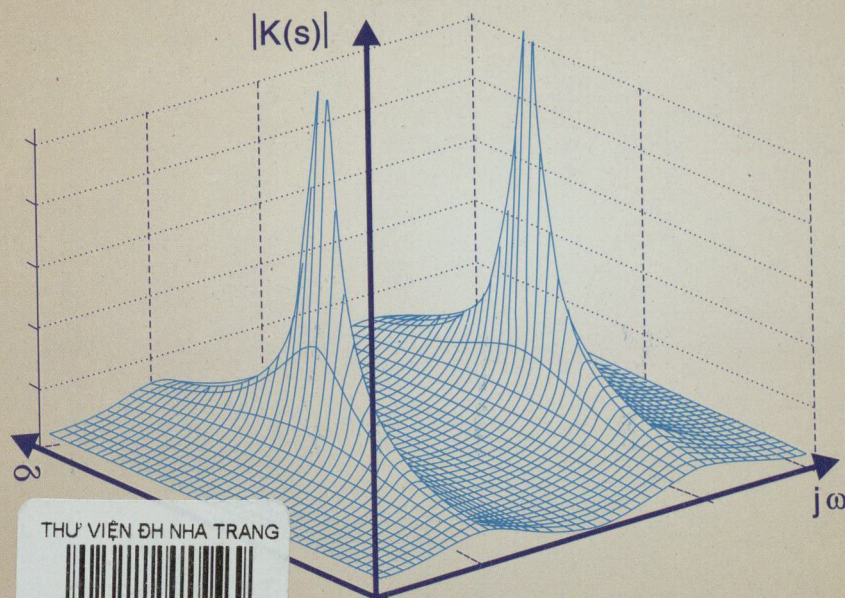


PHẠM THỊ CƯ (Chủ Biên)
LÊ MINH CƯỜNG - TRƯƠNG TRỌNG TUẤN MỸ

EBOOKBKMT.COM
Tài liệu kỹ thuật miễn phí

MẠCH ĐIỆN II



THƯ VIỆN ĐH NHA TRANG



3000021918



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA**

Phạm Thị Cư (Chủ biên)

Lê Minh Cường - Trương Trọng Tuấn Mỹ

EBOOKBKMT.COM

Tài liệu kỹ thuật miễn phí

MẠCH ĐIỆN II

(Tái bản lần thứ ba)

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
TP HỒ CHÍ MINH - 2009**

MỤC LỤC

Chương 6

PHÂN TÍCH MẠCH TRONG MIỀN THỜI GIAN	5
6.1 Phương pháp tích phân kinh điển	5
6.2 Phương pháp toán tử	32
6.3 Phương pháp tích chập và tích phân Duhamel	63
6.4 Phương pháp biến trạng thái	80

Chương 7

PHÂN TÍCH MẠCH TRONG MIỀN TẦN SỐ	86
7.1 Phương pháp chuỗi Fourier	86
7.2 Phương pháp biến đổi tích phân Fourier	105
7.3 Điều kiện thực hiện hệ thống <i>TTD</i>	118

Chương 8

ĐƯỜNG DÂY DÀI	121
8.1 Khái niệm về mạch thông số rải	121
8.2 Các thông số đơn vị của đường dây dài	124
8.3 Phương trình đường dây dài và nghiệm	125
8.4 Đường dây không tổn hao	153
8.5 Quá trình quá độ trên đường dây dài	172

Chương 9

MẠCH KHÔNG TUYẾN TÍNH	191
9.1 Các phần tử <i>KTT</i> và các đặc trưng	191
9.2 Mạch điện trở không tuyến tính	205
9.3 Mạch <i>KTT</i> động	235
9.4 Mạch từ	262

TÀI LIỆU THAM KHẢO	294
--------------------	-----

PHÂN TÍCH MẠCH TRONG MIỀN THỜI GIAN

Trong MẠCH ĐIỆN I chúng ta đã xét các phương pháp phân tích mạch tuyến tính, tập trung, dùng (*TTD*) ở trạng thái xác lập điều hòa; ở đó cần phải dùng phương pháp biên độ phức (ảnh phức) để đại số hóa phương trình mạch điện. Trạng thái xác lập điều hòa (xác lập sin) được chấp nhận là khoảng thời gian xét mạch ở cách xa thời điểm đóng nguồn tác động lên mạch. Do đó, điện áp và dòng điện trên các phần tử mạch cũng là các quá trình sin cùng tần số với nguồn tác động.

Như vậy sẽ nảy sinh các câu hỏi như quá trình dòng điện và điện áp trong mạch ngay sau các thời điểm đóng (ngắt) nguồn tác động (không nhất thiết là sin) sẽ như thế nào? Phương pháp để xác định chúng? Thế nào là trạng thái xác lập và quá độ của mạch điện?

Để trả lời những câu hỏi trên, trong chương này ta sẽ đưa ra các phương pháp cho phép phân tích mạch ở thời điểm bất kỳ với nguồn tác động bất kỳ được gọi là phân tích mạch trong miền thời gian. Phân tích mạch trong miền thời gian còn được gọi là phân tích mạch ở trạng thái quá độ. Bởi vì, trong đó người ta không chỉ quan tâm đến thành phần xác lập (cường bức) mà cả thành phần tự do (quá độ), vì cả hai đều là nghiệm của phương trình mạch.

Sau đây sẽ lần lượt trình bày các phương pháp phân tích mạch trong miền thời gian (Phân tích mạch ở trạng thái quá độ).

6.1 PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KINH ĐIỂN

6.1.1 Phương trình mạch và nghiệm

1- Thành lập phương trình mô tả mạch

Phương trình mô tả mạch *TTD* với các phần tử *R*, *L*, *C*, *M*, cùng các nguồn tác động độc lập và phụ thuộc, là phương trình vi tích phân, được thành lập dựa trên các định luật Kirchhoff I, II (*KI*, *KII*) và định luật Ohm. Có nhiều phương pháp thành lập phương trình mạch như: phương pháp dòng nhánh, phương pháp dòng vòng, phương pháp thế nút ... đã

được trình bày kỹ trong MẠCH ĐIỆN I. Việc phân tích mạch trong miền thời gian, là đi tìm nghiệm của các phương trình mạch ở thời điểm bất kỳ với nguồn tác động bất kỳ, bằng cách giải trực tiếp phương trình vi phân mô tả mạch, nên được gọi là phương pháp tích phân kinh điển (Phương pháp kinh điển). Phương trình mạch được thành lập bằng phương pháp dòng nhánh, trong trường hợp tổng quát, được đưa về một phương trình vi phân cấp n (m) có dạng như sau

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (6.1)$$

trong đó $y(t)$ (hoặc $x(t)$) - là nghiệm cần tìm, còn $x(t)$ (hoặc $y(t)$) là hàm đã cho. Các hệ số a_k , b_k - phụ thuộc các thông số mạch *RLCM*, nên đó là các đại lượng không thay đổi.

Nếu $y(t)$ được coi là đáp ứng trên các phần tử mạch (dòng điện hay điện áp) đối với $x(t)$ - là nguồn tác động lên mạch (nguồn áp hoặc nguồn dòng), thì việc giải phương trình (6.1) là đi tìm các dòng điện, điện áp khi đã biết các thông số mạch và các nguồn tác động. Như vậy với mạch đã cho, tức các giá trị a_k , b_k và nguồn $x(t)$ đã xác định, ta có thể viết phương trình (6.1) ở dạng ngắn gọn hơn

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \quad (6.2)$$

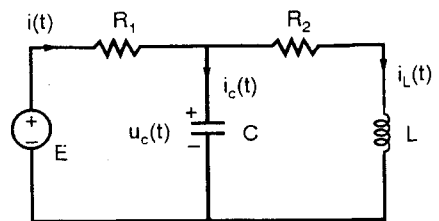
Việc giải phương trình (6.2), sinh viên đã được học kỹ trong chương trình toán học, do đó ở đây ta chỉ nhắc lại ngắn gọn và sẽ quan tâm nhiều hơn đến ý nghĩa vật lý của nghiệm. Hãy xét ví dụ sau đây về cách thành lập phương trình mạch dạng (6.2).

Ví dụ 6.1. Hãy thành lập phương trình để xác định điện áp $u_c(t)$ của mạch trên

H.6.1. Cho biết

$$R_1 = 4/3(\Omega); \quad R_2 = 3(\Omega); \quad C = 1/5(F); \\ L = 4(H); \quad E = 11(V).$$

Giải. Áp dụng phương pháp dòng điện nhánh để viết số phương trình theo định luật K I, II.



Hình 6.1

$$i(t) = i_c(t) + i_L(t) \quad (1)$$

$$R_1 i(t) + u_c(t) = E \quad (2)$$

$$R_2 i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} - u_c(t) = 0 \quad (3)$$

Để có dạng (6.2), dùng phương pháp khử biến để chỉ giữ lại $u_c(t)$.

$$(1) \rightarrow i_L(t) = i(t) - i_c(t) \quad (4)$$

$$(2) \rightarrow i(t) = \frac{E - u_c(t)}{R_1} \quad (5)$$

suy ra

$$\left. \begin{aligned} i_L(t) &= \frac{E - u_c(t)}{R_1} - C \frac{du_c(t)}{dt} \\ \frac{di_L(t)}{dt} &= -\frac{1}{R_1} \frac{du_c(t)}{dt} - C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Thay (6) vào (3)

$$R_2 \left[\frac{E - u_c(t)}{R_1} - C \frac{du_c(t)}{dt} \right] - L \left[-\frac{1}{R_1} \frac{du_c(t)}{dt} + C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} \right] - u_c(t) = 0$$

Thay giá trị các thông số ta có phương trình vi phân mô tả mạch trên (H.6.1) như sau

$$16 \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + 72 \frac{du_c(t)}{dt} + 65 u_c(t) = 495$$

2- Nghiệm của phương trình mạch

Nghiệm $y(t)$ của phương trình (6.2) gồm hai thành phần

Thành phần thứ nhất: là nghiệm của phương trình thuần nhất có vế phải bằng không ($f(t) = 0$), được gọi là thành phần tự do $y_{td}(t)$.

Thành phần thứ hai: là nghiệm riêng của phương trình (6.2), tương ứng với vế phải khác không ($f(t) \neq 0$), được gọi là thành phần cưỡng bức $y_{cb}(t)$. Do đó, nghiệm đầy đủ của (6.2) là

$$y(t) = y_{td}(t) + y_{cb}(t) \quad (6.3)$$

Từ biểu thức (6.3) có thể nhận thấy rằng, dòng điện (điện áp) trên các phần tử mạch là tổng của hai thành phần

- *Thành phần tự do* không phụ thuộc vào nguồn tác động $f(t)$, mà chỉ phụ thuộc vào các thông số mạch và năng lượng trong mạch ở thời điểm xét, nó còn được gọi là thành phần quá độ.

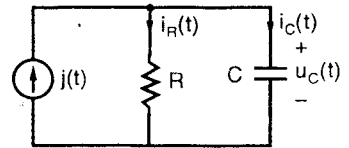
- *Thành phần cưỡng bức* chỉ phụ thuộc vào nguồn tác động, nó còn được gọi là thành phần xác lập khi nguồn tác động là một chiều hoặc điều hòa.

Như vậy, trong MẠCH ĐIỆN I ta chỉ phân tích mạch ở trạng thái xác lập với nguồn một chiều và điều hòa, đó là trường hợp riêng, chưa phải là bài toán phân tích mạch tổng quát. Sau đây ta sẽ xét cách tìm thành phần cưỡng bức với nguồn tác động bất kỳ và thành phần tự do của (6.2). Đây chính là bài toán phân tích mạch TTD tổng quát nhất.

A- Thành phần cưỡng bức là nghiệm của phương trình có vẻ phải khác không, nó tùy thuộc vào loại nguồn tác động $f(t)$. Ta gọi là thành phần cưỡng bức, vì nó là đáp ứng của mạch với nguồn tác động bên ngoài. Để tìm thành phần cưỡng bức, người ta thường dùng phương pháp hệ số bất định, khi đó cần phải đoán trước nghiệm của (6.2) tương ứng với hàm $f(t)$ đã cho. Cách tìm nghiệm như vậy trong lý thuyết mạch tương đối đơn giản, vì các nguồn tác động thực tế là những tín hiệu có biểu thức giải tích không phức tạp lắm. Sau đây ta sẽ xét một số ví dụ về cách tìm nghiệm riêng.

Ví dụ 6.2. Cho mạch điện trên H.6.2, hãy xác định điện áp trên tụ $u_c(t)$ với các nguồn tác động như sau:

- 1- $j(t) = 1$ (A)
- 2- $j(t) = \cos(\omega t)$ (A)
- 3- $j(t) = e^{-t} \cos t$ (A). Với $C = 1$ (F); $R = 1/3$ (Ω)
4. $j(t) = e^{-2t}$ (A). Với $C = 1$ (F); $R = 1/2$ (Ω)



Hình 6.2

Giải. Phương trình mạch được viết theo định luật K_I

$$C \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{R} = j(t) \quad (1)$$

Thành phần cưỡng bức của điện áp $u_c(t)$ tương ứng với các nguồn tác động đã cho được xác định như sau:

a. $j(t) = 1$ (A)

Nghiệm riêng được chọn $u_{ccb}(t) = B$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được $B = Rj(t) = R.1$ (V)

b. $j(t) = \cos(\omega t)$ (A)

Nghiệm cưỡng bức được chọn là hàm điều hòa cùng tần số:

$$u_{ccb}(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3)$$

thay (3) vào (1) ta được:

$$C(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) + \frac{1}{R}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = \cos \omega t$$

$$\Rightarrow RC(-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) + (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = R \cos \omega t$$

$$(A + \omega R.C.B) \cos \omega t + (B - \omega R.C.A) \sin \omega t = R \cos \omega t$$

suy ra $A + \omega.R.C.B = R$; $B - \omega R.C.A = 0$

do đó $A = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2}$; $B = \frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}$

Thành phần cưỡng bức của $u_c(t)$

$$u_{ccb}(t) = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} \cos \omega t + \frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2} \sin \omega t$$

hay là $u_{ccb}(t) = U_m \cos(\omega t - \varphi)$

với $U_m = \sqrt{A^2 + B^2}$; $\varphi = \arctg\left(\frac{B}{A}\right) = \arctg(\omega RC)$

Kết quả nhận được trong hai trường hợp a, b cũng tương tự như khi ta áp dụng phương pháp phân tích mạch xác lập trong MẠCH ĐIỆN I. Thành phần cưỡng bức trong hai trường hợp này được gọi là thành phần xác lập. Với trường hợp a, nguồn tác động là một chiều, ở xác lập tụ điện hở mạch, điện áp trên nó bằng điện áp nhận được trên điện trở $u_R(t) = u_c(t) = R \cdot j(t)$. Ở trường hợp b, khi áp dụng phương pháp biên độ phức để phân tích mạch xác lập điều hòa, ta có

Biên độ phức nguồn dòng điện $\dot{J} = 1 \angle 0 \text{ (A)}$

Dẫn nạp của hai cực $Y = G + j\omega C \text{ (S)}$

Biên độ phức điện áp trên tụ

$$\dot{U}_{ccb} = \frac{\dot{J}}{Y} = \frac{1 \angle 0}{\sqrt{G^2 + (\omega C)^2} \angle \arctg\left(\frac{\omega C}{G}\right)} \text{ (V)}$$

Khi ký hiệu $U_m = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (\omega C)^2}}$; $\varphi = \arctg(\omega RC)$

quá trình thời gian của thành phần điện áp xác lập trên tụ

$$u_{xl}(t) = \text{Re}[U_m e^{j(\omega t - \varphi)}] = U_m \cos(\omega t - \varphi) \text{ (V)}$$

c. $j(t) = e^{-t} \cos t \text{ (V)}$; $C = 1 \text{ (F)}$; $R = 1/3 \text{ (}\Omega\text{)}$

Trong trường hợp này, nghiệm riêng được chọn có dạng

$$u_{ccb}(t) = e^{-t} [A \cos t + B \sin t] \text{ (4)}$$

thay (4) vào (1) và thực hiện đồng nhất hệ số hai vế phương trình ta được

$$A = \frac{2}{5}; B = \frac{1}{5}. \text{ Do đó } u_{ccb}(t) = e^{-t} \left(\frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t \right)$$

d. $j(t) = e^{-2t}(A); C = I(F); R = \frac{1}{2}(\Omega)$

Thành phần cưỡng bức được chọn là $u_{ccb}(t) = Ae^{-2t}$ (5)

Thay (5) vào (1) ta được $-2Ae^{-2t} + 2Ae^{-2t} = e^{-2t}$

Ta sẽ không tìm được giá trị của A để thỏa mãn phương trình trên. Khi đó phải chọn $u_{ccb}(t) = Ate^{-2t}$ (6)

thay (6) vào (1) $(Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t}) + 2Ate^{-2t} = e^{-2t}$

với giá trị $A = 1$, phương trình trên đúng với mọi giá trị của t .

B- Thành phần tự do là nghiệm của phương trình thuần nhất (6.4)

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (6.4)$$

Người ta thường tìm nghiệm của (6.4) dưới dạng

$$y_{td}(t) = e^{pt} \quad (6.5)$$

trong đó p - hằng số cần tìm.

Thay (6.5) vào (6.4) sẽ được

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (6.6)$$

Phương trình (6.6) được gọi là phương trình đặc trưng của (6.4), cho phép xác định các giá trị của p . (6.6) là phương trình đại số bậc n , nên sẽ có n nghiệm p_1, p_2, \dots, p_n phụ thuộc các giá trị a_k . Phương trình thuần nhất cũng sẽ có n nghiệm $y_{td}(t)$ tương ứng với n giá trị của p là

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{p_1 t} \\ y_2(t) &= e^{p_2 t} \\ &\dots \dots \dots \\ y_n(t) &= e^{p_n t} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Trong lý thuyết phân tích mạch điện, nói chung không quan tâm đến tất cả các nghiệm của (6.4), người ta chỉ quan tâm đến một nghiệm là hàm thực theo thời gian thỏa mãn các điều kiện đầu bài toán thể hiện qua các hằng số K nào đó. Sau đây sẽ xét cụ thể các dạng nghiệm của (6.4) tùy theo các giá trị p nhận được.

• Nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng p_1, p_2, \dots, p_n đều lấy giá trị thực và không trùng nhau (thực, đơn), ta sẽ chọn nghiệm tự do là tổ hợp tuyến tính của các nghiệm (6.7)

$$y_{td}(t) = K_1 \cdot e^{p_1 t} + K_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots + K_n \cdot e^{p_n t} \quad (6.8)$$

• Nếu trong các giá trị của p có một cặp nghiệm liên hợp phức $p_1 = -\alpha + j\beta$ và $p_2 = -\alpha - j\beta$. Với α, β là các số thực bất kỳ và $(n - 2)$ giá trị p khác là thực, đơn, thì nghiệm tự do sẽ có dạng

$$y_{td}(t) = K \cdot e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \Phi) + K_3 \cdot e^{p_3 t} + \dots + K_n \cdot e^{p_n t} \quad (6.9)$$

trong đó $K = 2|K_1|$; $K_1 = K_2^*$; $\Phi = \arg K_1$

• Nếu trong các nghiệm p_1, p_2, \dots, p_n có nghiệm bội. Ví dụ trường hợp nghiệm bội hai (nghiệm kép): $p_1 = p_2$; và $(n - 2)$ giá trị p ; còn lại là thực, đơn, thì nghiệm tự do sẽ có dạng

$$y_{td}(t) = (K_1 + K_2 \cdot t)e^{p_1 t} + K_3 \cdot e^{p_3 t} + \dots + K_n \cdot e^{p_n t} \quad (6.10)$$

Trường hợp tổng quát: nghiệm p_1 bội: $2 \leq r \leq n$, và $(n - r)$ giá trị p còn lại là thực, đơn, thì nghiệm tự do sẽ có dạng sau

$$y_{td}(t) = (K_1 + K_2 \cdot t + \dots + K_r \cdot t^{r-1})e^{p_1 t} + K_{r+1} \cdot e^{p_{r+1} t} + \dots + K_n \cdot e^{p_n t} \quad (6.11)$$

Từ những phân tích trên đây có thể thấy rằng, để xác định thành phần tự do cần phải xác định các giá trị p và K .

- Các giá trị p phụ thuộc vào các thông số mạch biểu thị qua các hằng số a_k , nó quyết định hình dạng của thành phần tự do.

- Trong khi đó, giá trị các hằng số K phụ thuộc vào giá trị của $y(t)$ tại thời điểm xét mạch, nó quyết định độ lớn của thành phần tự do.

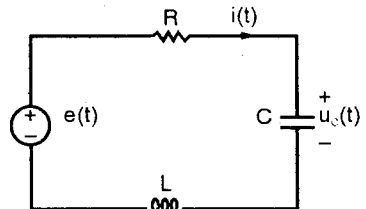
Vấn đề mấu chốt của phân tích mạch trong miền thời gian là cần xác định các thành phần tự do. Do đó, cần phải tìm hiểu kỹ cách tìm phương trình đặc trưng (tìm các giá trị p) và tìm các điều kiện đầu (tìm các giá trị K).

Ví dụ 6.3 dưới đây sẽ minh họa cách xác định thành phần tự do như vừa trình bày ở trên.

Ví dụ 6.3. Hãy xác định thành phần tự do của điện áp trên tụ điện trong mạch H.6.3.

Giải. Phương trình mạch điện thành lập dựa vào định luật KII

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = e(t)$$



Hình 6.3

biết rằng: $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$; $u_R(t) = Ri(t)$

và $i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$

ta có $LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = e(t)$

Phương trình thuần nhất

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0$$

đặt $\alpha = \frac{R}{2L}$; $\omega_{ch} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, phương trình thuần nhất sẽ có dạng

$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_{ch}^2 u_c(t) = 0$$

Phương trình đặc trưng $p^2 + 2\alpha p + \omega_{ch}^2 = 0$

Nghiệm của phương trình đặc trưng $p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_{ch}^2}$

tùy theo giá trị của α và ω_{ch} , tức của các thông số mạch R, L, C , mà sẽ xảy ra ba trường hợp sau

• Khi $\alpha^2 > \omega_{ch}^2$

Tức là $R > 2\sqrt{L/C}$, sẽ có hai nghiệm thực, đơn

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_{ch}^2}; \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_{ch}^2}$$

Thành phần tự do của điện áp trên tụ sẽ có dạng

$$u_{td}(t) = K_1 \exp\left[(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_{ch}^2})t\right] + K_2 \exp\left[(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_{ch}^2})t\right]$$

• Khi $\alpha^2 = \omega_{ch}^2$

Tức là $R = 2\sqrt{L/C}$, phương trình đặc trưng có nghiệm kép

$$p_1 = p_2 = -\alpha$$

Thành phần tự do có dạng $u_{td}(t) = (K_1 + K_2 t) \exp(-\alpha t)$

Điện trở của mạch trong trường hợp này được gọi là điện trở tới hạn.

• Khi $\alpha^2 < \omega_{ch}^2$

Tức là $R < 2\sqrt{L/C}$, sẽ có cặp nghiệm liên hợp phức

$$p_1 = -\alpha + j\omega_r; \quad p_2 = -\alpha - j\omega_r$$

trong đó $\omega_r = \sqrt{\omega_{ch}^2 - \alpha^2}$

Thành phần tự do trong trường hợp này có dạng:

$$u_{td}(t) = Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_r t + \phi).$$

Từ ví dụ về mạch cộng hưởng nối tiếp RLC trên đây. Ta có nhận xét:

Thành phần tự do có dạng phụ thuộc thông số mạch, biểu thị qua các tham số α và ω_{ch} .

Tham số α tỉ lệ với giá trị điện trở của mạch, nó biểu thị sự tổn hao năng lượng nên được gọi là hệ số suy giảm.

Khi $R \geq 2\sqrt{L/C}$, các thành phần tự do là các hàm suy giảm theo thời gian.

Khi $R < 2\sqrt{L/C}$, trong mạch sẽ có dao động tắt dần với tần số $\omega_r \leq \omega_{ch}$.

3- Phương trình đặc trưng

Phương trình đặc trưng (6.6) có được từ cách thành lập phương trình mạch theo phương pháp dòng điện nhánh. Theo phương pháp này, số phương trình mô tả mạch bằng tổng số phương trình viết theo định luật KI và KII , sau khi dùng phương pháp khử biến, sẽ còn chỉ một phương trình dạng (6.1). Trong trường hợp khi mạch phức tạp, có số nút và số vòng lớn, tổng số phương trình theo các định luật KI , II sẽ nhiều, và quá trình thành lập (6.1) sẽ khó khăn. Trong trường hợp như vậy, trong MẠCH ĐIỆN I người ta đã giới thiệu các phương pháp biến đổi tương đương mạch, phương pháp dòng điện vòng, phương pháp thế nút, phương pháp nguồn tương đương Thévenin, Norton v.v... (xem chương 3). Cùng với việc đại số hóa phương trình vi tích phân bằng phương pháp biên độ phức ta sẽ có hệ phương trình đại số, rất tiện lợi cho việc ứng dụng các phương pháp và công cụ tính toán hiện đại như máy tính.

Với ý tưởng nêu trên, ta sẽ đưa ra phương pháp đại số hóa mạch để tìm phương trình đặc trưng như sau. Bởi vì, thành phần tự do được tìm dưới dạng $y_{td}(t) = e^{pt}$ (6.5). Nên:

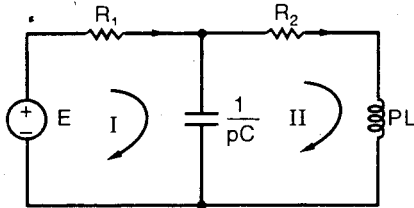
$$\frac{dy_{td}(t)}{dt} = \frac{de^{pt}}{dt} = pe^{pt}; \quad \int y_{td}(t) dt = \int e^{pt} dt = \frac{1}{p} e^{pt}$$

Một cách hình thức thay phép đạo hàm bằng toán tử p và tích phân bằng $1/p$. Quan hệ dòng điện, điện áp trên các phần tử L , C , M sẽ có dạng:

$$u_L(t) = L \frac{de^{pt}}{dt} = pLe^{pt}; \quad i_C(t) = C \frac{de^{pt}}{dt} = pCe^{pt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int e^{pt} dt = \frac{1}{pL} e^{pt}; \quad u_c(t) = \frac{1}{C} \int e^{pt} dt = \frac{1}{pC} e^{pt}$$

Như vậy có thể đại số hóa phương trình vi tích phân mô tả mạch khi chấp nhận thay thế các trở kháng toán tử



$$\begin{aligned} Z_L &= pL; \quad Y_L = \frac{1}{pL} \\ Z_c &= \frac{1}{pC}; \quad Y_c = pC \end{aligned} \quad (6.12)$$

Hãy trở lại với ví dụ (6.1) và áp dụng (6.12) để thành lập phương trình mạch theo các phương pháp nêu trên. Ở đây sẽ giới hạn xét phương pháp: dòng mắt lưới, thế nút, và phương pháp mạch tương đương.

1- Phương trình dòng mắt lưới

$$\left(R_1 + \frac{1}{pC}\right)I_{v1} - \frac{1}{pC}I_{v2} = E$$

$$-\frac{1}{pC}I_{v1} + \left(R_2 + pL + \frac{1}{pC}\right)I_{v2} = 0$$

dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{pC} & -\frac{1}{pC} \\ -\frac{1}{pC} & R_2 + pL + \frac{1}{pC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{v1} \\ I_{v2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$$

Khi cho nguồn tác động bằng không, các dòng vòng là nghiệm tự do phải khác không, do đó, định thức của ma trận trở kháng vòng phải bằng không

$$|Z_v| = \begin{vmatrix} R_1 + \frac{1}{pC} & -\frac{1}{pC} \\ -\frac{1}{pC} & R_2 + pL + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Ta sẽ có phương trình đặc trưng của mạch khi thay giá trị các phần tử vào phương trình $|Z_v| = 0$: $16p^2 + 72p + 65 = 0$

2- Phương pháp điện thế nút

$$\left[\frac{1}{R_1} + pC + \frac{1}{R_2 + pL}\right]U_c = \frac{E}{R_1}$$

Khi cho nguồn tác động bằng không ta có

$$\left[\frac{1}{R_1} + pC + \frac{1}{R_2 + pL} \right] U_c = 0$$

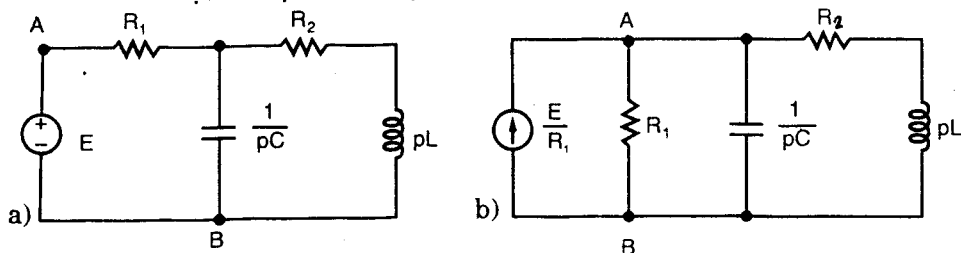
Điện áp trên tụ là thành phần tự do phải khác không do đó định thức của ma trận dẫn nạp nút phải bằng không:

$$|Y_N| = \left| \frac{1}{R_1} + pC + \frac{1}{R_2 + pL} \right| \equiv 0$$

Thay giá trị các thông số mạch, ta có phương trình đặc trưng suy ra từ phương trình $|Y_N| = 0$: $16p^2 + 72p + 65 = 0$

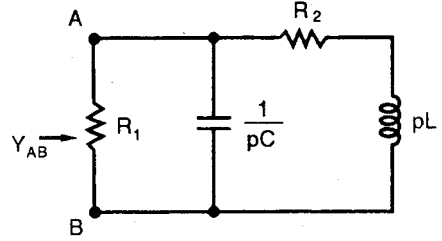
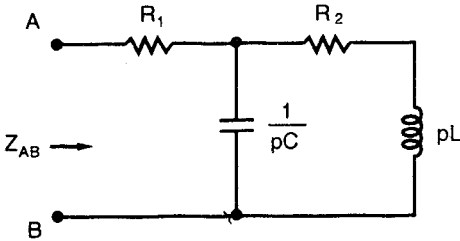
Kết quả nhận được từ hai phương pháp trên là hoàn toàn giống nhau, và cũng giống như kết quả có được khi xác định phương trình đặc trưng từ phương pháp dòng điện nhánh, áp dụng cho ví dụ 6.1 trước đây. Sau khi tìm nghiệm của phương trình đặc trưng, tùy theo giá trị của p mà ta có thể biết ngay dạng của thành phần tự do.

Như vậy, có thể nhận thấy là việc tìm phương trình đặc trưng theo hai phương pháp vừa trình bày trên giúp ta có thể tìm nghiệm tự do nhanh hơn, vì không phải thành lập phương trình mạch. Một cách hình thức, chỉ xác định các ma trận trở kháng vòng hoặc ma trận dẫn nạp nút, và cho định thức của chúng bằng không, sẽ có ngay phương trình đặc trưng. Cũng có thể thấy rằng, phương pháp biến đổi tương đương mạch cũng giúp ta có được phương trình đặc trưng nhanh hơn. Bởi vì thành phần tự do là nghiệm của phương trình thuần nhất, tương ứng với $f(t) = 0$, điều đó có nghĩa là khi tìm phương trình đặc trưng, ta cho tất cả các nguồn tác động độc lập nghỉ. (theo nguyên tắc ngắn mạch nguồn áp, hở mạch nguồn dòng). Mạch không có nguồn khi đó có thể được thay thế bằng một trở kháng hoặc dẫn nạp tương đương nhìn từ hai cực nào đó. Khi cho $Z_{td} = 0$ hoặc $Y_{td} = 0$ ta cũng sẽ có ngay phương trình đặc trưng. Hãy minh họa phương pháp này khi dùng lại ví dụ 6.1. Mạch điện trên H.6.1 có thể được vẽ lại khi thay thế các trở kháng toán tử (H.6.4 a, b)



Hình 6.4

Ta sẽ tính trở kháng tương đương Z_{AB} cho mạch H.6.4a, và dẫn nạp tương đương Y_{AB} cho mạch H.6.4b. Sau khi bỏ nguồn, chọn các cực A, B để từ đó xác định Z_{AB} , Y_{AB} .



ta có $Z_{AB} = R_1 + 1/pC // (R_2 + pL) = 0$

$$Y_{AB} = \frac{1}{R_1} + pC + \frac{1}{R_2 + pL} = 0$$

Từ các phương trình $Z_{AB} = 0$ và $Y_{AB} = 0$ ta có lại được phương trình đặc trưng như đã xét trong các phương pháp trên.

Khi trong mạch có chứa nguồn phụ thuộc và phần tử hồ cảm, việc tìm Z_v và Y_N như đã trình bày trong MẠCH ĐIỆN I. Ta cũng thành lập phương trình dòng vòng và phương trình thế nút như đối với mạch có nguồn độc lập, ma trận Z_v và Y_N trong các trường hợp này tất nhiên sẽ không đối xứng (xem chương 3 MẠCH ĐIỆN I).

Sẽ tạm dừng việc xét cách xác định phương trình đặc trưng ở đây, vì bạn đọc có thể hình dung được việc tìm phương trình đặc trưng trực tiếp từ các định thức mạch (Z_v, Y_N) nhanh hơn, dễ hơn và cho kết quả thành phần tự do của bất kỳ đại lượng điện áp hay dòng điện nào trên các phần tử mạch. Phương trình đặc trưng của mạch trong ví dụ 6.1.

$$16p^2 + 72p + 65 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-72 \pm \sqrt{72^2 - 4 \cdot 16 \cdot 65}}{32} = \frac{-72 \pm 32}{32}$$

$$p_1 = -\frac{5}{4}; \quad p_2 = -\frac{13}{4}; \quad y_{td}(t) = K_1 e^{-\frac{5}{4}t} + K_2 e^{-\frac{13}{4}t}$$

$y_{td}(t)$ có thể là dòng, có thể là áp. Đối với một mạch có cấu trúc đã cho trước, hình dạng của các thành phần tự do là giống nhau, chúng chỉ khác nhau độ lớn, biểu thị qua các hằng số K ; mà ta sẽ xét đến trong phần tiếp theo.

4- Điều kiện đầu

Như đã biết, nghiệm của phương trình thuần nhất phụ thuộc vào giá trị của $y(t)$ và các đạo hàm của nó tại thời điểm xét. Khi giả thiết xét mạch tại $t = 0$, thì nghiệm tự do của phương trình thuần nhất cấp n phải thỏa mãn n điều kiện đầu tại $t = 0$ là

$$y(0); \quad y'(0); \quad y''(0); \quad \dots \quad y^{(n-1)}(0) \quad (6.13)$$

Với các điều kiện đầu (6.13) có thể xác định các hằng số K .

Trong lý thuyết phân tích mạch điện, các điều kiện đầu được xác định dựa vào trạng thái năng lượng của mạch tại thời điểm xét ($t = 0$) và các định luật cơ bản của MĐ là định luật Ohm và *KI, II*. Bởi vì $y(t)$ là dòng điện hoặc điện áp cần tìm, nên điều kiện đầu cần xác định là giá trị của chúng và các đạo hàm tại $t = 0$.

Năng lượng trong mạch được tích lũy trong tụ điện và cuộn dây, tại thời điểm xét được xác định theo công thức sau

$$W_c(0) = \frac{1}{2} C u^2(0); \quad W_L(0) = \frac{1}{2} L i^2(0) \quad (6.14)$$

trong đó $u(0)$ và $i(0)$ là điện áp trên tụ và dòng điện qua cuộn dây tại $t = 0$. Bởi vì năng lượng điện từ trường là đại lượng liên tục nên tại $t = 0$ có thể viết

$$W_c(0^-) = W_c(0^+); \quad W_L(0^-) = W_L(0^+) \quad (6.15)$$

với $t = 0^-$ là giới hạn bên trái của thời điểm xét mạch, còn $t = 0^+$ là giới hạn bên phải. Nếu tại $t = 0$, mạch thay đổi trạng thái cân bằng thì năng lượng trong mạch vẫn thỏa mãn (6.15).

