của nó trong hệ quy chiếu đã chọn là:



Hình 4-6

$$\begin{cases} x_A = x_A(t) \\ y_A = y_A(t) \\ \varphi_A = \varphi_A(t) \end{cases} \tag{4-1}$$

Đặc biệt:

a. Nếu x_A = const, y_A = const thì hình phẳng sẽ quay xung quanh trục cố định qua A vuông góc với π_0.

b. Nếu φ = const thì hình phẳng sẽ chuyển động tịnh tiến cùng với cực A trong mặt phẳng π_0.

4.1.4. Vận tốc góc và gia tốc góc của hình phẳng

Để đặc trưng cho phép quay của hình phẳng xung quanh trục động qua cực chọn thẳng góc với hình phẳng, tương tự trường hợp vật rắn quay xung quanh một trục cố định ta có thể đưa vào khái niệm vận tốc góc ω và gia tốc góc ε. Vẫn gọi góc quay là φ, ta có:

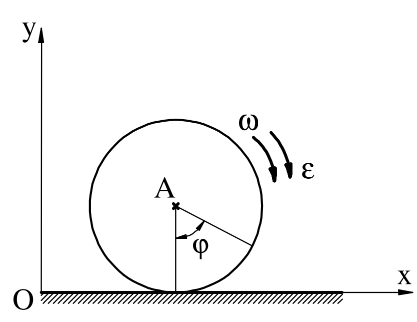
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

Vì phép quay không phụ thuộc vào việc chọn cực nên đặc trưng của phép quay đó cũng không phụ thuộc vào cách chọn cực. Nói khác đi ω, ε không phụ thuộc vào việc chọn cực. Vì vậy đối với chuyển động của hình phẳng cho trước, tại một thời điểm vận tốc góc ω và gia tốc góc ε là như nhau đối với trục động đi qua cực này hay cực khác của hình phẳng.

Ta có thể đưa vào khái niệm véctơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ và véctơ gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$ tương tự trường hợp vật rắn quay quanh trục cố định. Véctơ $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ có thể đặt lên trục quay đi qua cực đã chọn thẳng góc với hình phẳng. Vì việc chọn cực trên hình phẳng là tuỳ ý nên *véctơ $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ là véctơ tự do.*

Ví dụ 1. Cho bánh xe bán kính R lăn không trượt trên đường ray thẳng. Biết quy luật chuyển động của tâm A của bánh xe là $x = \frac{at^2}{2}$. Lập phương trình chuyển động của bánh xe khi chọn A là cực. Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của nó (hình 4-7).



Hình 4-7

Bài giải:

a. Phương trình chuyển động của bánh xe

Theo định nghĩa, thì bánh xe thực hiện chuyển động song phẳng. Chọn A làm cực, chọn hệ trục tọa độ Oxy như trên hình vẽ (hình 4-7), gốc tọa độ O là vị trí ứng với thời điểm ban đầu t = 0, khi đó $x_0 = 0$.

Ta có: $x_A = \dfrac{at^2}{2}$; $y_A = R$

$\varphi = \varphi(t)$

Ta cần xác định cụ thể $\varphi(t)$. Rõ ràng là khi tâm A dịch chuyển được một khoảng $\dfrac{at^2}{2}$ thì một điểm bất kỳ trên vành bánh xe cùng dịch chuyển quay đối với cực A một đoạn cung bằng $\dfrac{at^2}{2}$ (do lăn không trượt). Vậy: $\varphi = \dfrac{at^2}{2}$.

Phương trình chuyển động của bánh xe khi chọn A làm cực sẽ có dạng:

$$x_A = \frac{at^2}{2};\ y_A = R;\ \varphi = \frac{at^2}{2}$$

b. Vận tốc góc và gia tốc góc của bánh xe

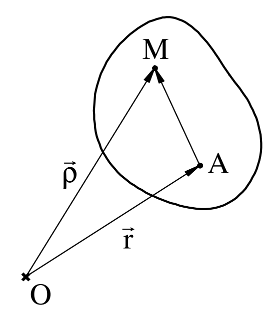
Ta có: $$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{at^2}{2R}\right) = \frac{at}{R}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{at}{R}\right) = \frac{a}{R}$$

4.2. Khảo sát chuyển động của điểm trên hình phẳng

4.2.1. Vận tốc các điểm trên hình phẳng

Ta đã khảo sát những tính chất chung chuyển động của hình phẳng trong mặt phẳng của nó. Sau đây ta sẽ khảo sát chuyển động của các điểm thuộc hình phẳng. Ở đây ta không xét phương trình chuyển động (và cả quỹ đạo) của các điểm thuộc hình phẳng mà chỉ xét đến vận tốc và gia tốc của các điểm thuộc hình phẳng. Trong khi xét vận tốc và gia tốc của các điểm thuộc hình phẳng, ta đưa vào hai phương pháp khảo sát như đã biết từ việc khảo sát chuyển động của cả hình phẳng.



Hình 4-8

I. Phương pháp thứ nhất: Liên hệ vận tốc của điểm và vận tốc của cực

1. Định lý liên hệ vận tốc (của điểm bất kỳ trên hình phẳng với vận tốc của cực)

Phát biểu định lý

Tại mỗi thời điểm, vận tốc một điểm bất kỳ trên hình phẳng bằng tổng hình học vận tốc của cực và vận tốc của điểm đó quay quanh cực.

Nếu gọi $\vec{V}_M$ là vận tốc của điểm M bất kỳ trên hình phẳng, $\vec{V}_A$ là vận tốc của điểm cực A, $\vec{V}_{MA}$ là vận tốc của điểm M quay quanh cực A. Định lý trên có thể biểu thị theo công thức sau:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA} \qquad (4\text{-}2)$$

Chứng minh:

Cho hình phẳng chuyển động trong mặt phẳng của nó. Chọn điểm A làm cực, M là điểm bất kỳ thuộc hình phẳng. Véctơ xác định vị trí của điểm A và M là $\vec{r}$ và $\vec{\rho}$. Nhìn hình vẽ ta có: $\vec{\rho} = \vec{r} + \overrightarrow{AM}$

Đạo hàm hai vế của đẳng thức theo thời gian, ta được: $\dfrac{d\vec{\rho}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} + \dfrac{d\overrightarrow{AM}}{dt}$

Theo định nghĩa: $\dfrac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V}_M$; $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}_A$; $\dfrac{d\overrightarrow{AM}}{dt}$ là vận tốc của điểm M đối với cực A, ta ký hiệu là $\vec{V}_{MA}$. Vì véctơ $\overrightarrow{AM}$ có độ dài không đổi nên $\dfrac{d\overrightarrow{AM}}{dt}$ thẳng góc với $\overrightarrow{AM}$ hay $\vec{V}_{MA}$ thẳng góc với $\overrightarrow{AM}$. Ta gọi $\vec{V}_{MA}$ là vận tốc của M quay quanh cực A. Từ đó ta có:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$$

Ở đây rõ ràng: $\vec{V}_{MA} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}$

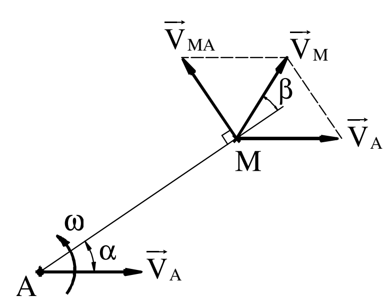
Trong đó $V_{MA} = \omega.AM$, còn $\vec{\omega}$ là vận tốc góc của hình phẳng. Ta có thể biểu diễn hình học công thức (4-2) ở hình vẽ (hình 4-9).

2. Định lý chiếu vận tốc

Phát biểu

Tại mỗi thời điểm, chiếu vận tốc của hai điểm bất kỳ thuộc hình phẳng lên trục đi qua hai điểm đó có giá trị bằng nhau.

Chứng minh: Không mất tính tổng quát ta có thể chọn A làm cực và điểm M bất kỳ trên hình phẳng (hình 4-9). Theo định lý liên hệ vận tốc ta có:



Hình 4-9

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$$

Thong đó $\vec{V}_{MA}$ vuông góc với $\overrightarrow{AM}$ nên chiếu đẳng thức trên lên trục đi qua AM, ta được:

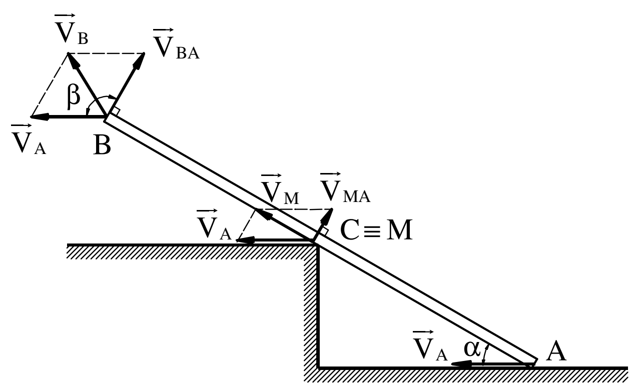
$$ch_{AM}\left(\vec{V}_M\right) = ch_{AM}\left(\vec{V}_A\right) \qquad (4\text{-}3)$$

Gọi α là góc giữa $\vec{V}_A$ với trục qua M, β là góc giữa $\vec{V}_M$ với trục qua AM, công thức (4-3) có thể viết dưới dạng sau:

$$V_A \cos\alpha = V_M \cos\beta \qquad (4\text{-}3a)$$

Cần chú ý rằng định lý trên đúng cho vật rắn chuyển động bất kỳ.

Ví dụ 2. Thanh AB = 0,8m, đầu A trượt trên nền nằm ngang và thanh luôn luôn tựa lên tường ở mép C. Tại thời điểm khảo sát vận tốc V_A = 0,2m/s hướng về bên trái. Thanh AB nghiêng một góc $\alpha = 30^0$ so với nền. Trung điểm M của thanh trùng với mép C của tường. Xác định vận tốc điểm B của thanh và vận tốc góc của thanh (hình 4-10).



Hình 4-10

Bài giải:

Theo đầu bài, thanh AB chuyển động song phẳng. Thanh AB tựa vào tường ở điểm C, vận tốc điểm M ≡ C có phương dọc theo thanh.

Theo công thức (3-2) thì: $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$ và $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$

a. Xác định ω của hình phẳng

Vì $\vec{V}_{MA}$ thẳng góc AB, nên từ hình vẽ ta tính được:

$$V_{MA} = \frac{V_A}{2}$$

Ở đây $V_{MA} = \omega.AM$. Vậy vận tốc góc ω của hình phẳng là:

$$\omega = \frac{V_A}{2.AM} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25\,s^{-1}$$

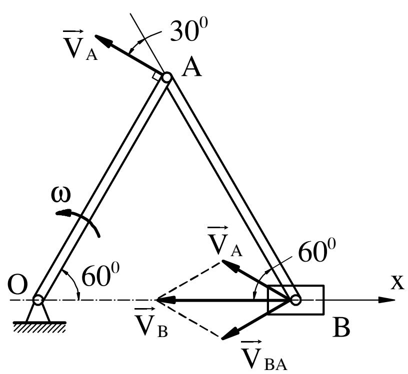
b. Xác định vận tốc của điểm B

Ta có: $V_{BA} = \omega.BA = 0,25.0,8 = 0,2$ m/s

$$\beta = (\vec{V}_A; \vec{V}_{BA}) = 360^0 - (90^0 + 150^0) = 120^0$$

nên: $V_B = 2V_A \cos 60^0 = 2.0,2.\frac{1}{2} = 0,2\,m/s$.