Từ các biểu thức (6.14) và (6.15) ta có thể rút ra một kết luận quan trọng là: *tại thời điểm thay đổi trạng thái cân bằng của mạch, điện áp trên tụ và dòng điện qua cuộn dây là những đại lượng liên tục*

$$\begin{aligned} u_c(0^-) &= u_c(0^+) = u(0) \\ i_L(0^-) &= i_L(0^+) = i(0) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Cần lưu ý rằng, các đại lượng khác không nhất thiết phải liên tục tại $t = 0$.

Ví dụ: dòng; áp trên các điện trở; dòng trên tụ và điện áp trên cuộn dây. Các giá trị dòng điện và điện áp cùng các đạo hàm của nó tại $t = 0$ (6.13) phụ thuộc vào năng lượng trong mạch, do đó phụ thuộc vào $u_c(0^-)$ và $i_L(0^-)$ (6.16).

Người ta gọi các điều kiện đầu (6.16) là điều kiện đầu sơ cấp, và

(6.13) là các điều kiện đầu thứ cấp. Có nghĩa là để có (6.13) phải tìm (6.16). Phân tích mạch trong miền thời gian, là phân tích mạch bắt đầu từ một thời điểm nào đó (gt : $t = 0$) trở đi, $t(0, \infty)$. Vì vậy các điều kiện đầu (6.13) được xét tại $t = 0^+$, phụ thuộc vào $u_c(0^+)$ và $i_L(0^+)$, theo (6.16), để có $u_c(0^+)$, $i_L(0^+)$ phải xét mạch ở trạng thái trước đó tức tại $t = (-\infty, 0^-)$, khi đó ta sẽ xác định được $u_c(0^-)$ $i_L(0^-)$. Các điều kiện đầu sơ cấp và thứ cấp được hiểu là giới hạn bên phải của các giá trị (6.13) và (6.16). Có thể nêu ra đây thứ tự các bước xác định điều kiện đầu (6.13):

- Dựa vào điều kiện làm việc của mạch ở trạng thái năng lượng trước thời điểm làm thay đổi trạng thái cân bằng của mạch (giả thiết $t < 0$), xác định giá trị dòng điện qua cuộn dây $i_L(0^-)$ và điện áp trên tụ $u_c(0^-)$.

- Dựa vào điều kiện đóng ngắt (6.16) ta có các điều kiện đầu sơ cấp

$$u_c(0^+) = u_c(0^-); \quad i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

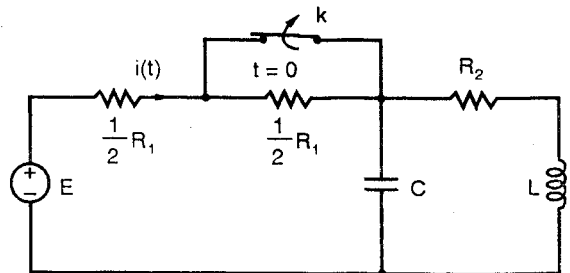
- Ở trạng thái năng lượng mới ($t > 0$), áp dụng các định luật *KI, II*, có thể tìm được (6.13) theo (6.16). Khi đã có các điều kiện đầu (6.13) ta có thể xác định các hằng số *K* trong thành phần tự do.

Từ những phân tích ở trên có thể thấy rằng, để tìm các thành phần tự do cần phải xác định các điều kiện đầu (6.13), các điều kiện đầu này phụ thuộc vào (6.16). Điều kiện (6.16) được gọi là điều kiện đóng ngắt mạch, nó khẳng định rằng, tại $t = 0$ dòng qua cuộn dây là một đại lượng liên tục, có thể coi nó như một nguồn dòng có giá trị i_0 . Nếu $i_0 = 0$, có thể coi cuộn dây như hở mạch. Tương tự có thể nói rằng, tại thời điểm đóng, ngắt mạch, điện áp trên tụ là một đại lượng liên tục có giá trị u_0 , nếu $u_0 = 0$, có thể coi như tụ điện ngắn mạch.

Sau đây sẽ xét một ví dụ và áp dụng phương pháp kinh điển để phân tích mạch trong miền thời gian.

Ví dụ 6.4. Hãy xác định dòng điện $i(t)$ nếu tại $t = 0$ mở khóa *K*. (Giá trị các thông số mạch đã cho trong ví dụ 6.1).

Giải



Hình 6.5

- Giả thiết rằng ở $t < 0$ mạch ở trạng thái xác lập một chiều. Xác định dòng điện qua cuộn dây và điện áp trên tụ

$$i_L(0^-) = \frac{E}{R_1/2 + R_2} = \frac{11}{\frac{2}{3} + 3} = 3 \text{ (A)}; \quad u_c(0^-) = \frac{E}{R_1/2 + R_2} R_2 = 9 \text{ (V)}$$

- Theo điều kiện đóng ngắt

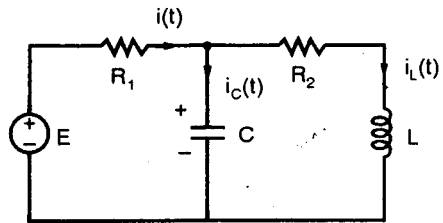
$$u_c(0^+) = u_c(0^-) = 9 \text{ (V)}; \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 3 \text{ (A)}$$

• Ở $t > 0$, mở khóa K , mạch điện có thêm điện trở $R_1/2$; mạch sẽ thay đổi trạng thái năng lượng so với trước (đây chính là mạch trong ví dụ 6.1). Dòng điện $i(t)$ là nghiệm của phương trình mạch, sẽ gồm hai thành phần

$$i(t) = i_{cb}(t) + i_{td}(t)$$

Ở $t > 0$ trong mạch có nguồn một chiều, nên ở xác lập, tụ hở mạch, cuộn dây ngắn mạch.

$$i_{xt}(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{11}{\frac{4}{3} + 3} = \frac{33}{13} \text{ (A)}$$



Phương trình đặc trưng của mạch như đã xác định trước đây

$$16p^2 + 72p + 65 = 0; \quad p_1 = -\frac{5}{4}; \quad p_2 = -\frac{13}{4}$$

Thành phần tự do của $i(t)$ $i_{td}(t) = K_1 e^{-\frac{5}{4}t} + K_2 e^{-\frac{13}{4}t}$

do đó
$$i(t) = K_1 e^{-\frac{5}{4}t} + K_2 e^{-\frac{13}{4}t} + \frac{33}{13}$$

Để tìm các hằng số K_1, K_2 ta cần phải xác định hai điều kiện đầu $i(0^+), i'(0^+)$. Áp dụng định luật KI, II ta có

$$i(t) = \frac{E - u_c(t)}{R_1}; \quad i'(t) = -\frac{u'_c(t)}{R_1} \tag{1}$$

$$\Rightarrow i(0^+) = \frac{E - u_c(0^+)}{R_1} = \frac{11 - 9}{4/3} = \frac{3}{2} \text{ (A)} \tag{2}$$

$$\Rightarrow i'(0^+) = -\frac{u'_c(0^+)}{R_1} \tag{3}$$

Để tìm $u'_c(t)$ ta có phương trình

$$i_L(t) = i(t) - i_c(t) = i(t) - C \frac{du_c(t)}{dt}; \quad i_L(0^+) = i(0^+) - Cu'(0^+)$$

$$\Rightarrow u'_c(0^+) = \frac{i(0^+) - i_L(0^+)}{C} = \frac{\frac{3}{2} - 3}{1/5} = -\frac{15}{2} \quad (4)$$

thay (4) vào (3) ta được $i'(0^+) = \frac{15.3}{2.4} = \frac{45}{8} \text{ (A/s)}$ (5)

Hai phương trình để tìm K_1, K_2 là

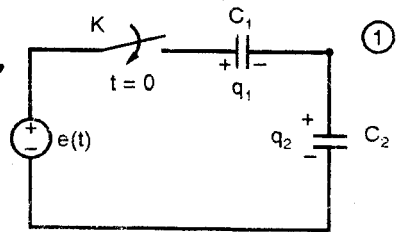
$$\begin{cases} i(t) = K_1 e^{-\frac{5}{4}t} + K_2 e^{-\frac{13}{4}t} + \frac{33}{13} \\ i'(t) = -\frac{5}{4}K_1 e^{-\frac{5}{4}t} - \frac{13}{4}K_2 e^{-\frac{13}{4}t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(0^+) = K_1 + K_2 + \frac{33}{13} = \frac{3}{2} \\ i'(0^+) = -\frac{5}{4}K_1 - \frac{13}{4}K_2 = \frac{45}{8} \end{cases} \quad (6)$$

từ (6) suy ra $\begin{cases} K_1 + K_2 = -\frac{27}{26} \\ 10K_1 + 26K_2 = -45 \end{cases} \Rightarrow K_1 = \frac{63}{26}; K_2 = -\frac{90}{26}$

Kết quả $i(t) = \frac{63}{26}e^{-\frac{5}{4}t} - \frac{90}{26}e^{-\frac{13}{4}t} + \frac{33}{13}$

Trong thực tế phân tích mạch, ta có thể gặp những bài toán mà điều kiện (6.16) không thỏa mãn, ta gọi đó là bài toán không chỉnh. Có thể giải thích sơ bộ nguyên nhân dẫn đến bài toán không chỉnh như sau: khi nói đến phần tử mạch như tụ điện hoặc cuộn dây, phải hiểu đó là những phần tử vật lý. Mỗi một trong chúng đều có cả điện trở, điện cảm và điện dung. Do đó, chúng thường được mô tả bằng sơ đồ tương đương có chứa các thông số lý tưởng R, L, C . Để có mô tả toán học đơn giản, người ta thường sử dụng sơ đồ tương đương lý tưởng, bỏ qua các phần tử ký sinh, điều đó sẽ dẫn đến điều kiện (6.16) không thỏa mãn. Bài toán không chỉnh thường gặp khi phân tích các mạch lọc LC , mạch trễ LC hoặc các mạch ghép hồ cảm. Trong trường hợp này, các điều kiện đầu (6.16) được xác định dựa vào định luật bảo toàn điện tích và nguyên lý liên tục từ thông. Hãy xét ví dụ về bài toán không chỉnh sau đây.

Ví dụ 6.5. Hãy xác định điện áp trên các tụ điện C_1, C_2 trong mạch H.6.6, nếu tại $t = 0$, đóng khóa K và nguồn tác động $e(t) = Ee^{-\alpha t} 1(t)$ với $E > 0, \alpha > 0$.



Hình 6.6

Giải. Ở $t < 0$ trong mạch không có nguồn nên $u_{c1}(0^-) = u_{c2}(0^-) = 0$

Áp dụng điều kiện (6.16)

$$u_{c1}(0^-) = u_{c1}(0^+) = 0; u_{c2}(0^-) = u_{c2}(0^+) = 0 \quad (1)$$

Mặt khác ở $t > 0$, trong mạch có nguồn $e(t)$, theo định luật Kirchhoff II tại $t = 0^+$: $u_{c1}(0^+) + u_{c2}(0^+) = e(0^+) = E \neq 0$ (2)

Từ (1), (2) có thể thấy rằng điện áp trên tụ không liên tục tại $t = 0$.

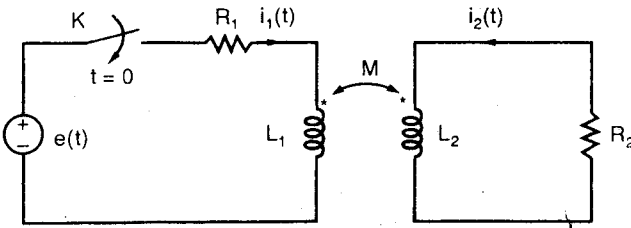
Điều kiện đầu đúng đắn sẽ tìm được khi áp dụng định luật bảo toàn điện tích tại nút (1). Tại nút 1 ta có $q_2 - q_1 = 0$

hay là $C_2 u_{c2}(0^+) - C_1 u_{c1}(0^+) = 0$ (3)

từ (2) và (3) suy ra

$$u_{c1}(0^+) = \frac{E}{C_1 + C_2} \cdot C_2 \neq u_{c1}(0^-); \quad u_{c2}(0^+) = \frac{E}{C_1 + C_2} \cdot C_1 \neq u_{c2}(0^-)$$

Ví dụ 6.6. Xét mạch trên (H.6.7). Hãy xác định $i_2(t)$ ở $t \geq 0$ nếu tại $t = 0$ đóng khóa K. Cho biết: $e(t) = 1$ (V); $L_1 = 1$ (H); $i_{L1}(0^-) = i_{L2}(0^+) = 0$; $L_2 = 4$ (H); $R_1 = R_2 = 1$ (Ω); $M = 2$ (H).



Hình 6.7

Giải. Khi áp dụng điều kiện (6.16)

$$i_{L1}(0^-) = i_{L1}(0^+) = 0; \quad i_{L2}(0^-) = i_{L2}(0^+) = 0 \quad (1)$$

Hãy kiểm tra kết quả trên có đúng không? Ở $t > 0$ ta có phương trình mạch ghép hồ cảm

$$R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} = e(t)$$

$$R_2 i_2(t) + M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

Thay giá trị các phần tử và nguồn tác động ta có

$$i_1(t) + \frac{di_1(t)}{dt} + 2 \frac{di_2(t)}{dt} = 1 \quad (2)$$

$$i_2(t) + 2 \frac{di_1(t)}{dt} + 4 \frac{di_2(t)}{dt} = 0 \quad (3)$$

từ (3) suy ra

$$\frac{di_1(t)}{dt} + 2 \frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{i_2(t)}{2} \quad (4)$$

thay (4) vào (2) ta được

$$2i_1(t) - i_2(t) = 2 \Rightarrow 2i_1(0^+) - i_2(0^+) = 2 \quad (5)$$

Kết quả (5) chứng tỏ, $i_1(0^+)$ và $i_2(0^+)$ khác không, tức là dòng điện qua cuộn dây tại $t = 0$ không liên tục. Để tìm giá trị đúng của các dòng điện tại $t = 0^+$, hãy xét năng lượng từ trường tập trung trong mạch:

$$W(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \quad (6)$$

bởi vì năng lượng là đại lượng liên tục, tại $t = 0$ ta hãy xét hai trường hợp sau đây.

1- Nếu hệ số ghép hồ cảm $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1$ và với điều kiện đầu bằng

không, tức là: $W(0^-) = W(0^+) = 0$; thì phương trình (6) sẽ thỏa mãn khi và chỉ khi: $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$.

2- Nếu $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$, thì $W(0^+)$ sẽ bằng không nếu:

$$i_1(0^+) = -\frac{M}{L_1} i_2(0^+) \quad (\text{xem chú thích}^1).$$

Như vậy trong trường hợp này $i_1(0^+)$ và $i_2(0^+)$ khác không, còn nếu $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$ thì điều kiện năng lượng sẽ tự động thỏa mãn.

Bây giờ hãy tìm giá trị đúng của $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ khi thay giá trị

$$i_1(0^+) = -\frac{M}{L_1} i_2(0^+) \text{ vào (5): } 2 \left(-\frac{M}{L_1} \right) i_2(0^+) - i_2(0^+) = 2 \Rightarrow -4i_2(0^+) - i_2(0^+) = 2$$

$$\text{Kết quả: } i_2(0^+) = -\frac{2}{5}$$

¹ Chú thích: Nếu $W(0^+) = 0$ tức là

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2(0^+) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(0^+) + M i_1(0^+) i_2(0^+) = 0; \quad \frac{1}{2} L_1 \left[\frac{i_1(0^+)}{i_2(0^+)} \right]^2 + \frac{1}{2} L_2 + M \frac{i_1(0^+)}{i_2(0^+)} = 0$$

$$\text{Suy ra } \frac{i_1(0^+)}{i_2(0^+)} = -\frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} L_1 \cdot \frac{1}{2} L_2}}{2 \cdot \frac{1}{2} L_1} = -\frac{M}{L_1}$$

$$i_1(0^+) = -\frac{M}{L_1} i_2(0^+); \quad i_2(0^+) = -\frac{M}{L_2} i_1(0^+); \quad L_1 i_1(0^+) + M i_2(0^+) = 0 \text{ thay giá trị } i_2(0^+)$$

$$\Rightarrow L_1 i_1(0^+) - \frac{M^2}{L_2} i_1(0^+) = 0 \text{ thay } M^2 = k^2 L_1 L_2 \text{ ta có}$$

$$L_1 i_1(0^+) - k^2 L_1 i_1(0^+) = 0 \Rightarrow L_1 i_1(0^+) (1 - k^2) = 0$$

Ta sẽ trở lại các bài toán không chỉnh trong phần phân tích mạch bằng phương pháp toán tử, ở đó bài toán sẽ được giải mà không gặp khó khăn gì.

Bây giờ sẽ áp dụng phương pháp được trình bày trên đây để phân tích quá trình quá độ trong các mạch RLC đơn giản, nhằm hiểu kỹ hơn ý nghĩa vật lý của các thành phần nghiệm của phương trình mạch.

6.1.2 Quá trình quá độ trong mạch TTD

Như đã nói ở trên, phân tích mạch trong miền thời gian là xét mạch ở tại một thời điểm bất kỳ, thời điểm đó thường được chọn khi mạch thay đổi trạng thái năng lượng. Trạng thái năng lượng của mạch sẽ thay đổi khi cấu trúc của nó thay đổi, hoặc khi đóng (ngắt) nguồn tác động. Việc thay đổi trạng thái mạch thường được biểu diễn qua một khóa K , đóng (ngắt) tại thời điểm xét, thường qui ước là tại $t = 0$.

Mạch TTD được xét gồm các phần tử $RLCM$ với các nguồn tác động độc lập và phụ thuộc. Ta sẽ xét một số mạch đơn giản sau đây.

1- Mạch cấp 1 ($RC - RL$)

Mạch đơn giản nhất chỉ gồm một phần tử tích lũy năng lượng L hoặc C , nối nối tiếp hoặc song song với điện trở, được gọi là mạch cấp một, vì nó được mô tả bằng phương trình vi phân cấp 1. Chú ý là nếu mạch chỉ gồm toàn điện trở tuyến tính, thì sẽ không có thành phần tự do trong nghiệm của phương trình mạch, vì điện trở là phần tử chỉ tiêu hao mà không tích lũy năng lượng.

- Xét mạch RC trên H.6.8, phương trình mạch:

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = e(t)$$

phương trình đặc trưng:
$$p + \frac{1}{RC} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{RC}$$

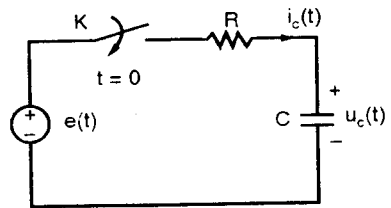
Thành phần tự do của dòng điện hoặc điện áp trên các phần tử mạch có dạng:

$$u_{td}(t) = Ke^{-t/RC} \quad (6.17)$$

Giả thiết với mạch này, cần xác định điện áp trên tụ điện, thì điện áp sẽ gồm hai thành phần:

$$u_c(t) = u_{ctd}(t) + u_{ccb}(t)$$

Như đã biết, với mạch cấp 1, thành phần tự do luôn có dạng (6.17),



Hình 6.8

thành phần cưỡng bức sẽ tùy thuộc vào nguồn tác động $e(t)$.

• Giả thiết tại $t = 0$, cung cấp cho mạch nguồn một chiều $e(t) = E(V)$, và $u_c(0^-) = 0$. Với mạch RC trên H.6.8

$$u_{ccb}(t) = E; \quad u_c(t) = Ke^{-t/RC} + E$$

Áp dụng điều kiện (6.16) tìm K $u_c(0^+) = K + E = u_c(0^-) = 0$

Suy ra $K = -E$. Do đó $u_c(t) = E(1 - e^{-t/RC})$

Có thể thấy rằng, thành phần tự do suy giảm với hệ số $1/RC$.

Khi đặt $\tau = RC$ (s) (6.18)

τ - được gọi là hằng số thời gian của mạch.

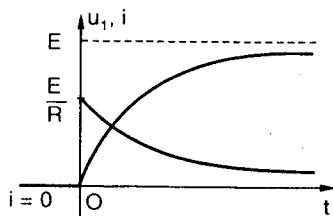
Về mặt lý thuyết, thành phần tự do sẽ mất khi $t \rightarrow \infty$, trong thực tế qui ước sau khoảng thời gian $t_o = 3\tau$, khi đó trong mạch chỉ còn thành phần cưỡng bức (xác lập).

Như vậy có thể nói rằng, mạch RC sẽ đạt đến trạng thái lập sau khoảng thời gian 3τ . Khoảng thời gian trước đó, khi trong mạch tồn tại cả thành phần tự do và cưỡng bức được gọi là thời gian quá độ của mạch.

Dòng điện trong mạch

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{E}{RC} Ce^{-t/RC} = \frac{E}{R} e^{-t/RC}, \quad t > 0$$

Dòng điện qua tụ không chứa thành phần xác lập, vì rằng, ở xác lập một chiều tụ điện hở mạch. Quá trình biến thiên của điện áp và dòng điện trên tụ được minh họa trên H.6.9.



Hình 6.9

Từ hình vẽ thấy rằng, điện áp trên tụ biến thiên liên tục từ giá trị 0 và tiệm cận đến giá trị E . Trong khi đó dòng điện đột biến từ giá trị 0 đến giá trị E/R tại $t = 0$, rồi sau đó giảm dần đến không. Mạch điện đạt đến trạng thái xác lập tại $t_o = 3\tau$, giá trị điện áp trên tụ gần đạt giá trị E

$$u(3\tau) = E(1 - e^{-3}) \approx 0,95E \quad (V)$$

Quá trình vừa xét trên đây là quá trình nạp điện cho tụ.

• Xét mạch RC với nguồn tác động điều hòa

$$\text{gt: } e(t) = E \cos(\omega t) \quad \text{và} \quad u_c(0^-) = 0$$

$$u_c(t) = u_{ctd}(t) + u_{ccb}(t) = Ke^{-t/RC} + u_{ccb}(t)$$

Thành phần cưỡng bức được xác định bằng phương pháp biên độ phức

$$\dot{U}_{ccb} = \frac{\dot{E}}{Z} \cdot Z_c$$

trong đó - biên độ phức nguồn áp $\dot{E} = E \angle 0$ (V)

- trở kháng phức của mạch và của tụ điện

$$Z = R + 1/j\omega C = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \angle \arctg(1/\omega RC)$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -\pi/2$$

$$\dot{U}_{ccb} = \frac{E \angle 0^\circ}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} \angle \varphi} \cdot \frac{1}{\omega C} \angle -\pi/2$$

$$u_{ccb}(t) = R_e\{\dot{U}_{ccb} \cdot e^{j\omega t}\} = \frac{E}{\omega C \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

$$u_{ccb}(t) = U_{mc} \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}); \text{ với } \varphi = \arctg(1/\omega RC)$$

$$U_{mc} = \frac{E}{\omega C \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}$$

ta có $u_c(t) = K e^{-t/RC} + U_{mc} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$

Áp dụng điều kiện (6.16) để tìm K

$$u_c(0^+) = K + U_{mc} \cos(\varphi + \pi/2) = 0; \quad K = -U_{mc} \cos(\varphi + \pi/2)$$

Quá trình điện áp trên tụ

$$u_c(t) = -U_{mc} \cos(\varphi + \pi/2) e^{-t/RC} + U_{mc} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

Từ biểu thức $u_c(t)$ có thể thấy rằng $u_{td}(0) = -u_{cb}(0)$

Như vậy nếu đóng nguồn vào lúc $u_{ccb}(0) = 0$ thì $u_{td}(0) = 0$, trong mạch sẽ không xảy ra quá trình quá độ. Nếu đóng mạch vào lúc $u_{ccb}(0) = U_{mc}$ thì $u_{td}(0) = -U_{mc}$, và nếu quá trình tự do tắt chậm, thì sau nửa chu kỳ, điện áp trên tụ điện C sẽ có giá trị gần gấp đôi biên độ điện áp xác lập, tức là $U_{c\max} \approx 2U_{mc}$.

Dòng điện chảy qua tụ

$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} = C \frac{U_{mc}}{RC} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) e^{-t/RC} - CU_{mc} \omega \sin(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

đặt $I_{mc} = CU_{mc} \omega$

$$\text{ta được } i(t) = \frac{I_{mc}}{\omega RC} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) e^{-t/RC} - I_{mc} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

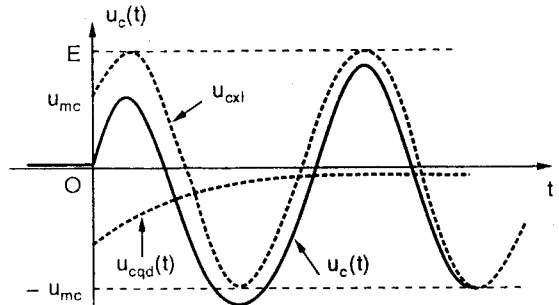
tại $t = 0$; $u_c(0) = 0$, tụ điện ngắn mạch, điện áp nguồn đặt hoàn toàn vào

$$\text{điện trở, nên } i(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = \frac{E}{R}$$

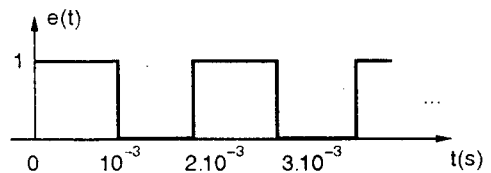
Như vậy, nếu đóng nguồn vào mạch tại thời điểm điện áp nguồn có giá trị cực đại và nếu giá trị điện trở trong mạch quá nhỏ, thì dòng điện ở thời điểm đóng nguồn sẽ rất lớn, gây nên những xung dòng điện.

Quá trình biến thiên của điện áp trên tụ điện ngay sau khi tác động nguồn điều hòa lên mạch có dạng trên H.6.10.

Sau khoảng thời gian $t = 3\tau$, thành phần tự do sẽ mất đi, mạch sẽ đạt đến trạng thái xác lập điều hòa.



Hình 6.10



Hình 6.11

• Xét mạch RC với nguồn tác động tuần hoàn. Giả thiết tại $t = 0$, đặt vào mạch nguồn $e(t)$ là dãy xung vuông góc trên H.6.11. Dãy xung có biên độ bằng $1(V)$, độ rộng $10^{-3}(s)$ và chu kỳ $2 \cdot 10^{-3}(s)$. Hãy xác

định điện áp trên tụ $u_c(t)$ với điều kiện đầu: $u_c(0^-) = 0$ và $R = 200(\Omega)$, $C = 0,5(\mu F)$. Mạch RC với nguồn tác động là dãy xung vuông góc, có thể xem như mạch RC có nguồn tác động một chiều với khóa K đóng, ngắt theo chu kỳ của dãy xung. Hãy xét điện áp trên tụ trong khoảng thời gian có xung $e(t) = 1(V)$ và không có xung $e(t) = 0(V)$.

- Khi $0 \leq t \leq 10^{-3}$. Theo giả thiết $u_c(0^-) = 0$, $e(t) = 1$

$$u_c(t) = Ke^{-t/RC} + 1; \quad u_c(0^+) = K + 1 = 0 \Rightarrow K = -1$$

$$u_c(t) = 1 - e^{-t/RC}; \quad RC = 200 \cdot 5 \cdot 10^{-7} = 10^{-4}; \quad u_c(t) = (1 - e^{-10^4 t})1(t)$$

- Khi $10^{-3} \leq t \leq 2 \cdot 10^{-3}$; $e(t) = 0$. Hãy tìm giá trị điện áp $u_c(t)$ tại $t = 10^{-3}(s)$

$$u_c(10^{-3}) = 1 - e^{-10^4 \cdot 10^{-3}} = 1 - e^{-10} \approx 1$$

Chuyển gốc tọa độ về $t' = t - 10^{-3}$, ta sẽ có $u_c(0^-) = 1$

$$u_c(t) = K \cdot e^{-t/RC} + u_{ccb}$$

$$u_{ccb} = 0; \quad u_c(0^+) = K + 0 = 1 \Rightarrow K = 1; \quad u_c(t) = e^{-10^4(t-10^{-3})} 1(t-10^{-3})$$

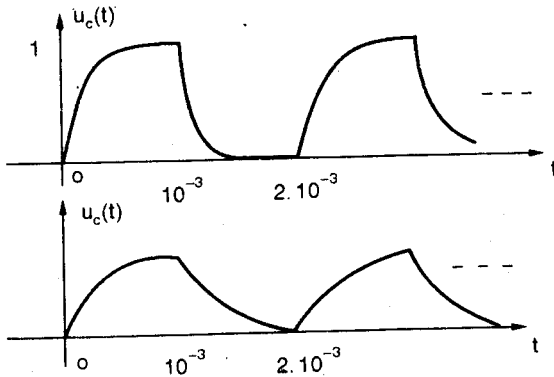
- Ở chu kỳ tiếp theo $2.10^{-3} \leq t \leq 3.10^{-3}$

$$e(t) = 1; \text{ tìm: } u_c(t), \text{ tại } t = 2.10^{-3}; \quad u_c(2.10^{-3}) = e^{-2.10^4 \cdot 10^{-7}} = e^{-20} = 0$$

Ta có lại điều kiện đầu khi mới đóng nguồn vào mạch, quá trình phân tích mạch sẽ lặp lại.

Quá trình điện áp trên tụ $u_c(t)$ với nguồn tác động là dãy xung vuông góc được vẽ trên H.6.12.

Từ H.6.12 ta thấy rằng, khi hằng số thời gian $\tau = RC$ tăng, thời gian quá độ của mạch bị kéo dài, do thành phần tự do suy giảm chậm, dạng tín hiệu trên tụ bị méo so với nguồn tác động.



$$R = 200 (\Omega)$$

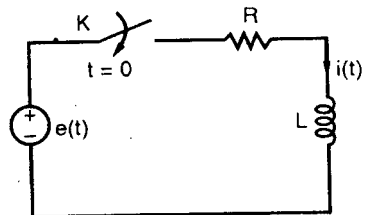
$$C = 0,5 (\mu F)$$

$$R = 200 (\Omega)$$

$$C = 5 (\mu F)$$

Hình 6.12

• Xét mạch RL trên H.6.13 - mạch RL cũng được mô tả bằng phương trình vi phân cấp 1 như mạch RC. Việc phân tích mạch RL cũng tương tự như đối với mạch RC khi thay đổi ngẫu $i_L \Leftrightarrow u_c$ và $L \Leftrightarrow 1/C$. Phương trình đặc trưng của mạch RL: $p + \frac{R}{L} = 0$



Hình 6.13

Thành phần tự do của mạch $i_{td}(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t}$

Dòng tự do suy giảm theo t với hệ số R/L , nghịch đảo của nó được gọi là hằng số thời gian $\tau = L/R$. Tương tự, người ta cũng qui ước quá trình quá độ sẽ kéo dài trong khoảng thời gian bằng 3τ . Có lẽ không cần lặp lại quá trình phân tích như đã làm đối với mạch RC, bởi vì như đã nhận xét ở trên, các kết quả có được đối với $u_c(t)$, ta có thể suy ra cho

$i_L(t)$, quá trình biến thiên và hình dạng của $i_L(t)$ và $u_c(t)$ là hoàn toàn giống nhau.

2- Mạch cấp hai RLC

Bây giờ sẽ xét quá trình quá độ xảy ra trong mạch RLC, tất nhiên quá trình này sẽ phức tạp hơn, vì mạch chứa cả hai phần tử tích lũy năng lượng L, C . Mạch RLC nối tiếp có dạng trên H.6.3 là mạch cấp hai, vì phương trình vi phân mô tả mạch là phương trình cấp hai. Ta đã khảo sát thành phần tự do của nó trong ví dụ 6.3. Sau đây sẽ phân tích mạch RLC khi tác động lên nó các nguồn tác động khác nhau như đã làm đối mạch cấp 1. Như đã biết trong ví dụ (6.3), phương trình đặc trưng của mạch RLC có dạng:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_{ch}^2 = 0; \quad p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_{ch}^2}$$

với:
$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega_{ch} = 1/\sqrt{LC}$$

Thành phần tự do của mạch RLC có hình dạng tùy thuộc vào các tham số α và ω_{ch} , theo ba trường hợp khi: $R \geq 2\sqrt{L/C}$ ($\alpha \geq \omega_{ch}$) và $R < 2\sqrt{L/C}$ ($\alpha < \omega_{ch}$), còn các thành phần cưỡng bức thì phụ thuộc vào các nguồn tác động $e(t)$ sẽ xét sau đây.

• Tại $t = 0$, cung cấp cho mạch nguồn một chiều $e(t) = E(V)$. Ta sẽ quan tâm đến điện áp trên tụ điện và dòng điện chảy trong mạch:

$$u_c(t) = u_{ctd}(t) + u_{ccb}(t); \quad i(t) = i_{td} + i_{cb}(t)$$

Trong trường hợp $e(t) = E(V)$.

$$u_{ccb}(t) = E; \quad i_{cb}(t) = 0$$

Khi $\alpha > \omega_{ch}$: ($R > 2\sqrt{L/C}$)

$$u_{ctd}(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}; \quad i_{td}(t) = CK_1 p_1 e^{p_1 t} + CK_2 p_2 e^{p_2 t}$$

$$u_c(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + E; \quad i(t) = C[p_1 K_1 e^{p_1 t} + p_2 K_2 e^{p_2 t}]$$

Khi $\alpha = \omega_{ch}$: ($R = 2\sqrt{L/C} = R_{th}$)

$$u_{ctd} = (K_1 + K_2 t)e^{-\alpha t}; \quad i_{td} = C(-\alpha K_1 - \alpha K_2 t + K_2)e^{-\alpha t}$$

$$u_c(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-\alpha t} + E; \quad i(t) = C(-\alpha K_1 - \alpha K_2 t + K_2)e^{-\alpha t}$$

Khi $\alpha < \omega_{ch}$: ($R < 2\sqrt{L/C}$)

$$u_{ctd} = Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_r t + \Phi); \quad i_{td} = CKe^{-\alpha t} [-\alpha \cos(\omega_r t + \Phi) - \omega_r \sin(\omega_r t + \Phi)]$$

$$u_c(t) = Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_r t + \Phi) + E; \quad i(t) = CKe^{-\alpha t} [-\alpha \cos(\omega_r t + \Phi) - \omega_r \sin(\omega_r t + \Phi)]$$

• Tại $t = 0$ tác động lên mạch nguồn điều hòa $e(t) = E \cos(\omega t)$ (V)

Thành phần cưỡng bức của điện áp và dòng điện được xác định bằng phương pháp biên độ phức $\dot{U}_{ccb} = \frac{\dot{E}}{Z} Z_c$

trong đó $\dot{E} = E \angle 0$ - biên độ phức nguồn áp.

$Z = R + j\omega L + 1/j\omega C$ - trở kháng phức của mạch RLC.