Ví dụ 3. Tay quay OA = 0,4m quay đều quanh O với tốc độ 120vòng/phút kéo theo then truyền AB = OA và con chạy B chuyển động. Tại thời điểm khảo sát OA nghiêng một góc 60^0 so với OB. Tìm vận tốc con chạy B và vận tốc góc của thanh AB (hình 4-11).



Hình 4-11

Bài giải:

Theo đầu bài ta thấy tay quay OA quay xung quanh trục cố định. Thanh AB chuyển động song phẳng, con chạy B chuyển động tịnh tiến thẳng. Vận tốc góc của thanh OA là:

$$\omega_{OA} = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi.120}{30} = 4\pi\ s^{-1}$$

Vận tốc điểm A (thuộc OA) có phương chiều như hình vẽ (hình 4-11) và có trị số bằng:

$$V_A = \omega_{OA}.OA = 4\pi.0,4 = 1,6\pi\ ms^{-1}$$

a. Xác định vận tốc điểm B. Điểm B chuyển động thẳng dọc OB. Phương, chiều vận tốc của điểm B $\left(\vec{V}_B\right)$ được xác định như hình vẽ. Áp dụng định lý chiếu vận tốc giữa hai điểm A, B thuộc hình phẳng AB ta có:

$$V_B \cos 60^0 = V_A \cos 30^0$$

Hay: $$V_B = \frac{V_A \cos 30^0}{\cos 60^0} = \frac{1,6\pi.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 1,6\sqrt{3}\pi \ m/s$$

b. Xác định vận tốc góc của thanh AB

Chọn A làm cực. Theo định lý liên hệ vận tốc ta có:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

Trong đó: $V_{BA} = \omega_{AB}.AB$. Theo hình vẽ, ta có:

$$V_{BA} = V_B \sin 30^0 = 1,6\sqrt{3}\pi.\frac{1}{2} = 0,8\sqrt{3}\pi \ m/s$$

Vậy: $$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{0,8\sqrt{3}\pi}{0,8} = \sqrt{3}\pi \ s^{-1}$$

II. Phương pháp thứ hai: Tâm vận tốc tức thời

1. Tâm vận tốc tức thời

Định nghĩa

Tâm vận tốc tức thời của hình phẳng tại thời điểm khảo sát là một điểm trên mặt phẳng động (mặt phẳng gắn với hình phẳng), tại thời điểm đó nó có vận tốc bằng không. Ký hiệu C_V, theo định nghĩa: $\vec{V}_{C_V} = 0$.

Khi hình phẳng chuyển động không tịnh tiến, tại mỗi thời điểm tồn tại duy nhất tâm vận tốc tức thời. Thật vậy, giả sử tại thời điểm khảo sát hình phẳng tồn tại hai tâm vận tốc tức thời là P và Q. Chọn Q làm cực, theo định lý liên hệ vận tốc ta có:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_Q + \vec{V}_{PQ}$$

Nhưng do giả thiết P và Q là tâm vận tốc tức thời, nên $\vec{V}_P = \vec{V}_Q = 0$, hay $V_{PQ} = \omega.PQ = 0$.

Vì PQ phải khác không nên suy ra $\omega = 0$. Kết quả đó chỉ ra rằng vận tốc tại mọi điểm trên hình phẳng triệt tiêu tại thời điểm khảo sát. Điều đó chỉ xảy ra khi hình phẳng không chuyển động.

2. Định lý phân bố vận tốc (quanh tâm vận tốc tức thời)

Định lý

Tại mỗi thời điểm, vận tốc một điểm bất kỳ trên hình phẳng bằng vận tốc của nó quay quanh tâm vận tốc tức thời.

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{MC_V} \qquad (4\text{-}4)$$

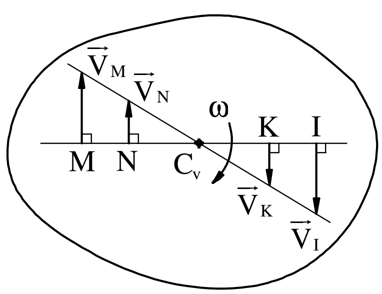
Chứng minh: Từ công thức (4-2): $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA}$. Do cực A chọn tuỳ ý nên ta có quyền chọn sao cho trùng với tâm vận tốc thức thời C_V và ta có:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_{C_V} + \vec{V}_{MC_V}$$

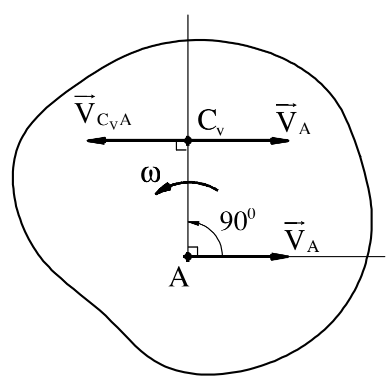
vì $\vec{V}_{C_V} = 0$ (theo định nghĩa), nên: $\vec{V}_M = \vec{V}_{MC_V}$

Ở đây $\vec{V}_{MC_V}$ thẳng góc với MC_V, hướng theo chiều quay của ω, còn trị số bằng $V_{MC_V} = \omega.MC_V$. Vì vậy ta có thể biểu diễn $\vec{V}_{MC_V} = \vec{\omega} \wedge \overline{CM}$. Rõ ràng định lý cho ta thấy sự phân bố vận tốc của các điểm thuộc hình phẳng quanh tâm vận tốc tức thời C_V, cũng giống như sự phân bố vận tốc của các điểm thuộc vật rắn quay xung quanh trục cố định. Từ hình vẽ (hình 4-12) ta có:

$$\frac{V_M}{C_V M} = \frac{V_N}{C_V N} = ... = \omega$$



Hình 4-12



Hình 4-13

3. Xác định tâm vận tốc tức thời C_V

a. Trường hợp 1

Biết vận tốc của một điểm bất kỳ thuộc hình phẳng và vận tốc góc của nó, ta xác định được một tâm vận tốc tức thời C_V.

Thật vậy, giả sử biết vận tốc góc của hình phẳng là ω và vận tốc điểm A là $\vec{V}_A$ (hình 4-13). Lấy A làm tâm quay nửa đường thẳng chứa $\vec{V}_A$ quanh A một góc $\frac{\pi}{2}$ theo chiều quay của hình phẳng. Trên nửa đường thẳng mới quay ta lấy một điểm C_V sao cho:

$$C_V A = \frac{V_A}{\omega}$$

C_V chính là tâm vận tốc tức thời cần tìm. Bây giờ ta phải chứng minh $\vec{V}_{C_V} = 0$. Áp dụng định lý liên hệ vận tốc ta có:

$$\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A + \vec{V}_{C_V A}$$

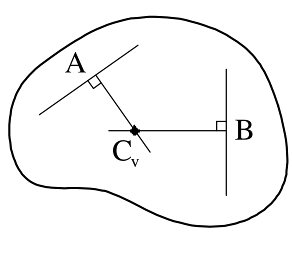
Vì $\vec{V}_{C_V A} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC_V}$, nên $\vec{V}_{C_V A}$ thẳng góc với AC_V và ngược chiều với $\vec{V}_A$. Còn giá trị: $V_{C_V A} = \omega . AC_V = \omega \frac{V_A}{\omega} = V_A$.

Ta có: $\vec{V}_{C_V A} = -\vec{V}_A$ và do đó: $\vec{V}_{C_V} = \vec{V}_A + (-\vec{V}_A) = 0$

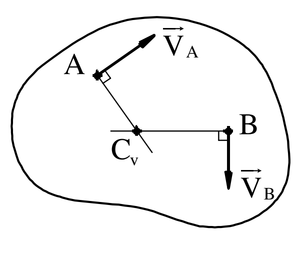
b. Trường hợp 2

Biết vận tốc của hai điểm trên hình phẳng ta cũng xác định được tâm vận tốc tức thời.

Giả sử biết phương vận tốc hai điểm A và B thuộc hình phẳng ta xác định tâm vận tốc tức thời C_V bằng cách vẽ hai đường thẳng vuông góc với hai phương vận tốc đi qua hai điểm A, B, giao điểm chính là C_V (hình 4-14). Trong trường hợp biết vận tốc hai điểm thuộc hình phẳng việc xác định tâm vận tốc tức thời được tiến hành theo phương pháp tương tự trên. Độc giả tự tìm hiểu theo các hình vẽ (hình 4-15) và (hình 4-16a, b, c).

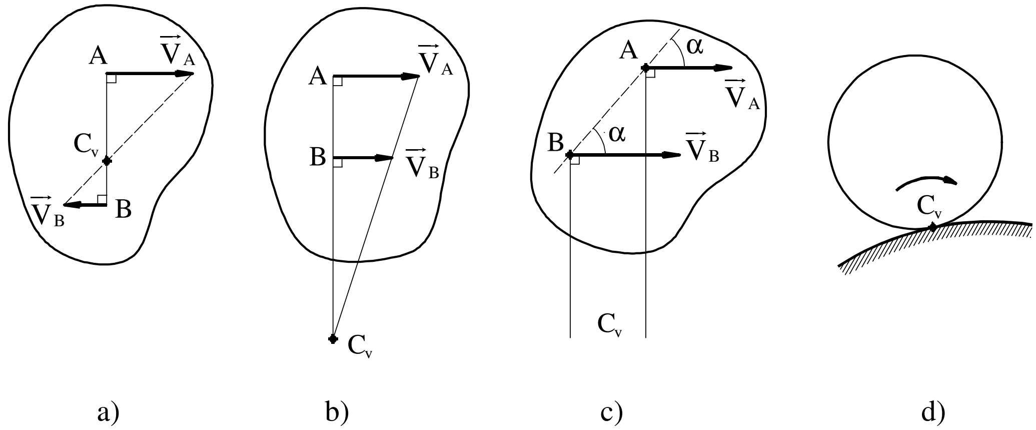


Hình 4-14



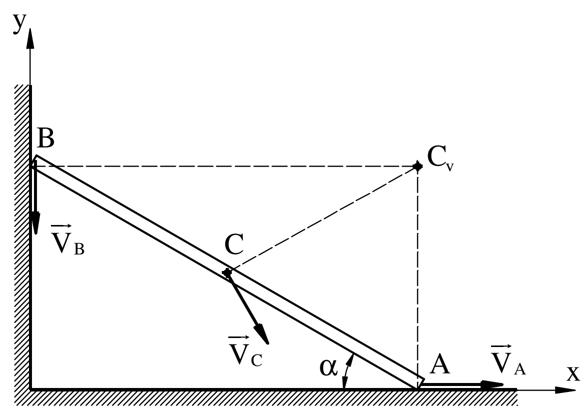
Hình 4-15

Nếu vật lăn không trượt trên một mặt cố định thì vận tốc của điểm trên hình phẳng tại điểm tiếp xác bằng không, nên nó là tâm vận tốc tức thời (hình 4-16d).