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}; \quad \arg Z = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \varphi$$

$Z_c = X_c \angle -\pi/2$ - trở kháng của tụ

$$\dot{U}_{ccb} = \frac{E \cdot X_c}{|Z|} \angle -\varphi - \frac{\pi}{2} = \dot{U}_{mc} \angle -\varphi - \pi/2$$

$$u_{ccb}(t) = U_{mc} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

$$i_{cb}(t) = -C U_{mc} \omega \sin(\omega t - \varphi - \pi/2) = I_{mc} \cos(\omega t - \varphi)$$

Khi $\alpha > \omega_{ch}$

$$u_c(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + U_{mc} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

$$i(t) = C [p_1 K_1 e^{p_1 t} + p_2 K_2 e^{p_2 t}] + I_{mc} \cos(\omega t - \varphi)$$

Khi $\alpha = \omega_{ch}$

$$u_c(t) = (K_1 + K_2 t) e^{pt} + U_{mc} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

$$i(t) = C [-\alpha K_1 - \alpha K_2 t + K_2] e^{-\alpha t} + I_{mc} \cos(\omega t - \varphi)$$

Khi $\alpha < \omega_{ch}$

$$u_c(t) = Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_r t + \Phi) + U_{mc} \cos(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

$$i(t) = CKe^{-\alpha t} [-\alpha \cos(\omega_r t + \Phi) - \omega_r \sin(\omega_r t + \Phi)] + I_{mc} \cos(\omega t - \varphi)$$

• Tại $t = 0$, tác động lên mạch dây xung vuông góc như trên H.6.11, có độ cao $E = 1$ (V), độ rộng xung là 5(s) và chu kỳ 10(s). Hãy khảo sát quá trình quá độ xảy ra trong mạch, với giá trị các thông số $R = 2$ (Ω); $L = 1$ (H); $C = 0,1$ (F); và giả thiết rằng: $u_c(0^-) = 0$; $i_L(0^-) = 0$

Với mạch đã cho: $\alpha = \frac{R}{2L} = 1$; $\omega_{ch} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{10}$. Phương trình đặc trưng

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_{ch}^2 = 0; \quad p^2 + 2p + 10 = 0$$

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = -\alpha \pm j\omega_r = -1 \pm j3$$

Như đã nói trong phần khảo sát mạch RC, khi nguồn tác động là dây xung vuông góc, ta có thể coi như mạch có nguồn tác động một chiều với

khóa K đóng, ngắt theo chu kỳ của dãy xung. Mạch RLC trong trường hợp đã cho là mạch có $\alpha < \omega_{ch}$ do đó trong mạch sẽ có dao động tắt dần của thành phần tự do. Ta hãy xét mạch trong các khoảng thời gian $e(t) = 1$ (đóng khóa K); $e(t) = 0$ (ngắt khóa K).

• Xét $0 \leq t \leq 5$ (s)

$$e(t) = 1(\text{V}); \quad u_c(0^-) = 0; \quad i_L(0^-) = 0$$

$$u_c(t) = u_{ctd}(t) + u_{ccb}$$

$$i(t) = i_{td}(t) + i_{cb}(t)$$

$$u_{ccb} = 1; \quad i_{cb} = 0$$

Phương trình đặc trưng có nghiệm phức $\alpha = 1$; $\omega_r = 3$

$$u_{ctd}(t) = Ke^{-t} \cos(3t + \Phi)$$

$$i_{td}(t) = 0,1Ke^{-t} [-\cos(3t + \Phi) - 3\sin(3t + \Phi)]$$

Do đó:

$$u_c(t) = Ke^{-t} \cos(3t + \Phi) + 1$$

$$i(t) = 0,1Ke^{-t} [-\cos(3t + \Phi) - 3\sin(3t + \Phi)]$$

$$u_c(0^+) = K \cos \Phi + 1 = 0 \quad (1)$$

$$i(0^+) = -0,1K \cos \Phi - 0,3K \sin \Phi = 0 \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra: $\Phi = -18,43^\circ$; $K = -1,05$

Kết quả: $u_c(t) = 1 - 1,05e^{-t} \cos(3t - 18,43^\circ)$

$$i(t) = -0,1e^{-t} \cos(3t - 18,43^\circ) - 0,3e^{-t} \sin(3t - 18,43^\circ)$$

• Xét $5 \leq t \leq 10$ (s)

Do $e(t) = 0$; nên $u_{ccb} = 0$; $i_{cb} = 0$

Tìm $u_c(t)$ và $i(t)$ tại $t = 5$ (s)

$$u_c(5) \approx 1; \quad i_L(5) \approx 0$$

Đặt $t' = t - 5$; ở tọa độ mới

$$u_c(0^-) = 1; \quad i_L(0^-) = 0$$

Trong mạch chỉ có thành phần tự do:

$$u_c(t') = Ke^{-t'} \cos(3t' + \Phi)$$

$$i(t') = 0,1Ke^{-t'} [-\cos(3t' + \Phi) - 3\sin(3t' + \Phi)]$$

Áp dụng điều kiện (6.16):

$$u_c(0^+) = K \cos \Phi = 1 \quad (3)$$

$$i(0^+) = -0,1K \cos \Phi - 0,3K \sin \Phi = 0 \quad (4)$$

từ (3) (4) suy ra $K = 1,05$; $\varphi = -18,43^\circ$

Kết quả $u_c(t) = 1,05e^{-t} \cos(3t - 18,43^\circ)$

$$i(t) = -0,1e^{-t} \cos(3t - 18,43^\circ) - 0,3e^{-t} \sin(3t - 18,43^\circ)$$

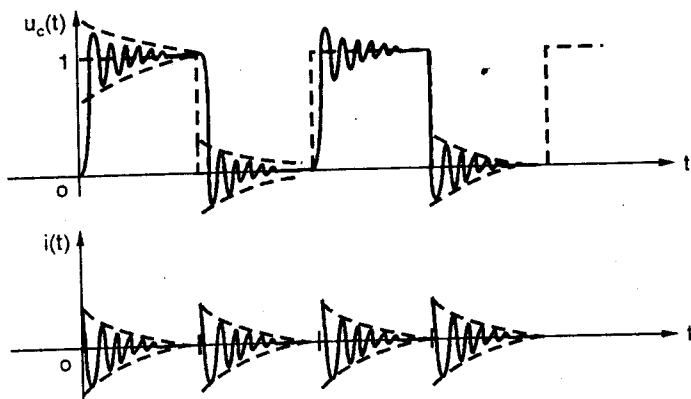
• Xét $10 \leq t \leq 15$ (s)

Do $e(t) = 1(V)$; $u_{ccb} = 1(V)$; $i_{cb} = 0$

Tìm $u_c(t)$ tại $t' = 5$: $u_c(5) = 0$; $i_L(0) = 0$

Do điều kiện đầu lập tại khi $t = 0$, quá trình phân tích mạch sẽ lặp lại. Quá trình phân tích sẽ dừng lại ở đây - dạng sóng $u_c(t)$ và $i(t)$ có thể vẽ một cách định tính trên H.6.14.

Qua việc trình bày phương pháp kinh điển và áp dụng nó để phân tích quá trình quá độ trong mạch TTD, ta có thể trả lời những câu hỏi đặt ra ở đầu chương như sau



Hình 6.14

• Tại những thời điểm thay đổi trạng thái cân bằng mạch (đóng, ngắt nguồn, thay đổi các thông số mạch, ...), đáp ứng của mạch (dòng điện và điện áp trên các phân tử) đối với nguồn tác động gồm hai thành phần

Thành phần thứ nhất: có hình dạng giống nguồn tác động, có độ lớn phụ thuộc vào thông số mạch và độ lớn của nguồn tác động bất kỳ, được gọi là thành phần cưỡng bức.

Thành phần thứ hai: có hình dạng phụ thuộc vào các thông số mạch và độ lớn phụ thuộc vào năng lượng trong mạch tại thời điểm xét được

gọi là thành phần tự do.

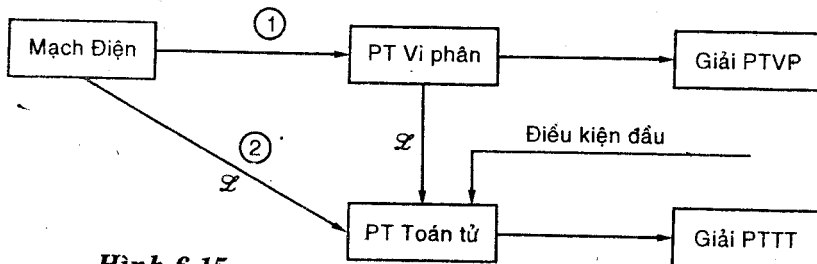
• Quá trình quá độ trong mạch, là quá trình dòng áp trên các phần tử, bao gồm cả hai thành phần cưỡng bức và tự do, hoặc chỉ có thành phần tự do. Như vậy, thời gian quá độ là khoảng thời gian tồn tại thành phần tự do, về mặt lý thuyết thành phần tự do sẽ mất đi khi $t \rightarrow \infty$. Trong thực tế, với mạch cấp I, người ta qui ước thời gian quá độ kéo dài bằng ba lần hằng số thời gian của mạch. Với mạch cấp II, người ta qui ước thời gian quá độ là khoảng thời gian mà thành phần tự do suy giảm còn 1/10 giá trị cực đại của nó. Khi thành phần tự do trong mạch mất đi chỉ còn lại thành phần cưỡng bức, ta nói mạch ở trạng thái xác lập. Vì vậy trong MẠCH ĐIỆN I, khi phân tích mạch chỉ quan tâm đến thành phần một chiều (khi nguồn tác động là một chiều) và thành phần điều hòa (khi nguồn tác động là điều hòa), điều đó có nghĩa là chỉ phân tích mạch ở trạng thái xác lập.

• Phương pháp để phân tích quá trình quá độ trong mạch, là các phương pháp giải các phương trình mô tả mạch có chú ý đến nghiệm tự do của nó. Việc giải phương trình mạch như trên đây được gọi là phương pháp tích phân kinh điển, tất nhiên đó không phải là phương pháp duy nhất; ưu việt nhất.

6.2 PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ

Phương pháp toán tử được dùng để phân tích quá trình quá độ trong mạch *TTD*, dựa trên việc sử dụng biến đổi Laplace một phía để đại số hóa phương trình mạch. Ưu điểm của nó là ở chỗ các điều kiện đầu sơ cấp được tự động đưa vào phương trình, do đó kết quả sẽ cho ta cùng một lúc cả thành phần tự do và thành phần cưỡng bức. Một ưu điểm khác, là không phải đi tìm các điều kiện đầu (6.13); đó là việc làm không phải dễ dàng khi mạch phức tạp.

Để đại số hóa phương trình mạch, có thể tiến hành theo hai cách (H.6.15)



Hình 6.15

Việc thành lập phương trình toán tử nhanh hay chậm, tùy thuộc kỹ năng vận dụng biến đổi Laplace và các tính chất của nó. Tuy nhiên có thể nhận thấy việc tiến hành theo đường ② sẽ tiện hơn. Như vậy vấn đề mấu chốt trong phương pháp này là phải nắm vững biến đổi Laplace và các tính chất của nó.

6.2.1. Biến đổi Laplace và các tính chất

Việc nghiên cứu kỹ biến đổi Laplace và các tính chất của nó đã được đề cập trong giáo trình hàm phức và toán tử. Ở đây chúng ta sẽ chỉ nhắc lại để áp dụng vào phân tích mạch.

Biến đổi Laplace một phía của hàm $f(t)$ được xác định theo biểu thức:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) \quad (6.19)$$

trong đó $F(s)$ - được gọi là ảnh của $f(t)$; còn $f(t)$ - là hàm gốc

biến phức $s = \sigma + j\omega$ - đóng vai trò tham số tích phân.

Biểu thức (6.19) xác định ảnh của một hàm $f(t)$, sẽ tồn tại khi và chỉ khi có một giá trị nào đó của tham số s để tích phân hội tụ. Biểu thức (6.19) được gọi là biến đổi thuận.

Người ta dùng biến đổi Laplace một phía $(0, \infty)$, vì nó tiện cho việc xét mạch tại một thời điểm nào đó ($t = 0$) trở đi.

Việc tìm lại hàm $f(t)$ từ hàm $F(s)$ được gọi là biến đổi ngược, nó được xác định theo công thức Riemann-Mellin

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\alpha}^{c+j\alpha} F(s)e^{st} ds & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

Trong bài toán phân tích mạch, người ta thường không sử dụng trực tiếp công thức Riemann-Mellin để tìm hàm $f(t)$, vì nói chung không dễ dàng.

Phân tích mạch bằng phương pháp toán tử, là sử dụng biến đổi Laplace để chuyển phương trình vi tích phân thành phương trình đại số biến s . Do vậy chúng ta cần nắm vững các tính chất của biến đổi Laplace, khi nó tác động lên các phép tính trong phương trình mô tả mạch.

Bởi vì ta sử dụng biến đổi Laplace một phía, nên với những hàm $f(t)$ tồn tại $(-\infty, \infty)$, có thể dùng hàm $1(t)$ để biểu diễn sự tồn tại của nó trong khoảng thời gian $t \in (0, \infty)$ theo biểu thức sau

$$f(t)I(t) = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

Hàm $I(t)$ được định nghĩa như sau $I(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ (6.22)

hay là $I(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$

Ảnh của hàm $I(t)$ và $I(t-t_0)$: $F(s) = \int_0^{\infty} I(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = 1/s$

và $F(s) = \int_0^{\infty} I(t-t_0)e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-st_0}$

Các tính chất biến đổi Laplace được tóm tắt trong bảng 6.1

Bảng 6.1. Những tính chất cơ bản của biến đổi Laplace

	Tính chất	Ghi chú
1	$\mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	a_1, a_2 là số bất kỳ
2	$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f(0^+)$	
3	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$	
4	$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$	Tồn tại $F_1(s), F_2(s)$
5	$\mathcal{L}[f(t-t_0)I(t-t_0)] = F(s)e^{-st_0}$ $\mathcal{L}[f(t+t_0)I(t+t_0)] = e^{st_0} F(s) - e^{st_0} \int_0^{t_0} f(t)e^{-st} dt$	$t_0 > 0$ $t_0 > 0$
6	$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a > 0$
7	$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha)$	α số thực
8	$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [F(s)]$	n là số tự nhiên
9	$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$	

Sau đây là một số ví dụ về tìm ảnh của các nguồn tín hiệu thường gặp.

Ví dụ 6.6

1- $f(t) = e^{-\alpha t} 1(t)$

Áp dụng tính chất 7 $F(s) = \mathcal{L}[e^{-\alpha t} 1(t)] = \frac{1}{s + \alpha}$

2- $f(t) = t1(t)$

Theo tính chất 8 $F(s) = \mathcal{L}[t1(t)] = \frac{1}{s^2}$

3- $f(t) = \cos \omega_0 t 1(t)$

Biến đổi hàm $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$

Áp dụng tính chất (1) (7)

$$\mathcal{L}[\cos \omega_0 t 1(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{j\omega_0 t} 1(t) + e^{-j\omega_0 t} 1(t)] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right]$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega_0 t 1(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

4- $f(t) = \sin \omega_0 t 1(t)$

Ảnh của hàm $\sin \omega_0 t 1(t)$ có thể tìm như đối với hàm $\cos \omega_0 t 1(t)$, hoặc có thể áp dụng tính chất (2) đối với ảnh của hàm $\cos \omega_0 t 1(t)$. Bởi vì

$$\sin \omega_0 t = -\frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt} [\cos \omega_0 t]$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega_0 t 1(t)] = -\frac{1}{\omega_0} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} [\cos \omega_0 t 1(t)]\right] = -\frac{1}{\omega_0} \left[s \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} - 1 \right]$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega_0 t 1(t)] = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

5- $f(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t 1(t)$

Sử dụng ảnh của hàm $\cos \omega_0 t 1(t)$ và áp dụng tính chất (7) ta có

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t 1(t)] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$$

Ví dụ 6.7. Với các tín hiệu xung, là những hàm liên tục trong từng khoảng thời gian, để tìm ảnh Laplace, phải biểu diễn nó qua các hàm $1(t)$.

(H.6.16)

$$a) f_1(t) = 1(t) - 1(t-T)$$

Áp dụng tính chất (1) (5):

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[1(t)] - \mathcal{L}[1(t-T)]$$

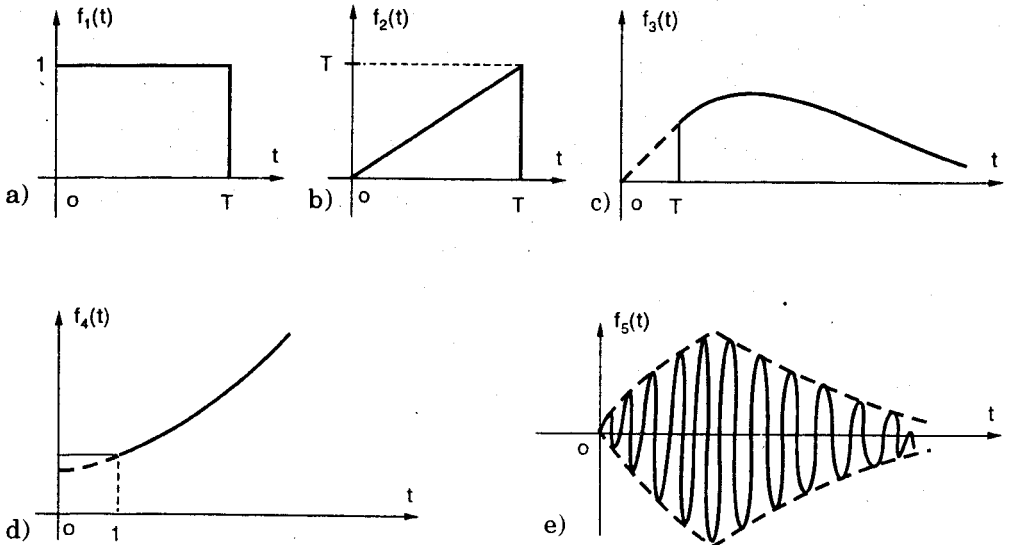
$$\mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{1}{s} [1 - e^{-sT}]$$

$$b) f_2(t) = t1(t) - (t-T)1(t-T) - T1(t-T)$$

Áp dụng các tính chất (1) (5) (8):

$$\mathcal{L}[f_2(t)] = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-sT}) - \frac{T}{s} e^{-sT}$$

$$c) f_3(t) = te^{-\alpha t} 1(t-T)$$



Hình 6.16

Biến đổi hàm $f_3(t)$ và áp dụng các tính chất (1), (5), (7)

$$f_3(t) = (t-T)e^{-\alpha t} 1(t-T) + Te^{-\alpha t} 1(t-T) = (t-T)e^{-\alpha(t-T)} 1(t-T)e^{-\alpha T} + Te^{-\alpha(t-T)} 1(t-T)e^{-\alpha T}$$

$$\mathcal{L}[f_3(t)] = e^{-\alpha T} \frac{e^{-sT}}{(s+\alpha)^2} + Te^{-\alpha T} \frac{e^{-sT}}{s+\alpha} = e^{-\alpha T} e^{-sT} \left[\frac{1}{(s+\alpha)^2} + \frac{T}{s+\alpha} \right]$$

$$d) f_4(t) = (t+2)^2 1(t-1)$$

Biến đổi hàm $f_4(t)$ có dạng thích hợp:

$$f_4(t) = [(t-1)^2 + 6(t-1) + 9] 1(t-1)$$

Áp dụng các tính chất (1), (5), (8)

$$\mathcal{L}[f_4(t)] = e^{-s} \left[\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s} \right]$$

e) $f_5(t) = 3te^{-4t} \cos[2(t-1)]$

Ta sẽ biến đổi hàm $\cos[2(t-1)]$, áp dụng tính chất (2) (7) (8) để tìm $F_5(s)$. Đặt:

$$F_1(s) = \mathcal{L}[\cos 2(t-1)] = \mathcal{L}[\cos 2t \cos 2 + \sin 2t \sin 2] = \cos 2 \frac{s}{s^2 + 4} + \sin \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$F_2(s) = \mathcal{L}[t \cos 2(t-1)] = \frac{dF_1(s)}{ds} = \frac{1}{(s^2 + 4)^2} [(s^2 - 4) \cos 2 + 4s \sin 2]$$

$$F_5(s) = \mathcal{L}[3te^{-4t} \cos 2(t-1)]$$

$$F_5(s) = \frac{3}{[(s+4)^2 + 4]^2} \{ [(s+4)^2 - 4] \cos 2 + 4(s+4) \sin 2 \}$$

Những ví dụ trên đây ta có thể nhớ, để áp dụng tìm gốc của các hàm ảnh đơn giản, mà không cần sử dụng công thức Rieman- Mellin.

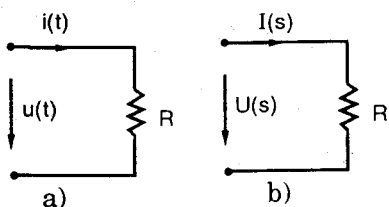
6.2.2 Dạng toán tử của các định luật mạch cơ bản

Để có thể thành lập phương trình toán tử trực tiếp từ mạch điện mà không cần qua bước thành lập phương trình vi phân, cần biểu diễn các định *KI*, *II* và định luật Ôm dưới dạng toán tử. (Như đã làm trong MẠCH ĐIỆN I, khi áp dụng phương pháp biên độ phức).

1- Định luật Ôm

Định luật Ôm xét quan hệ giữa dòng điện và điện áp trên các phần tử trong miền thời gian. Ta sẽ xét các quan hệ đó với từng phần tử mạch tại $t = 0$ với giả thiết các điều kiện đầu $u_c(0) = u_0$ và $i_L(0) = i_0$.

1- Điện trở *R*. Quan hệ giữa dòng điện và điện áp trên điện trở:



Hình 6.17

$$u(t) = Ri(t) \quad (6.23a)$$

$$i(t) = Gu(t) \quad (6.23b)$$

trong đó $G = 1/R$ - là điện dẫn.

Thực hiện biến đổi Laplace biểu thức (6.23) ta có:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[Ri(t)]; U(s) = RI(s)$$

$$\mathcal{L}[i(t)] = \mathcal{L}[Gu(t)]; I(s) = GU(s) \quad (6.24b)$$

2- Điện cảm L . Với phần tử điện cảm ta có

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}; i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(\tau) d\tau + i_0 \quad (6.25a)$$

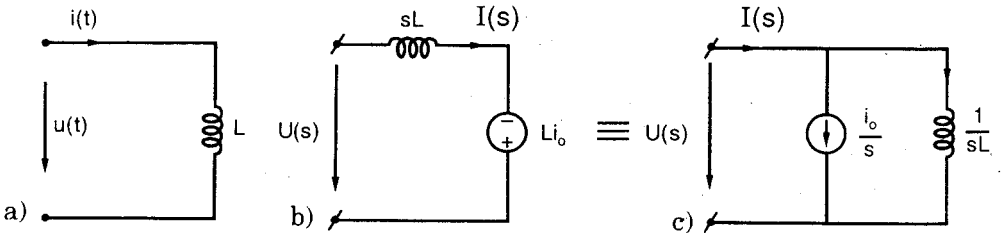
trong đó $i_0 = i(0^+)$ - là dòng điện chảy qua cuộn dây tại $t = 0^+$

Ảnh của (6.25) khi áp dụng các tính chất (1) (2) (3)

$$U(s) = sLI(s) - Li_0 \quad (6.26a)$$

$$I(s) = \frac{1}{sL} U(s) + \frac{i_0}{s} \quad (6.26b)$$

Từ các phương trình toán tử (6.26) ta có thể vẽ sơ đồ tương đương toán tử của phần tử điện cảm như H.6.18



Hình 6.18

3- Điện dung C . Quan hệ $u(t); i(t)$ có dạng

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + u_0 \quad (6.27a)$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (6.27b)$$

trong đó $u_0 = u(0^+)$ - là điện áp trên tụ tại $t = 0^+$

Biến đổi Laplace của (6.27)

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_0}{s} \quad (6.28a)$$

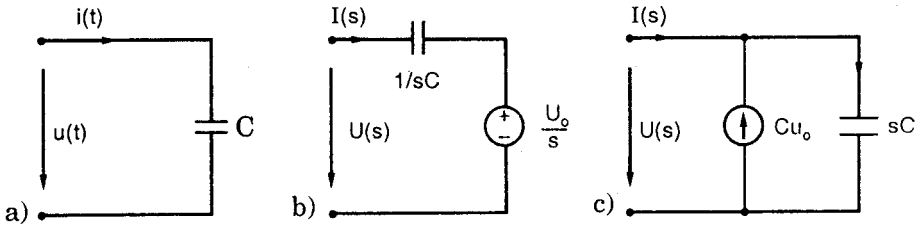
$$I(s) = sCU(s) - Cu_0 \quad (6.28b)$$

Sơ đồ tương đương toán tử của phần tử điện dung, khi có xét đến điều kiện đầu như trên H.6.19.

Từ những phân tích trên đây có thể đi đến kết luận

• Các phương trình (6.24) (6.26) (6.28) là biểu thức của định luật Ôm dưới dạng toán tử. Đó là những phương trình đại số, có chứa các điều kiện

đầu dưới dạng các nguồn áp hoặc nguồn dòng. (Từ bây giờ về sau, khi nói đến điều kiện đầu, phải hiểu đó là giá trị của áp trên tụ và dòng qua cuộn dây tại $t = 0^+$).



Hình 6.19

- Từ định luật Ôm dưới dạng toán tử, ta xây dựng nên sơ đồ tương đương toán tử của các phần tử R, L, C ; các H.6.17; H.6.18; H.6.19 trong đó có chứa các nguồn ban đầu dưới dạng nguồn áp hoặc nguồn dòng.
- Trong trường hợp điều kiện đầu bằng không, định luật Ôm dạng toán tử đối với các phần tử được biểu diễn cùng một biểu thức:

$$U(s) = Z(s)I(s) \tag{6.29a}$$

$$I(s) = Y(s)U(s) \tag{6.29b}$$

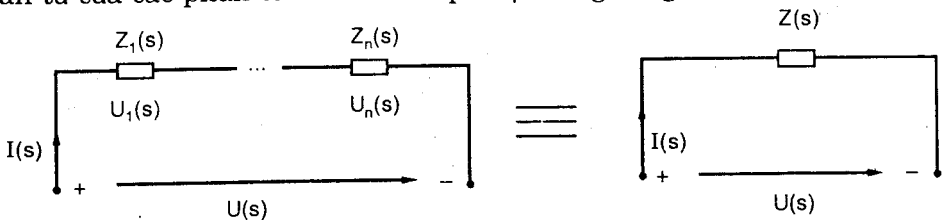
trong đó $Z(s)$ - là trở kháng toán tử; $Y(s)$ là dẫn nạp toán tử.

Đối với từng phần tử, trở kháng toán tử, dẫn nạp toán tử là:

$$z(s) = \begin{cases} R & \text{- đối với điện trở} \\ 1/sC & \text{- đối với điện dung} \\ sL & \text{- đối với điện cảm} \end{cases}$$

Có thể thấy rằng, khi thay $s = j\omega$ ta lại có trở kháng và dẫn nạp phức của các phần tử trong mạch xác lập điều hòa là: $Z(\omega); Y(\omega)$.

Từ các biểu thức (6.29), có thể xác định các trở kháng và dẫn nạp toán tử của các phần tử mắc nối tiếp hoặc song song.



Hình 6.20

Theo định nghĩa điện áp trên hệ thống nối tiếp n phần tử bằng tổng điện áp trên từng phần tử; dòng qua chúng là như nhau:

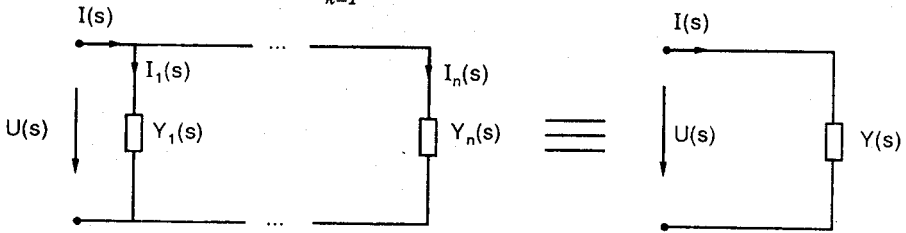
$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t) \quad (6.30)$$

với điều kiện đầu bằng không:

$$U(s) = \sum_{k=1}^n Z_k(s)I(s) = I(s) \sum_{k=1}^n Z_k(s) \quad (6.31)$$

trong đó $Z_k(s)$ - là trở kháng toán tử của phần tử thứ k ; trở kháng của cả hệ thống như có thể thấy, bằng tổng các trở kháng toán tử thành phần (6.32) (xem H.6.20).

$$Z(s) = \sum_{k=1}^n Z_k(s) \quad (6.32)$$



Hình 6.21

Bằng cách tương tự có thể chỉ ra rằng, khi nối song song n phần tử, với giả thiết điều kiện đầu bằng không, thì dẫn nạp toán tử của cả hệ thống sẽ bằng tổng các dẫn nạp toán tử thành phần (H.6.21). Với mạch song song, dòng điện của cả hệ thống bằng tổng các dòng điện thành phần; áp trên chúng là như nhau:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_n(t) \quad (6.33)$$

bởi vì $I_k(s) = Y_k(s)U(s)$. Ta có:

$$I(s) = \sum_{k=1}^n I_k(s) = \sum_{k=1}^n Y_k(s)U(s) = U(s) \sum_{k=1}^n Y_k(s) \quad (6.34)$$

Suy ra, dẫn nạp toán tử của hệ thống:

$$Y(s) = \sum_{k=1}^n Y_k(s) \quad (6.35)$$

2- Định luật Kirchhoff I, II

Định luật Kirchhoff I nói về sự cân bằng của dòng điện ở một nút, tức là tổng dòng điện đi tới một nút (có chú ý đến chiều) của mạch là bằng không.

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0 \quad (6.36)$$

Dạng toán tử của (6.36)
$$\sum_{k=1}^n I_k(s) = 0 \quad (6.37)$$

Như vậy (6.37) là dạng toán tử của định luật *KI*. Bằng cách tương tự ta cũng nhận được dạng toán tử của định luật *KII* phát biểu như sau: *tổng các ảnh Laplace của các điện áp nhánh $U_k(s)$ dọc theo một vòng kín bằng không*

$$\sum_{k=1}^n U_k(s) = 0 \quad (6.38)$$

Cần chú ý rằng, các biểu thức (6.37) và (6.38) thỏa mãn cả khi các điều kiện đầu khác không.

Sau khi có được dạng toán tử của các định luật mạch điện cơ bản, có thể thành lập phương trình toán tử theo các bước sau:

- Dựa vào trạng thái năng lượng của mạch trước thời điểm xét ($t < 0$), xác định điện áp trên tụ điện và dòng điện trên cuộn dây. Áp dụng định luật đóng ngắt (6.16) để có $u_c(0^+)$; $i_L(0^+)$.

- Vẽ sơ đồ tương đương toán tử của mạch điện ở $t > 0$, có chú ý đến các điều kiện đầu.

- Áp dụng các định luật mạch điện dạng toán tử để thành lập phương trình toán tử.

Có thể minh họa quá trình thành lập phương trình toán tử khi xét lại mạch trong ví dụ 6.4

Ví dụ 6.8. Thành lập phương trình toán tử của mạch trên H.6.5.

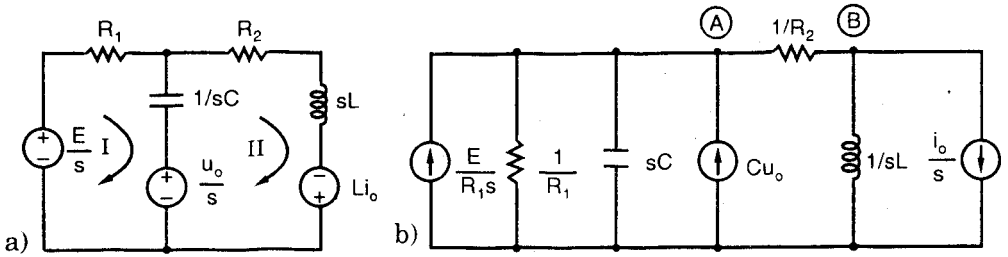
Giải • Với mạch trên H.6.5 trong ví dụ 6.4 ta đã có các điều kiện đầu sơ cấp

$$u_c(0^-) = u_c(0^+) = 9(V)$$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 3(A)$$

• Ở $t > 0$. Hãy vẽ sơ đồ tương đương toán tử của mạch. Tùy theo phương pháp sử dụng, có thể vẽ và viết phương trình dựa vào các phương pháp đã phân tích trong chương 3 (MẠCH ĐIỆN I). Ở đây sẽ viết phương trình theo phương pháp dòng vòng và phương pháp thế nút.

Sơ đồ tương đương theo nguồn áp (H.6.22a) hoặc theo nguồn dòng (H.6.22b).



Hình 6.22

- Phương trình dòng mắt lưới của mạch H.6.22a

$$\begin{aligned} (R_1 + 1/sC)I_{v_1}(s) - \frac{1}{sC}I_{v_2}(s) &= \frac{E}{s} - \frac{u_o}{s} \\ -\frac{1}{sC}I_{v_1}(s) + (R_2 + sL + \frac{1}{sC})I_{v_2}(s) &= \frac{u_o}{s} + Li_o \end{aligned}$$

Dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{sC} & -\frac{1}{sC} \\ -\frac{1}{sC} & R_2 + sL + \frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{v_1}(s) \\ I_{v_2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E - u_o}{s} \\ \frac{u_o}{s} + Li_o \end{bmatrix}$$

- Phương trình thế nút của mạch H.6.22b

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC \right) U_A(s) - \frac{1}{R_2} U_B(s) &= \frac{E}{R_1 s} + Cu_o \\ -\frac{1}{R_2} U_A(s) + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \right) U_B(s) &= -\frac{i_o}{s} \end{aligned}$$

Dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + sC & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{R_1 s} + Cu_o \\ -\frac{i_o}{s} \end{bmatrix}$$

Các phương trình dòng mắt lưới và thế nút là các phương trình đại số, có thể giải dễ dàng để có được các nghiệm là các điện áp $U(s)$ hoặc dòng điện $I(s)$. Giả thiết rằng, với mạch trong ví dụ trên, cần xác định $u_c(t)$ và $u_L(t)$ khi đó ta chọn phương trình thế nút vì:

$$U_A(s) = U_c(s); \quad \text{và} \quad U_B(s) = U_L(s)$$

Giải phương trình thế nút sẽ được nghiệm:

$$U_A(s) = \frac{144s^2 + 528s + 495}{s(16s^2 + 72s + 65)}; \quad U_B(s) = -\frac{120}{16s^2 + 72s + 65}$$

Đến đây ta sẽ đứng trước vấn đề, làm thế nào để tìm biến đổi ngược Laplace để có lại các hàm gốc là $u_c(t)$ và $u_L(t)$. Như có thể thấy từ kết quả có được trong ví dụ 6.5, các nghiệm của phương trình toán tử thường nhận được dưới dạng phân thức của các đa thức biến s . Việc tìm biến đổi ngược Laplace khi sử dụng công thức Rieman-Mellin sẽ không dễ dàng. Trong lý thuyết phân tích mạch điện, để tìm gốc của các ảnh Laplace người ta thường dùng phương pháp sẽ được trình bày sau đây

6.2.3 Biến đổi ngược Laplace

Như đã biết từ ví dụ 6.5, nghiệm của phương trình toán tử có dạng phân thức hữu tỷ biến s

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (6.39)$$

Các hệ số a_n, b_m phụ thuộc các thông số mạch, do đó là những số thực. Nếu $Y(s)$ có bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc đa thức mẫu số ($m < n$), thì việc tìm $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ không phải dùng đến công thức Rieman-Mellin. Khi đó người ta dùng phương pháp phân tích phân thức hữu tỷ thành những phân thức tối giản, rồi tìm gốc của các phân thức tối giản đó. Để phân tích phân thức $Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ thành các phân thức tối giản cần phải tìm nghiệm của đa thức mẫu số, được gọi là các điểm cực. Trong trường hợp đa thức mẫu số $A(s)$ có bậc lớn, thì việc tìm các điểm cực cũng không dễ dàng, đây chính là nhược điểm của phương pháp này.