Hình 4-16

Ví dụ 4. Thanh AB dài 0,4m chuyển động sao cho điểm A trượt dọc theo Ox, điểm B trượt dọc theo Oy. Tại thời điểm khảo sát vận tốc điểm A là V_A = 0,2 m/s và thanh nghiêng một góc 30^0 so với phương Ox. Tìm vận tốc của điểm B, vận tốc trung điểm C của thanh và vận tốc góc của thanh (hình 4-17).



Hình 4-17

Bài giải:

Theo đề bài, thanh AB thực hiện chuyển động song phẳng. Biết phương vận tốc điểm B theo trục Oy, vận tốc của điểm A như trên hình vẽ (hình 4-17). Ta xác định được tâm vận tốc tức thời C_V theo các phương pháp đã trình bày ở trên. Tại thời điểm khảo sát thanh AB chuyển động quay xung quanh tâm vận tốc tức thời C_V, ta có theo định lý phân bố vận tốc.

$$V_A = \omega_{AB}.AC_V$$

Ở đây: $AC_V = \dfrac{AB}{2}$,

nên $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AC_V} = \dfrac{0,2}{0,2} = 1s^{-1}$.

Vậy vận tốc điểm B bằng: $V_B = \omega_{AB}.BC_V = 1.0,4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0,3464\,m/s$ và vận tốc điểm C: $V_C = \omega_{AB}.CC_V = 1.0,2 = 0,2\,m/s$.

Ví dụ 5. Các con chạy B và E của cơ cấu then truyền tay quay được gắn bản lề bằng thanh BE. Tay quay chủ động OA quay với vận tốc góc $\omega = 12s^{-1}$ và tay quay bị động OD cùng quay quanh trục cố định chung quanh Oz vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Xác định vận tốc góc tức thời của tay quay OD và then truyền DE tại thời điểm khi tay quay OA vuông góc với phương BE. Biết OA = 10cm; OD = 12cm; AB = 26cm; EB = 12cm; $DE = 12\sqrt{3}$ cm (hình 4-18).

Bài giải:

Theo đề bài ta thấy cơ cấu ở hình vẽ có năm hình phẳng chuyển động:

- Thanh OA, OD quay xung quanh trục cố định Oz đi qua O và vuông góc với mặt phẳng hình vẽ;
- Thanh DE, AB chuyển động song phẳng;
- Thanh EB chuyển động tịnh tiến thẳng theo trục Ox.

Xét điểm A thuộc thanh OA ta có: $\vec{V}_A \perp OA$ và $V_A = \omega_{OA}.OA$.

Xét điểm A, B thuộc thanh AB, biết phương vận tốc của hai điểm A và B song song với nhau nên tâm vận tốc tức thời C_V ở xa vô cùng. Vì vậy tại thời điểm khảo sát thanh AB tịnh tiến tức thời, ta có:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B$$

Xét hai điểm E, B thuộc EB chuyển động tịnh tiến:

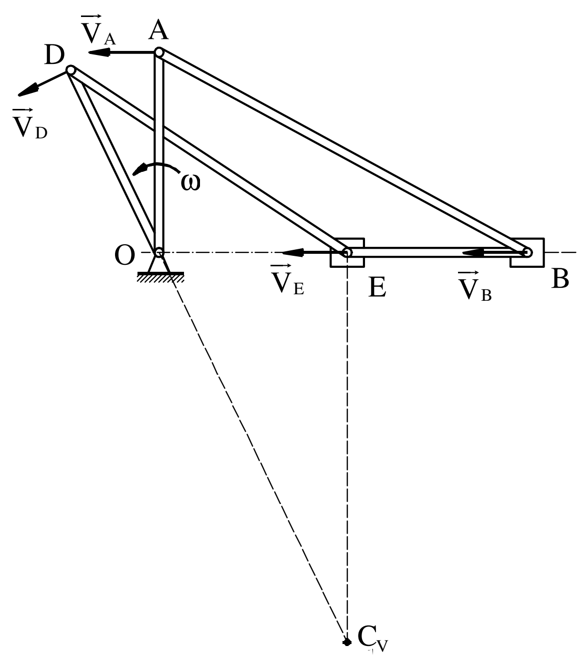
$$\vec{V}_E = \vec{V}_B$$

Vậy: $\vec{V}_E = \vec{V}_B = \vec{V}_A$

Xét điểm D, E thuộc thanh DE, biết phương vận tốc hai điểm nên ta xác định được tâm vận tốc tức thời C_V. ta có:

$$V_E = \omega_{DE}.EC_V$$

Vậy: $\omega_{DE} = \dfrac{V_E}{EC_V} = \dfrac{V_A}{EC_V}$



Hình 4-18

Từ hình vẽ ta tính được:

$$OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24\,cm$$

$$OE = OB - EB = 24 - 12 = 12\,cm$$

vì OE = OD = 12cm, nên tam giác ODE là một tam giác cân. Ở đây:

$$DE = 12\sqrt{3}\,cm\text{, } \angle ODE = \angle OED = 30^0$$

Suy ra: $EC_V = 12\sqrt{3}\,cm$, $OC_V = 24\,cm$. Từ đó ta tính được:

$$\omega_{DE} = \frac{V_A}{EC_V} = \frac{12.10}{12\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}\,s^{-1}$$

Bây giờ ta tính vận tốc góc của thanh OD (ω_{OD}). Coi điểm D thuộc thanh DE ta có:

$$V_D = \omega_{DE}.DC_V = \omega_{DE}(OD + OC_V)$$

Coi D thuộc thanh OD ta có: $V_D = \omega_{DE} OD$

Vậy: $\omega_{OD}.OD = (DO + OC_V).\omega_{DE}$. Từ đó suy ra:

$$\omega_{OD} = \frac{DO + OC_V}{OD}.\omega_{DE} = \frac{12 + 24}{12}.\frac{10\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}\,s^{-1}$$

4.2.2. Gia tốc các điểm trên hình phẳng

Cũng giống như khảo sát vận tốc các điểm trên hình phẳng ta tiến hành bằng hai phương pháp.

I. Phương pháp thứ nhất

Định lý liên hệ gia tốc (của điểm bất kỳ trên hình phẳng với gia tốc của cực)

Phát biểu

Tại mỗi thời điểm, gia tốc một điểm bất kỳ trên hình phẳng bằng tổng hình học gia tốc của cực và gia tốc của điểm đó quay quanh cực.

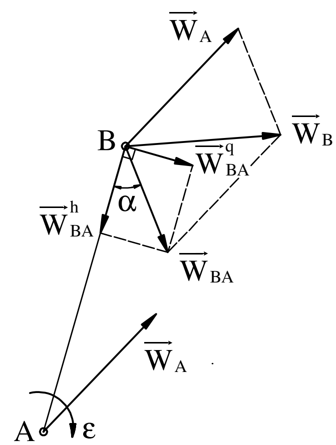
Công thức biểu thị: $\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}$ (4-5)

Chứng minh: Cho hình phẳng chuyển động, lấy A làm cực, M là điểm bất kỳ, khi đó theo định lý liên hệ vận tốc, ta có:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

Đạo hàm đẳng thức trên theo thời gian:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_B\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_A\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{BA}\right)$$



Hình 4-19

Theo định nghĩa: $\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_B\right) = \vec{W}_B$; $\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_A\right) = \vec{W}_A$

còn: $\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{BA}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$

Sau khi biến đổi véctơ kép, ta được: $\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_{BA}\right) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{AB} + (-\omega^2 \overrightarrow{AB})$

Ta gọi nó là gia tốc của điểm B quay quanh A, và ký hiệu là $\vec{W}_{BA}$. Như vậy $\vec{W}_{BA}$ được phân làm hai thành phần đó là:

$\vec{W}^{q}_{BA} = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{AM}$ gọi là gia tốc thành phần quay, hướng vuông góc với BA, theo chiều quay của ε và có trị số bằng: $\left|\vec{W}^{q}_{BA}\right| = |\varepsilon|.AM$

$\vec{W}^{h}_{BA} = -\omega^2 \overrightarrow{BA}$ gọi là gia tốc thành phần phần hướng, hướng vào cực A, có trị số:

$$\left|\vec{W}^{h}_{BA}\right| = \omega^2 AB$$

Thay các kết quả đã có trở lại (*): $\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}$

trong đó: $\vec{W}_{BA} = \vec{W}^{q}_{BA} + \vec{W}^{h}_{BA}$

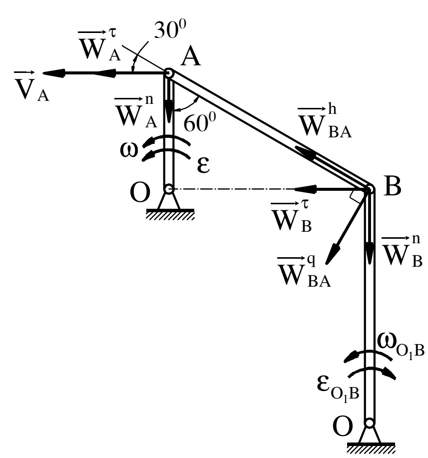
Với trị số: $W_{BA} = AB\sqrt{\varepsilon^4 + \omega^2}$. Định lý được chứng minh.

Gọi α là góc giữa $\vec{W}_{BA}$ và $\vec{W}^{h}_{BA}$ ta có: $tg\alpha = \frac{\left|W^{q}_{BA}\right|}{W^{h}_{BA}} = \frac{|\varepsilon|.AB}{\omega^2.AB} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$

Từ những kết quả đã trình bày, có thể biểu diễn hình học các thành phần gia tốc như hình vẽ (hình 4-19), và công thức (4-5) còn viết ở dạng:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}^{q}_{BA} + \vec{W}^{h}_{BA} \qquad (4\text{-}5a)$$

Ví dụ 6. Tay quay OA dài 0,2m quay nhanh dần đều. Tại thời điểm khảo sát vận tốc góc và gia tốc góc của tay quay là $\omega = 4\pi\ s^{-1}$, $\varepsilon = 2\pi\ s^{-2}$. Tay quay OA ở vị trí thẳng đứng, then truyền AB nghiêng một góc 60^0 so với tay quay. Cần lắc O_1B nằm ngang với điểm O. Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của O_1B và vận tốc góc của AB (hình 4-20).



Hình 4-20

Bài giải:

Xét cơ cấu chuyển động được cho như trên hình vẽ (hình 4-20). Tay quay OA quay xung quanh trục cố định O; cần lắc O_1B quay xung quanh trục cố định qua O_1. Thanh AB chuyển động song phẳng.

a. Xác định vận tốc góc của then truyền AB (ω_{AB})

Xét điểm A thuộc thanh AB ta có:

$$V_A = \omega.OA = 4\pi.0,2 = 0,8\pi m/s$$

Chiều $\vec{V}_A$ hướng thẳng góc OA như hình vẽ.