Sau đây sẽ trình bày phương pháp phân tích phân thức hữu tỷ thành các phân thức tối giản. Nếu ký hiệu s_k là điểm cực thứ k của phân thức (6.39), tức là nghiệm của đa thức $A(s)$, các điểm cực có thể lấy các giá trị sau

- Các điểm cực thực, đơn;
- Các điểm cực phức;
- Các điểm cực bội $r \leq n$.

Dạng của phân thức tối giản phụ thuộc vào các loại điểm cực, cũng có nghĩa là các hàm gốc có dạng tùy thuộc vào các điểm cực. Sau đây sẽ tiến hành tìm các biến đổi ngược Laplace theo phương pháp nêu trên.

1- Giả thiết tất cả các điểm cực s_k là thực, đơn

Khi đó đa thức mẫu số có dạng

$$A(s) = a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \quad (6.40)$$

Với các hệ số a_n , b_m là thực, và bậc của tử số nhỏ hơn mẫu số, phân thức $Y(s)$ có thể biểu diễn bằng tổng các phân thức tối giản sau

$$Y(s) = \frac{B(s)}{a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} \quad (6.41)$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s - s_1} + \frac{K_2}{s - s_2} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n} \quad (6.42)$$

trong đó K_i là residue của hàm $Y(s)$ tại điểm cực s_i , nó được xác định theo công thức

$$K_i = \operatorname{res} \frac{B(s)}{A(s)} \Big|_{s=s_i} = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{B(s)}{A(s)} (s - s_i) \quad (6.43)$$

Nếu đạo hàm $\frac{dA(s)}{ds} = A'(s)$ khác không tại điểm s_i , hệ số K_i có thể xác định theo công thức

$$K_i = \frac{B(s)}{A'(s)} \Big|_{s=s_i} \quad (6.44)$$

Sau khi xác định được các hệ số K_i , có thể tìm được $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ bằng cách áp dụng kết quả của ví dụ (6.6) $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} I(t)] = \frac{1}{s + \alpha}$

$$\text{Ta có} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{(s - s_i)} \right] = \sum_{i=1}^n K_i e^{s_i t} I(t) \quad (6.45)$$

2- Trường hợp có cặp điểm cực phức liên hợp $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$

Các hằng số $K_{1,2}$ cũng được xác định theo các công thức (6.43), (6.44) với $K_1 = K_2^*$. Hàm gốc tương ứng với cặp nghiệm liên hợp phức có dạng

$$y_{1,2}(t) = 2|K_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \Phi) \quad (6.46)$$

với $\Phi = \arg K_1$

Nếu $(n-2)$ điểm cực còn lại là thực, đơn, thì hàm gốc $y(t)$ sẽ là

$$y(t) = \left[2|K_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \Phi) + \sum_{i=3}^n K_i e^{s_i t} \right] I(t) \quad (6.47)$$

3- Nếu trong hàm $Y(s)$, có một điểm cực s_1 bội $r < n$ và $(n-r)$ điểm còn lại là thực, đơn

Biểu thức $A(s)$ có thể viết lại

$$A(s) = a_n (s - s_1)^r (s - s_{r+1}) \dots (s - s_n) \tag{6.48}$$

và hàm:
$$Y(s) = \frac{B(s)}{a_n (s - s_1)^r (s - s_{r+1}) \dots (s - s_n)} \tag{6.49}$$

được phân tích thành tổng các phân thức tối giản:

$$Y(s) = \frac{K_{1,r}}{(s - s_1)^r} + \frac{K_{1,r-1}}{(s - s_1)^{r-1}} + \dots + \frac{K_{1,2}}{(s - s_1)^2} + \frac{K_{1,1}}{(s - s_1)} + \frac{K_{r+1}}{s - s_{r+1}} + \dots + \frac{K_n}{s - s_n} \tag{6.50}$$

Trong tổng (6.50), có r thành phần đầu tiên tương ứng với điểm cực s_1 bội r, các hệ số của nó được xác định theo công thức

$$K_{1,i} = \frac{1}{(r-i)!} \frac{d^{(r-i)}}{ds^{(r-i)}} \left[\frac{B(s)}{A(s)} (s - s_1)^r \right]_{s=s_1} \tag{6.51}$$

Biến đổi ngược Laplace của các phân thức tương ứng với điểm cực bội có thể dễ dàng tìm được khi áp dụng kết quả của ví dụ 6.6 và các tính chất (7) (8) trong bảng 6.1

$$\mathcal{L} [e^{-\alpha t} 1(t)] = \frac{1}{s + \alpha}; \quad \mathcal{L} [t^n 1(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Ta có
$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s - s_1)^r} \right] = \frac{1}{(r-1)!} t^{r-1} e^{s_1 t} 1(t)$$

Gốc tương ứng với r phân thức:

$$y_r(t) = \sum_{i=1}^r \frac{K_{1,i}}{(i-1)!} t^{i-1} e^{s_1 t} 1(t)$$

Hàm gốc của Y(s) trong trường hợp s_1 bội r

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \frac{K_{1,i}}{(i-1)!} t^{i-1} e^{s_1 t} 1(t) + \sum_{i=r+1}^n K_i e^{s_i t} 1(t) \tag{6.52}$$

Sau đây sẽ xét vài ví dụ về cách tìm biến đổi ngược Laplace của các phân thức hữu tỉ.

Ví dụ 6.6. Hãy tìm \mathcal{L}^{-1} của các hàm sau:

1- $F_1(s) = \frac{s+4}{2s^2 + 5s + 3}$

Có thể thấy bậc của tử số nhỏ hơn bậc của mẫu số.

Có thể tìm điểm cực của $F_1(s)$ như sau:

$$A(s) = 2s^2 + 5s + 3 = 2\left(s^2 + \frac{5}{2}s + \frac{3}{2}\right) = 2(s+1)\left(s + \frac{3}{2}\right)$$

$$F_1(s) = \frac{1}{2} \frac{s+4}{(s+1)(s+\frac{3}{2})} = \frac{1}{2} \left[\frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+\frac{3}{2}} \right]$$

Hãy xác định các hệ số K_1, K_2 tại các điểm cực $s_1 = -1; s_2 = -3/2$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(s+4)(s+1)}{(s+1)(s+3/2)} = 6; K_2 = \lim_{s \rightarrow -3/2} \frac{(s+4)(s+3/2)}{(s+1)(s+3/2)} = -5$$

Do đó
$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = y_1(t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{6}{s+1} - \frac{5}{s+3/2} \right]$$

$$y_1(t) = (3e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}t})I(t)$$

2-
$$F_2(s) = \frac{se^{-s}}{s^2 + 2s + 5}$$

Hàm $F_2(s)$ trong trường hợp này không phải là hàm hữu tỉ, tuy nhiên có thể thấy từ các tính chất của biến đổi Laplace là việc nhân hàm ảnh với e^{-as} ($a > 0$), sẽ tương ứng với việc dịch chuyển hàm gốc trong miền thời gian một đoạn a (tính chất 5). Trong trường hợp này ta chỉ cần xét hàm $F(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$. Hàm này có điểm cực phức $s_{1,2} = -1 \pm j2$

Các hệ số K_i cũng là liên hợp phức và bằng

$$K_1 = \frac{1}{4}(2+j); K_2 = \frac{1}{4}(2-j)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-t} \cos(2t + \arctg \frac{1}{2})$$

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(t)] = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-(t-1)} \cos \left[2(t-1) + \arctg \frac{1}{2} \right] 1(t-1)$$

3-
$$F_3(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2(s+3)}$$

Hàm $F_3(s)$ có một điểm cực kép $s_1 = -1$; hai điểm cực đơn $s_3 = 0$; và $s_4 = -3$. $F_3(s)$ được phân tích thành

$$F_3(s) = \frac{K_{1,2}}{(s+1)^2} + \frac{K_{1,1}}{s+1} + \frac{K_3}{s} + \frac{K_4}{s+3}$$

trong đó
$$K_{1,2} = \frac{B(s)}{A(s)}(s+1)^2 \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2}; K_{1,1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{B(s)(s+1)^2}{A(s)} \right]_{s=-1} = -\frac{3}{4}$$

$$K_3 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B(s)}{A(s)} s = \frac{2}{3}; \quad K_4 = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{B(s)}{A(s)} (s+3) = \frac{1}{12}$$

Ta có:
$$F_3(s) = -\frac{1}{2(s+1)^2} - \frac{3}{4(s+1)} + \frac{2}{3s} + \frac{1}{12(s+3)}$$

$$y_3(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_3(s)] = \left[-\frac{1}{2}\left(t + \frac{3}{2}\right)e^{-t} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}e^{-3t} \right] 1(t)$$

$$4- F_4(s) = \frac{1}{3s^2(s^2+4)}$$

Hàm $F_4(s)$ có một điểm cực kép $s_{1,2} = 0$, một cặp điểm cực liên hợp phức $s_{3,4} = \pm j2$:
$$F_4(s) = \frac{1}{3} \left[\frac{K_{1,2}}{s^2} + \frac{K_{1,1}}{s} + \frac{K_3}{s-j2} + \frac{K_4}{s+j2} \right]$$

Có thể tìm các hệ số K_i theo phương pháp khác, khi biểu diễn $F_4(s)$ dưới dạng
$$F_4(s) = \frac{1}{3} \left[\frac{K_{1,2}}{s^2} + \frac{K_{1,1}}{s} + \frac{C_1 s + C_2}{s^2 + 4} \right]$$

Khi đồng nhất các hệ số và so sánh ta được:

$$K_{1,1} + C_1 = 0; \quad 4K_{1,1} = 0; \quad K_{1,2} + C_2 = 0; \quad 4K_{1,2} = 1$$

Suy ra
$$K_{1,2} = \frac{1}{4}; \quad K_{1,1} = 0; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{1}{4}$$

Do đó
$$y_4(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_4(s)] = \frac{1}{12} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) 1(t)$$

Để kết thúc phần này, ta sẽ quay lại ví dụ 6.8 ở đó đã có nghiệm của phương trình toán tử của mạch H.6.5 là:

$$U_A(s) = \frac{144s^2 + 528s + 495}{s(16s^2 + 72s + 65)}; \quad U_B(s) = -\frac{120}{16s^2 + 72s + 65}$$

Áp dụng phương pháp đã nêu trên để tìm lại các hàm gốc.

Hàm $U_A(s)$ có ba điểm cực: $s_1 = 0$; $s_2 = -5/4$; $s_3 = -13/4$

$$U_A(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+5/4} + \frac{K_3}{s+13/4}$$

Có thể tìm được:
$$K_1 = \frac{99}{13}; \quad K_2 = -\frac{3}{2}; \quad K_3 = \frac{125}{26}$$

$$u_c(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_A(s)] = \left[\frac{99}{13} - \frac{3}{2}e^{-\frac{5}{4}t} + \frac{125}{26}e^{-\frac{13}{4}t} \right] 1(t)$$

Hàm $U_B(s)$ hai điểm cực $s_1 = -\frac{5}{4}$; $s_2 = -\frac{13}{4}$

$$U_B(s) = \frac{K_1}{s + 5/4} + \frac{K_2}{s + 13/4}$$

Với

$$K_1 = -\frac{15}{4}; K_2 = \frac{15}{4}$$

Do đó

$$u_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_B(s)] = -\frac{15}{4}(e^{-\frac{5}{4}t} - e^{-\frac{13}{4}t})1(t)$$

6.2.4 Áp dụng phương pháp toán tử phân tích QTQD trong mạch TTD

Chúng ta hoàn toàn có thể áp dụng phương pháp toán tử đã trình bày trên đây để phân tích QTQD trong mạch TTD như đã làm trong phần 6.1. Tuy nhiên để bài toán không bị lặp lại, ta sẽ đưa ra những ví dụ khác để có thể thấy được ưu điểm của phương pháp toán tử

- Cho phép đồng thời nhận được cả thành phần tự do và thành phần cưỡng bức là nghiệm của phương trình mạch, do điều kiện đầu được đưa vào mạch như những nguồn tác động.

- Có thể áp dụng tất cả các phương pháp phân tích mạch TTD đã nêu trong MẠCH ĐIỆN I như: phương pháp biến đổi tương đương mạch; dòng nhánh; dòng mắt lưới; điện thế nút; phương pháp nguồn tương đương Thévenin; Norton; nguyên lý xếp chồng; tỉ lệ ...

- Không có bài toán không chính.

- Phương pháp toán tử cho phép đại số hóa phương trình mạch, nên có thể áp dụng các phương pháp giải hệ phương trình đại số tuyến tính bằng phương pháp định thức, phương pháp ma trận nhanh và chính xác.

Cần chú ý rằng, khi trong mạch đồng thời có nhiều nguồn tác động, phương trình mạch sẽ có bậc cao hơn, việc tìm điểm cực sẽ khó khăn. Khi đó cần tìm riêng nghiệm cưỡng bức trước và tự do sau theo nguyên lý xếp chồng. Ta biết rằng

$$u_c(t) = u_{ccb}(t) + u_{ctd}(t); \quad u_c(0^+) = u_{ccb}(0^+) + u_{ctd}(0^+)$$

vì đã có $u_c(0^+) = u_c(0^-)$ và $u_{cb}(0^+)$

nên $u_{ctd}(0^+) = u_c(0^+) - u_{ccb}(0^+)$

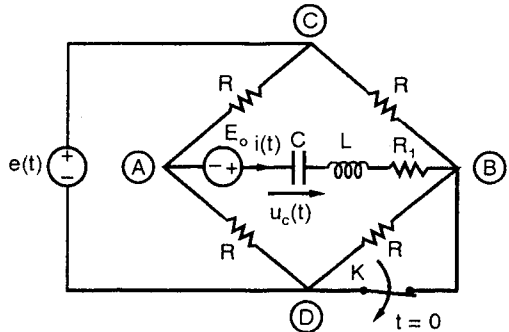
và $i_L(t) = i_{cb}(t) + i_{td}(t); \quad i_L(0^+) = i_{cb}(0^+) + i_{td}(0^+)$

ta đã có $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ và $i_{cb}(0^+)$

nên $i_{td}(0^+) = i_L(0^+) - i_{cb}(0^+)$

Cách làm này đặc biệt hữu hiệu khi trong mạch có nguồn điều hòa và một chiều. Khi đó, thành phần xác lập được tìm bằng phương pháp biên độ phức; trong phương trình mạch sẽ không chứa ảnh của nguồn điều hòa (đa thức bậc hai), mà chỉ có $u_{cb}(0^+)$; $i_{cb}(0^+)$. Hãy minh họa cách làm này bằng ví dụ 6.9

Ví dụ 6.9. Hãy xác định dòng điện $i(t)$ và điện áp $u_c(t)$ trong mạch (H.6.23); nếu tại $t = 0$ mở khóa K . Cho biết: $E_o = 15(V)$;
 $e(t) = \frac{50\sqrt{2}}{3} \sin(t + 45^\circ)$; $R = \frac{5}{3}(\Omega)$;
 $R_1 = \frac{5}{6}(\Omega)$; $L = 1(H)$; $C = 1(F)$



Hình 6.23

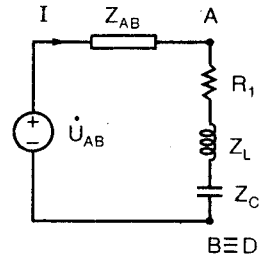
Giải

Ở $t < 0$. Giả thiết mạch ở trạng thái xác lập, trong mạch có cả nguồn một chiều và điều hòa. Áp dụng nguyên lý xếp chồng để tìm điều kiện đầu $u_c(0^-)$; $i_L(0^-)$.

Cho nguồn $e(t)$ làm việc, E_o nghỉ. Thay mạch bằng nguồn tương đương Thévenin tại hai điểm A, B và áp dụng phương pháp biên độ phức ta có

$$\dot{U}_{AB} = \frac{\dot{E}}{2R} R = \frac{\dot{E}}{2} = \frac{50\sqrt{2}}{6} \angle 45^\circ (V)$$

trong đó $\dot{E} = \frac{50\sqrt{2}}{3} \angle 45^\circ$ là biên độ phức của nguồn $e(t)$.



$$Z_{AB} = \frac{R}{2} = \frac{5}{6}(\Omega); \dot{I} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{AB} + R_1 + Z_L + Z_C}$$

với $Z_L = j$; $Z_C = -j$

$$\dot{i} = \frac{50\sqrt{2} \cdot \angle 45^\circ}{10} = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ (A)$$

$$i_-(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + 45^\circ) (A)$$

$$\dot{U}_c = \dot{I} Z_C = 5\sqrt{2} \angle 45^\circ \times 1 \angle -90^\circ = 5\sqrt{2} \angle -45^\circ (V)$$

$$u_c(t) = 5\sqrt{2} \sin(t - 45^\circ) (V)$$

Cho nguồn E_o làm việc, $e(t)$ nghỉ. Mạch xác lập một chiều, do đó

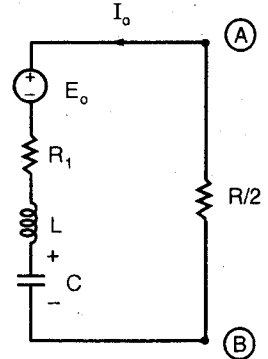
$$i_o = 0; U_{co} = 15(V)$$

Kết quả tổng hợp $u_c(t) = 5\sqrt{2} \sin(t - 45^\circ) + 15$

$$i_L(t) = 5\sqrt{2} \sin(t + 45^\circ)$$

Tại $t = 0$

$$u_c(0^-) = 10 (V); i_L(0^-) = 5 (A)$$



Ở $t > 0$. Mở khóa K , trong mạch còn cả hai nguồn tác động. Áp dụng nguyên lý xếp chồng để tìm thành phần cưỡng bức (xác lập).

Khi $e(t)$ làm việc, E_o nghỉ: Mạch bây giờ là cầu cân bằng, không có dòng điện do nguồn $e(t)$ gây ra trên nhánh chéo của cầu. Do đó

$$i_{cb-}(t) = 0; u_{cb-}(t) = 0$$

Khi nguồn E_o làm việc, $e(t)$ nghỉ, tụ hở mạch $i_o = 0; u_{co} = 15 (V)$

Xếp chồng kết quả do nguồn một chiều và điều hòa gây ra ở trạng thái xác lập

$$i_{cb}(t) = 0; u_{ccb}(t) = 15(V)$$

Áp dụng phương pháp vừa nêu ở trên để tìm các thành phần tự do (quá độ)

$$u_c(0^+) = u_{ccb}(0^+) + u_{ctd}(0^+) = u_c(0^-)$$

$$u_{ctd}(0^+) = u_c(0^+) - u_{cb}(0^+) = 10 - 15 = -5(V)$$

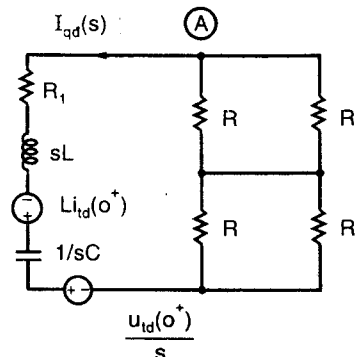
$$i_L(0^+) = i_{cb}(0^+) + i_{td}(0^+) = i_L(0^-)$$

$$i_{td}(0^+) = i_L(0^+) - i_{cb}(0^+) = 5 (A)$$

Ta có sơ đồ tương đương toán tử để xét thành phần quá độ, chỉ còn chứa $i_{td}(0^+)$ và $u_{ctd}(0^+)$

$$\begin{aligned} I_{td}(s) &= \frac{Li_{td}(0^+) - u_{ctd}(0^+)/s}{R_1 + sL + 1/sC + R} \\ &= \frac{5 + 5/s}{\frac{5}{6} + s + \frac{1}{s} + \frac{5}{3}} = \frac{5(s+1)}{(s+1/2)(s+2)} \end{aligned}$$

$$i_{td}(t) = \left[\frac{5}{3} e^{-t/2} + \frac{10}{3} e^{-2t} \right] 1(t)$$



$$u_{ctd}(t) = u_{ccb}(0^+) + \int_0^t i_{td}(t) dt = -\frac{10}{3}e^{-t/2} - \frac{10}{6}e^{-2t}$$

Dòng điện qua cuộn dây và điện áp trên tụ ở $t > 0$ là xếp chồng các kết quả trên

$$i(t) = \left[\frac{5}{3}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{10}{3}e^{-2t} \right] I(t); \quad u_c(t) = \left[15 - \frac{10}{3}e^{-\frac{t}{2}} - \frac{10}{6}e^{-2t} \right] I(t)$$

Kết quả cho ta thấy rằng, ở $t > 0$, do cầu cân bằng, nguồn điều hòa không có tác dụng gì đối với nhánh đường chéo cầu. Do chỉ còn nguồn một chiều có tác dụng nên dòng qua tụ sẽ chỉ có thành phần quá độ, ở xác lập dòng sẽ bằng không. Trong khi đó, điện áp trên tụ bao gồm cả thành phần tự do và cưỡng bức. Khi thời gian đủ lớn, thành phần tự do mất đi, ở xác lập điện áp trên tụ chính bằng điện áp nguồn một chiều.

Bây giờ sẽ quay lại hai ví dụ về bài toán không chính đã xét trong mục 6.1, và áp dụng phương pháp toán tử để phân tích chúng. Với mạch trên H.6.6 trong ví dụ 6.5, do điều kiện đầu bằng không, ta có phương

$$\text{trình toán tử của mạch ở } t > 0 \quad \left(\frac{1}{sC_1} + \frac{1}{sC_2} \right) I(s) = E(s)$$

$$\text{Điện áp trên các tụ điện } U_{c_1}(s) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} E(s); \quad U_{c_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} E(s)$$

Thực hiện biến đổi ngược \mathcal{L}^{-1} các ảnh điện áp

$$u_{c_1}(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} e(t); \quad u_{c_2}(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} e(t)$$

$$\text{tại } t = 0^+ \quad u_{c_1}(0^+) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} e(0^+); \quad u_{c_2}(0^+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} e(0^+)$$

Ta có ngay giá trị đúng của điện áp trên các tụ điện tại $t = 0^+$ mà không cần phải dùng đến định luật bảo toàn điện tích.

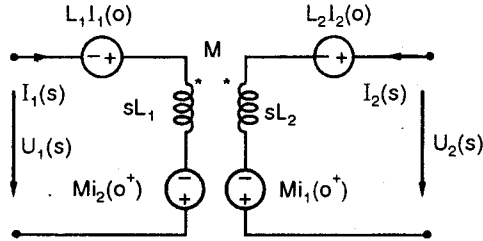
Với mạch ghép hồ cảm trên H.6.7 trong ví dụ (6.6), cũng có giả thiết điều kiện ban đầu bằng không. Phương trình toán tử của mạch ở $t > 0$.

$$(1+s)I_1(s) + 2sI_2(s) = \frac{1}{s}; \quad 2sI_1(s) + (1+4s)I_2(s) = 0$$

$$\text{Giải phương trình trên ta được } I_2(s) = \frac{-2}{5s+1}$$

$$\text{Do đó } i_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_2(s)] = -\frac{2}{5}e^{-\frac{t}{5}} I(t)$$

Ở $t = 0^+$; ta có: $i_2(0^+) = -\frac{2}{5}$ (A) - là giá trị đúng cần tìm, nhưng không thỏa mãn điều kiện (6.16). Như vậy có thể hỏi tại sao lại có được $i(0^+)$ khác không, trong khi đó $i_L(0^-)$ lại bằng không. Có thể giải thích điều này khi xét sơ đồ tương đương toán tử của mạch ghép.



Với các điều kiện ban đầu $i_1(0^-) = i_2(0^-) = 0$

Chúng ta có từ thông ban đầu bằng không

$$\psi_1(0^+) = L_1 i_1(0^+) + M i_2(0^+)$$

$$\psi_2(0^+) = M i_1(0^+) + L_2 i_2(0^+)$$

Từ kết quả khi xét mạch ghép hở cảm trong 6.1 ta có

$$i_1(0^+) L_1 (1 - k^2) = 0; \quad i_2(0^+) L_2 (1 - k^2) = 0$$

Như vậy khi $k = 1$ điều kiện trên tự động thỏa mãn, không phụ thuộc vào $i_1(0^+)$; $i_2(0^+)$. Từ đó có thể thấy rằng, khi hệ số ghép $k = 1$, tổng tác dụng của các nguồn biểu diễn tại các điều kiện đầu bằng không, vì vậy không có chúng trong sơ đồ tương đương toán tử của mạch. Điều đó tương đương với việc chấp nhận $i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$. Như vậy phải hiểu rằng, việc bỏ qua các nguồn trên sơ đồ tương đương toán tử, không có nghĩa là nó bằng không tại $t = 0^+$, mà tại thời điểm đó tác dụng tổng hợp của nó lên mạch bằng không.

6.2.5 Áp dụng phương pháp toán tử phân tích hệ thống TTD

Trước đây ta thường phân tích mạch theo cách xét đến tất cả các đáp ứng của các phần tử mạch đối với nguồn tác động. Trong thực tế, đôi khi người ta chỉ quan tâm đến một phần mạch hoặc một phần tử nào đó của mạch. Trong trường hợp như vậy, người ta mô tả mạch theo cách khác, qua việc xét quan hệ giữa đại lượng quan tâm và nguồn tác động. Phân tích mạch như vậy là theo khái niệm hệ thống, khi đó người ta chỉ quan tâm đến quan hệ giữa tín hiệu vào - tín hiệu ra (hay tác động - đáp ứng). Hệ thống trong trường hợp này sẽ được đặc trưng bởi hàm truyền đạt.

1- Định nghĩa hàm truyền đạt

Giả thiết rằng tại $t = 0$, ở đầu vào hệ thống có nguồn áp hoặc nguồn dòng, được ký hiệu là $x(t)$; ở đầu ra của hệ thống ta nhận được dòng điện hoặc điện áp được ký hiệu $y(t)$, với điều kiện đầu bằng không, hàm truyền đạt được định nghĩa như sau

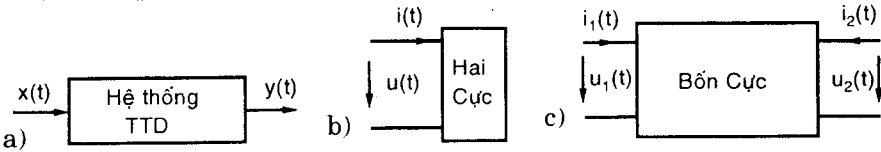
$$K(s) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{DKD=0} \tag{6.53}$$

trong đó $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$; và $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$

Hàm truyền đạt là hàm đặc trưng cho hệ thống, khi đã xác định được $K(s)$, có thể tìm đáp ứng của hệ thống đối với tác động bất kỳ theo biểu thức sau $Y(s) = K(s)X(s)$ (6.54)

Do đó $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ (6.55)

Để quan hệ giữa $x(t)$ và $y(t)$ là đơn trị, thì điều kiện quan trọng là điều kiện đầu phải bằng không.



Hình 6.24

Hàm truyền đạt thường được dùng cho mạng hai cửa (mạng bốn cực), vì nó mang ý nghĩa truyền đạt tín hiệu từ đầu vào đến đầu ra. Khi dùng khái niệm này cho phần tử hai cực, “hàm truyền” sẽ có ý nghĩa là dẫn nạp hay trở kháng của hai cực (H.6.24). Khi chọn $x(t) = i(t)$ và $y(t) = u(t)$ thì hàm truyền của hai cực là dẫn nạp

$$K(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = Y(s) \tag{6.56}$$

Khi chọn: $x(t) = u(t)$; $y(t) = i(t)$, hàm truyền có ý nghĩa là trở kháng

$$K(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = Z(s) \tag{6.57}$$

Giữa các biểu thức (6.56) và (6.57) tồn tại quan hệ: $Z(s)Y(s) = 1$

Trong trường hợp mạng hai cửa (4 cực), tùy theo việc lựa chọn tác động, đáp ứng là dòng điện hay điện áp, ta sẽ có các hàm truyền đạt sau đây

Hàm truyền đạt điện áp (H.6.25a)

$$K_u(s) = \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0} \quad (6.58)$$

Hàm truyền đạt dòng điện (H.6.25b)

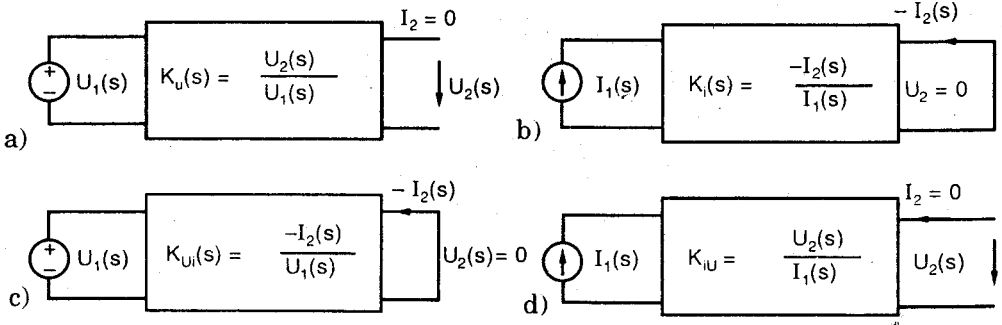
$$K_i(s) = \left. \frac{-I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{u_2=0} \quad (6.59)$$

Hàm truyền đạt áp dòng (H.6.25c)

$$K_{ui}(s) = \left. \frac{-I_2(s)}{U_1(s)} \right|_{u_2=0} \quad (6.60)$$

Hàm truyền đạt dòng áp (H.6.25d)

$$K_{iu}(s) = \left. \frac{U_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2=0} \quad (6.61)$$



Hình 6.25

Hình 6.25 biểu diễn bốn cực làm việc ở các chế độ khác nhau, ngắn mạch hoặc hở mạch đầu ra, tương ứng với bốn hàm truyền theo phương từ trái sang phải. Cần lưu ý rằng, cách tác động lên bốn cực không làm ảnh hưởng đến các định nghĩa trên, điều quan trọng là, theo các định nghĩa đó dòng điện $i_1(t)$ và $u_1(t)$ đã được cho trước.

Các hàm truyền đạt của bốn cực cũng có thể được biểu diễn qua các ma trận đặc trưng của bốn cực như: $[A]$, $[B]$, $[Z]$, $[Y]$, $[G]$, $[H]$, với giả thiết bốn cực có các ma trận trên. Cần nhớ rằng, các ma trận trên có các phần tử là hàm biến s chứ không phải $j\omega$. Trên bảng 6.2 là các công thức tính hàm truyền đạt theo các phần tử ma trận.

Bảng 6.2

Giả thiết: Tồn tại ma trận	X(s) → K(s) → Y(s)			
	$K_{ii}(s) =$	$K_{ij}(s) =$	$K_{ji}(s) =$	$K_{jj}(s) =$
[A]	$\frac{1}{A_{11}}$	$\frac{1}{A_{22}}$	$\frac{1}{A_{12}}$	$\frac{1}{A_{21}}$
[B]	$\frac{\det[B]}{B_{22}}$	$\frac{\det[B]}{B_{11}}$	$\frac{\det[B]}{-B_{12}}$	$\frac{\det[B]}{-B_{21}}$
[Z]	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	$\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{Z_{21}}{\det[Z]}$	Z_{21}
[Y]	$-\frac{Y_{21}}{Y_{22}}$	$-\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$-Y_{21}$	$-\frac{Y_{21}}{\det[Y]}$
[G]	$-\frac{H_{21}}{\det[H]}$	$-H_{21}$	$-\frac{H_{21}}{H_{11}}$	$-\frac{H_{21}}{H_{22}}$
[H]	G_{21}	$\frac{G_{21}}{\det[G]}$	$\frac{G_{21}}{G_{22}}$	$\frac{G_{21}}{G_{11}}$

Bởi vì trở kháng và dẫn nạp toán tử khi: $s = j\omega$, mô tả mạch ở trạng thái xác lập, nên hàm truyền $K(s)$ khi đó cũng có nghĩa như vậy

$$K(s)|_{s=j\omega} = K(\omega) \tag{6.62}$$

Trong trường hợp tổng quát, hàm truyền $K(\omega)$ là một hàm phức có thể biểu diễn dưới dạng

$$K(\omega) = |K(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \tag{6.63}$$

$|K(\omega)|$ - được gọi là đặc tuyến biên độ

$\varphi(\omega) = \arg K(\omega)$ - được gọi là đặc tuyến pha (sẽ xét trong chương 7).

2- Điểm cực và điểm không của hàm truyền đạt

Theo định nghĩa của hàm truyền (6.53), với điều kiện đầu bằng không, là một phân thức hữu tỉ có dạng

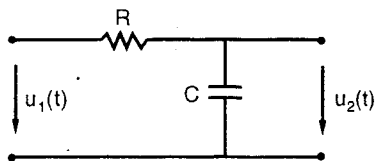
$$K(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \tag{6.64}$$

trong đó a_n và b_m - là các hằng số thực, biểu thức (6.64) có thể viết ở dạng khác

$$K(s) = K \frac{(s - s_{o1})(s - s_{o2}) \dots (s - s_{om})}{(s - s_{c1})(s - s_{c2}) \dots (s - s_{cn})} \tag{6.65}$$

trong đó $K = \frac{b_m}{a_n}$ - là hằng số, các nghiệm của đa thức tử số s_{oi} được gọi

là điểm không của hàm truyền, còn nghiệm của mẫu số s_{ci} được gọi là điểm cực. Như vậy điểm không và điểm cực là những giá trị của biến s để hàm truyền có thể bằng không hoặc không xác định. Khi đã biết vị trí của các điểm không và điểm cực trên mặt phẳng s , ta có thể đoán biết hình dáng của đặc tuyến biên độ-pha của hệ thống. Có thể xét hàm truyền của một số hệ thống đơn giản sau đây.



Hình 6.26

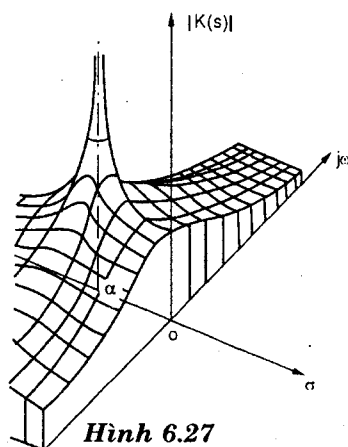
Ví dụ 6.10. Hãy xác định hàm truyền đạt điện áp của hệ thống trên H.6.26.

Giải. Theo định nghĩa, truyền đạt điện áp của hệ thống là:

$$K_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_1(s)}{(R + 1/sC) U_1(s)} \cdot \frac{1/sC}{s + \alpha} = \frac{\alpha}{s + \alpha}$$

trong đó: $\alpha = 1/RC$ - là nghịch đảo của hằng số thời gian của mạch RC.

Hàm truyền đạt điện áp có một điểm cực $s_c = -\alpha$. Đặc trưng biên độ $|K(s)|$ là bề mặt được tạo ra giữa hai trục σ và $j\omega$ (H.6.27). Tại điểm cực $s = -\alpha$ xuất hiện “miệng núi lửa”, tại đó $|K(s)|$ không xác định.



Hình 6.27

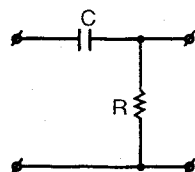
Ví dụ 6.11. Hãy xác định hàm truyền đạt điện áp của hệ thống trên H.6.28.

Giải. Theo định nghĩa:

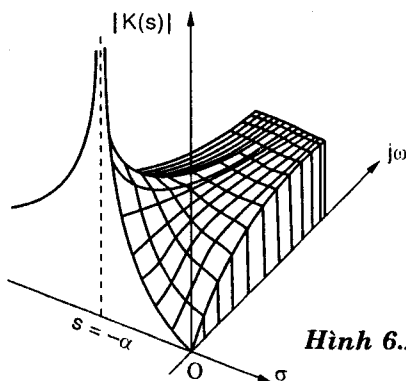
$$K_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_1(s) \cdot R}{(R + 1/sC) \cdot U_1(s)} = \frac{s}{s + \alpha}$$

với $\alpha = 1/RC$. Hàm truyền có một điểm không $s_o = 0$ và một điểm cực tại $s_c = -\alpha$.

Hàm truyền $K(s)$ có đặc tuyến biên độ $|K(s)|$ được xác định trên mặt phẳng $s = \sigma + j\omega$ được vẽ trên H.6.29. Tại điểm không, mặt biểu diễn $|K(s)|$ có một “cái phễu - chỗ



Hình 6.28



Hình 6.29

trùng”, còn tại điểm cực thì có “miệng núi lửa”. Như có thể thấy từ H.6.29, tại điểm không, hàm truyền có giá trị bằng không, còn tại điểm cực hàm truyền không xác định.

Ví dụ 6.12. Hãy xét hàm truyền đạt của hệ thống trên H.6.30. Theo định nghĩa

$$K_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{U_1(s) \cdot R}{(R + sL + 1/sC) \cdot U_1(s)}$$

$$K_u(s) = \frac{2\alpha s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_{ch}^2}; \text{ với: } \alpha = \frac{R}{2L}$$

Hàm truyền của hệ thống trên H.6.30 có một điểm không: $s_0 = 0$; và hai điểm cực là nghiệm của đa thức mẫu số: $s^2 + 2\alpha s + \omega_{ch}^2 = 0$

Xét trường hợp hệ thống không dao động ($\alpha < \omega_{ch}$)

Hàm truyền có hai điểm cực phân biệt nằm trên trục thực âm

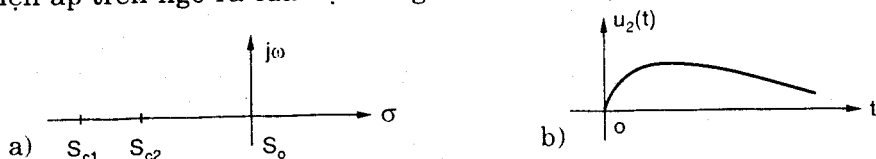
$$s_{c1} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_{ch}^2}; \quad s_{c2} = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_{ch}^2}$$

Nếu ở đầu vào hệ thống đặt nguồn áp: $u_1(t) = EI(t)$; thì điện áp trên điện trở R (ngõ ra) $U_2(s) = \frac{2\alpha E}{(s - s_1)(s - s_2)}$

do đó
$$U_2(t) = \frac{E}{A} [e^{-\alpha(1-A)t} - e^{-\alpha(1+A)t}] 1(t)$$

trong đó $A = \sqrt{1 - 4Q^2}$; $Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ phẩm chất của mạch RLC .

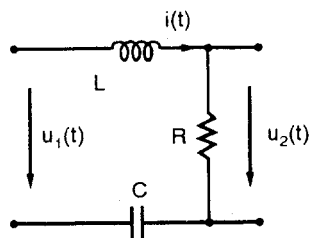
Đồ thị biểu diễn sự phân bố điểm cực, điểm không của hàm truyền và điện áp trên ngõ ra của hệ thống trên H.6.31a,b.



Hình 6.31

Trường hợp tới hạn $\alpha = \omega_{ch}$ ($R = 2\sqrt{L/C}$). Khi đó $Q = 1/2$

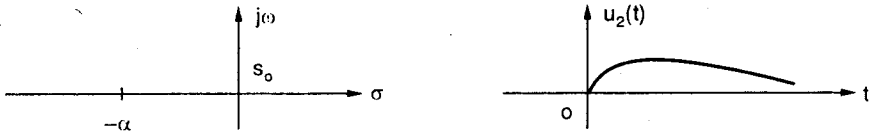
$$K(s) = \frac{2\alpha s}{(s + \alpha)^2}$$



Hình 6.30

Hàm truyền có điểm cực kép: $s_{1,2} = -\alpha$, đáp ứng ngõ ra với nguồn $u_1(t) = EI(t)$ $u_2(t) = 2E\alpha e^{-\alpha t} 1(t)$

Sự phân bố điểm cực, không của hệ thống và điện áp ngõ ra được biểu diễn trên H.6.31c,d.



Hình 6.31

Trường hợp hệ thống có dao động $\alpha < \omega_{ch}$ ($R < 2\sqrt{L/C}$), hàm truyền có cặp điểm cực liên hợp phức

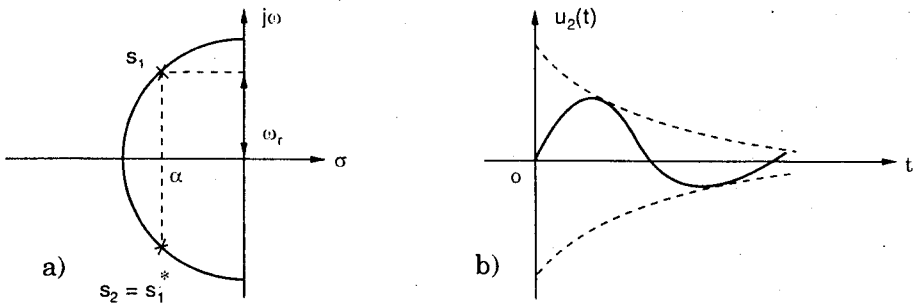
$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_{ch}^2 - \alpha^2}; K(s) = \frac{2\alpha s}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Điện áp trên điện trở R $u_2(t) = \frac{2\alpha E}{\omega_r} e^{-\alpha t} \sin(\omega_r t) 1(t)$

trong đó $\omega_r = \sqrt{\omega_{ch}^2 - \alpha^2}$

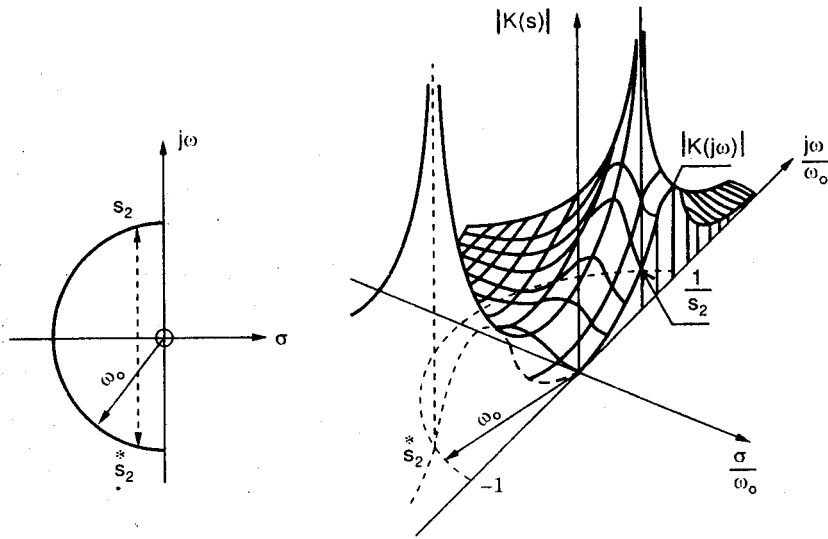
Hệ thống có thể sinh ra dao động với tần số ω_r và biên độ suy giảm hàm mũ tỉ lệ với α . Khi phẩm chất của mạch càng lớn ($Q \gg 1$) có thể coi $\omega_r \approx \omega_{ch}$.

Sự phân bố của điểm cực, điểm không của hệ thống và điện áp ngõ ra biểu diễn trên H.6.32.



Hình 6.32

Trên H.6.33 là đồ thị biểu diễn modul hàm truyền $|K(s)|$.



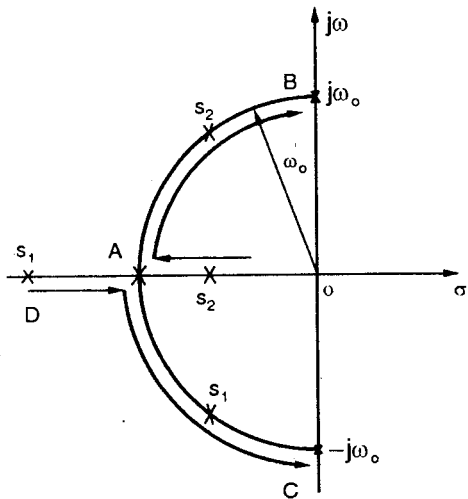
Hình 6.33

Từ các ví dụ trên đây, có thể thấy ảnh hưởng của hệ số suy giảm α (tức ảnh hưởng của R), lên sự phân bố của điểm cực của $K(s)$, và hình dạng điện áp ngõ ra $u_2(t)$ khi nguồn tác động là $u_1(t) = EI(t)$. Hệ số α càng lớn (tổn hao lớn), trong mạch không xảy ra dao động tự do, các điểm cực của $K(s)$ nằm trên trục thực âm của mặt phẳng s (đối xứng qua điểm A trên H.6.34).

- Khi R giảm, các điểm cực s_{c1} , s_{c2} dịch chuyển theo trục OD tới điểm A.

- Khi $\omega = \omega_{ch}$ ($Q = 1/2$), tức là tại điểm A, $K(s)$ có điểm cực kép, mạch có hệ số α suy giảm nhưng vẫn không dao động. Nếu tiếp tục giảm R để $Q > 1/2$, thì điểm cực s_{c1} sẽ dịch chuyển từ điểm A theo cung AB với bán kính ω_{ch} ; còn s_{c2} sẽ dịch theo cung AC. Điện áp nhận được ở ngõ ra là dao động suy giảm.

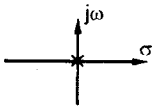
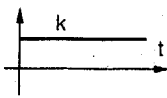
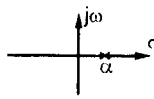
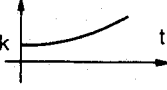
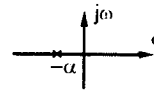
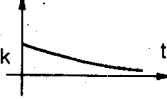

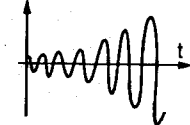
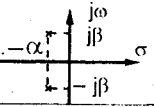
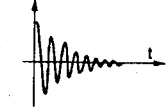
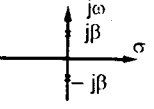
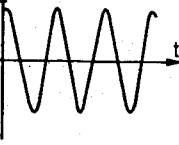
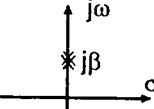
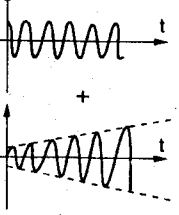
- Khi $R = 0$ ($\alpha = 0$), điểm cực của $K(s)$ nằm trên trục $j\omega$, tại các điểm B, C phẩm chất của mạch lớn vô cùng, trong mạch sẽ có dao động điều hòa.



Hình 6.34

3- Ảnh hưởng của điểm cực và điểm không đến sự ổn định của hệ thống

Bảng 6.3

Phân bố của điểm cực	Đáp ứng xung	Quá trình thời gian	Ghi chú
	K		Không đổi theo thời gian
	$Ke^{\alpha t}$		$\alpha > 0$ Tăng theo hàm mũ
	$Ke^{-\alpha t}$		$\alpha < 0$ Suy giảm theo hàm mũ
	$Ke^{\alpha t} \cos(\beta t + \Phi)$		$\alpha > 0$ Dao động sin tăng theo hàm mũ
	$Ke^{-\alpha t} \cos(\beta t + \Phi)$		$\alpha < 0$ Dao động sin giảm theo hàm mũ
	$K \cos(\beta t + \Phi)$		Dao động điều hòa
	$K_1 \cos(\beta t + \Phi_1) + K_2 t \cos(\beta t + \Phi_2)$		Điểm cực kép, Tổng các dao động

Ta gọi biến đổi ngược của hàm $K(s)$

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)] \quad (6.66)$$

là đáp ứng xung của hệ thống. Như đã phân tích trong phần trên, vị trí

của điểm cực và điểm không sẽ xác định hàm truyền $K(s)$, và do đó quyết định hình dáng của $k(t)$. Nếu $K(s)$ là phân thức hữu tỉ, có hệ số thực, được khai triển thành các phân thức đơn giản, thì hàm $k(t)$ có dạng

$$k(t) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K_i}{s - s_i} \right] \quad (6.67)$$

Trong trường hợp, nếu $K(s)$ có các điểm cực phức bội r , thì hàm $k(t)$ sẽ xuất hiện các hàm có dạng

$$e^{\alpha t} [K_1 \cos(\beta t + \Phi_1) + K_2 t \cos(\beta t + \Phi_2) + \dots + K_r t^{r-1} \cos(\beta t + \Phi_r)] \quad (6.68)$$

Bảng 6.3 là vị trí điểm cực của các hàm $K(s)$ thường gặp, và quá trình của đáp ứng xung tương ứng.

Từ bảng 6.3 và những phân tích trên đây có thể rút ra những kết luận sau

1- Nếu tất cả các điểm cực của hàm $K(s)$ đều nằm ở nửa trái mặt phẳng s (có phần thực âm), thì đáp ứng xung $k(t) \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow \infty$.

2- Nếu $K(s)$ có dù chỉ một điểm cực nằm ở nửa phải mặt phẳng s (phần thực dương) thì $k(t) \rightarrow \infty$ khi $t \rightarrow \infty$.

3- Nếu $K(s)$ có các điểm cực đơn nằm trên trục ảo $j\omega$, thì hàm $k(t)$ là tổng các dao động điều hòa.

4- Nếu $K(s)$ có dù chỉ một cặp điểm cực phức bội thì hàm $k(t)$ sẽ có dao động sin có biên độ tăng dần.

Dựa vào định nghĩa hàm truyền (6.53) và (6.54) ta có

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)X(s)] \quad (6.69)$$

Nếu hệ thống được kích thích bởi nguồn $x(t)$ và với giả thiết điều kiện đầu bằng không, ta nói rằng hệ thống sẽ ổn định khi và chỉ khi với mỗi kích thích hữu hạn sẽ cho ta một đáp ứng hữu hạn. Như vậy điều kiện để mạch ổn định là

$$|x(t)| < \infty \rightarrow |y(t)| < \infty \quad (6.70)$$

Trong trường hợp $y(t) \rightarrow 0$, ta nói rằng hệ thống ổn định tiệm cận.

Bởi vì vị trí điểm cực, điểm không quyết định hình dáng của $k(t)$, do đó nó quyết định sự ổn định của hệ thống. Như vậy có thể kết luận

1- Hệ thống ổn định khi và chỉ khi hàm truyền $K(s)$ không có điểm cực nằm ở nửa phải mặt phẳng s ($Re(s) > 0$) và không có điểm cực bội với $Re(s) = 0$.

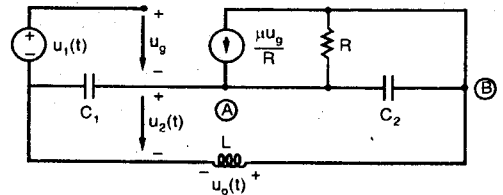
2- Hệ thống ổn định tiệm cận khi và chỉ khi hàm truyền $K(s)$ không có điểm cực nằm ở nửa phải mặt phẳng s và trên trục ảo $j\omega$, có nghĩa là các điểm cực nằm trên nửa trái mặt phẳng s với $Re(s) < 0$.

Những khẳng định trên đây cho ta thấy rằng, hệ thống sẽ ổn định tiệm cận khi $k(t)$ suy giảm, còn mạch ổn định là khi $k(t)$ có dạng dao động điều hòa.

Với hệ thống TTD có thể thấy rằng, hệ thống ổn định tiệm cận được cấu tạo từ các phần tử R, L, C, M , còn hệ thống ổn định chỉ gồm các phần tử LC lý tưởng. Bởi vì các bốn cực được đặc trưng bởi các hàm truyền đạt (theo các biểu thức từ 6.58 + 6.61), nên tùy theo việc chọn các đại lượng $I(s); U(s)$ ở đầu vào và ra của hệ thống, mà hàm truyền $K(s)$ có thể có điểm cực nằm ở nửa phải mặt phẳng s . Điều đó cho thấy, sự ổn định của hệ thống liên quan đến điều kiện làm việc của nó.

Hãy xét sau đây một ví dụ về sự ổn định của hệ thống.

Ví dụ 6.13. Cho hệ thống trên (H.6.35), đó là sơ đồ tương đương của mạch tạo dao động điều hòa Colpits. Hãy xác định điều kiện để mạch ổn định (tạo ra dao động điều hòa).



Hình 6.35

Giải. Điện áp ngõ ra được lấy trên cuộn dây là $U_o(s) = K(s)U_1(s)$ trong đó $U_1(s)$ - là $\mathcal{L}[u_1(t)]$ điện áp ngõ vào.

Nếu hệ thống đang xét là mạch tạo dao động thì điện áp $u_o(t)$ không được giống kích thích $u_1(t)$. Giả thiết: $u_1(t) = \delta(t)$, được đóng vào hệ thống tại $t = 0$, trong thực tế những tín hiệu như vậy là những xung nhiễu (ồn) của chính mạch. Bây giờ hãy khảo sát hàm truyền $K(s)$ và các điểm cực của nó.

Áp dụng phương pháp thế nút và đưa vào ký hiệu $g = \mu/R$ và điện áp giữa các đỉnh A, B là $U_2(s)$.

$$\text{Tại nút A ta có } sC_1U_2(s) - gU_g(s) = \left(sC_2 + \frac{1}{R} \right) [U_2(s) - U_o(s)]$$

$$\text{Tại nút B } \left(sC_2 + \frac{1}{R} \right) [U_o(s) - U_2(s)] + \frac{U_o(s)}{sL} + gU_g(s) = 0$$

thay $U_g(s) = U_1(s) - U_2(s)$; ta sẽ tìm được $U_o(s)$ biểu diễn qua $U_1(s)$.

$$\text{Kết quả } K(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{-gs^2}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

$$\text{trong đó } a_1 = \frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}; \quad a_2 = \frac{1}{RC_2}; \quad a_0 = \frac{\mu + 1}{LRC_1C_2}$$

Việc tìm điểm cực của đa thức có bậc $n > 2$ tất nhiên là phức tạp. Với trường hợp đang xét, đa thức bậc 3 có nghiệm nằm ở nửa phải mặt phẳng s nếu $a_1a_2 < a_0$, tức là

$$\frac{C_1 + C_2}{LRC_1C_2^2} < \frac{\mu + 1}{LRC_1C_2}; \quad \text{hay là } \mu > \frac{C_1}{C_2}$$

Để $k(t)$ là quá trình điều hòa có tần số β , các điểm cực của hàm $K(s)$ phải nằm trên trục $j\omega$ tại các điểm $\pm j\beta$. Khi thay giá trị các điểm cực đó vào mẫu số của hàm $K(s)$ và đồng nhất với không, ta được

$$-j\beta^3 - a_2\beta^2 + ja_1\beta = 0$$

$$\text{vì } \beta \neq 0 \text{ nên } a_1\beta - \beta^3 = 0 \Rightarrow \beta^2 = \frac{\mu + 1}{LC_1}$$

$$a_0 + a_2\beta^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}$$

Như vậy để hệ thống có thể tạo ra dao động điều hòa thì

$$\frac{\mu + 1}{LC_1} = \frac{C_1 + C_2}{LC_1 + C_2}. \text{ Suy ra } \mu = \frac{C_1}{C_2}$$

Tần số dao động được xác định theo công thức

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu + 1}{LC_1}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \text{với } C = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Việc nghiên cứu kỹ lưỡng vấn đề tạo dao động điều hòa không nằm trong nội dung của phân tích mạch *TTD*. Do đó ta sẽ dừng lại ở đây, và coi ví dụ này như là sự minh họa cho việc khảo sát sự ổn định của hệ thống *TTD*.

6.3 PHƯƠNG PHÁP TÍCH CHẬP VÀ TÍCH PHÂN DUHAMEL

Phương pháp tích chập và tích phân Duhamel cho phép xác định đáp ứng $y(t)$ của một hệ thống trong miền thời gian, một khi đã biết đáp ứng xung $k(t)$ của nó và bỏ qua giai đoạn tìm ảnh Laplace.

6.3.1 Đặc tính thời gian của hệ thống

Như đã biết trong mục 6.2.1, khi xét về các tính chất của biến đổi Laplace, ta có định lý về tích chập (tính chất 4 - bảng 6.2), còn có tên là định lý Borel được phát biểu như sau:

Nếu hai tín hiệu $f_1(t)$ và $f_2(t)$ đều có ảnh Laplace, và một trong chúng có thể tồn tại hữu hạn trong khoảng $(0, t)$ thì:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] = F_1(s).F_2(s) \quad (6.71)$$

trong đó: $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$; $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$

và hàm: $\varphi(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

được gọi là tích chập của hai hàm trong khoảng $0 < t < \infty$.

Theo định nghĩa hàm truyền (6.53), ảnh Laplace của đáp ứng được xác định theo biểu thức $Y(s) = K(s)X(s)$

Thực hiện biến đổi ngược Laplace ta có:

$$y(t) = \int_0^t k(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau \quad (6.72)$$

trong đó $k(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)]$, được gọi là đặc tính thời gian của hệ thống.

Trong mục 6.2 mới đưa ra cách tìm $k(t)$ trong trường hợp hàm $K(s)$ là một phân thức hữu tỉ, có bậc đa thức mẫu số lớn hơn bậc của đa thức tử số, trong trường hợp tổng quát bậc của tử số có thể lớn hơn hoặc bằng bậc của mẫu số ($m \geq n$).

Theo tính chất của ảnh Laplace, thì khi $s \rightarrow \infty$ hàm $F(s) \rightarrow 0$; như vậy trường hợp $m \geq n$ hàm $K(s)$ không phải là ảnh của một hàm bất kỳ nào, vì nó không thỏa mãn (tính chất 9 - bảng 6.2):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K(s) = 0$$

Điều đó có nghĩa là, ta không thể tìm biến đổi Laplace của các hàm loại s^k theo phương pháp trước đây.

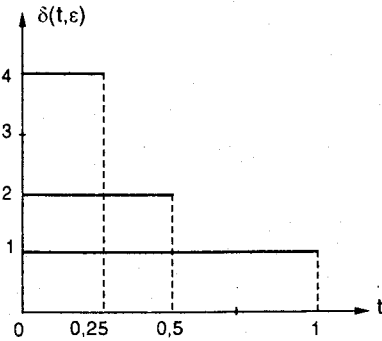
Để tìm hàm gốc của các hàm $K(s)$ hữu tỉ có bậc $m \geq n$, cần đưa vào một "hàm" mới được gọi là hàm xung $\delta(t)$ (trong lý thuyết tín hiệu gọi là "Phân bố delta Dirac", nó không phải là hàm theo nghĩa thông thường.

Phân bố Delta (Dirac) được định nghĩa như sau

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (6.73)$$

và
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (6.74)$$

trong đó $\delta(t)$ - là giới hạn của các hàm $\delta(t, \epsilon)$ nào đó, mà một trong chúng là hàm trên H.6.36.



Hình 6.36

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(t, \epsilon) \quad (6.75)$$

với
$$\delta(t, \epsilon) = \frac{1(t) - 1(t - \epsilon)}{\epsilon} \quad (6.76)$$

Bây giờ hãy áp dụng phân bố $\delta(t)$ để tìm $k(t)$ của các hàm truyền $K(s)$ có bậc $m \geq n$.

1- Xét trường hợp khi $m = n$, hàm $K(s)$ có thể viết

$$K(s) = 1 + F_1(s) \quad (6.77)$$

trong đó $F_1(s)$ - là phân thức có bậc tử số nhỏ hơn mẫu số.

Bởi vì theo (6.75), (6.76)

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1(t) - 1(t - \epsilon)}{\epsilon} \right]$$

do đó ảnh của phân bố $\delta(t)$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L} \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1(t) - 1(t - \epsilon)}{\epsilon} \right] \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon}$$

Áp dụng qui tắc L'Hospital ta được $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon} = 1$

Do đó
$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (6.78)$$

Như vậy trong trường hợp $m = n$, các hàm $K(s)$ sẽ có hàm gốc có dạng

$$k(t) = \delta(t) + f_1(t) \quad (6.79)$$

trong đó $f_1(t)$ - được tìm theo các phương pháp đã nêu trong (6.2.3).

Hãy quay lại ví dụ 6.11 với hệ thống trên H.6.28, có hàm truyền đạt

$$K(s) = \frac{s}{s + \alpha}; \quad \alpha = 1/RC; \quad \text{có thể viết } K(s) \text{ dưới dạng } K(s) = 1 - \frac{\alpha}{s + \alpha}$$

Do đó $k(t) = \delta(t) - \alpha e^{-\alpha t} 1(t)$. Đây chính là đáp ứng xung của mạch lọc thông cao.

2- Với những hàm truyền $K(s)$ có bậc $m > n$, hàm $K(s)$ có thể biểu diễn dưới dạng:

$$K(s) = F(s) + F_1(s) \quad (6.80)$$

trong đó: $F(s) = s^{m-n} = s^k \quad (k > 0)$ (6.81)

tất nhiên $F_1(s)$ là phân thức hữu tỉ có bậc tử số nhỏ hơn bậc mẫu số.

Để tìm $k(t)$ của các hàm $K(s)$ dạng (6.80) ta đưa vào khái niệm về đạo hàm của phân bố $\delta(t)$. Bởi vì:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1(t) - 1(t - \varepsilon)}{\varepsilon} \right] = \frac{d1(t)}{dt} \quad (6.82)$$

Khi áp dụng tính chất 2 bảng 6.1 về ảnh của đạo hàm ta có:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[1(t)] &= \frac{1}{s} \\ \mathcal{L}\left[\frac{d1(t)}{dt}\right] &= \mathcal{L}[\delta(t)] = s \frac{1}{s} = 1 \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^2 1(t)}{dt^2}\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right] = s \cdot 1 = s \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^{n+1} 1(t)}{dt^{n+1}}\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{d^n \delta(t)}{dt^n}\right] = s^n \end{aligned} \right\} \quad (6.83)$$

từ các biểu thức (6.83) có thể thấy rằng, nếu các hàm $K(s)$ có chứa $F(s)$ có dạng s^k , thì trong hàm $k(t)$ của nó sẽ có các đạo hàm cấp k của phân bố $\delta(t)$. Hàm $k(t)$ trong trường hợp $K(s)$ có bậc tử số lớn hơn bậc mẫu số sẽ có dạng:

$$k(t) = \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} + f_1(t) \quad (6.84)$$

trong đó $k = m - n$.

Việc đưa vào phân bố $\delta(t)$, cho phép tìm được hàm gốc của $K(s)$ với $m \geq n$, như vậy cho đến đây, ta có thể tìm hàm gốc của các hàm hữu tỉ có bậc bất kỳ. Ngoài ứng dụng trên của phân bố $\delta(t)$, người ta còn dùng ảnh của nó để biểu diễn ảnh của đạo hàm; mà ta sẽ xét sau đây.

Theo định lý về ảnh của đạo hàm (tính chất 2 bảng 6.1) thì:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

Tính chất này có thể viết dưới dạng khác:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt} + f(0^+)\delta(t)\right] = sF(s) \tag{6.85}$$

Giá trị hằng số $f(0^+)$ của hàm $f(t)$ có thể coi là ảnh của hàm $\delta(t)$, do

đó có thể viết:
$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt} + f(0^+)\delta(t)\right] = sF(s) \tag{6.86}$$

Bảng 6.4

STT	Các tính chất	Chú ý
1	$\delta_1(t) = \delta_2(t)$ khi $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_1(t, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_2(t, \epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{với } t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$ và $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(t, \epsilon) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_2(t, \epsilon) dt = 1$	Phương trình này được hiểu là định nghĩa của hàm $\delta(t)$ với giả thiết các hàm gần đúng là liên tục
2	$\int_{-\infty}^{\infty} k\delta(t) dt = k$	k - hằng số bất kỳ
3	$0\delta(t) = 0$	
4	$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$	
5	$\frac{dI(t)}{dt} = \delta(t)$	
6	$\frac{dI(t - t_0)}{dt} = \delta(t - t_0)$	
7	$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta^{(n)}(t - t_0) dt = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(t_0) & \text{khi } -\infty < t_1 < t_0 < t_2 < +\infty \\ 0 & \text{khi } -\infty < t_1 < t_2 < t_0 \text{ hay } t_0 < t_1 < t_2 < +\infty \end{cases}$	
8	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = f(t) * \delta(t) = f(t)$	
9	$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$	
10	$f(t) * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)$	
11	$\delta(t) * \delta(t) = \delta(t)$	
12	$\delta^{(k)} * \delta^{(m)}(t) = \delta^{(k+m)}(t)$	
13	$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-st} dt = e^{-st_0}$	$t_0 \geq 0$
14	$\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t - t_0)] = \int_0^{\infty} \delta^{(n)}(t - t_0)e^{-st} dt = s^n e^{-st_0}$	$t_0 \geq 0$

Nếu ký hiệu $f'_d(t) = f'(t) + f(0^+) \delta(t)$ (6.87)

thì biểu thức (6.86) có thể viết lại

$$\mathcal{L}[f'_d(t)] = sF(s) \quad (6.88)$$

Trong biểu thức (6.88) ta không thấy giá trị của hàm $f(t)$ tại $t = 0^+$. Biểu thức (6.87) được gọi là đạo hàm tổng quát hay đạo hàm phân bố của hàm $f(t)$. Nếu hàm $f(t)$ không liên tục tại $t = 0$ (có bước nhảy), thì tại đó nó không có đạo hàm thông thường, nhưng lại có đạo hàm phân bố.

Các hàm không liên tục tại $t = 0$ có thể viết dưới dạng

$$f_d(t) = f(t)I(t) \quad (6.89)$$

Lấy đạo hàm hai vế (6.89)

$$f'_d(t) = f(t) \frac{dI(t)}{dt} + f'(t)I(t) = f(t)\delta(t) + f'(t)I(t) = f(0^+)\delta(t) + f'(t)I(t) \quad (6.90)$$

trong đó $f'(t)$ - là đạo hàm thông thường của hàm $f(t)$.

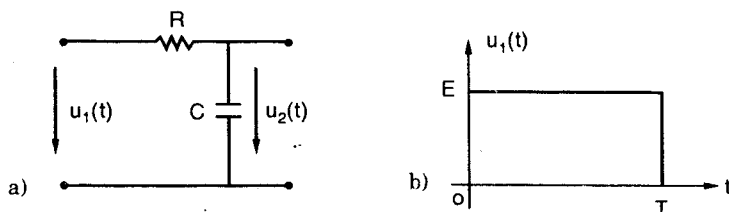
Rõ ràng là việc đưa vào hàm xung (phân bố $\delta(t)$) cho phép tính đạo hàm của các hàm không liên tục (có bước nhảy), do đó biểu thức (6.88) là đúng, bởi vì giá trị $f(0^+)$ được chứa trong đạo hàm ở vế trái.

Để tiện cho việc sử dụng phân bố $\delta(t)$ trong khi tính toán, các tính chất của nó sẽ được cho trong bảng 6.4.

6.3.2 Tích chập và tích phân Duhamel

Trên đây ta đã nói rằng, đáp ứng ở đầu ra của hệ thống $y(t)$ với tác động $x(t)$ có thể được tính theo công thức tích chập (6.72). Cách xác định $y(t)$ như vậy là theo phương pháp tích chập, với các hàm $x(t)$, $k(t)$ thông thường, thì việc tính tích chập không có gì khó khăn. Hãy xét sau đây một ví dụ minh họa.

Ví dụ 6.14



Hình 6.37

Hãy xác định điện áp trên tụ điện của hệ thống (H.6.37a), khi nguồn tác động có dạng trên H.6.37b.

Giải

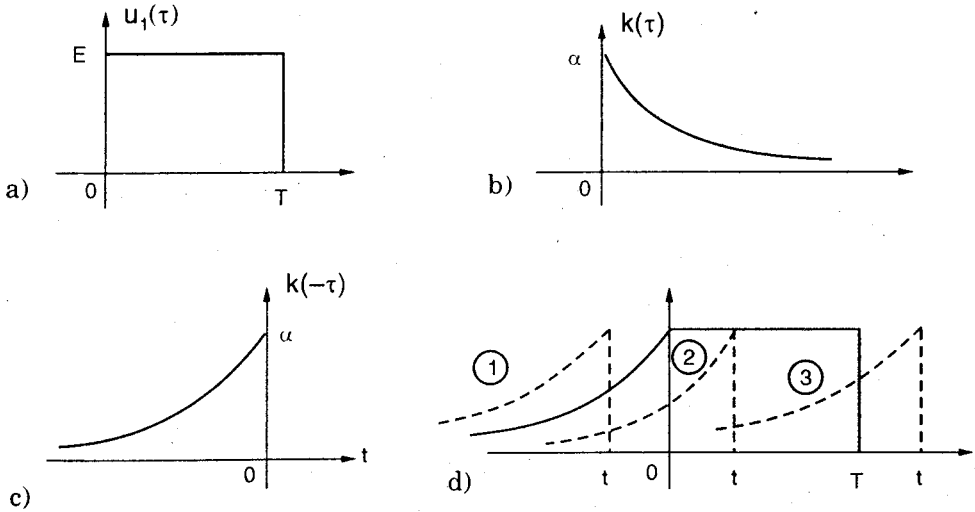
Hàm truyền đạt điện áp của hệ thống $K(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}; \alpha = \frac{1}{RC}$

Đáp ứng xung của mạch $k(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)] = \alpha e^{-\alpha t} 1(t)$

Điện áp ra được tính theo công thức $u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau)k(t-\tau)d\tau$

Chú ý: τ là biến tích phân, còn t là tham số thay đổi.

Việc tính tích chập trong trường hợp các hàm dưới dấu tích phân có biểu thức giải tích phức tạp, là không dễ dàng. Trong trường hợp các hàm đơn giản, có thể tính tích chập theo phương pháp đồ thị. Có thể nêu ra đây các bước tiến hành tính tích chập.



Hình 6.38

- Thay biến t thành τ và vẽ các hàm $u_1(\tau), k(\tau)$;
- Vẽ hàm $k(-\tau)$;
- Dịch chuyển hàm $k(-\tau)$ đi những khoảng t để có $k(t-\tau)$;
- Tính tích phân của hàm $u_1(\tau)k(t-\tau)$.

Thực hiện các bước vừa nêu trên đây để tính $u_2(t)$ trong ví dụ 6.14.

Quá trình tính bằng phương pháp đồ thị được vẽ trên H.6.38.

Khi $t \leq 0$ ① $u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau)k(t-\tau)d\tau = 0$

Khi $0 \leq t \leq T$ ②

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau)k(t-\tau)d\tau = \alpha E \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = Ee^{-\alpha t} e^{\alpha\tau} \Big|_0^t = u_2 = E(1 - e^{-\alpha t})$$

Khi $t \geq T$ ③

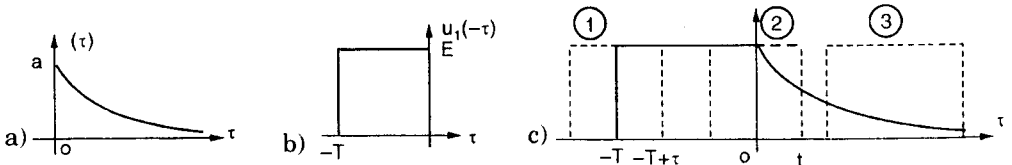
$$u_2(t) = \int_0^T \alpha E e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = \alpha E e^{-\alpha t} \int_0^T e^{\alpha\tau} d\tau = Ee^{-\alpha t} (e^{\alpha T} - 1)$$

Kết quả nhận được $u_2(t)$ có dạng:

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E(1 - e^{-\alpha t}) & 0 \leq t \leq T \\ Ee^{-\alpha t} (e^{\alpha T} - 1) & t \geq T \end{cases}$$

Tích chập có tính giao hoán, nên có thể tính $u_2(t)$ theo công thức:

$$u_2(t) = \int_0^t k(\tau)u_1(t-\tau)d\tau \quad (\text{xem H.6.39})$$



Hình 6.39

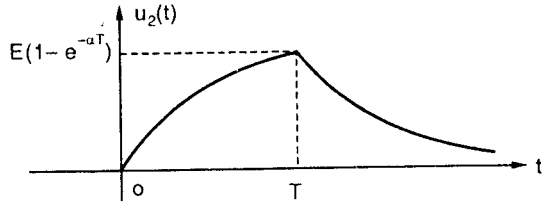
Trong trường hợp này giữ nguyên $k(\tau)$, cho quay và dịch để có: $u_1(t-\tau)$. Có thể tiến hành một cách tương tự.