Xét điểm B thuộc thanh O_1B, ta biết phương vận tốc hướng dọc OB. Áp dụng định lý chiếu vận tốc, ta có:

$$V_A \cos 30^0 = V_B \cos 30^0 \quad \text{hay} \quad \vec{V}_A = \vec{V}_B .$$

Tại thời điểm khảo sát thanh AB có vận tốc tịnh tiến tức thời, nên $\omega_{AB} = 0$.

b. Xác định vận tốc góc của cần lắc O_1B (ω_{O1B})

Ta có: $V_B = \omega_{O_1B}.O_1B$, hay $\omega_{O_1B} = \dfrac{V_B}{O_1B} = 0,8\pi\, s^{-1}$

c. Xác định gia tốc của O_1B (ε_{O_1B})

Xét hai điểm A, B thuộc thanh AB. Chọn A làm cực, theo định lý liên hệ gia tốc:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA}^q + \vec{W}_{BA}^h \qquad (1)$$

Ở đây: $\vec{W}_A = \vec{W}_A^\tau + \vec{W}_A^n$

với $W_A^\tau = \varepsilon.OA = 2\pi.0,2 = 0,4\pi\, m/s^2$ và $W_A^n = \omega^2.OA = (4\pi)^2.0,2 = 3,2\pi^2\, m/s^2$, chiều được xác định như hình vẽ.

$$\vec{W}_B = \vec{W}_B^\tau + \vec{W}_B^n$$

với $W_B^\tau = \varepsilon_{O_1B}.O_1B$ và $W_B^n = \omega_{O_1B}^2 O_1B = (0,8\pi)^2.1 = 0,64\pi^2\, m/s^2$, chiều xác định như trên hình vẽ.

$\left|\vec{W}_{BA}^q\right| = |\,\varepsilon\,|.AB$, hướng vuông góc với AB.

$$W_{BA}^h = \omega_{AB}^2.AB = 0$$

Chiếu đẳng thức (1) lên phương AB, ta có:

$$-W_B^\tau \cos 30^0 + W_B^n \cos 60^0 = -W_{BA}^h + W_A^n \cos 60^0 - W_A^\tau \cos 30^0$$

Suy ra:

$$W_B^\tau = \frac{W_B^n \cos 60^0 + W_A^\tau \cos 30^0 - W_A^n \cos 60^0}{\cos 30^0}$$

$$= \frac{0,64\pi^2.\frac{1}{2} + 0,4\pi.\frac{\sqrt{3}}{2} - 3,2\pi^2.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0,4\pi - 2,56\pi^2\frac{\sqrt{3}}{3}\ m/s^2$$

Vậy: $\varepsilon_{O_1B} = \frac{W_B^2}{O_1B} = \left(0,4\pi - 2,56\pi^2\frac{\sqrt{3}}{3}\right)s^{-2} < 0$ do đó chiều của ε_{O_1B} ngược chiều với chiều ε_{O_1B} (hình 4-20).

II. Phương pháp thứ hai

1. Tâm gia tốc tức thời

Định nghĩa

Tâm gia tốc tức thời của hình phẳng tại thời điểm khảo sát là một điểm trên mặt phẳng động, tại thời điểm đó nó có gia tốc bằng không. Ký hiệu C_W.

Theo định nghĩa ta có: $\vec{W}_{C_w} = 0$

Tương tự như đối với C_V, ở đây ta cũng có thể chứng minh được sự tồn tại duy nhất của C_W. Thật vậy, giả sử tại thời điểm khảo sát tồn tại hai tâm gia tốc tức thời pà P và Q. Ta có:

$$\vec{W}_P = \vec{W}_Q + \vec{W}_{PQ}$$

Nhưng $\vec{W}_P = \vec{W}_Q = 0$ nên $\vec{W}_{PQ} = 0$ hay $W_{PQ} = PQ\sqrt{\varepsilon^4 + \omega^2} = 0$

Do PQ phải khác không nên ω = 0 và ε = 0. Điều nàu chỉ xảy ra khi hình phẳng ngừng chuyển động.

2. Định lý phân bố gia tốc (quanh tâm gia tốc tức thời)

Tại mỗi thời điểm, gia tốc một điểm bất kỳ trên hình phẳng bằng gia tốc của nó quay quanh tâm gia tốc tức thời.

$$\vec{W}_M = \vec{W}_{MC_W} \qquad (4\text{-}7)$$

Chứng minh: Lấy cực A và điểm M bất kỳ trên hình phẳng chuyển động. Theo định lý liên hệ gia tốc ta có:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}$$

Vì A chọn bất kỳ nên ta có thể chọn A trùng với vị trí của C_W.

Như vậy ta có thể viết: $\vec{W}_M = \vec{W}_{C_W} + \vec{W}_{MC_W}$

Theo định nghĩa $\vec{W}_{C_w} = 0$, nên: $\vec{W}_M = \vec{W}_{C_W}$ và định lý đã được chứng minh.

Ở đây $\vec{W}_{MC_W}$ là gia tốc của M quay quanh C_W, nên ta phân nó ra hai thành phần: Gia tốc quay $\left(\vec{W}^q_{MC_W}\right)$ và gia tốc hướng $\left(\vec{W}^h_{MC_W}\right)$, tức là:

$$\vec{W}_M = \vec{W}^q_{MC_W} + \vec{W}^h_{MC_W} \qquad (4\text{-}8)$$

Trong đó, như ta đã biết: $\vec{W}^q_{MC_W}$ hướng thẳng góc với MC_W theo chiều quay ε và có độ lớn bằng:

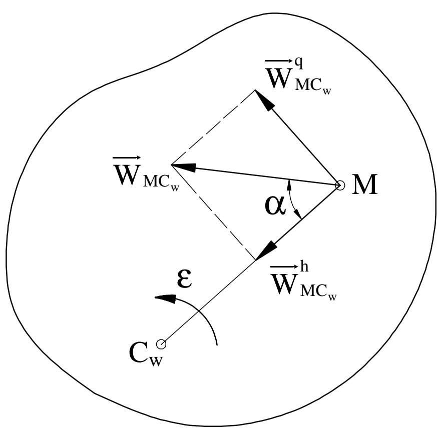
$$W^q_{MC_W} = \varepsilon.MC_W$$

$\vec{W}^h_{MC_W}$ hướng từ M vào C_W, có độ lớn $W^h_{MC_W} = \omega^2 MC_W$

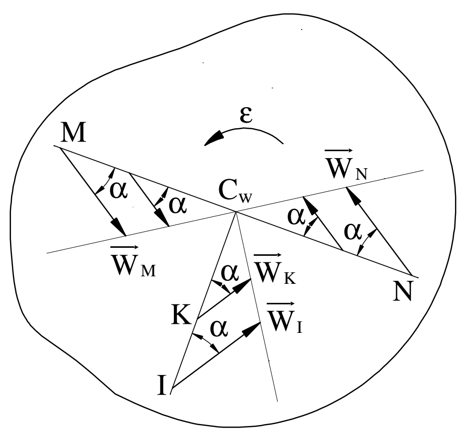
Từ đó độ lớn gia tốc của điểm M sẽ là: $W_M = MC_W\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Gọi α là góc giữa $\vec{W}$ và $\vec{W}^h_{MC_W}$ thì: $tg\alpha = \dfrac{W^q_{MC_W}}{W^h_{MC_W}} = \dfrac{|\varepsilon|.MC_W}{\omega^2.MC_W} = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$

Từ đó có sơ đồ phân bố gia tốc các điểm trên hình phẳng quanh tâm gia tốc tức thời (hình 4-21 và 4-22).



Hình 4-21



Hình 4-22

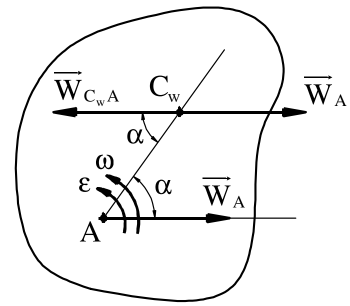
Định lý phân bố gia tốc cho ta quy luật phân bố gia tốc của các điểm xung quanh tâm gia tốc tức thời được mô tả như hình vẽ (hình 4-22).

Ta có: $\dfrac{W_M}{MC_W} = \dfrac{W_N}{NC_W} = \dfrac{W_I}{IC_W} = ... = \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$

3. Các trường hợp xác định tâm gia tốc tức thời C_W

a. Trường hợp 1

Tại mỗi thời điểm nếu biết vận tốc góc ω, gia tốc góc ε của hình phẳng và gia tốc của một điểm bất kỳ trên hình phẳng, ta xác định được duy nhất một tâm gia tốc tức thời.



Hình 4-23

Thật vậy, giả sử biết ω và ε của hình phẳng và gia tốc của điểm A $\left(\overrightarrow{W}_A\right)$ như trên hình vẽ (hình 4-23). Lấy nửa đường thẳng chứa $\overrightarrow{W}_A$, quay xung quanh A một góc α ta có: $tg\alpha = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$

theo chiều quay của ε. Trên nửa đường thẳng vừa quay tới lấy một điểm C_W sao cho:

$$AC_W = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

Điểm C_W chính là tâm gia tốc tức thời phải tìm. Ta chứng minh $\overrightarrow{W}_{C_w} = 0$. Áp dụng định lý liên hệ gia tốc ta có: $\overrightarrow{W}_{C_W} = \overrightarrow{W}_A + \overrightarrow{W}_{C_WA}$

vì $\overrightarrow{W}_{C_WA}$ nghiêng một góc α so với AC_W, chiều phụ thuộc vào chiều thuận gia tốc góc ε nên $\overrightarrow{W}_{C_WA}$ cùng phương và ngược chiều với $\overrightarrow{W}_A$. Còn độ lớn bằng:

$$W_{C_WA} = AC_W\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = W_A$$

Vậy: $\overrightarrow{W}_{C_W} = \overrightarrow{W}_A + \overrightarrow{W}_{C_WA}$ và $\overrightarrow{W}_{C_W} = \overrightarrow{W}_A + (-\overrightarrow{W}_A) = 0$.

b. Trường hợp 2

Tại mỗi thời điểm nếu biết gia tốc của hai điểm bất kỳ thuộc hình phẳng ta sẽ xác định được duy nhất tâm gia tốc tức thời.