Khi $t \leq 0$ ①
$$u_2(t) = \int_0^t k(\tau)u_1(t-\tau)d\tau = 0$$

Khi $0 \leq t \leq T$ ②
$$u_2(t) = \int_0^t E\alpha e^{-\alpha\tau} d\tau = E(1 - e^{-\alpha t})$$

Khi $t \geq T$ ③
$$u_2(t) = \int_{-T+t}^t \alpha E e^{-\alpha\tau} d\tau = Ee^{-\alpha t} (e^{\alpha T} - 1)$$

Điện áp ngõ ra trên tụ $u_2(t)$ có dạng vẽ trên H.6.40.



Hình 6.40

Điện áp $u_2(t)$ được xác định bằng phương pháp tích chập cũng giống như khi áp dụng các phương pháp kinh điển và toán tử. Nó hoàn toàn phù hợp với quá trình vật lý xảy ra trong hệ thống. Có nghĩa là, trong khoảng thời gian $0 < t < T$, tụ được nạp bởi nguồn $u_1(t)$, còn khi $t > T$ nguồn áp $u_1(t)$ bằng không (nguồn áp lý tưởng nên coi như ngắn mạch), tụ điện phóng điện qua điện trở R .

Trong trường hợp khi nguồn tác động có dạng đặc biệt nào đó, hàm $y(t)$ có thể mô tả đầy đủ các tính chất của hàm truyền. Tín hiệu đặc biệt đó là hàm xung (phân bố $\delta(t)$) và hàm đơn vị $1(t)$.

Khi $x(t) = \delta(t)$, thì theo (6.72) ta có:

$$y(t) = \int_0^t k(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_0^t k(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = k(t) \int_0^t \delta(t-\tau)d\tau = k(t) \quad (6.91)$$

Kết quả (6.91) cũng có được theo cách khác; theo (6.5)

$$Y(s) = K(s)X(s)$$

Khi $x(t) = \delta(t)$ thì $X(s) = 1$; do đó: $Y(s) = K(s)$; có nghĩa là: $y(t) = k(t)$. Hàm $k(t)$ do vậy có tên là “đáp ứng xung” của hệ thống, bởi vì nó chính bằng đáp ứng của hệ thống khi kích thích ở ngõ vào là hàm xung (phân bố $\delta(t)$) với điều kiện đầu bằng không.

Khi $x(t) = 1(t)$, ta có $X(s) = 1/s$, do đó:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[K(s) \cdot \frac{1}{s} \right] = h(t) \quad (6.92)$$

trong đó ta đã ký hiệu:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)] \text{ với } H(s) = \frac{K(s)}{s} \quad (6.93)$$

Hàm $h(t)$ có tên là “đáp ứng đơn vị” của hệ thống. Đó là đáp ứng của hệ thống khi kích thích vào hệ thống $x(t) = 1(t)$ và điều kiện đầu bằng không.

Bây giờ ta hãy xét quan hệ giữa $h(t)$ và $k(t)$ khi sử dụng định lý về ảnh của đạo hàm thông thường (tích chất 2 bảng 6.1).

$$\mathcal{L}\left[\frac{dh(t)}{dt}\right] = sH(s) - h(0^+) \quad (6.94)$$

Bởi vì theo (6.93) thì $sH(s) = K(s) = \mathcal{L}[k(t)]$ nên:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dh(t)}{dt}\right] = \mathcal{L}[k(t)] - \mathcal{L}[h(0^+)\delta(t)]$$

suy ra:
$$k(t) = \frac{dh(t)}{dt} + h(0^+)\delta(t) \quad (6.95)$$

Khi ký hiệu: $k(t) = h'_d(t)$

trong đó $h_d = h(t)1(t)$ và $h'_d(t)$ - là đạo hàm phân bố, thì:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{d}{dt}[h(t)1(t)] = h(t)\frac{d1(t)}{dt} + h'(t)1(t) \\ k(t) &= h(0^+)\delta(t) + h'(t)1(t) \end{aligned} \quad (6.96)$$

Như vậy, nếu biết hàm $h(t)$ của hệ thống, ta có thể tìm $y(t)$ đối với nguồn tác động $x(t)$ bất kỳ. Biểu thức $Y(s) = K(s)X(s)$ có thể viết dưới dạng khác:

$$Y(s) = K(s)X(s) = s\frac{K(s)}{s}X(s) = sH(s)X(s) \quad (6.97)$$

Khi coi s là toán tử đạo hàm, thì dựa vào định lý Borel ta có:

$$y(t) = \frac{d}{dt}[h(t) * x(t)] \quad (6.98)$$

Công thức (6.98) được gọi là tích phân Duhamel. Việc xác định đáp ứng của hệ thống theo (6.98) được gọi là phương pháp tích phân Duhamel. Do tính chất đạo hàm của tích chập, nên biểu thức (6.98) có hai dạng:

$$y(t) = \frac{d}{dt}[h(t) * x(t)] = h(t) * \frac{dx(t)}{dt} \quad (6.99)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt}[h(t) * x(t)] = x(t) * \frac{dh(t)}{dt} \quad (6.100)$$

Trong trường hợp một trong hai hàm $h(t)$ hoặc $x(t)$ có thể không liên tục tại $t = 0$, thì việc tính tích phân Duhamel (6.98) được tiến hành theo (6.99) hoặc (6.100).

Nếu $h(t)$ là hàm liên tục $t \geq 0$ và $x(t)$ có đạo hàm $x'(t)$ liên tục ở $t > 0$, thì:

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t)x(0^+) + \int_0^t h(\tau)x'(t-\tau)d\tau \quad (6.101)$$

Còn nếu $x(t)$ là hàm liên tục tại $t \geq 0$, và $h(t)$ có đạo hàm $h'(t)$ liên tục ở $t > 0$ thì:

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)h(0^+) + \int_0^t x(\tau)h'(t-\tau)d\tau \quad (6.102)$$

Sau đây là một số ví dụ về áp dụng phương pháp vừa nêu:

Ví dụ 6.15. Xét hệ thống có hàm truyền $K(s) = \frac{1}{s+1}$. Hãy tìm đáp ứng ngõ ra đối với các nguồn tác động sau:

$$x_1(t) = \delta(t); \quad x_2(t) = 1(t) - 1(t-1)$$

$$x_3(t) = \frac{1}{4} \left[\delta\left(t - \frac{1}{4}\right) + \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{3}{4}\right) + \delta(t-1) \right]$$

Giải

1- Với $x_1(t) = \delta(t)$ ta có:

$$y_1(t) = k(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)] = e^{-t}1(t)$$

2- Với $x_2(t) = 1(t) - 1(t-1)$, khi đó

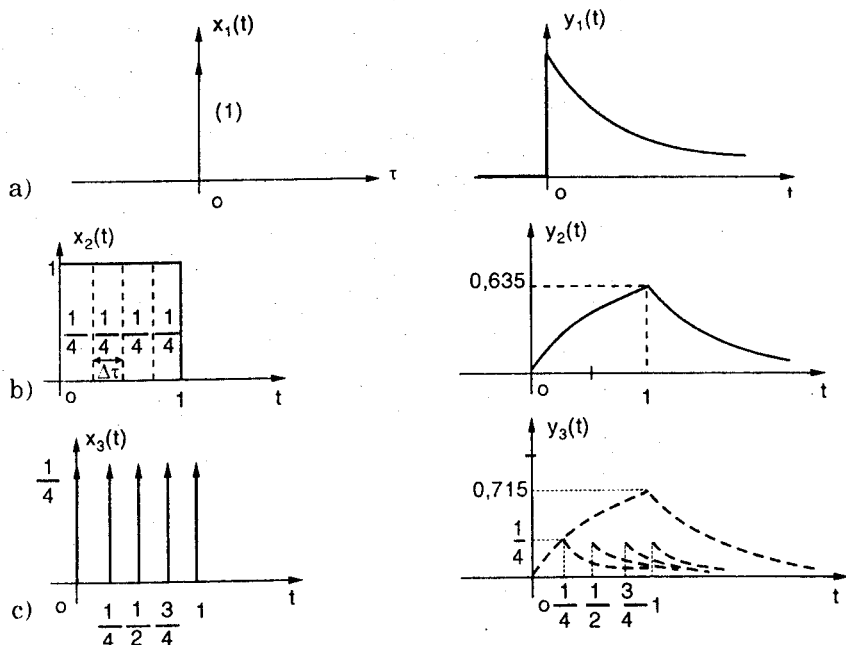
$$y_2(t) = h(t) - h(t-1) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

Do $H(s) = \frac{K(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)}$; $h(t) = (1 - e^{-t})1(t)$.

3- Áp dụng kết quả đối với (1) ta được:

$$y(t) = \frac{1}{4} \left[k\left(t - \frac{1}{4}\right) + k\left(t - \frac{1}{2}\right) + k\left(t - \frac{3}{4}\right) + k(t-1) \right]$$

Có thể biểu diễn đáp ứng của hệ thống với từng trường hợp nguồn tác động trên H.6.41a,b,c.



Hình 6.41

Những điều cần chú ý khi khảo sát ví dụ trên đây là, trong thực tế tín hiệu có tính chất như phân bố $\delta(t)$ không thực hiện được, có thể coi nó là mô hình cho những tín hiệu xung có độ rộng vô cùng hẹp. Với trường hợp $x_2(t)$ và $x_3(t)$, có thể thấy rằng diện tích dưới đồ thị biểu diễn chúng

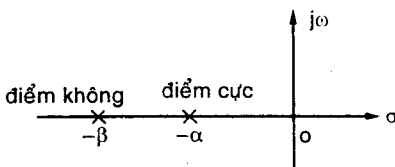
$$\text{lưu luôn bằng đơn vị } \int_0^{\infty} x_2(t)dt = \int_0^{\infty} x_3(t)dt = 1$$

Do đó hàm $x_3(t)$ có thể coi là hàm gần đúng của $x_2(t)$. Tín hiệu $x_2(t)$ được chia thành bốn phần hình chữ nhật. Mỗi phần được thay bằng hàm $\delta(t)$ có giá trị bằng 1/4, đáp ứng $y_2(t)$ là tổng hợp của các đáp ứng thành phần và do đó $y_2(t)$ sẽ giống $y_3(t)$, ở giới hạn khi $\Delta\tau \rightarrow 0$,

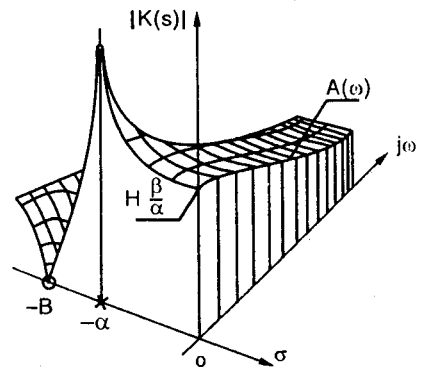
$$x_3(t) \rightarrow x_2(t) \text{ và do đó } y_2(t) = \int_0^t x_2(\tau)k(t-\tau)d\tau$$

Một điều cần nói đến nữa là, khi hệ thống được kích thích bởi một xung đủ hẹp, đủ lớn, thì tín hiệu ở ngõ ra sau thời gian đủ dài sẽ có hình dạng giống với đáp ứng xung.

Vi dụ 6.16



Hình 6.42



Hình 6.43

Trên H.6.42 là đồ thị phân bố điểm cực và điểm không của một hàm truyền đạt điện áp. Hãy xác định hàm truyền của hệ thống nếu với

$$s = 0 \text{ ta có } K(0) = H \frac{\beta}{\alpha}$$

trong đó H, β, α - là các hằng số dương, có giá trị như sau:

$$H = \frac{1}{2}; \quad \alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = 1$$

và nguồn tác động có dạng $u_1(t) = e^{-\alpha t} I(t)$

Giải. Ta sẽ xác định $u_2(t)$ bằng phương pháp tích chập và tích phân Duhamel.

Hàm truyền đạt của bốn cực có biểu thức:

$$K(s) = H \frac{s + \beta}{s + \alpha}$$

Môđul của hàm truyền $|K(s)|$ được biểu diễn trên H.6.43.

Hàm truyền đạt trong trường hợp này có bậc ở tử số bằng mẫu số:

$$K(s) = \frac{1}{2} \frac{(s+1)}{(s+1/2)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1/2}{s+1/2} \right)$$

Do đó:
$$k(t) = \frac{1}{2} \delta(t) + \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{2}} I(t)$$

Đáp ứng đơn vị:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K(s)}{s} \right] = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{s(s+1/2)} \right]$$

$$h(t) = \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \right) I(t)$$

• Áp dụng phương pháp tích chập:

$$u_2(t) = k(t) * u_1(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \left[\delta(\tau) + \frac{1}{2} e^{-\frac{\tau}{2}} \right] \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} I(t)$$

• Áp dụng phương pháp tích phân Duhamel:

- Công thức (6.98)

$$u_2(t) = \frac{d}{dt} [h(t) * u_1(t)] = \frac{d}{dt} [u_1(t) * h(t)]$$

Thay các biểu thức của $h(t)$ và $u_1(t)$ ta có

$$u_2(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\tau}{2}} \right) e^{-(t-\tau)} d\tau = \frac{d}{dt} \left[(1 - e^{-t/2}) I(t) \right]$$

đây chính là đạo hàm phân bố, ta nhận được $u_2(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} I(t)$

Giả sử nếu ta muốn dùng các dạng khai triển của tích phân Duhamel (6.101), (6.102), thì trong trường hợp này, cả hàm $h(t)$ và $u_1(t)$ đều có đạo hàm liên tục ở $t > 0$, do đó có thể dùng cả hai công thức

Công thức (6.101):

$$u_2(t) = h(t)u_1(0^+) + \int_0^t h(\tau)u_1'(t-\tau)d\tau$$

Giới hạn bên phải của hàm $u_1(t)$ là $u_1(0^+) = 1$ còn đạo hàm của nó ở $t > 0$.

$$\frac{du_1(t)}{dt} = u_1'(t) = -e^{-t}$$

Cần lưu ý rằng, đạo hàm thông thường của hàm $u_1(t)$ tại $t = 0$ là không tồn tại. Sự không liên tục của hàm $u_1(t)$ tại $t = 0$ (có bước nhảy) được xét đến trong thành phần thứ nhất của tích phân Duhamel.

$$u_2(t) = u_1(0^+)h(t) + \int_0^t \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\tau/2}\right)(-e^{-(t-\tau)})d\tau = \frac{1}{2}e^{-t/2}I(t).$$

Công thức (6.102):

$$u_2(t) = h(0^+)u_1(t) + \int_0^t u_1(t-\tau)h'(\tau)d\tau$$

Với việc áp dụng công thức (6.102), đạo hàm $h'(t)$ được xác định ở $t > 0$. Sự không liên tục của hàm $h(t)$ tại $t = 0$ được xét đến số hạng thứ nhất trong công thức (6.102).

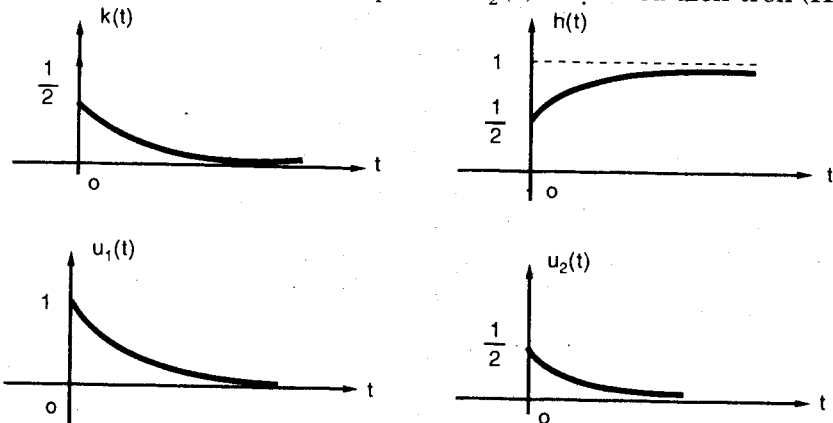
$$h'(t) = \frac{1}{4}e^{-t/2}$$

Khi thay giá trị $h'(t)$ vào tích phân ta được:

$$u_2(t) = h(0^+)u_1(t) + \int_0^t u_1(t-\tau)\frac{1}{4}e^{-\frac{-(t-\tau)}{2}}d\tau$$

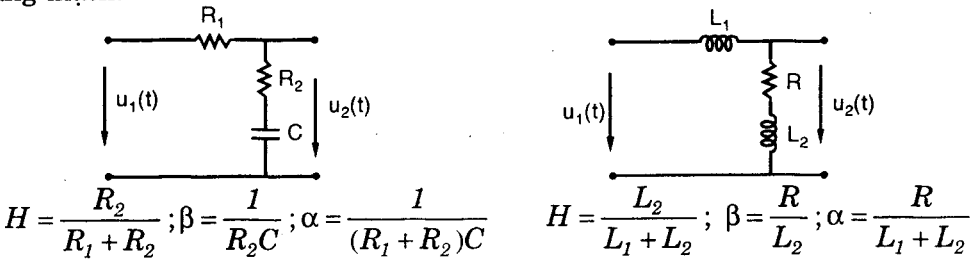
Sau khi tính ta có kết quả tương tự.

Đồ thị của các hàm $k(t)$, $h(t)$, $u_1(t)$ và $u_2(t)$ được biểu diễn trên (H.6.44).



Hình 6.44

Hệ thống có hàm truyền vừa xét trên đây, có sơ đồ mạch có thể thực hiện được như trên H.6.45, với các thông số mạch được ghi dưới hình vẽ của từng mạch:

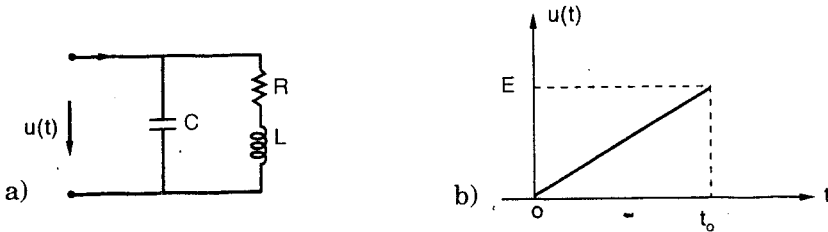


Hình 6.45

Có thể dễ dàng chứng minh được các bốn cực trên H.6.45 có các hàm truyền $K(s)$, $k(t)$ và $h(t)$ như trong ví dụ 6.16. Ở đây có thể nảy sinh câu hỏi, làm thế nào để tìm ra sơ đồ mạch tương ứng với một hàm truyền đã cho trước. Trong trường hợp đơn giản ta có thể dự đoán cấu trúc mạch, còn trong trường hợp phức tạp cần có kiến thức về lý thuyết tổng hợp mạch. Do giới hạn của nội dung giáo trình vấn đề tổng hợp mạch không được đề cập ở đây.

Hãy xét ví dụ cuối cùng để kết thúc phần ứng dụng phương pháp tích chập và tích phân Duhamel vào việc phân tích hệ thống TTD trong miền thời gian.

Ví dụ 6.17. Áp dụng phương pháp tích chập để tìm dòng điện chảy qua hai cực trên H.6.46a, khi nguồn tác động có dạng trên H.6.46b.



Hình 6.46

Giải. Hàm truyền đạt trong trường hợp hai cực là dẫn nạp của hai cực đó:

$$K(s) = Y(s) = sC + \frac{1}{sL + R}$$

$$k(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)] = C\delta'(t) + \frac{1}{L}e^{-\alpha t}1(t)$$

trong đó: $\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$ và $\alpha = \frac{R}{L}$

Nguồn tác động lên mạch có biểu thức:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{E}{t_0} t & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases}$$

Dòng qua hai cực (đáp ứng của hệ thống): $I(s) = K(s)X(s) = Y(s)U(s)$

Do đó
$$i(t) = k(t) * u(t) = Cu(t) * \delta'(t) + \frac{1}{L} u(t) * e^{-\alpha t}$$

• Thành phần thứ nhất của $i(t)$ là dòng điện chạy qua tụ điện dưới tác dụng của $u(t)$

$$i_c(t) = Cu(t) * \delta'(t)$$

Mặt khác ta có
$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

Do đó với điều kiện đầu bằng không $I_c(s) = sCU(s)$

Nếu: $u(t) = \delta(t)$; thì $I_c(s) = K(s) = sC$

Như vậy $k(t) = \mathcal{L}^{-1}[sC] = C\delta'(t)$ - là đáp ứng xung của tụ điện.

Có thể thấy rằng, điện áp $\delta(t)$ trên các cực của tụ điện có dạng xung cao, hẹp. Tại $t = 0$, tụ điện ngắn mạch, quả nó sẽ có dòng rất lớn để nạp cho tụ. Tại $t = 0^+$, nguồn áp ngắn mạch (vì điện áp bằng không), tụ điện phóng điện với dòng rất lớn, có chiều ngược với dòng nạp. Tại $t = 0$, ta nhận được hai xung dòng dương và âm, biểu thị dòng nạp và dòng phóng của tụ điện. Đạo hàm của hàm $\delta(t)$ được biểu thị như hàm δ có dấu ngược lại tại $t = 0$.

Dòng điện $i_c(t)$ chạy qua tụ điện có dạng

$$i_c(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ C \frac{E}{t_0} & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Dòng điện $i_c(t)$ tỉ lệ với đạo hàm của điện áp $u(t)$, như vậy tại $t = 0$ và $t = t_0$, dòng điện sẽ ra sao khi tại đó $u(t)$ không có đạo hàm? Tại $t = 0$ ta có thể giải thích dễ dàng, vì tại đó hàm $u(t)$ liên tục, nên giá trị của đạo hàm được lấy là giá trị bên phải, tức $i_c(0^+) = \frac{E}{t_0} C$. Khó khăn sẽ xuất

hiện tại điểm $t = t_0$, ở đó $u(t)$ có bước nhảy $u(t_0^+) - u(t_0^-) = -E$. Cần nhớ rằng, hàm $\delta(t)$ được định nghĩa bằng đạo hàm của hàm $1(t)$, nếu biểu diễn $u(t)$ dưới dạng
$$u(t) = u_1(t) - E1(t - t_0)$$

trong đó:
$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{E}{t_0}t & 0 \leq t \leq t_0 \\ E & t > t_0 \end{cases}$$

thì dòng $i_c(t)$ trong khoảng $0 < t < t_0$ sẽ có dạng:

$$i_c(t) = \frac{E}{t_0}C - EC\delta(t - t_0)$$

điều đó có nghĩa là, tại điểm không liên tục của điện áp $u(t)$, trong dòng điện sẽ xuất hiện hàm $\delta(t)$.

- Tính thành phần thứ hai của $i(t)$ là dòng điện chạy qua nhánh RL :

$$\begin{aligned} i_{RL}(t) &= \frac{1}{L}u(t) * e^{-\alpha t} = \frac{E}{Lt_0} \int_0^t \tau e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{E}{Rt_0}t - \frac{E}{\alpha Rt_0} + \frac{Ee^{-\alpha t}}{\alpha Rt_0}; \quad \alpha = \frac{R}{L} \end{aligned}$$

• Dòng điện qua hai cực $i(t) = i_c(t) + i_{RL}(t)$, được tính bằng tích chập của $k(t)$ và $u(t)$ trong các khoảng thời gian thay đổi của t như sau:

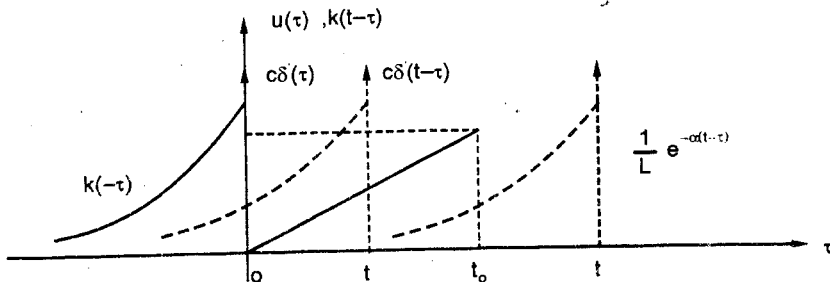
- Khi $t < 0$ $i(t) = 0$
- Khi $0 < t < t_0$ $i(t) = -\frac{E}{\alpha t_0 R} \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2}\right) + \frac{E}{Rt_0}t + \frac{E}{\alpha t_0 R}e^{-\alpha t} - EC\delta(t - t_0)$

trong đó $\rho^2 = L/C$

- Khi $t > t_0$ hàm dưới dấu tích phân không có hàm $\delta(t)$ nên

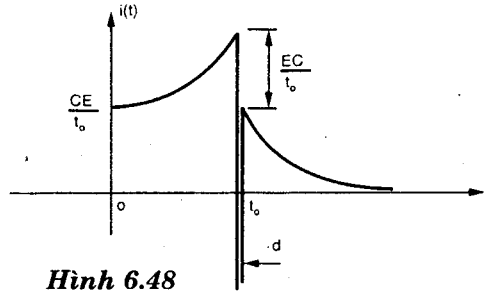
$$i(t) = \int_0^{t_0} \frac{E}{t_0 L} \tau e^{-(t-\tau)} d\tau = \frac{E}{\alpha t_0 R} e^{-\alpha t} \left[1 + (\alpha t_0 - 1)e^{\alpha t_0}\right]$$

Quá trình tính tích chập để xác định $i(t)$ được biểu diễn trên H.6.47.



Hình 6.47

Dòng điện $i(t)$ chạy qua hai cực trong ví dụ 6.17 có bước nhảy tại $t = 0$ và $t = t_0$ được biểu diễn trên H.6.48.



Hình 6.48

6.4 PHƯƠNG PHÁP BIẾN TRẠNG THÁI

Việc phân tích mạch *TTD* ở trạng thái xác lập điều hòa, một chiều, hay ở trạng thái quá độ cho tới đây được thực hiện bằng các phương pháp được nêu ở chương 3 (MẠCH ĐIỆN I). Đó là những phương pháp dòng điện nhánh, dòng điện vòng, điện thế nút ...

Trong trường hợp phải tìm các đáp ứng thời gian đối với kích thích bất kỳ, hoặc điểm cực và điểm không của hàm truyền, việc tính toán sẽ gặp khó khăn với mạch có số phương trình lớn. Khi đó người ta phải tìm đến sự trợ giúp của máy tính. Trong các phương pháp nêu trên, việc phân tích mạch bằng máy tính được tiến hành thuận lợi khi áp dụng phương pháp điện thế nút, trong một số trường hợp người ta phải dùng phương pháp biến trạng thái.

6.4.1 Phương trình trạng thái

Trong phương pháp biến trạng thái, mạch điện được mô tả bằng một hệ phương trình vi phân cấp một, đó là dạng thuận tiện cho việc tính toán bằng máy tính. Phương trình trạng thái có dạng sau :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (6.103)$$

$$Y = CX + DU + (D_1U \dots) \quad (6.104)$$

trong đó U - là vectơ cột m chiều biểu diễn m đầu vào (các nguồn độc lập).

Y - vectơ cột p chiều biểu diễn p đầu ra (các đáp ứng mà ta quan tâm).

X - vectơ cột n chiều biểu thị n biến độc lập.

Phương trình (6.103) được gọi là phương trình trạng thái, còn (6.104) là phương trình đáp ứng, hay phương trình ra của mạch. Các ma trận trong các phương trình có tên là :

A - Ma trận trạng thái, ma trận vuông cấp n .

B - Ma trận kích thích (ma trận vào) cấp $n \times m$.

C - Ma trận đáp ứng (ma trận ra) cấp $p \times n$.

D - Ma trận truyền đạt cấp $p \times m$.

Phương trình (6.103) được gọi là phương trình vi phân cấp một chuẩn tắc hay là phương trình trạng thái chuẩn tắc. Tập các biến x_1, x_2, \dots, x_n được gọi là biến trạng thái.

Ưu điểm của phương pháp biến trạng thái là ở chỗ, nó có thể được giải bằng các phương pháp số (giải bằng máy tính), do đó nó có thể khắc phục những khó khăn nói trên. Cụ thể là:

1- Để tìm đáp ứng thời gian, có thể dùng nhiều phương pháp để giải (6.103). Sau khi tìm được $x(t)$, sẽ xác định $y(t)$ từ phương trình (6.104). Bằng cách này sẽ tránh được khó khăn của phương pháp toán tử.

2- Việc tìm các điểm cực, điểm không của hàm truyền, dẫn đến việc tìm các giá trị riêng của các ma trận số thực bằng nhiều phương pháp.

Phương pháp biến trạng thái còn được sử dụng để phân tích mạch phi tuyến động, ở đó phương pháp toán tử không sử dụng được, còn phương pháp biến trạng thái không gặp khó khăn gì.

Phương pháp biến trạng thái cũng được dùng để phân tích quá độ của mạch TTD, sẽ được trình bày sau đây.

6.4.2 Phân tích QTGD bằng phương pháp biến trạng thái

Trạng thái mạch tại $t > t_0$ phụ thuộc vào trạng thái ban đầu $x(t_0)$ và nguồn tác động $u(t)$; nó được xác định bởi hàm:

$$\dot{X}(t) = F[x(t_0), u(t)] \quad (6.105)$$

Còn đáp ứng của mạch tại thời điểm bất kỳ là hàm:

$$y(t) = G[x(t_0), u(t)] \quad (6.106)$$

Các phương trình (6.105) (6.106) mô tả mạch TTD có dạng tương tự như các phương trình (6.103), (6.104). Các phương trình sau cho thấy rằng, trạng thái của một hệ thống tại thời điểm $t_1 > t_0$ sẽ được xác định bởi tập biến trạng thái tại thời điểm t_1 là: $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_n(t_1)$. Các biến này sẽ được xác định nếu biết được trạng thái của mạch ở t_0 và nguồn tác động lên mạch, do đó các đáp ứng của mạch cũng sẽ được xác định. Quá trình quá độ của mạch được xét trong khoảng thời gian $[0, \infty)$, do đó ta sẽ xét việc giải hệ phương trình trạng thái (6.103), (6.104) với các điều kiện đầu $X(0)$ và nguồn tác động $u(t)$, là các yếu tố ảnh hưởng đến các trạng thái của mạch và các đáp ứng mà ta quan tâm.

Ở đây sẽ hạn chế việc giải phương trình trạng thái bằng phương pháp giải tích, các phương pháp đó có thể tham khảo các sách viết về

phân tích mạch bằng máy tính (CAD).

Ta biết rằng nghiệm của phương trình mô tả mạch bao gồm hai thành phần: tự do (với nguồn tác động bằng không) và cưỡng bức (chỉ phụ thuộc nguồn tác động). Để giải hệ phương trình trạng thái ta tiến hành như sau:

Cho nguồn tác động $u(t) = 0$, ta sẽ có

$$\dot{X} = AX \quad (6.107)$$

suy ra
$$X_{qd} = e^{At} X(0) \quad (6.108)$$

trong đó $X(0)$ - là giá trị các biến trạng thái tại $t = 0$.

Với $u(t) \neq 0$ ta có nghiệm

$$X = e^{At} F(t) \quad (6.109)$$

suy ra
$$\dot{X} = Ae^{At} F(t) + e^{At} \dot{F}(t) = AX + e^{At} \dot{F}(t) \quad (6.110)$$

So sánh công thức (6.110) và (6.103), có thể thấy

$$e^{At} \dot{F}(t) = BU \quad (6.111)$$

trong đó
$$\dot{F}(t) = e^{-At} BU \quad (6.112)$$

suy ra
$$F(t) = \int_{-\infty}^t e^{-A\tau} BU d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} BU d\tau + \int_0^t e^{-A\tau} BU d\tau \quad (6.113)$$

So sánh các biểu thức (6.109) và (6.113) ta có

$$X = e^{At} \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} BU d\tau + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} BU d\tau \quad (6.114)$$

tại $t = 0$:
$$X(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-A\tau} BU d\tau \quad (6.115)$$

Chúng ta cần phải xác định hàm e^{At} . Áp dụng định lý Cayley - Hamilton ta có

$$f(A) = e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (6.116)$$

Gọi các giá trị riêng $\lambda_i (i = \overline{1, n})$ của ma trận A , là nghiệm của phương trình

$$\det[A - \lambda I] = 0 \quad (6.117)$$

$$f(\lambda) = e^{\lambda t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda^{n-1} \quad (6.118)$$

$$\left. \begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} \\ &\dots\dots\dots \\ e^{\lambda_n t} &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \dots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (6.119)$$

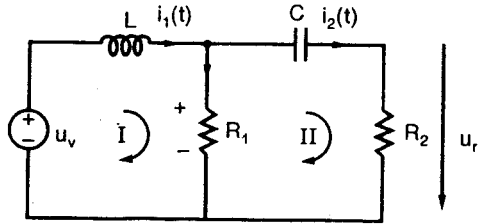
Từ biểu thức (6.119) xác định được các hệ số α_i , sau đó thay vào (6.118) sẽ tìm được hàm e^{At} , để từ đó có thể xác định các biến trạng thái X (6.114) và do đó sẽ tìm được các đáp ứng (6.116).

Ví dụ 6.18. Cho biết:

$$u_v = 3 \text{ [v]}; L = 1\text{[H]}; R_1 = 0,5\text{[\Omega]}$$

$$R_2 = 2\text{[\Omega]}; u_c(0^-) = 2\text{[V]}$$

$$i_L(0^-) = 4\text{[A]}; C = 1/3 \text{ [F]}$$



Hình 6.49

Hãy xác định điện áp trên điện trở R_1 .