Cách xác định như sau: Giả sử biết gia tốc của hai điểm A và B thuộc hình phẳng. Chọn A là cực, ta có:

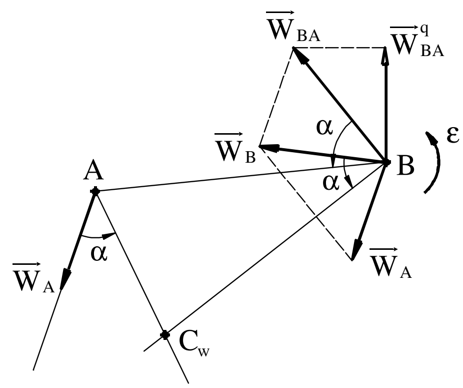
$$\overrightarrow{W}_B = \overrightarrow{W}_A + \overrightarrow{W}_{BA}$$

Từ đó xác định được $\overrightarrow{W}_{BA}$, và góc α với $tg\alpha = \dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ sau đó ta phân:

$$\overrightarrow{W}_{BA} = \overrightarrow{W}_{BA}^{q} + \overrightarrow{W}_{BA}^{h}$$

đẳng thức này cho ta chiều quay của $\overrightarrow{W}_{BA}^{q}$ và suy ra chiều quay của gia tốc góc ε của hình phẳng.

Bây giờ ta lấy hai nửa đường thẳng chứa $\overrightarrow{W}_A$ và $\overrightarrow{W}_B$ quay quanh A và B một góc α theo chiều quay của gia tốc góc ε, giao điểm của chúng là tâm gia tốc tức thời C_W cần xác định (hình 4-24).



Hình 4-24

Trong trường hợp $\overrightarrow{W}_A$ song song với $\overrightarrow{W}_B$ dựa vào kết quả đã biết:

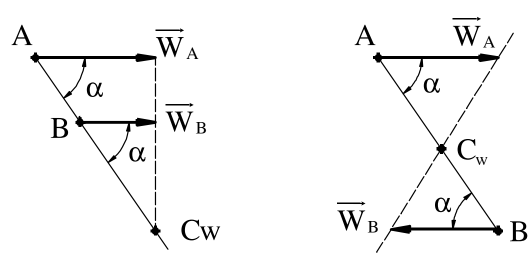
$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{AC_W}{BC_W}$$

Ta có thể xác định dễ dàng tâm gia tốc tức thời theo hình vẽ, thí dụ như (hình 4-25).

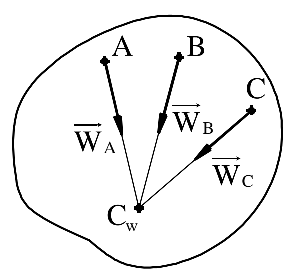
Đặc biệt có thể xảy ra trường hợp:

− Nếu tại thời điểm khảo sát $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$ ta có $tg\alpha = 0$ suy ra $\alpha = 0$. Tâm gia tốc tức thời C_W được chỉ ra như trên hình vẽ (hình 4-26a).

− Nếu tại thời điểm khảo sát $\omega = 0$, nhưng còn $\varepsilon \neq 0$, ta có $tg\alpha = \infty$, suy ra $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Tâm gia tốc tức thời được xác định theo hình vẽ (hình 4-26b).

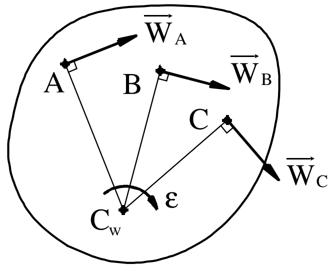


Hình 4-25

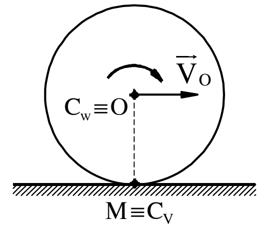


Hình 4-26a

Cuối cùng cần chú ý rằng, nói chung tâm vận tốc tức thời và tâm gia tốc tức thời không trùng nhau. Chẳng hạn, bánh xe lăn không trượt trên đường ray thẳng, có vận tốc tâm bánh xe không đổi, khi đó tâm O của nó là tâm gia tốc tức thời, còn điểm tiếp xúc giữa bánh xe và mặt đường là tâm vận tốc tức thời (hình 4-27).



Hình 4-26b



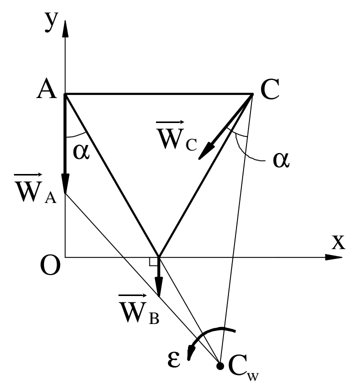
Hình 4-27

Ví dụ 7. Tam giác đều ABC có cạnh dài 40cm chuyển động trong mặt phẳng Oxy. Tại thời điểm khảo sát biết $W_A = 20\sqrt{3}$ cm.s^{-2}, W_B = 10 cm.s^{-2} và $\overrightarrow{W}_A$, $\overrightarrow{W}_B$ đều có chiều từ trên xuống dưới. Tìm gia tốc đỉnh C lúc cạnh AC song song với trục Ox và tìm tâm gia tốc tức thời của hình phẳng (hình 4-28).

Bài giải:

Vì $\overrightarrow{W}_A$ và $\overrightarrow{W}_B$ song song với nhau, nên tâm gia tốc tức thời được xác định như hình vẽ (hình 4-28), với $\alpha = 30^0$ và:

$$AC_W = \frac{AB.W_A}{W_A - W_B} = \frac{40.20\sqrt{3}}{20\sqrt{3}-10} \cong 56,32cm$$



Hình 4-28

Để tính gia tốc điểm C ta áp dụng công thức sau:

$$W_C = CC_W\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Trong đó: $CC_W = \sqrt{AC_W^2 + BC^2 - 2AC_W.BC.\cos 60^0}$

$$\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{W_A}{AC_W}$$

Từ đó ta có: $W_C = \sqrt{56,32^2 + 40^2 - 2.56,32.40\cos 60^0}.\dfrac{20\sqrt{3}}{56,32} = 30,85\ cms^{-2}$

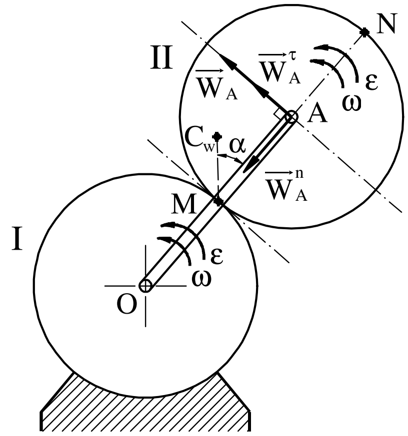
Phương và chiều $\overrightarrow{W}_C$ được xác định như sau: Lấy CC_W quay xung quanh C ngược chiều ε một góc $\alpha = 30^0$, trên đó xác định được chiều của $\overrightarrow{W}_C$ cần tìm.

Ví dụ 8. Bánh xe răng bán kính R = 12cm chuyển động nhờ tay quay OA. Tay quay quay quanh trục O của bánh răng cố định có cùng bán kính với gia tốc góc $\varepsilon_0 = 8s^{-2}$ và vận tốc góc $\omega_0 = 2s^{-1}$ tại thời điểm đang xét. Hãy xác định:

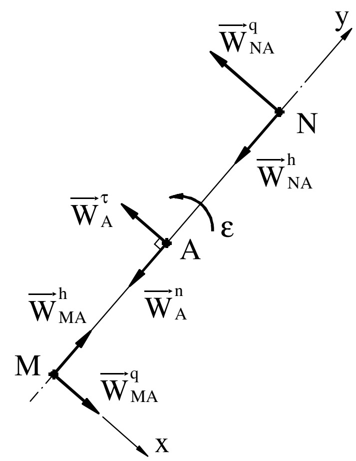
a. Vị trí tâm vận tốc tức thời và tâm gia tốc tức thời của bánh răng.

b. Gia tốc của tâm vận tốc tức thời.

c. *Gia tốc của điểm N (hình 4- 29a).*



Hình 4-29a



Hình 4-29b

Bài giải:

Theo đề bài ra, Bánh II chuyển động lăn không trượt trên bánh răng I cố định (do ăn khớp của hai bánh răng). Nên điểm tiếp xúc M là tâm vận tốc tức thời.

Xét điểm A thuộc OA quay xung quanh trục cố định, ta có: $\overrightarrow{W}_A = \overrightarrow{W}_A^{\tau} + \overrightarrow{W}_A^{n}$

trong đó: $W_A^{\tau} = \varepsilon_0.2R = 192\,cm.s^{-2}$ và $W_A^{n} = \omega_0^2.2R = 96\,cm.s^{-2}$

$V_A = \omega_0.OA = \omega_{II}.MA$, từ đó: $\omega_{II} = \dfrac{V_A}{R} = 2\omega_0 = 4\,s^{-1}$

Suy ra: $\varepsilon_{II} = \dot{\omega}_{II} = \dfrac{W_A^{\tau}}{R} = 2\varepsilon_0 = 16\,s^{-2}$

Chiều của ε_{II} cùng chiều ω_{II} và được chỉ ra trên hình vẽ.

Bây giờ để tính gia tốc của điểm M và N ta sử dụng công thức sau:

$$\overrightarrow{W}_M = \overrightarrow{W}_A + \overrightarrow{W}_{MA}^{q} + \overrightarrow{W}_{MA}^{h}\,; \quad \overrightarrow{W}_N = \overrightarrow{W}_A + \overrightarrow{W}_{NA}^{q} + \overrightarrow{W}_{NA}^{h}$$

Phương chiều các thành phần gia tốc được chỉ ra như trên hình vẽ (hình 4-29b). Do đó ta tính được:

$$W_M = 2R.\omega_0^2 = 2.12.2^2 = 96\,cm.s^{-2}$$

$$W_N = R\sqrt{(4\varepsilon_0)^2 + (6\omega_0^2)^2} = 12\sqrt{(4.8)^2 + (6.2^2)^2} = 480\,cms^{-2}$$

Từ kết quả trên dễ dàng xác định được tâm gia tốc tức thời C_W. Thật vậy, vì $\vec{W}_M$ hướng từ M về A, nên ta lấy nửa đường thẳng chứa $\vec{W}_M$ quay quanh M theo chiều ε_{II} một góc α với $tg\alpha = \frac{|\varepsilon_{II}|}{\omega_{II}^2} = \frac{16}{4^2} = 1$, ($\alpha = 45^0$).

Trên đó lấy điểm C_W có: $MC_W = \frac{W_M}{\sqrt{\varepsilon_{II}^2 + \omega_{II}^4}} = \frac{96}{\sqrt{16^2 + 4^4}} = 3\sqrt{2}\ \ cm$

Điểm C_W xác định như trên hình vẽ (hình 4-29a).

Ví dụ 9. Cho cơ cấu bốn khâu bản lề như hình vẽ (hình 4-30), thanh OA = r; AB = 2r; $O_1B = 2r\sqrt{3}$. Xác định gia tốc góc của thanh AB tại thời điểm thanh OA thẳng đứng, các điểm O, B, O_1 cùng nằm trên đường thẳng nằm ngang. Cho biết tại thời điểm khảo sát thanh OA có vận tốc góc ω_0 và gia tốc góc $\varepsilon = \omega_0^2\sqrt{3}$.