Giải. Các biến trạng thái được chọn là dòng điện qua cuộn dây và điện áp trên tụ điện. Vectơ trạng thái tại một thời điểm bất kỳ:

$$X = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}; \quad \text{tại } t = 0: \quad X(0^-) = \begin{bmatrix} i_L(0^-) \\ u_c(0^-) \end{bmatrix}$$

Phương trình mạch viết theo định luật KII cho hai vòng:

$$L \frac{di_1(t)}{dt} + R_1 i_1 - R_1 i_2 = u_v$$

$$u_c + (R_1 + R_2) i_2 - R_1 i_1 = 0$$

Với $i_1(t) = i_L(t)$. Thay $i_2 = C \frac{du_c(t)}{dt}$ vào hai phương trình, sẽ có được

phương trình của các biến trạng thái:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L(t) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_c + u_v$$

$$C \frac{du_c}{dt} = \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) i_L(t) - \frac{1}{R_1 + R_2} u_c(t)$$

Thay các giá trị phần tử bằng số ta có:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -0,4i_L(t) - 0,2u_c(t) + u_v$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} = 0,6i_L(t) - 1,2u_c(t)$$

$$u_{R1} = 0,4i_L(t) + 0,2u_c(t)$$

Các ma trận A , B , C , D của mạch trên H.6.49 là:

$$A = \begin{bmatrix} -0,4 & -0,2 \\ 0,6 & -1,2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0,4 \quad 0,2] \quad D = [0 \quad 0]$$

Phương trình trạng thái của mạch:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 & -0,2 \\ 0,6 & -1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hãy xác định nghiệm của phương trình trạng thái với kích thích bằng không. Và với điều kiện đầu đã cho, đó là nghiệm của phương trình:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 & -0,2 \\ 0,6 & -1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_c \end{bmatrix}; \quad \text{với} \quad \begin{bmatrix} i_L(0^-) \\ u_c(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kết quả chính là thành phần tự do (quá độ):

$$\begin{bmatrix} i_{Lqd}(t) \\ u_{cqd}(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} i_L(0^-) \\ u_c(0^-) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Xác định giá trị riêng của ma trận A là nghiệm của phương trình:

$$\det[A - \lambda I] = \begin{vmatrix} -0,4 - \lambda & -0,2 \\ 0,6 & -1,2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Suy ra: $\lambda^2 + 1,6\lambda + 0,6 = 0$; $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -0,6$

Bây giờ hãy xác định hàm e^{At}

$$f(A) = e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A$$

$$f(X) = e^{Xt} = \alpha_0(t) + \alpha_1(y)\lambda$$

Thay các giá trị của λ :

$$e^{-t} = \alpha_0(t) - \alpha_1(t)$$

$$e^{-0,6t} = \alpha_0(t) - 0,6\alpha_1(t)$$

suy ra: $\alpha_0(t) = -1,5e^{-t} + 2,5e^{-0,6t}$; $\alpha_1(t) = -2,5e^{-t} + 2,5e^{-0,6t}$

ta có $e^{At} = (-1,5e^{-t} + 2,5e^{-0,6t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (-2,5e^{-t} + 2,5e^{-0,6t}) \begin{bmatrix} -0,4 & -0,2 \\ 0,6 & -1,2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -0,5e^{-t} + 1,5e^{-0,6t} & 0,5e^{-t} - 0,5e^{-0,6t} \\ -1,5e^{-t} + 1,5e^{-0,6t} & 1,5e^{-t} - 0,5e^{-0,6t} \end{bmatrix}$$

Kết quả $\begin{bmatrix} i_{Lqd}(t) \\ u_{cqd}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 5e^{-0,6t} \\ -3e^{-t} + 5e^{-0,6t} \end{bmatrix}$

Hãy tính thành phần xác lập với điều kiện đầu hàng bằng không ($X(0^-) = 0$)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_{Lx1}(t) \\ u_{cx1}(t) \end{bmatrix} &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau = \\ &= 3 \int_0^t \begin{bmatrix} -0,5e^{-(t-\tau)} & +1,5e^{-0,6(t-\tau)} & 0,5e^{-(t-\tau)} & -0,5e^{-0,5(t-\tau)} \\ -1,5e^{-(t-\tau)} & +1,5e^{-0,6(t-\tau)} & 1,5e^{-(t-\tau)} & -0,5e^{-0,6(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} I(\tau) d\tau. \\ &= 3 \int_0^t \begin{bmatrix} -0,5e^{-(t-\tau)} & +1,5e^{-0,6(t-\tau)} \\ -1,5e^{-(t-\tau)} & +1,5e^{-0,6(t-\tau)} \end{bmatrix} dt = \\ &= 3 \begin{bmatrix} -0,5 & +2,5 & +0,5e^{-t} & -2,5e^{-0,6t} \\ -1,5 & +2,5 & +1,5e^{-t} & -2,5e^{-0,6t} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 & +0,5e^{-t} & -2,5e^{-0,6t} \\ 1 & +1,5e^{-t} & -2,5e^{-0,6t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nghiệm đầy đủ của phương trình trạng thái

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i_{Lqd}(t) & +i_{Lxl}(t) \\ u_{Cqd}(t) & +u_{Cxl}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & +0,5e^{-t} & -2,5e^{-0,6t} \\ 3 & +1,5e^{-t} & -2,5e^{-0,6t} \end{bmatrix} \\ u_{Rl}(t) &= [0,4 \quad 0,2] \begin{bmatrix} 6 & +0,5e^{-t} & -2,5e^{-0,6t} \\ 3 & +1,5e^{-t} & -2,5e^{-0,6t} \end{bmatrix} = [3 \quad +0,5e^{-t} \quad -1,5e^{-0,6t}] \end{aligned}$$

Từ ví dụ trên đây chúng ta chứng tỏ rằng, có thể áp dụng phương pháp biến trạng thái để phân tích quá trình quá độ trong mạch, tuy nhiên nó thích hợp trong trường hợp sử dụng máy tính, vì khối lượng tính toán lớn.

PHÂN TÍCH MẠCH TRONG MIỀN TẦN SỐ

Trong MẠCH ĐIỆN I ta đã phân tích mạch ở trạng thái xác lập một chiều hoặc điều hòa. Khi đó đáp ứng trên mạch cũng là một chiều hoặc điều hòa cùng tần số. Trong thực tế nguồn tác động (nguồn tín hiệu) không phải đều là điều hòa, mà nó có thể có hình dạng bất kỳ, bao gồm nhiều thành phần tần số. Khi đó đáp ứng của mạch cũng là các quá trình nhiều tần số. Việc phân tích mạch với nguồn tác động bất kỳ được gọi là phân tích mạch trong miền tần số, bởi vì ta chỉ chú ý đến cấu trúc tần số của nguồn tác động và đáp ứng của mạch đối với các thành phần tần số đó. Để phân tích mạch trong miền tần số, ta phải sử dụng chuỗi Fourier và tích phân Fourier, đó là công cụ toán chủ yếu để phân tích phổ (tần số) của tín hiệu. Tín hiệu tác động lên mạch được chia thành hai loại:

- Tín hiệu tuần hoàn.
- Tín hiệu không tuần hoàn.

Để phân tích phổ của tín hiệu tuần hoàn người ta dùng chuỗi Fourier, còn với tín hiệu không tuần hoàn người ta dùng biến đổi tích phân Fourier. Vấn đề phân tích phổ là một trong những nội dung quan trọng của môn học lý thuyết tín hiệu, ở đây ta chỉ áp dụng nó vào việc phân tích mạch.

Chúng ta sẽ trình bày chương này theo công cụ toán ứng dụng để biểu diễn phổ của tín hiệu, hay là biểu diễn tín hiệu trong miền tần số.

7.1 PHƯƠNG PHÁP CHUỖI FOURIER

7.1.1 Biểu diễn các quá trình tuần hoàn

Một tín hiệu được gọi là tuần hoàn nếu nó thỏa mãn điều kiện:

$$x(t) = x(t + nT) \quad (7.1)$$

trong đó n - là số nguyên; T - là chu kỳ lặp lại giá trị của tín hiệu. Tần số tương ứng với chu kỳ T được gọi là tần số cơ bản của tín hiệu tuần hoàn, được xác định theo biểu thức sau:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ [rad/s]} \quad (7.2)$$

Một tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ T , thỏa mãn điều kiện Dirichlet sẽ được biểu diễn bằng chuỗi Fourier. Chuỗi Fourier có hai loại; chuỗi Fourier lượng giác với tập hàm cơ sở trực giao là các hàm sin; cosin. và chuỗi Fourier phức với tập hàm cơ sở trực giao là các hàm điều hòa dạng mũ, mà chúng ta sẽ trình bày sau đây

1- Chuỗi Fourier lượng giác

Chuỗi Fourier lượng giác biểu diễn tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ có dạng:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (7.3)$$

Các hệ số: a_0, a_n, b_n - được gọi là các hệ số khai triển chuỗi được xác định theo công thức sau:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

trong công thức (7.4); n - là số nguyên; t_0 - là một điểm bất kỳ trên thang thời gian; T và ω_0 - là các đại lượng đã nói ở trên.

Như có thể thấy từ (7.4), thành phần a_0 không phụ thuộc thời gian, nó biểu thị trị trung bình của tín hiệu $x(t)$, cũng chính là thành phần một chiều của tín hiệu. Các hệ số: a_n, b_n - là biên độ của các thành phần cosin và sin tương ứng với các tần số $n\omega_0$. Như vậy, tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ được biểu diễn bằng tổng của thành phần một chiều và vô hạn các thành phần điều hòa có tần số bằng n lần tần số cơ bản.

Trong các ứng dụng thực tế, đặc biệt là trong chương này, ta sẽ sử dụng chuỗi Fourier lượng giác với chỉ một hàm sin hoặc cosin; khi biến đổi tổng sau

$$a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t = C_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (7.5)$$

$$= C_n \cos(n\omega_0 t + \psi_n) \quad (7.6)$$

trong đó

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \psi_n &= -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} \\ \varphi_n &= \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n} \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Như vậy, ta có thể biểu diễn tín hiệu tuần hoàn dưới dạng tiện lợi cho việc phân tích mạch

$$x(t) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_o t + \psi_n) \quad (7.8)$$

hay

$$x(t) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_o t + \varphi_n) \quad (7.9)$$

trong đó $C_o = a_o$

Tổng quát hơn ta có thể viết

$$x(t) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t) \quad (7.10)$$

Biểu thức (7.10) cho thấy việc biểu diễn tín hiệu tuần hoàn bằng chuỗi Fourier, là phân tích tín hiệu tuần hoàn thành tổng của thành phần một chiều C_o và vô hạn các thành phần điều hòa (còn gọi là các thành phần hài) có dạng

$$x_n(t) = C_n \cos(n\omega_o t + \psi_n) \quad (7.11a)$$

hay

$$x_n(t) = C_n \sin(n\omega_o t + \varphi_n) \quad (7.11b)$$

Các thành phần hài, là các dao động điều hòa có biên độ C_n , tần số $n\omega_o$ và góc pha đầu φ_n hay ψ_n . Khi $n = 1$ ta có

$$x_1(t) = C_1 \cos(\omega_o t + \psi_1) \quad (7.12a)$$

hay

$$x_1(t) = C_1 \sin(\omega_o t + \varphi_1) \quad (7.12b)$$

$x_1(t)$ được gọi là thành phần cơ bản, nó có tần số bằng tần số của tín hiệu tuần hoàn được xác định theo (7.2).

2- Chuỗi Fourier phức

Tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ cũng có thể được biểu diễn bằng chuỗi phức Fourier có biểu thức sau

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n e^{jn\omega_0 t} \quad (7.13)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

trong đó \dot{X}_n - là hệ số khai triển chuỗi Fourier được xác định theo công thức

$$\dot{X}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (7.14)$$

Với tín hiệu $x(t)$ là hàm thực ta luôn có

$$\left| \dot{X}_n \right| = \left| \dot{X}_{-n} \right| \quad (7.15a)$$

$$\text{arg } \dot{X}_n = -\text{arg } \dot{X}_{-n} \quad (7.15b)$$

Có thể chứng minh được mối quan hệ giữa chuỗi lượng giác, chuỗi phức với chuỗi chỉ một hàm cosin (7.8) hoặc một hàm sin (7.9) như sau

$$X_o = C_o = a_o \quad (7.16)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 \left| \dot{X}_n \right| \quad (7.17)$$

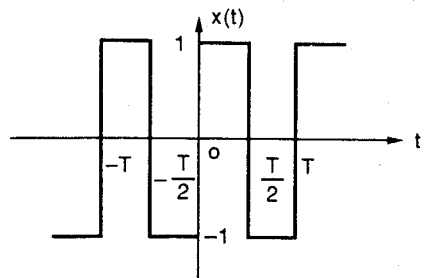
$$\dot{X}_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad (7.18)$$

$$\text{arg } \dot{X}_n = \psi_n = \varphi_n + \frac{\pi}{2} \quad (7.19)$$

Từ biểu thức (7.13) có thể thấy rằng, chuỗi phức Fourier bao gồm thành phần một chiều ứng với $n = 0$ và hai chuỗi vô hạn các hàm điều hòa liên hợp phức ứng với các cặp $\pm n$. Các cặp hàm điều hòa phức có biên độ bằng nhau còn argument trái dấu nhau. Việc biểu diễn biên độ và argument của các hàm điều hòa phức trên thang tần số sẽ cho ta phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu tuần hoàn. Bởi vì n là các số nguyên, nên phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu tuần hoàn là phổ vạch (rời rạc).

Sau đây sẽ xét một ví dụ về cách biểu diễn tín hiệu tuần hoàn bằng chuỗi Fourier.

Ví dụ 7.1. Cho tín hiệu tuần hoàn là dãy xung vuông góc trên H.7.1. Hãy xác định chuỗi lượng giác và chuỗi phức Fourier.



Hình 7.1

Tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ có biểu thức giải tích trong một chu kỳ

$$x(t) = \begin{cases} -1 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Có thể nhận thấy tín hiệu $x(t)$ là hàm lẻ, do đó trị trung bình và các hệ số a_n sẽ bằng không, tức là

$$a_n = 0 \text{ với } n = 0, 1, 2 \dots$$

Hãy xác định hệ số b_n

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1) \sin n\omega_0 t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_0 t dt = \frac{4}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ chẵn} \\ \frac{4}{n\pi} & n \text{ lẻ; } n = 2k+1, k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Chuỗi Fourier lượng giác của tín hiệu trên H.7.1 có dạng

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin n\omega_0 t = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin \omega_0 t}{1} + \frac{\sin 3\omega_0 t}{3} + \frac{\sin 5\omega_0 t}{5} + \dots \right]$$

$$n = 2k+1, k = 0, 1, 2 \dots$$

Từ kết quả cho thấy, tín hiệu trên H.7.1 là hàm lẻ, nên trong chuỗi Fourier của nó cũng chỉ chứa các hài lẻ.

Nếu bây giờ dịch chuyển tín hiệu trên thang thời gian một khoảng t_0 , ta sẽ có tín hiệu mới

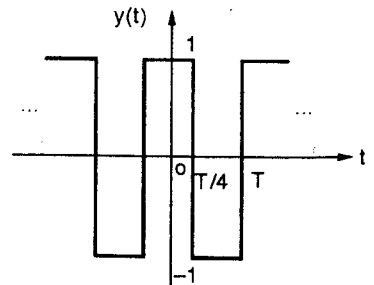
$$y(t) = x(t-t_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0(t-t_0) + b_n \sin n\omega_0(t-t_0)]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(\omega_0 t - \alpha) + b_n \sin n(\omega_0 t - \alpha)]$$

trong đó: $\alpha = \omega_0 t_0$ - là độ dịch pha của tín hiệu.

Ta thấy rằng, khi tín hiệu dịch chuyển trên thang thời gian, các hệ số khai triển Fourier của nó không thay đổi, nó chỉ thay đổi pha một lượng $\alpha = \omega_0 t_0$.

Nếu tín hiệu trên H.7.1 bị dịch chuyển một đoạn: $t_0 = -\pi/4$, để thành tín hiệu $y(t)$ trên H.7.2, thì pha của nó sẽ thay đổi một



Hình 7.2

$$\text{lượng } \alpha = \frac{2\pi}{T} \left(-\frac{T}{4} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

Chuỗi Fourier của tín hiệu $y(t)$ trên (H.7.2) được suy ra dễ dàng từ chuỗi Fourier của tín hiệu $x(t)$ trên H.7.1:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \sin n\omega_0 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \cos n\omega_0 t$$

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos \omega_0 t}{1} + \frac{\cos 3\omega_0 t}{3} + \frac{\cos 5\omega_0 t}{5} + \dots \right]$$

Rõ ràng, tín hiệu $y(t)$ chỉ gồm các thành phần chẵn vì nó là hàm chẵn theo thời gian.

Để tìm chuỗi phức Fourier, có thể tính hệ số khai triển X_n theo các hệ số khai triển chuỗi lượng giác vừa tính ở trên theo công thức (7.18). Ở đây sẽ xác định theo công thức tính trực tiếp (7.14)

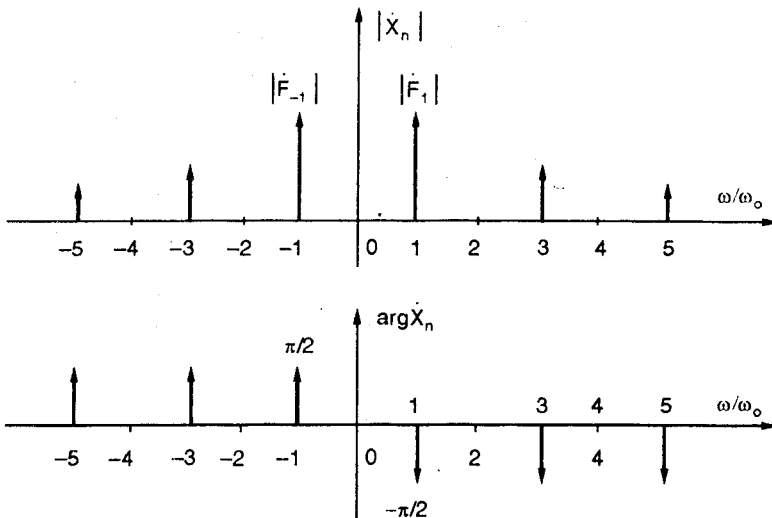
$$\dot{X}_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 (-1)e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-jn\omega_0 t} dt \right] = \frac{1}{jn\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$\dot{X}_n = \begin{cases} 0 & n \text{ chẵn} \\ -j \frac{2}{n\pi} & n \text{ lẻ; } n = 2k+1, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Chuỗi phức Fourier của tín hiệu $x(t)$ (H.7.1) chỉ chứa các hàm lẻ

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -j \frac{2}{n\pi} e^{jn\omega_0 t}; n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$$

Phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu $x(t)$ (H.7.3)



Hình 7.3

$$\left| \dot{X}_n \right| = \left| \frac{2}{n\pi} \right|; \quad \psi_n(\omega) = \arg \dot{X}_n = -\frac{\pi}{2}$$

3- Dạng thức Parseval

Giả thiết có hai hàm tuần hoàn cùng tần số được biểu diễn bằng chuỗi phức Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{Y}_m e^{jm\omega_0 t}$$

Trị trung bình tích của hai tín hiệu được xác định như sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t)dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n e^{jn\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{Y}_m e^{jm\omega_0 t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{Y}_m \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(n+m)\omega_0 t} dt \end{aligned} \quad (7.20)$$

Bởi vì

$$\int_0^T e^{j(n+m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{khi } n+m \neq 0 \\ T & \text{khi } n+m=0 (n=-m) \end{cases} \quad (7.21)$$

$$\text{Do đó} \quad \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n \dot{Y}_{-n} \quad (7.22)$$

Dựa vào (7.15) ta có

$$\dot{Y}_{-n} = \dot{Y}_n^* \quad (7.23)$$

Biểu thức (7.22) khi chú ý đến (7.23) sẽ là

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{X}_n \dot{Y}_n^* \quad (7.24)$$

Biểu thức (7.24) được gọi là dạng thức Parseval của tín hiệu tuần hoàn, nó được phát biểu như sau: *Trị trung bình của tích hai tín hiệu tuần hoàn cùng chu kỳ bằng tổng vô hạn các tích của hệ số khai triển chuỗi Fourier phức của tín hiệu thứ nhất với liên hợp phức của hệ số khai triển Fourier của tín hiệu thứ hai.*

Trường hợp đặc biệt khi: $x(t) = y(t)$; ta có: $\dot{X}_n = \dot{Y}_n$, trị trung bình bình phương của tín hiệu tuần hoàn sẽ bằng tổng vô hạn các bình phương

modul của hệ số khai triển chuỗi Fourier, tức là

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \dot{X}_n \right|^2 \quad (7.25)$$

Biểu thức (7.25) là đẳng thức Parseval, được ứng dụng để xác định trị hiệu dụng và công suất của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số, qua các hệ số khai triển Fourier. Việc xác định công suất của tín hiệu tuần hoàn sẽ xét sau, bây giờ ta sẽ áp dụng đẳng thức Parseval để tính trị hiệu dụng của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số.

Theo định nghĩa, trị hiệu dụng của tín hiệu tuần hoàn bằng căn bậc hai của trị trung bình bình phương

$$X_{hd} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (7.26)$$

Trong miền tần số

$$\begin{aligned} X_{hd} &= \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \dot{X}_n \right|^2} = \sqrt{X_o^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| \dot{X}_n \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \dot{X}_n \right|^2} \\ &= \sqrt{X_o^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \dot{X}_n \right|^2} = \sqrt{X_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \left| \dot{X}_n \right|^2}{\sqrt{2}} \right)^2} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Ta biết rằng: $C_n = 2 \left| \dot{X}_n \right|$

Khi ký hiệu trị hiệu dụng của thành phần hài thứ n là

$$X_{hdn} = \frac{C_n}{\sqrt{2}} \quad (7.28)$$

Trị hiệu dụng của tín hiệu được xác định trong miền tần số (7.27) với ký hiệu (7.28)

$$X_{hd} = \sqrt{X_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_n}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{X_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} X_{hdn}^2} \quad (7.29)$$

Như có thể thấy từ biểu thức (7.29), trị hiệu dụng của một tín hiệu tuần hoàn bằng căn bậc hai của tổng bình phương thành phần một chiều và bình phương các trị hiệu dụng hài thành phần.

4- Các hệ số đặc trưng cho quá trình tuần hoàn

1- *Hệ số méo dạng*: như đã phân tích ở trên, một hàm tuần hoàn có thể biểu diễn bằng tổng số vô hạn của các thành phần điều hòa có tần số là bội n của tần số cơ bản và thành phần một chiều. Tín hiệu tuần hoàn do đó có thể được coi là hàm biến dạng của hàm điều hòa cùng tần số. Để đặc trưng cho sự biến dạng đó, người ta đưa ra hệ số méo dạng được định nghĩa như sau

$$k = \frac{X_{hd1}}{\sqrt{X_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} X_{hdn}^2}} \quad (7.30)$$

Như vậy, hệ số méo dạng theo định nghĩa bằng tỉ số giữa trị hiệu dụng của thành phần hài cơ bản (hài bậc nhất) với trị hiệu dụng của quá trình tuần hoàn. Hệ số méo dạng lấy giá trị trong khoảng $0 \leq k \leq 1$, đối với quá trình điều hòa $k = 1$.

2- *Hàm lượng hài*: một hệ số khác đặc trưng cho quá trình tuần hoàn là hệ số hàm lượng hài thứ n , theo định nghĩa là tỉ số giữa trị hiệu dụng của hài thứ n với trị hiệu dụng của quá trình tuần hoàn

$$\eta_n = \frac{X_{hdn}}{\sqrt{X_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} X_{hdn}^2}} \quad (7.31)$$

Hệ số này cũng lấy giá trị trong khoảng $[0,1]$, dễ dàng chứng minh được

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^2 = 1 \quad (7.32)$$

Đôi khi người ta cũng xác định hệ số hàm lượng hài theo biểu thức sau

$$\eta_n = \frac{X_{hdn}}{X_{hd1}} \quad (7.33)$$

η_n trong biểu thức (7.33) bằng tỉ số giữa trị hiệu dụng của hài thứ n với trị hiệu dụng của hài cơ bản.

Để đánh giá giá trị của các hài bậc cao so với hài cơ bản, người ta còn đưa ra hệ số hàm lượng sóng hài

$$h = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} X_{hdn}^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} X_{hdn}^2}} \quad (7.34)$$

Hệ số sóng hài h sẽ bằng đơn vị khi quá trình tuần hoàn không chứa thành phần cơ bản.

3- Hệ số đỉnh, hệ số dạng.

Trong một số phân tích tín hiệu, người ta còn đưa ra các hệ số đặc trưng cho quá trình tuần hoàn như sau

• Hệ số đỉnh là tỉ số giữa giá trị cực đại $X_{\max} = \max[x(t)]$ với giá trị hiệu dụng của quá trình tuần hoàn $x(t)$

$$k_d = \frac{X_{\max}}{X_{hd}} \quad (7.35)$$

• Hệ số dạng theo định nghĩa là tỉ số giữa giá trị hiệu dụng và trị trung bình của quá trình tuần hoàn

$$k_d = \frac{X_{hd}}{X_o} \quad (7.36)$$

Hệ số này còn được định nghĩa bằng tỉ số giữa trị hiệu dụng của quá trình tuần hoàn và trị trung bình của trị tuyệt đối của nó

$$k_d = \frac{X_{hd}}{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)| dt} \quad (7.37)$$

Với cách định nghĩa hệ số đỉnh (7.35) và hệ số dạng (7.37), ta có thể xác định chúng đối với quá trình điều hòa

$$k_d = \frac{X_m}{X_m / \sqrt{2}} = \sqrt{2}; \quad k_d = \frac{X_m / \sqrt{2}}{X_m (2/\pi)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$$

trong đó X_m - là biên độ của quá trình điều hòa.

7.1.2 Phân tích mạch TTD ở trạng thái xác lập tuần hoàn không sin

Trong mạch TTD có nguồn tác động là một quá trình tuần hoàn, thì ở trạng thái xác lập của mạch, đáp ứng trên các phần tử mạch (dòng điện hay điện áp) cũng là các quá trình tuần hoàn có cùng tần số cơ bản. Để tìm đáp ứng của mạch, ta áp dụng phương pháp chuỗi Fourier, biểu diễn quá trình tuần hoàn bằng chuỗi lượng giác có dạng (7.8) hoặc (7.9); và sau đó áp dụng các phương pháp phân tích mạch đã nêu trong MẠCH ĐIỆN I. Có thể nêu sau đây các bước phân tích mạch xác lập với nguồn tác động tuần hoàn.

1- Áp dụng phương pháp biên độ phức, biểu diễn quá trình tuần hoàn

Nguồn tác động lên mạch là các nguồn áp hoặc nguồn dòng, là các quá trình tuần hoàn, được biểu diễn bằng chuỗi Fourier gồm thành phần một chiều và vô hạn các hàm điều hòa. Ví dụ, một nguồn áp lý tưởng có chuỗi Fourier lượng giác sau đây

$$e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega_0 t + \psi_1) + E_2 \cos(2\omega_0 t + \psi_2) + \dots \quad (7.38)$$

Các thành phần điều hòa sẽ được biểu diễn bằng biên độ phức

$$\dot{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{E}_n \quad (7.39)$$

trong đó
$$\dot{E}_n = \left| \dot{E}_n \right| e^{j\psi_n} \quad (7.40)$$

2- Áp dụng nguyên lý xếp chồng để tính đáp ứng của mạch với thành phần một chiều và các thành phần điều hòa

Bởi vì các thành phần điều hòa có tần số bằng bội n của tần số cơ bản, nên trở kháng của các phần tử mạch sẽ phụ thuộc vào các tần số đó, chúng được phức hóa như sau

$$Z_L = jn\omega_0 L; Z_C = \frac{1}{jn\omega_0 C}; Z_M = jn\omega_0 M; Z_R = R \quad (7.41)$$

Đối với thành phần một chiều, mạch chỉ còn các phần tử điện trở, vì ở xác lập một chiều cuộn dây ngắn mạch $Z_L = 0$ và tụ điện hở mạch $Z_C = \infty$.

Có thể minh họa bằng việc xét các mạch RLC đơn giản sau đây

1- Mạch RL nối tiếp: trở kháng phức của nhánh RL

$$Z_{nL} = R + jn\omega_0 L = \sqrt{R^2 + (n\omega_0 L)^2} \angle \varphi_n$$

Dòng điện trong mạch ứng với hài thứ n được xác định bằng phương pháp biên độ phức

$$\dot{I}_{nL} = \frac{\dot{E}_n}{Z_{nL}} = \frac{\left| \dot{E}_n \right|}{\sqrt{R^2 + (n\omega_0 L)^2}} \angle \psi_n - \varphi_n$$

trong đó $\psi_n = \arg \dot{E}_n; \varphi_n = \arg Z_{nL}$

thành phần một chiều $I_0 = \frac{E_0}{R}$

Dòng điện qua mạch RL bằng tổng các dòng tức thời

$$i(t) = I_o + \sum_{n=1}^{\infty} I_m \cos(n\omega_o t + \psi_{in})$$

trong đó

$$I_m = \frac{|\dot{E}_n|}{\sqrt{R^2 + (n\omega_o L)^2}}$$

$$\psi_{in} = \psi_n - \varphi_n$$

2- Mạch RC nối tiếp: trở kháng phức của nhánh RC nối tiếp

$$Z_{nc} = R + \frac{1}{jn\omega_o C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(n\omega_o C)^2}} \angle \varphi_n$$

Dòng điện qua mạch RC ứng với hài thứ n

$$\dot{I}_{nc} = \frac{\dot{E}_n}{Z_{nc}} = \frac{|\dot{E}_n|}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(n\omega_o C)^2}}} \angle \psi_n - \varphi_n$$

$$I_o = 0$$

Dòng điện qua mạch RC nối tiếp

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_m \cos(n\omega_o t + \psi_{in})$$

trong đó

$$I_m = \frac{|\dot{E}_n|}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(n\omega_o C)^2}}}; \psi_{in} = \psi_n - \varphi_n$$

3- Với mạch RLC nối tiếp: trở kháng phức của nhánh

$$Z_n = R + j \left(n\omega_o L - \frac{1}{n\omega_o C} \right) = |Z_n| e^{j\varphi_n}$$

trong đó

$$|Z_n| = \sqrt{R^2 + \left(n\omega_o L - \frac{1}{n\omega_o C} \right)^2}$$

$$\varphi_n = \arg Z_n = \arctg \frac{n\omega_o L - \frac{1}{n\omega_o C}}{R}$$

Dòng điện qua mạch RLC nối tiếp tương ứng với các thành phần hài thứ n

$$\dot{I}_n = \frac{\dot{E}_n}{Z_n} = \frac{|\dot{E}|}{\sqrt{R^2 + \left(n\omega_o L - \frac{1}{n\omega_o C}\right)^2}} \quad \angle \psi_n - \phi_n$$

Thành phần dòng một chiều: $I_o = 0$

Dòng điện tức thời qua mạch RLC

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_m \cos(n\omega_o t + \psi_{in})$$

trong đó

$$I_m = \frac{|\dot{E}_n|}{\sqrt{R^2 + \left(n\omega_o L - \frac{1}{n\omega_o C}\right)^2}}; \quad \psi_{in} = \psi_n - \phi_n$$

Từ những phân tích trên, ta có thể đưa ra các nhận xét sau đây:

- Với mạch TTD có nguồn tác động tuần hoàn, có thể áp dụng tất cả các phương pháp phân tích như đối với mạch xác lập điều hòa; trừ phương pháp đồ thị vectơ.

- Giá trị tức thời của đáp ứng trên một nhánh bất kỳ đối với nguồn tác động tuần hoàn, bằng tổng các đáp ứng thành phần.

- Giá trị hiệu dụng của dòng điện hay điện áp trên một nhánh bất kỳ, bằng căn bậc hai của tổng bình phương các giá trị hiệu dụng thành phần.

- Trở kháng của phần tử hai cực là một hàm của tần số, do đó với mạch RLC có thể xảy ra cộng hưởng đối với hài thứ n nào đó, khi thỏa mãn điều kiện:

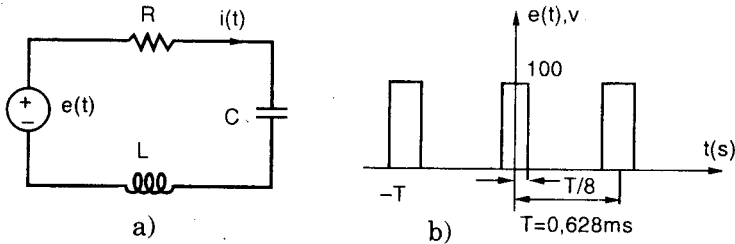
$$n\omega_o L - \frac{1}{n\omega_o C} = 0 \quad (7.42a)$$

hay là

$$n\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.42b)$$

Sau đây là một ví dụ cụ thể về phân tích mạch trong miền tần số.

Ví dụ 7.2. Xét mạch RLC nối tiếp trên H.7.4a và nguồn tác động là dây xung vuông góc trên H.7.4b.



Hình 7.4

- 1- Hãy xác định và vẽ phổ biên độ của nguồn tác động $e(t)$ và đáp ứng của mạch $i(t)$
- 2- Tìm giá trị n nhỏ nhất, để sao cho các hài dòng điện ứng với n lớn hơn sẽ bị suy giảm so với hài điện áp.

Cho biết $R = 100(\Omega)$; $L = 0,01(H)$; $C = 250(nF)$.

Giải. Tần số cơ bản của tín hiệu tuần hoàn: $\omega_o = \frac{2\pi}{T} = 10^4 (rad/s)$

Tín hiệu $e(t)$ là hàm chẵn, do đó khai triển Fourier của nó sẽ chỉ gồm thành phần một chiều và các thành phần chẵn cosin. Theo các công thức (7.4); (7.7) ta có

$$E_o = a_o = \frac{100.T/4}{T} = \frac{100}{4} = 25(V)$$

$$E_n = C_n = a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/8} e(t) \cos(n\omega_o t) dt = \frac{400}{T} \int_0^{T/8} \cos(n\omega_o t) dt = \frac{200}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) (V)$$

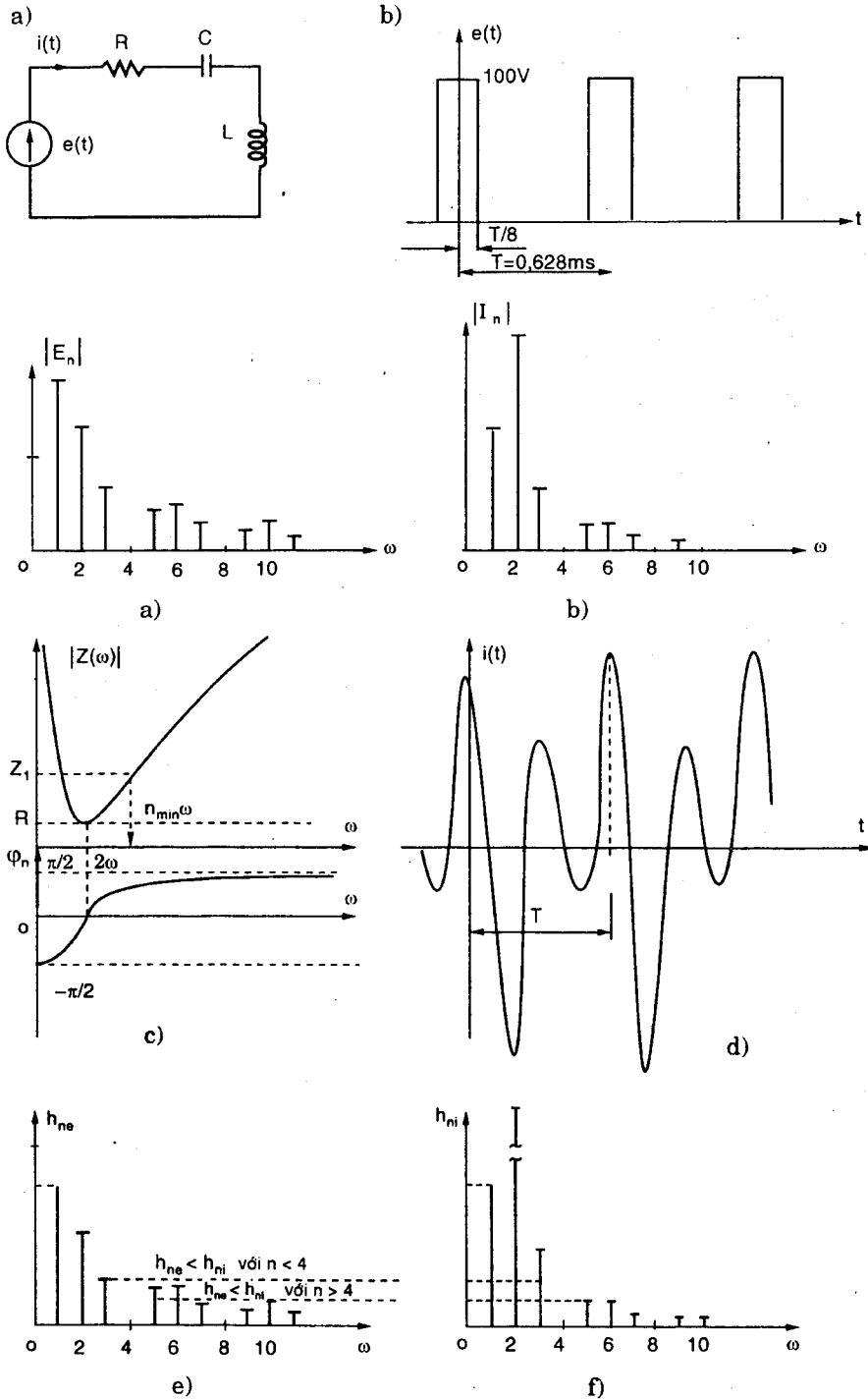
Chuỗi Fourier lượng giác theo (7.8) của nguồn $e(t)$

$$e(t) = 200 \left[\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi} \cos(n\omega_o t) \right] (V)$$

Có thể thấy rằng, các hài thứ n là bội của 4 đều bằng không, bởi vì: $\sin(n(\pi/4)) = 0$. Bây giờ, hãy áp dụng nguyên lý xếp chồng để tính các thành phần dòng điện trên mạch.