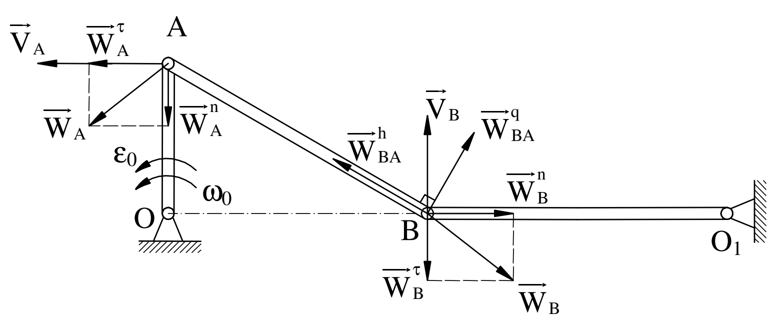
Bài giải:

Cơ cấu gồm ba hình phẳng chuyển động: OA và O_1B quay quanh trục cố định qua O và O_1; AB chuyển động song phẳng.

Khảo sát chuyển động của AB. Xét A thuộc thanh AB, vì A cũng thuộc thanh OA nên vận tốc và gia tốc của điểm A được xác định:

$V_A = OA.\omega_0 = r.\omega_0$

$\vec{W}_A = \vec{W}_A^\tau + \vec{W}_A^n$ với: $W_A^\tau = r\varepsilon_0$; $W_A^n = r\omega_0^2$. Chiều của $\vec{V}_A$ và $\vec{W}_A$ như trên hình vẽ (hình 4-30).



Hình 4-30

Để tìm gia tốc góc của AB (ε_{AB}) ta khảo sát gia tốc điểm B (điểm B đã biết quỹ đạo). Chọn A làm cực, áp dụng định lý liên hệ gia tốc, ta có:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{BA} = \vec{W}_A^\tau + \vec{W}_A^n + \vec{W}_{BA}^q + \vec{W}_{BA}^h$$

Do điểm B chuyển động với quỹ đạo tròn, nên: $\vec{W}_B = \vec{W}_B^{\tau} + \vec{W}_B^{n}$ do đó có thể viết:

$$\vec{W}_B^{\tau} + \vec{W}_B^{n} = \vec{W}_A^{\tau} + \vec{W}_A^{n} + \vec{W}_{BA}^{q} + \vec{W}_{BA}^{h} \qquad (*)$$

Ở đây $\vec{W}_A$ đã biết. Ngoài ra $\vec{V}_A$ và $\vec{V}_B$ có chiều như hình vẽ, nên O là tâm vận tốc tức thời của AB. Từ đó tìm được:

$$V_A = \omega_{AB}.OA \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{V_A}{OA} = \frac{r\omega_0}{r} = \omega_0$$

$$V_B = BO.\omega_{AB} = AB\sin 60^0 = r\sqrt{3}\,\omega_0$$

Do đó: $W_{BA}^{h} = AB.\omega_{AB}^2 = 2r\omega_0^2$; $W_B^n = \dfrac{V_B^2}{BO_1} = \dfrac{r\sqrt{3}\,\omega_0^2}{2}$

Giả sử $\vec{W}_B^{\tau}, \vec{W}_{BA}^{q}$ có chiều như hình vẽ (hình 4-30), chiếu (*) lên trục Bx, ta có:

$$W_B^n = -W_A^{\tau} + W_{BA}^{q}\cos 60^0 - W_{BA}^{h}\cos 30^0$$

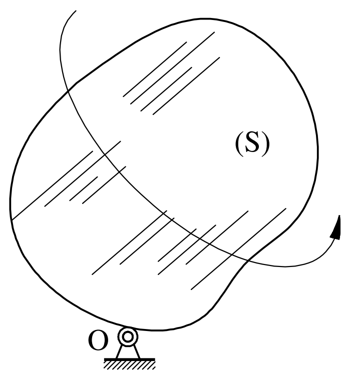
Suy ra: $W_{BA}^{q} = 5\sqrt{3}\,r\omega_0^2 > 0$ do đó véctơ $\vec{W}_{BA}^{q}$ chọn đúng chiều, từ đó ta có:

$\varepsilon_{AB} = \dfrac{W_{BA}^{q}}{BA} = \dfrac{5\sqrt{3}\,r\omega_0^2}{2r} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\omega_0^2$, gia tốc góc ε_{AB} có chiều như trên hình vẽ.

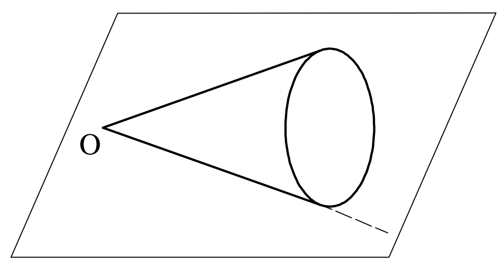
CHƯƠNG V: CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN CÓ MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH

Vật rắn chuyển động luôn luôn có một điểm cố định gọi là vật rắn chuyển động quay quanh điểm cố định đó.

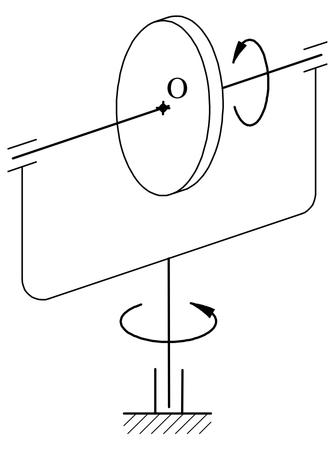
Mô hình nghiên cứu được mô tả trên hình (5-1a). Vài hình ảnh thực tế của chuyển động này được biểu diễn trên hình (5-1d). Đó là hình nón lăn không trượt trên mặt phẳng cố định quanh O, con quay đặt trong giá có một vòng động, bánh xe ôtô khi xe lái vòng trên quãng đường vòng tròn (cơ cấu vi sai ôtô), v.v….



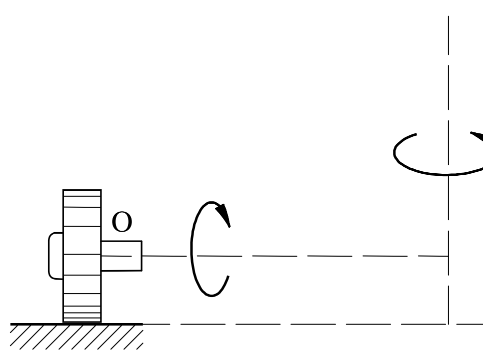
Hình 5-1a



Hình 5-1b



Hình 5-1c



Hình 5-1d

Ta sẽ lần lượt khảo sát những đặc điểm chuyển động của cả vật và chuyển động của các điểm thuộc vật.

5.1. Khảo sát chuyển động của cả vật

5.1.1. Phương trình chuyển động

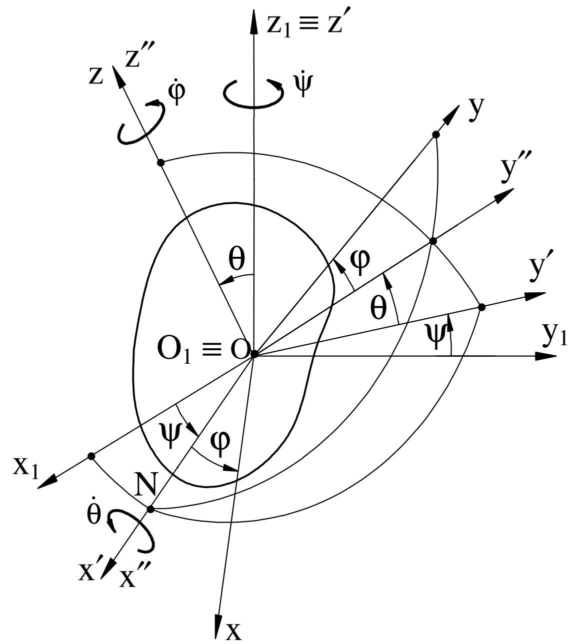
Cho vật (S) quay xung quanh điểm cố định O. Để xác định vị trí của vật (S) ta lấy hệ quy chiếu $Ox_1y_1z_1$ cố định và hệ trục động Oxyz gắn chặt với vật (S) (hình 5-2). Rõ ràng vị trí của vật (S) sẽ hoàn toàn xác định nếu biết vị trí của hệ Oxyz. Muốn xác định vị trí của hệ Oxyz trong hệ $Ox_1y_1z_1$ ta dựa vào ba góc Ơle được xác định như sau:

Gọi giao tuyến của hai mặt phẳng Ox_1y_1 và Oxy là đường nút. Khi đó các góc:

$$\psi = (Ox_1, ON)$$

$$\varphi = (ON, Ox)$$

$$\theta = (Oz_1, Oz)$$



Hình 5-2

Chiều quay của các góc ψ, φ và θ quanh các trục tương ứng là Oz_1, Oz và ON được quy ước như chiều quay của góc φ trong chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định.

Các góc ψ, φ và θ chính là ba góc Ơle. Dựa vào tính chất chuyển động của vật người ta gọi góc φ là góc quay riêng, góc ψ là góc tiến động, góc θ là góc chương động của vật rắn quay quanh một điểm cố định.

Rõ ràng ba góc Ơle hoàn toàn xác định vị trí của vật rắn (S). Thật vật, nếu biết vị trí của (S) thì vị trí của hệ Oxyz hoàn toàn được xác định và do đó sẽ biết được ba góc Ơle như đã nêu ở trên.

Ngược lại nếu biết được ba góc Ơle ta có thể quay hệ toạ độ cố định $Ox_1y_1z_1$ theo ba góc Ơle liên tiếp:

- Quay quanh Oz_1 một góc ψ đưa Ox_1 về ON.
- Quay quanh ON một góc θ đưa Oz_1 đến Oz.
- Quanh quanh Oz một góc φ đưa ON tới Ox.

Sẽ đưa hệ $Ox_1y_1z_1$ về trùng với hệ Oxyz, tức là biết được vị trí của vật (S).

Vậy, ba góc Ơle ψ, φ và θ là ba thông số xác định vị trí của vật (S) có một điểm cố định O. Khi vật (S) chuyển động thì ba góc đó phụ thuộc vào thời gian, nếu:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \\ \theta &= \theta(t) \end{aligned} \tag{5-1}$$

Hệ thức (5-1) là phương trình chuyển động của vật rắn có một điểm cố định.

Nhận xét:

Qua phân tích trên thấy rằng, chuyển động của vật rắn quay quanh một điểm cố định từ vị trí này sang vị trí khác bao giờ cũng có thể thực hiện được nhờ ba phép quay đồng thời quanh ba trục Oz_1, ON, Oz với các góc quay ψ, φ và θ.

5.1.2. Định lý về dịch chuyển hữu hạn của vật rắn có một điểm cố định (Định lý Đalămbe-Ơle)

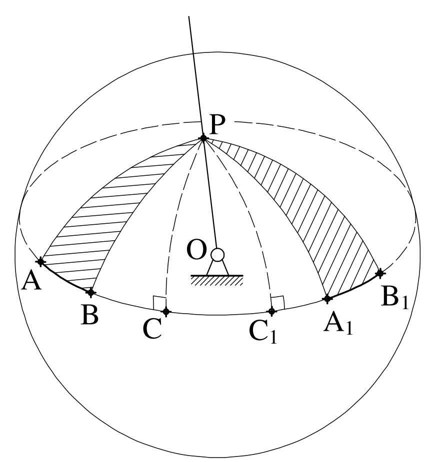
Định lý:

Mọi dịch chuyển của vật rắn có một điểm cố định từ vị trí này sang vị trí khác đều có thể thực hiện bằng một phép quay quanh một trục đi qua điểm cố định đó.

Chứng minh:

Để chứng minh định lý trước hết ta chú ý rằng: Vị trí vật (S) chuyển động có một điểm cố định sẽ hoàn toàn được xác định khi biết vị trí hai điểm bất kỳ thuộc vật không trùng O.

Trên hình vẽ (hình 5-3) lấy O làm tâm, vẽ một hình cầu bán kính tuỳ ý và lấy trên mặt cầu đó hai điểm A, B. Khi đó vị trí của vật (S) có thể xác định bằng cung AB của vòng tròn lớn của hình cầu trên.



Hình 5-3

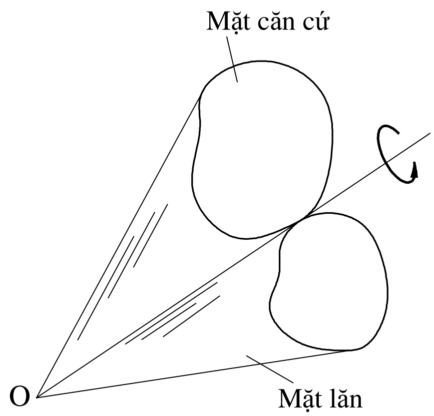
Giả sử vật (S) ở vị trí (I) xác định bằng cung AB, dịch chuyển sang vị trí (II) xác định bằng cung A_1B_1 (do AB dịch chuyển tới).

Nối A với A_1, B với B_1 bằng các cung của vòng tròn lớn và từ các điểm giữa C, D của các các cung đó vẽ hai đường thẳng góc cầu (qua C, D vẽ các cung vòng tròn lớn trực giao với các cung AA_1 và BB_1), ta có giao điểm P của chúng trên mặt cầu. Điểm P cách đều các điểm A và A_1, B và B_1. Rõ ràng các tam giác cầu APB và A_1PB_1 bằng nhau.

Khi quay vật (S) quanh trục OP ta sẽ đưa được cung AB đến chồng khít lên cung A_1B_1. Nói khác đi dịch chuyển của vật (S) từ vị trí (I) đến vị trí (II) đã thực hiện bằng một phép quay quanh trục OP. Định lý Đalămbe - Ơle đã được chứng minh.

5.1.3. Trục quay tức thời, mặt lăn, mặt căn cứ

Chuyển động của vật rắn có một điểm có định có thể coi như một dãy các dịch chuyển vô cùng bé liên tiếp nhau từ vị trí này sang vị trí lân cận. Mỗi dịch chuyển vô cùng bé này lại có thể thực hiện được nhờ một phép quay xung quanh một trục đi qua điểm cố dịnh đó. Trục quay mà vật đã thực hiện phép quay vô cùng bé gọi là trục quay tức thời đối với mỗi thời điểm.



Hình 5-4

Khi vật rắn chuyển động, quỹ tích các trục quay tức thời trong hệ quy chiếu cố định $Ox_1y_1z_1$ sẽ là một mặt nón được gọi là mặt căn cứ (hay ắc-xô-ít cố định).

Khi vật rắn chuyển động, quỹ tích các trục quay tức thời trong hệ quy chiếu động Oxyz sẽ là một mặt nón được gọi là mặt lăn (hay ắc-xô-ít động).

Hai mặt nón cố định và động này có đỉnh chung là điểm cố định O. Tại mỗi thời điểm cho trước, trục quay tức thời chính là đường sinh chung của mặt lăn và mặt căn cứ. Như vậy, khi vật chuyển động thì mặt lăn sẽ lăn không trượt trên mặt căn cứ (hình 5-4).

Chẳng hạn, hình nón lăn không trượt trên mặt phẳng quanh điểm cố định O (hình 5-1c) thì mặt nón là mặt lăn, mặt phẳng là mặt căn cứ. Tại thời điểm khảo sát đường thẳng tiếp xúc của hai mặt là trục quay tức thời.

5.1.4. Vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn chuyển động quay quanh một điểm cố định

Vật rắn chuyển động có một điểm cố định, tại mỗi thời điểm có thể coi quay quanh trục quay tức thời. Nên để đặc trưng cho chuyển động quay tức thời đó ta đưa vào khái niệm vận tốc góc và gia tốc góc được định nghĩa như sau:

a. Vận tốc góc

Vận tốc góc của vật rắn chuyển động có một điểm cố định quay quanh trục quay tức thời là đại lượng véctơ, ký hiệu $\vec{\omega}$ thoả mãn các yếu tố sau:

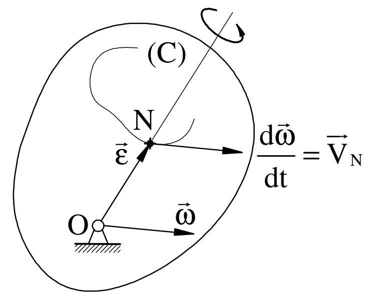
Phương của $\vec{\omega}$ trùng với trục quay tức thời, còn chiều của véctơ $\vec{\omega}$ sao cho nhìn từ ngọn của véctơ $\vec{\omega}$ xuống thấy vật rắn quay ngược chiều kim đồng hồ.

Độ lớn của véctơ $\vec{\omega}$:

$$|\vec{\omega}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\varphi^*|}{\Delta t}$$

Trong đó $\Delta\varphi^*$ là góc quay của vật quanh trục quay tức thời trong khoảng thời gian Δt (từ thời điểm t đến thời điểm t + Δt).

Điểm đặt: Véctơ $\vec{\omega}$ đặt tại điểm bất kỳ trên trục quay tức thời. Để thuận tiện ta đặt nó tại điểm cố định O (hình 5-5).



Hình 5-5

Khi vật rắn chuyển động thì véctơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ biến đổi cả về hướng lẫn độ lớn. Cho nên nếu lấy gốc ở O thì ngọn của véctơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ sẽ vẽ lên một đường cong liên tục â trong hệ quy chiếu cố định. Đường cong (C) gọi là Hô-đô-gráp của véctơ vận tốc góc $\vec{\omega}$.

b. Gia tốc góc

Gia tốc góc của vật chuyển động có một điểm cố định quay quanh trục quay tức thời là đại lượng véctơ, ký hiệu $\vec{\varepsilon}$, thoả mãn điều kiện sau:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Từ định nghĩa ta suy ra quy tắc xác định gia tốc góc $\vec{\varepsilon}$ như sau:

Theo định nghĩa $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$. Nhưng $\vec{\omega} = \overrightarrow{ON}$, nên suy ra được $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\overrightarrow{ON}} = \vec{V}_N$, nghĩa là bằng vận tốc của điểm N trên đường Hô-đô-gráp (C). Từ O vẽ véctơ $\vec{\varepsilon} = \vec{V}_N$ ta được véctơ gia tốc góc của vật rắn.

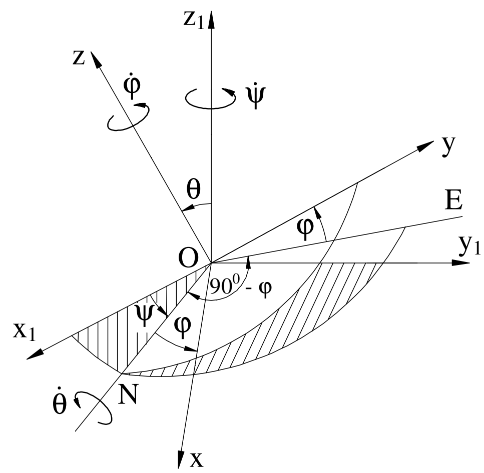
Vậy, véctơ gia tốc góc của vật rắn chuyển động quay quanh một điểm cố định bằng vận tốc của điểm đầu mút N của véctơ vận tốc góc trên đường Hô-đô-gráp (hình 5-5).

$$\vec{\varepsilon} = \vec{V}_N \qquad (5\text{-}2)$$

5.2. Khảo sát chuyển động của điểm thuộc vật

5.2.1. Phương trình động học Ơ-le

Theo kết quả trên, chuyển động của vật rắn có một điểm cố định có thể được thực hiện đồng thời ba chuyển động quay theo ba góc Ơle. Ta gọi vận tốc góc tương ứng trong các chuyển động quay thành phần là $\vec{\dot{\psi}}$, $\vec{\dot{\varphi}}$, $\vec{\dot{\theta}}$ đặt trên các trục quay (hình 5-6)



Hình 5-6

Mặt khác theo định lý Đalămbe – Ơle, dịch chuyển của vật rắn lại có thể coi nhưu quay quanh trục quay tức thời Δ với vận tốc góc $\vec{\omega}$.

Ta có: $\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\varphi}} + \vec{\dot{\theta}}$

Chiếu hệ thức này lên các trục toạ độ động Oxyz, cố định $O_1x_1y_1z_1$ ta có (hình 5-6):

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \qquad (5\text{-}3)$$

Hay:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \omega_{y_1} &= -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \omega_{z_1} &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{aligned} \qquad (5\text{-}4)$$

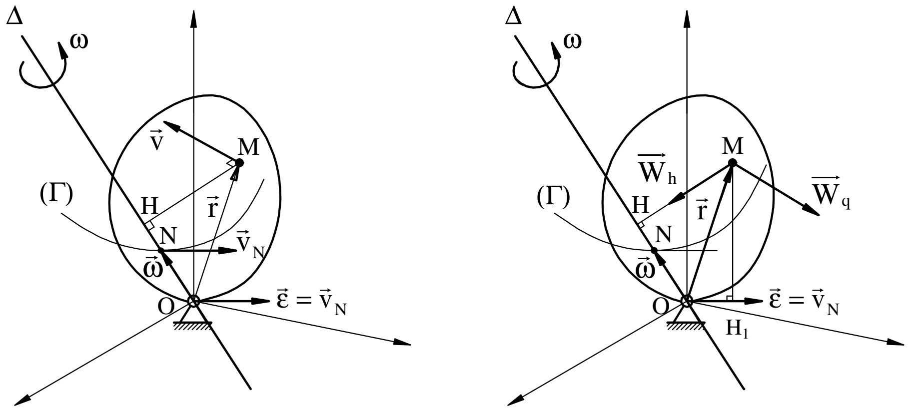
Những hệ thức (5-3) và (5-4) là những phương trình động học ơle, xác định vận tốc góc của vật rắn tuyệt đối quay quanh một điểm có định theo các thông số định vị của nó.

5.2.2. Vận tốc và gia tốc (dài) của điểm bất kỳ thuộc vật

a. Theo công thức Ơ-le, vận tốc của điểm (M) bất kỳ thuộc vật xác định bằng hệ thức:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}\ ; \quad |\vec{v}| = |\vec{\omega} \wedge \vec{r}| = \omega.MH \qquad (5\text{-}5)$$

MH là khoảng cách vuông góc hạ từ M đến trục quay tức thời Δ. Véctơ $\vec{v}$ hướng vuông góc với MH theo chiều quay ω quanh trục Δ (hình 5-7).



Hình 5-7

b. Gia tốc của điểm (M) bất kỳ được xác định:

$$\overrightarrow{W} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

Thực hiện đạo hàm và đặt: $\overrightarrow{W}_q = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}$; $\left|\overrightarrow{W}_q\right| = \left|\vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}\right| = \varepsilon.MH_1$, MH_1 là khoảng cách vuông góc hạ từ M đến trục chứa véc tơ $\vec{\varepsilon}$; $\overrightarrow{W}_q$ gọi là gia tốc của điểm M thành phần quay.

$\overrightarrow{W}_h = \omega^2.\overrightarrow{MH}$; $\left|\overrightarrow{M}_h\right| = \left|\omega^2.\overrightarrow{MH}\right| = \omega^2.MH$; $\overrightarrow{W}_h$ gọi là gia tốc của điểm M thành phần hướng (hướng vào trục quay tức thời Δ).

Vậy: $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}_q + \overrightarrow{W}_h = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r} + \omega^2.\overrightarrow{MH}$ (8-6)

Ở đây: $\overrightarrow{W}_q \perp \overrightarrow{W}_h$, nên ta có:

$$\left|\overrightarrow{W}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{W}_q\right|^2 + \left|\overrightarrow{W}_h\right|^2} = \sqrt{\varepsilon^3.(MH_1)^2 + \omega^4(MH)^2}\ . \quad (8\text{-}7)$$

Nhận xét:

Ưu điểm của hệ toạ độ Ơ-le: Đơn giản, dễ nhìn và do đó hệ thức Ơ-le (5-3) dễ tính.

Nhược điểm của hệ toạ độ Ơ-le là:

Nếu $\dot{\varphi} \gg 1$ thì đường nút OK thay đổi nhanh nên vị trí vật rắn khó xác định chính xác. Với $\dot{\varphi} \approx 10^2 - 10^3\ (v/p)$ thì dùng toạ độ Ơ-le là thích hợp. Hơn nữa khi $\dot{\varphi} \gg 1$ thì $\dot{\theta} \gg 1$ nên vẫn dẫn tới φ, ψ thay đổi nhiều. Với $\dot{\varphi} \approx 10^4 - 10^8\ (v/p)$ thì không nên dùng góc Ơ-le. Trong trường hợp này, đối với lý thuyết Gyrôxcốp người ta dùng ba góc Krưlốp. Các góc này đủ để xác định chính xác vị trí vật rắn quay quanh điểm cố định với tốc độ lớn.

Ví dụ 1. Hình nón có đỉnh O cố định lăn không trượt trên mặt phẳng. Chiều cao CO = 18 cm; góc ở đỉnh ∠AOB = 90^0. Điểm C là tâm của đáy chuyển động đều và quay về vị trí ban đầu của nó sau 1 giây.

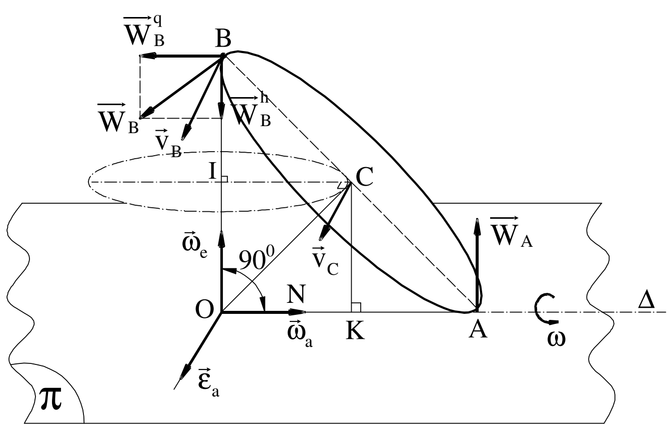
Xác định vận tốc điểm B (điểm mút của đường kính AB), gia tốc góc của nón và gia tốc của điểm A, B.

Bài giải:

a. Xác định $\vec{v}_B$ và $\vec{\varepsilon}$: Vì nón lăn không trượt trên mặt phẳng (π), nên OA là trục quay tức thời của nó. Vận tốc góc $\vec{\omega} = \vec{\omega}_a$ hướng dọc OA. Ta có:

$$V_B = \omega_a.OB;\ \omega_a = \frac{V_c}{CK} = \frac{2\pi.CI}{1}.\frac{1}{CK}$$

Thay số vào, ta được: $V_B = 36\pi\sqrt{2}\ cm/s$



Hình 5-8

Gia tốc góc $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_a$ của nón có thể tính như vận tốc điểm đầu mút vectơ $\vec{\omega} = \vec{\omega}_a$:

$$\vec{\varepsilon}_a = \frac{d\vec{\omega}_a}{dt} = \vec{v}_N$$

Mút vectơ $\vec{\omega} = \vec{\omega}_a$ (N) vạch nên vòng tròn quanh OB với vận tốc góc $\vec{\omega}_e$ do đó:

$\vec{\varepsilon}_a = \vec{v}_N = \vec{\omega}_e \wedge \vec{\omega}_a$; $\vec{\omega}_e \perp \vec{\omega}_a$, nên:

$$\varepsilon = \varepsilon_a = \left|\vec{\omega}_e \wedge \vec{\omega}_a\right| = \omega_e.\omega_a \sin 90^o = \frac{Vc}{CI}.\omega_a = 4\pi^2\ s^{-2}$$

Chiều $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_a$ hướng thẳng góc với OA và OB như hình vẽ.

b. Xác định $\overrightarrow{W}_A$ và $\overrightarrow{W}_B$.

Do A nằm trên trục quay tức thời, nên: $W_A^h = 0$. Ta có:

$$\overrightarrow{W}_A = \overrightarrow{W}_A^q = \vec{\varepsilon}_a \wedge \overrightarrow{OA}, \quad \vec{\varepsilon}_a \perp OA$$

nên: $$W_A = \left| \vec{\varepsilon}_a \wedge \overrightarrow{OA} \right| = \varepsilon_a.OA.\sin 90^o = 1000\ cm/s^2$$

Chiều $\overrightarrow{W}_A$ hướng song song với OB.

Gia tốc điểm B tính theo hệ thức: $\overrightarrow{W}_B = \overrightarrow{W}_B^q + \overrightarrow{W}_B^h = \vec{\varepsilon}_a \wedge \overrightarrow{OB} + \omega_a^2.\overrightarrow{BO}$

Ở đây: $W_B^q = \left| \vec{\varepsilon}_a \wedge \overrightarrow{OB} \right| = 1000\ cm/s^2$, chiều $\overrightarrow{W}_B^q$ hướng vuông góc với OB nằm trong mặt phẳng OAB. $W_B{}^h = \left| \omega_a{}^2.\overrightarrow{BO} \right| = 1000\ cm/s^2$, chiều $\overrightarrow{W}_B^h$ hướng từ B về O.

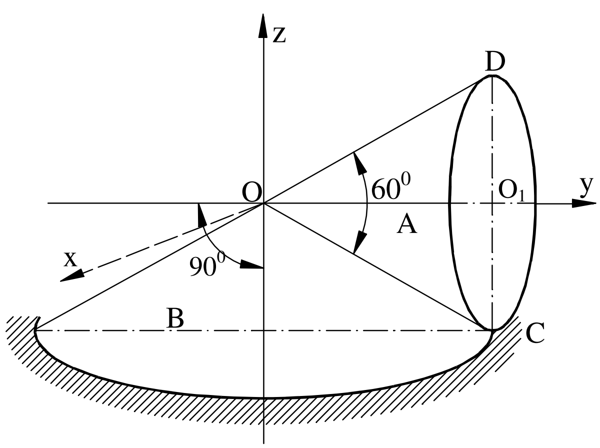
Do $\overrightarrow{W}_B^q \perp \overrightarrow{W}_B^h$, ta có: $\left| \overrightarrow{W}_B \right| = \sqrt{(W_B^q)^2 + (W_B^h)^2} = 1000\sqrt{2}\ \ cm/s^2$

Ví dụ 2.

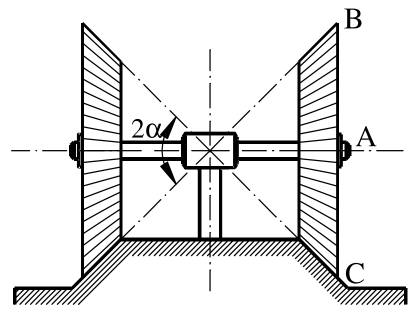
Nón A lăn 120v/p trên nón B cố định (hình 5-9). Chiều cao nón OO_1 =10cm.

a. Xác định vận tốc góc theo $\vec{\omega}_e$ của nón quanh trục Oz, vận tốc góc tương đối $\vec{\omega}_r$ của nón quanh trục OO_1 và vận tốc góc tuyệt đối $\vec{\omega}_a$, gia tốc góc tuyệt đối $\vec{\varepsilon}_a$ của nón.

b. Xác định vận tốc, gia tốc các điểm C và D. Coi rằng nón A lăn không trượt trên nón B.



Hình 5-9



Hình 5-10

Đs:

a. $\omega_e = 4\pi\ s^{-1}$; $\omega_r = 6{,}29\pi\ s^{-1}$; $\omega_a = 8\pi\ s^{-1}$ và hướng theo OC; $\varepsilon_a = 27{,}68\pi^2\ s^{-2}$ và hướng song song trục x.

b. $V_C = 0$; $V_D = 80\pi$ cm/s và hướng song song trục x.

$W_C = 320\pi^2$ cm/s^2 và hướng thẳng góc với OC trong mặt phẳng yOz:

$W_{Dy} = -480\pi^2$ cm/s^2; $W_{Dz} = -160\sqrt{3}\pi^2 cm/s^2$.

Ví dụ 3. Tìm vận tốc và gia tốc các điểm C và B của bánh răng nón lăn không trượt theo vành tựa ngoài cũng dạng hình nón nằm ngang. Bán kính đáy của con lăn (bánh răng động): $R = 10\sqrt{2}cm$; góc ở đỉnh $2\alpha = 90^0$; Vận tốc điểm A theo quỹ đạo của nó $V_A = 20$ cm/s. (hình 5-10).

Đs: $V_C = 0$; $W_C = 40$ cm/s^2.

$V_B = 40$ cm/s; $W_B = 40$ cm/s^2.