Với thành phần một chiều của nguồn: ($n = 0$) $Z_o = \infty$; tụ điện hở mạch; dòng một chiều $I_o = 0$.

Đối với các thành phần xoay chiều, ta áp dụng phương pháp biên độ phức để tìm các hài dòng điện. Với mạch RLC nối tiếp, hài dòng điện thứ n được xác định như sau:



Hình 7.5

$$\dot{I}_n = \frac{\dot{E}_n}{Z_n} = \frac{\left| \dot{E}_n \right| \angle \psi_n}{\left| Z_n \right| \angle \varphi_n} = \left| \dot{I}_n \right| \angle \psi_{in}$$

trong đó

$$\dot{E}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200 \sin(n\pi/4)}{n\pi}; \quad Z_n = R + j \left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C} \right)$$

$$\left| Z_n \right| = \sqrt{R^2 + \left(n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C} \right)^2}; \quad \varphi_n = \arctg \frac{n\omega_0 L - \frac{1}{n\omega_0 C}}{R}$$

Thay giá trị các thông số R, L, C theo giả thiết ta được

$$\left| Z_n \right| = \frac{100}{n} \sqrt{n^2 + (n^2 - 4)^2}; \quad \varphi_n = \arctg \frac{n^2 - 4}{n}$$

Quá trình thời gian của dòng điện $i(t)$

$$i(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{n^2 + (n^2 - 4)^2}} \cos(n\omega_0 t - \varphi_n) \text{ (A)}$$

Phổ biên độ của nguồn $e(t)$ được biểu diễn trên H.7.5a, còn phổ biên độ của dòng điện $i(t)$ trên H.7.5b. Quá trình thời gian $i(t)$ được vẽ gần đúng (giới hạn với năm thành phần hài đầu tiên) trên H.7.5d. Đồ thị modul và argument của trở kháng Z_n được vẽ trên H.7.5c. H.7.5e và H.7.5f là hàm lượng hài của nguồn tác động $e(t)$ và đáp ứng $i(t)$.

Trong mạch có thể xảy ra cộng hưởng với hài bậc hai ($n = 2$), theo điều kiện (7.42a). Với các hài $n > 2$, mạch có tính chất điện cảm, các hài dòng điện sẽ suy giảm so với các hài điện áp.

3- Tính công suất trong mạch có nguồn tác động tuần hoàn

Với các quá trình dòng điện và điện áp bất kỳ, ta có định nghĩa về công suất tức thời như sau

$$p(t) = u(t) i(t) \tag{7.43}$$

Khi dòng điện và điện áp trên hai cực là những quá trình tuần hoàn cùng chu kỳ, chúng được biểu diễn bằng chuỗi phức Fourier như sau

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{U}_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{U_{nm}}{2} e^{j\psi_n} e^{jn\omega_0 t} \tag{7.44}$$

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{I}_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{I_{nm}}{2} e^{j(\psi_n - \varphi_n)} e^{jn\omega_0 t} \tag{7.45}$$

trong đó \dot{U}_n, \dot{I}_n - là hệ số khai triển chuỗi Fourier phức của $u(t), i(t)$; $U_{nm}; I_{nm}$ - là biên độ của các hài điện áp và dòng điện (tương ứng với các hệ số C_n trong chuỗi Fourier lượng giác);

ψ_n và $(\psi_n - \varphi_n)$ - là các góc pha đầu tương ứng của điện áp và dòng điện.

Theo định lý Parseval (7.24), công suất tác dụng được định nghĩa bằng trị trung bình tích của hai hàm tuần hoàn cùng chu kỳ $u(t), i(t)$ được xác định như sau

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dot{U}_n \dot{I}_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{U_{nm}}{2} e^{j\psi_n} \frac{I_{nm}}{2} e^{-j(\psi_n - \varphi_n)}$$

Khi tách riêng thành phần một chiều với $n = 0$ và tách chuỗi các thành phần hài thành hai chuỗi tương ứng với $n < 0$ và $n > 0$ ta được

$$\begin{aligned} P &= U_o I_o + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{U_{nm} I_{nm}}{4} e^{j\varphi_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{nm} I_{nm}}{4} e^{j\varphi_n} \\ &= U_o I_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{nm} I_{nm}}{2} \left(\frac{e^{j\varphi_n} + e^{-j\varphi_n}}{2} \right) = U_o I_o + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} I_{nm} \cos \varphi_n \end{aligned}$$

$$P = P_o + P_n \quad (\text{W}) \quad (7.46)$$

Như có thể thấy từ biểu thức (7.46), công suất tác dụng lên hai cực có các đáp ứng tuần hoàn, bằng tổng công suất của thành phần một chiều và công suất của các hài thành phần.

Tương tự như với mạch xác lập điều hòa, với mạch xác lập tuần hoàn, người ta cũng đưa ra khái niệm về công suất tác dụng, công suất phản kháng và công suất biểu kiến. Công suất tác dụng được xác định theo biểu thức (7.46), là công suất tác dụng của hai cực có chứa điện trở. Với hai cực có chứa điện trở thì $P > 0$, còn với hai cực thuần điện kháng $P = 0$.

Công suất phản kháng của mạch có tác động tuần hoàn được xác định bằng tổng công suất phản kháng thành phần và được ký hiệu là Q

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} U_{nm} I_{nm} \sin \varphi_n \quad (\text{VAR}) \quad (7.47)$$

Công suất biểu kiến cũng được xác định như đối với các quá trình điều hòa và được ký hiệu bởi $|S|$

$$|S| = U_{hd} I_{hd} \quad (\text{VA}) \quad (7.48)$$

Với một quá trình điều hòa, công suất tác dụng, công suất phản kháng và công suất biểu kiến tạo nên một tam giác công suất

$$P^2 + Q^2 = |S|^2 \quad (7.49)$$

Đẳng thức này sẽ không hoàn toàn đúng cho mạch có nguồn tác động tuần hoàn. Bởi vì sẽ tồn tại những hài của một trong các quá trình dòng hay áp, không làm ảnh hưởng đến giá trị của công suất tác dụng và công suất phản kháng, nhưng lại làm tăng giá trị hiệu dụng của quá trình. Tổng bình phương của công suất tác dụng và công suất phản kháng khi đó, không bằng bình phương modul công suất biểu kiến, nó được xác định theo biểu thức sau:

$$P^2 + Q^2 = |S|^2 - T^2 \quad (7.50)$$

Đại lượng T có thứ nguyên VA, được gọi là công suất méo dạng. Khái niệm về công suất méo dạng rất quan trọng, bởi vì nó cho ta thấy ngay cả khi các hài của dòng điện, cùng pha với các hài tương ứng của điện áp, tức là $\varphi_n = 0$ và do đó $Q = 0$, ta vẫn có: $|S|^2 = P^2 + T^2$. Công suất biểu kiến khi đó lớn hơn công suất tác dụng, và hệ số công suất được xác định bởi:

$$\cos\varphi = \frac{P}{|S|} < 1 \quad (7.51)$$

Ta thấy rằng, mạch sẽ không làm méo tín hiệu khi với tất cả các hài ta luôn có:

$$\frac{U_{nm}}{I_{nm}} = \text{const}; \text{ và } \varphi_n = 0 \quad (7.52)$$

Khi đó công suất méo dạng cũng bằng không, điều này chỉ xảy ra trong mạch chỉ gồm các phần tử điện trở. Còn nếu trong mạch có các phần tử điện kháng (tụ điện và cuộn cảm), thì điều kiện (7.52) sẽ không thỏa mãn. Ví dụ, trong mạch có chứa phần tử điện cảm sẽ có tỉ số U_{nm}/I_{nm} tăng theo bậc của hài, còn với mạch có điện dung thì tỉ số này sẽ giảm. Như vậy mạch gây méo dạng tín hiệu là mạch có công suất méo dạng khác không.

Ví dụ 7.3. Hãy tính các loại công suất vừa nêu trên đây cho mạch RLC trong ví dụ 7.2, chỉ giới hạn đến hài bậc 5.

Giải. Với $n \leq 5$, nguồn tác động bao gồm các thành phần sau

$$e(t) = 25 + 45 \cos(\omega_0 t) + 32 \cos(2\omega_0 t) + 15 \cos(3\omega_0 t) - 9 \cos(5\omega_0 t) \text{ [V]}$$

Dòng điện chảy trong mạch

$$i(t) = 0,142 \cos(\omega_0 t + 71^\circ 34') + 0,318 \cos(2\omega_0 t) + \\ + 0,077 \cos(3\omega_0 t - 59^\circ 02') - 0,021 \cos(5\omega_0 t - 76^\circ 36') \text{ (A)}$$

Do thành phần một chiều $I_0 = 0$ nên $P_0 = 0$. Công suất tác dụng được

xác định theo công thức:

$$P = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 E_{nm} I_{nm} \cos \varphi_n = \frac{1}{2} [45 \times 0,142 \cos(71^\circ 34') + 32 \times 0,318 \cos 0^\circ + 15 \times 0,077 \cos(59^\circ 02') + 9 \times 0,021 \cos(76^\circ 36')] = 6,42 \text{ (W)}$$

Công suất phản kháng:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 E_{nm} I_{nm} \sin \varphi_n = \frac{1}{2} [45 \times 0,142 \sin(71^\circ 34') + 32 \times 0,318 \sin 0^\circ + 15 \times 0,077 \sin(59^\circ 02') + 9 \times 0,021 \sin(76^\circ 36')] = 2,63 \text{ (Var)}$$

Trị hiệu dụng của nguồn áp và dòng điện tuần hoàn:

$$E_{hd} = \sqrt{25^2 + \frac{1}{2} [45^2 + 32^2 + 15^2 + 9^2]} = 47,98 \text{ (V)}$$

$$I_{hd} = \sqrt{\frac{1}{2} [0,142^2 + 0,318^2 + 0,077^2 + 0,021^2]} = 0,253 \text{ (A)}$$

Công suất biểu kiến $|S| = E_{hd} I_{hd} = 12,14 \text{ (VA)}$

Hệ số công suất: $\cos \varphi = \frac{P}{|S|} = 0,53$

Công suất méo dạng: $T = \sqrt{|S|^2 - P^2 - Q^2} = 9,96 \text{ (VA)}$

7.1.3 Phân tích mạch TTD với nhiều nguồn tác động điều hòa

Trong trường hợp trong mạch có nhiều nguồn tác động điều hòa (không phải là tuần hoàn như xét ở trên); ta cũng áp dụng các bước được nêu trong mục 7.1.2 để phân tích. Chỉ có một lưu ý là, trở kháng của mạch khi đó phải xét riêng, tương ứng với tần số của từng nguồn tác động. Quá trình thời gian của đáp ứng trên mỗi phần tử là tổng đại số các đáp ứng thành phần. Trị hiệu dụng và các loại công suất cũng được xét như đối với mạch có nguồn tác động tuần hoàn. Hãy xét ví dụ sau đây.

Ví dụ 7.4. Trên một phần tử hai cực có đặt điện áp:

$$u(t) = 3 + 3\sqrt{2} \cos(\omega_0 t + 30^\circ) + 2\sqrt{2} \cos(2\omega_0 t) \quad (\text{V})$$

dòng điện chảy qua hai cực:

$$i(t) = 1 + 2\sqrt{2} \cos(\omega_0 t - 30^\circ) + \sqrt{2} \cos(2\omega_0 t + 60^\circ) \quad (\text{A})$$

Hãy xác định giá trị hiệu dụng của điện áp $u(t)$, dòng điện $i(t)$, công suất tác dụng, công suất phản kháng, công suất biểu kiến và công suất méo dạng của hai cực.

Giải

- Giá trị hiệu dụng của điện áp và dòng điện

$$U_{hd} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 2^2} = 4,69 \quad (\text{V})$$

$$I_{hd} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = 2,45 \quad (\text{A})$$

- Công suất tác dụng

$$P = 3 \times 1 + 3 \times 2 \cos 60^\circ + 2 \times 1 \cos(-60^\circ) = 7 \quad (\text{W})$$

- Công suất phản kháng

$$Q = 3 \times 2 \sin 60^\circ + 2 \times 1 \sin(-60^\circ) = 3,46 \quad (\text{Var})$$

- Công suất biểu kiến

$$|S| = U_{hd} I_{hd} = 11,49 \quad (\text{VA})$$

- Công suất méo dạng

$$T = \sqrt{|S|^2 - P^2 - Q^2} = 8,43 \quad (\text{VA})$$

7.2 PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN FOURIER**7.2.1 Biểu diễn tín hiệu không tuần hoàn trong miền tần số****1- Biến đổi tích phân Fourier**

Một tín hiệu không tuần hoàn $x(t)$ thỏa mãn điều kiện

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (7.53)$$

sẽ có biến đổi tích phân Fourier như sau

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[x(t)] \quad (7.54)$$

trong đó \mathcal{F} ký hiệu biến đổi thuận Fourier.

Hàm $X(\omega)$ là một hàm liên tục theo biến ω (rad/s), biểu diễn sự phân bố của tín hiệu trong miền tần số, do đó $X(\omega)$ được gọi là phổ của tín hiệu. Trong trường hợp tổng quát, $X(\omega)$ là một hàm phức, có thể biểu diễn dưới dạng

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (7.55)$$

trong đó: $|X(\omega)|$ - được gọi là phổ biên độ; $\varphi(\omega)$ - được gọi là phổ pha.

Phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu $x(t)$, biểu diễn sự phân bố biên độ và pha của tín hiệu trong miền tần số. Đó là những hàm liên tục theo ω , khác với phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu tuần hoàn là những đại

lượng rời rạc.

Với tín hiệu $x(t)$ là hàm thực, ta có thể chứng minh được phổ biên độ là một hàm chẵn còn phổ pha là hàm lẻ theo ω . Có nghĩa là

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \quad (7.56)$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) \quad (7.57)$$

Tín hiệu $x(t)$ có thể tìm được từ phổ của nó bằng biến đổi ngược Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.58)$$

hay là

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \quad (7.59)$$

Biểu thức (7.59) cho thấy rằng, tín hiệu không tuần hoàn $x(t)$ cũng được biểu diễn bằng tổng (tích phân) của các quá trình điều hòa có tần số thay đổi liên tục trong khoảng $(0, \infty)$

$$\frac{|X(\omega)|}{\pi} d\omega \cos[\omega t + \varphi(\omega)] \quad (7.60)$$

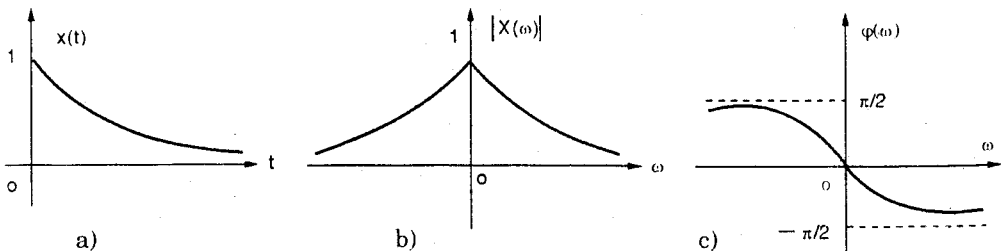
Ví dụ 7.5. Hãy xác định phổ của tín hiệu $x(t) = e^{-t} I(t)$.

Giải. Tín hiệu $x(t) = e^{-t} I(t)$ có dạng trên (H.7.6a). Áp dụng công thức tính

phổ (7.54) ta có

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Phổ biên độ: $|X(\omega)| = 1/\sqrt{1 + \omega^2}$; và phổ pha: $\varphi(\omega) = \arg X(\omega) = -\arctg \omega$ được biểu diễn trên (H.7.6.b,c).



Hình 7.6

2- Dạng thức Parseval

Xét hai tín hiệu thỏa mãn điều kiện (7.53); với hai tín hiệu đó ta hãy xác định

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)e^{j\omega t} d\omega \right] x_2^*(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} x_2^*(t)e^{j\omega t} dt \end{aligned}$$

trong đó
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2^*(t)e^{j\omega t} dt = X_2^*(\omega)$$

Kết quả
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega \tag{7.61}$$

Biểu thức (7.61) được gọi là đẳng thức Parseval của tín hiệu không tuần hoàn, về trái là tích vô hướng của hai tín hiệu trong miền thời gian. Khi $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$; (7.61) sẽ trở thành:

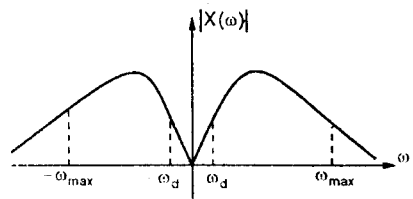
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \tag{7.62}$$

Vế bên trái của (7.62) là công thức xác định năng lượng của tín hiệu trong miền thời gian. Như vậy năng lượng của tín hiệu còn có thể được xác định bởi tích phân bình phương biên độ phổ của nó chia cho 2π . Ta nói rằng năng lượng của tín hiệu phân bố trên toàn trục tần số theo mật độ phổ năng lượng: $\phi(\omega) = |X(\omega)|^2$.

Từ biểu thức (7.62) ta thấy rằng, bề rộng phổ (dải tần mà tín hiệu chiếm trên thang tần số) của tín hiệu năng lượng, trong trường hợp chung là vô hạn. Trong thực tế không phải như vậy, bởi vì các tín hiệu vật lý đều có phổ hữu hạn giới hạn trong khoảng tần số $(-\omega_{max}, \omega_{max})$. Bề rộng phổ được chấp nhận sẽ chứa khoảng 99% năng lượng của tín hiệu, được gọi là bề rộng phổ hiệu dụng. Khi áp dụng đẳng thức Parseval có thể viết

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{max}}^{\omega_{max}} |X(\omega)|^2 d\omega = 0,99 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \tag{7.64}$$

Dựa vào (7.64) ta có thể xác định các tần số giới hạn của bề rộng phổ của tín hiệu. Theo (7.64), phần phổ của tín hiệu nằm ngoài bề rộng phổ hiệu dụng (bề rộng phổ qui ước) chỉ chiếm 1% năng lượng



Hình 7.7

toàn bộ của tín hiệu (xem H.7.7). Để tính các tần số giới hạn, trong thực tế người ta chấp nhận công thức sau:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d}^{\omega_d} |X(\omega)|^2 d\omega = 0,005 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (7.65)$$

Trong biểu thức (7.65), dải tần $(-\omega_d + \omega_d)$ chỉ chứa 0,5% năng lượng toàn bộ. Khi đó tần số giới hạn được tính như sau:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_d}^{\omega_{\max}} |X(\omega)|^2 d\omega = 0,995 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (7.66)$$

Việc xác định bề rộng phổ của tín hiệu là vấn đề quan trọng đối với kỹ thuật, bởi vì nó cho phép ta thiết kế các thiết bị xử lý tín hiệu phù hợp với dải tần của tín hiệu.

7.2.2 Phân tích hệ thống TTD với nguồn tác động không tuần hoàn

1- Hàm truyền đạt

Để phân tích mạch theo khái niệm hệ thống, trong chương 6 ta đã định nghĩa hàm truyền đạt của hệ thống theo biểu thức (6.53):

$$K(s) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{DKD=0}$$

Bởi vì trở kháng và dẫn nạp của mạch khi $s = j\omega$ sẽ mô tả trạng thái xác lập của mạch. Do vậy hàm truyền của mạch ở trạng thái xác lập sẽ có biểu thức:

$$K(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (7.67)$$

trong đó $Y(\omega)$ - là phổ của tín hiệu ở đầu ra; $X(\omega)$ - là phổ của tín hiệu đầu vào.

Trong trường hợp $x(t)$ là tín hiệu không tuần hoàn, đáp ứng $y(t)$ cũng không tuần hoàn, và phổ $Y(\omega)$, $X(\omega)$ của chúng được xác định theo (7.54).

Hàm $K(\omega)$ trong biểu thức (7.67) là hàm truyền đạt của mạch, trong trường hợp tổng quát là một hàm phức, ta có thể biểu diễn dưới dạng hàm mũ như sau:

$$K(\omega) = |K(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

trong đó $|K(\omega)|$ - là modul của hàm truyền đạt, được gọi là đặc tuyến biên độ; $\varphi(\omega) = \arg K(\omega)$ - được gọi là đặc tuyến pha.

a) Hệ thống không gây méo tín hiệu

Ta nói mạch không gây méo tín hiệu nếu đáp ứng của mạch thỏa mãn điều kiện

$$y(t) = Kx(t - t_0) \quad (7.68)$$

trong đó K - là hằng số. Điều đó có nghĩa là, đáp ứng của mạch tỉ lệ với tác động và có thể trễ về mặt thời gian so với tác động một khoảng $t_0 > 0$. Thực hiện biến đổi Fourier biểu thức (7.68) ta được

$$Y(\omega) = KX(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (7.69)$$

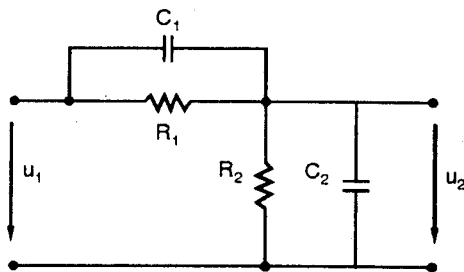
So sánh biểu thức (7.69) với (7.67) ta thấy rằng, để mạch không gây méo tín hiệu, hàm truyền của nó phải thỏa mãn điều kiện

$$K(\omega) = Ke^{-j\omega t_0} \quad (7.70)$$

tức là $|K(\omega)| = K = \text{const} > 0$; $\varphi(\omega) = -\omega t_0$

Như vậy ta có thể đi đến kết luận là, đặc tuyến tần số của mạch không gây méo tín hiệu có modul là hằng số và argument tỉ lệ tuyến tính với tần số.

Mạch trên H.7.8 là mạch không gây méo tín hiệu. Hàm truyền đạt của nó được xác định



Hình 7.8

$$K(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{R_2}{R_1 \times \frac{1 + j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_1 R_1} + R_2}$$

Nếu chọn các phần tử mạch sao cho: $R_1 C_1 = R_2 C_2$; thì đặc tuyến tần số của mạch sẽ không phụ thuộc tần số

$$K(\omega) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad \varphi(\omega) = 0$$

Mạch trên H.7.8 là mạch chia áp bù.

b) Hệ thống gây méo tín hiệu

Hệ thống gây méo tín hiệu, là hệ thống không thỏa mãn điều kiện (7.70), có nghĩa là đặc tuyến biên độ của hệ thống là một hàm của tần số ω , còn đặc tuyến pha thì không tỉ lệ tuyến tính với tần số.

Mạch đơn giản nhất gây méo tín hiệu có thể nêu ra sau đây là mạch

đạo hàm (vi phân) và mạch tích phân.

Mạch vi phân (H.7.9) là mạch có đáp ứng tỉ lệ với đạo hàm của tác động

$$y(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt} \quad (7.71)$$

trong đó τ - là hệ số tỉ lệ, có thứ nguyên thời gian.

Thực hiện biến đổi Fourier biểu thức (7.71) ta được

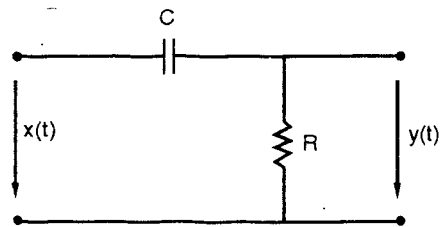
$$Y(\omega) = j\omega\tau X(\omega) \quad (7.72)$$

Như vậy, hàm truyền của mạch vi phân phải là

$$K(\omega) = j\omega\tau \quad (7.73)$$

Mạch trên (H.7.9) có hàm truyền $K(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$

Nếu các thông số của mạch được chọn sao cho $RC \ll 1$, thì mạch trên sẽ thực hiện phép toán đạo hàm. Như có thể thấy $\tau = RC$ là hằng số thời gian của mạch vi phân được chọn sao cho có giá trị nhỏ nhất.



Hình 7.9

Mạch tích phân là mạch có đáp ứng tỉ lệ với tích phân của tác động, tức là

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad (7.74)$$

Biến đổi Fourier của (7.74): $j\omega\tau Y(\omega) = X(\omega)$

hay là $Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega\tau} \quad (7.75)$

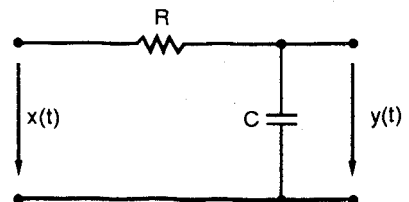
Như vậy hàm truyền của mạch tích phân phải có dạng

$$K(\omega) = \frac{1}{j\omega\tau} \quad (7.76)$$

Mạch trên H.7.10 có hàm truyền

$$K(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Nếu chọn các thông số của mạch để sao cho: $RC \gg 1$, thì mạch H.7.10 sẽ thực hiện phép tính tích phân. Như vậy hằng số thời gian của mạch tích phân



Hình 7.10

$\tau = RC$ phải được chọn sao cho có giá trị lớn nhất.

Từ những phân tích trên đây, ta có thể thấy rằng, hằng số thời gian của mạch vi phân

$$\tau \ll \frac{1}{\omega_{\max}} \tag{7.77}$$

và của mạch tích phân $\tau \gg \frac{1}{\omega_{\min}}$ (7.78)

trong đó ω_{\min} và ω_{\max} - là tần số nhỏ nhất và lớn nhất của tín hiệu vào (nguồn tác động).

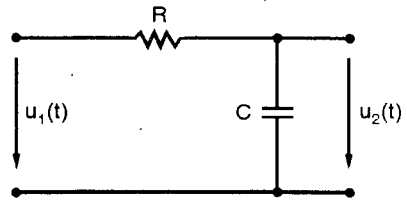
2- Biểu diễn đồ thị của hàm truyền đạt

a) Đồ thị của đặc tuyến biên độ và đặc tuyến pha

Như đã nói ở trên, hàm truyền đạt đặc trưng cho hệ thống TTD, trong trường hợp tổng quát là một hàm phức biến thực ω . Đặc tuyến biên độ và đặc tuyến pha của nó là hàm thực biến ω . Khi phân tích hệ thống, người ta thường tiến hành biểu diễn đồ thị các đặc tuyến biên độ và đặc tuyến pha của hệ thống. Qua các đồ thị có thể nhận biết đáp ứng của mạch (ngõ ra) đối với tác động (ngõ vào).

Trong trường hợp mạch đơn giản, ta có thể tiến hành vẽ trực tiếp đồ thị các đặc tuyến biên độ và đặc tuyến pha của hệ thống. Có thể minh họa qua các ví dụ sau đây

Ví dụ 7.6. Hãy xác định và vẽ hàm truyền đạt của mạch trên H.7.11. Xác định tần số tại đó đặc tuyến biên độ suy giảm 3dB so với giá trị cực đại.



Hình 7.11

Giải. Theo định nghĩa, hàm truyền đạt điện áp

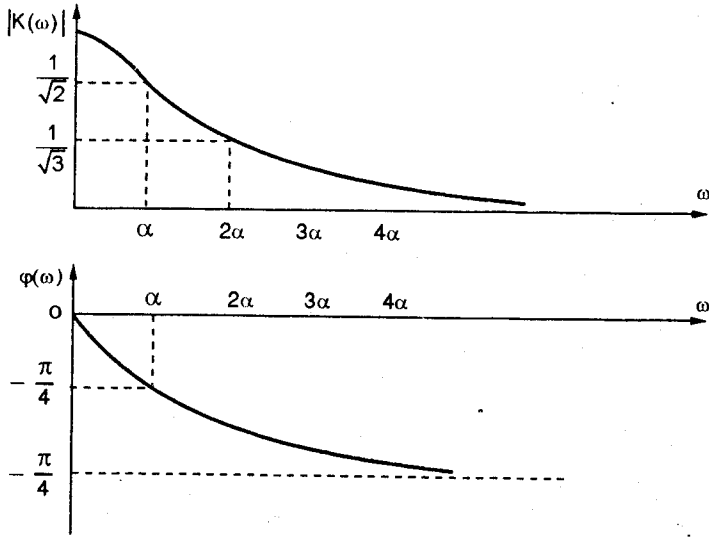
$$K_u(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)}$$

Với mạch trên H.7.11 $K_u(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$

trong đó $\alpha = 1/RC$ - là nghịch đảo của hàm số thời gian của mạch. Đặc tuyến biên độ và đặc tuyến pha tương ứng:

$$|K(\omega)| = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\alpha}$$

Đồ thị của đặc tuyến biên độ và đặc tuyến pha được biểu diễn trên H.7.12.



Hình 7.12

Như có thể thấy từ H.7.12, khi tần số của nguồn tác động càng lớn, biên độ điện áp ra càng nhỏ; Giá trị cực đại của đặc tuyến biên độ: $|K(\omega)|_{\max} = 1$, tại: $\omega = 0$. Dải thông của mạch theo qui ước được xác định tại tần số cắt ω_g , tại đó $|K(\omega)|$ suy giảm 3dB so với giá trị cực đại của nó. Mạch trên H.7.12 là mạch lọc thông thấp, các tần số của tín hiệu trong dải $(0 \div \omega_g)$ được truyền qua mạch. Dải thông của mạch được xác định bởi

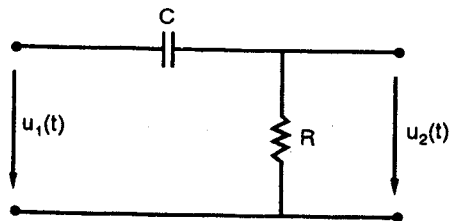
$$B = \frac{\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$$

Tần số cắt của mạch lọc thông thấp được xác định từ biểu thức

$$\frac{|K(\omega)|}{|K(\omega)|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Suy ra: } \omega_g = \alpha = 1/RC$$

Ví dụ 7.7. Hãy xác định và vẽ hàm truyền đạt điện áp của mạch trên H.7.13. Xác định tần số tại đó đặc tuyến biên độ suy giảm 3 dB so với giá trị cực đại.

Giải. Hàm truyền đạt điện áp của mạch



Hình 7.13

$$K_u(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{j\omega}{\alpha + j\omega}; \alpha = 1/RC$$

Đặc tuyến biên độ và đặc tuyến pha

$$|K(\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha}$$

Đồ thị của đặc tuyến biên độ và đặc tuyến pha như trên H.7.14. Như có thể thấy từ hình vẽ

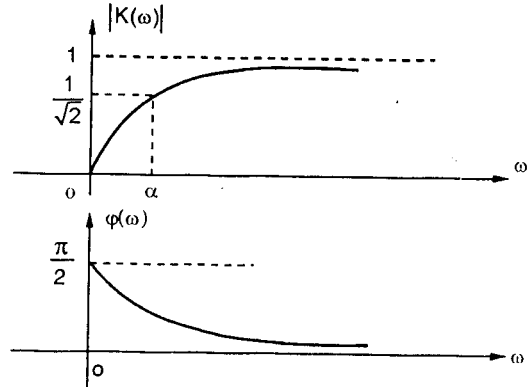
$$|K(\omega)| = 0; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}; \quad \text{tại } \omega = 0; \quad \text{khi}$$

$$\omega \rightarrow \infty; \quad |K(\omega)| \rightarrow 1; \quad \text{và } \varphi(\omega) \rightarrow 0;$$

hàm truyền có giá trị cực đại tại $|K(\infty)| = 1$. Tại tần số cắt: $\omega_g = \alpha$;

đặc tuyến biên độ có giá trị bằng $1/\sqrt{2}$, tức suy giảm 3dB so với giá trị cực đại. Mạch trên H.7.14 là mạch lọc thông cao, tín hiệu ngõ vào có tần số $\omega \geq \omega_g$ đều được

truyền qua mạch.



Hình 7.14

b) Đặc tuyến logarit - Tần số logarit

Trong thực tế phân tích mạch và hệ thống, người ta thường quan tâm đến đặc tuyến biên độ $|K(\omega)|$; bởi vì nó dễ đo lường và nó cho ta biết nhiều tính chất của mạch trong miền tần số. Đặc tuyến biên độ của các hàm truyền đạt điện áp và dòng điện vừa xét trong mục a không có thứ nguyên: Người ta thường dùng các đặc tuyến biên độ có đơn vị Neper $[Np]$ hoặc Decibel $[dB]$ được gọi là đặc tuyến logarit.

• Đặc tuyến biên độ logarit, có đơn vị là Neper, của hàm truyền đạt $K(\omega)$ được xác định bởi

$$A'(\omega) = \ln |K(\omega)| = \frac{1}{2} \ln [K(\omega)K^*(-\omega)] (Np) \quad (7.79)$$

• Đặc tuyến biên độ logarit, có đơn vị là Decibel của hàm truyền đạt $K(\omega)$ được xác định bởi: $A(\omega) = 20 \lg |K(\omega)|$ (dB) (7.80)

Khi lưu ý đến các biểu thức (7.79) và (7.80), ta có thể tìm quan hệ giữa các đặc tuyến biên độ $A'(\omega)$ và $A(\omega)$ như sau

$$|K(\omega)| = 10^{A(\omega)/20} = e^{A'(\omega)}$$

$$\text{Suy ra} \quad A'(\omega) = \frac{A(\omega)}{20} \ln 10 = 0,1151A(\omega) \quad (7.81)$$

hay là
$$A(\omega) = \frac{20}{\ln 10} A'(\omega) = 8,68 A'(\omega) \quad (7.82)$$

Từ biểu thức (7.82) ta có

$$1dB = 8,68Np \quad (7.83)$$

Trong thực tế, người ta thường vẽ đặc tuyến biên độ logarit thập phân, đơn vị dB.

Bây giờ ta sẽ đưa vào khái niệm về tần số logarit.

- *Tần số logarit thập phân, có đơn vị decad* được xác định bởi

$$V = \lg \omega \quad (\text{decad}) \quad (7.84)$$

Nếu $V_2 - V_1$ là một khoảng đơn vị trên thang tần số V, nghĩa là

$$V_2 - V_1 = \lg \omega_2 - \lg \omega_1 = \lg \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

thì trên thang tần số ω ta có: $\omega_2 = 10\omega_1$

- *Tần số logarit cơ số hai, có đơn vị là octave* được xác định bởi:

$$V' = \log_2 \omega \quad (\text{octave}) \quad (7.85)$$

Nếu $V'_2 - V'_1$ là một khoảng đơn vị trên thang tần số V' , nghĩa là:

$$V'_2 - V'_1 = \log_2 \omega_2 - \log_2 \omega_1 = \log_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

thì trên thang tần số ω ta có $\omega_2 = 2\omega_1$.

Trong thực tế người ta dùng tần số logarit thập phân nhiều hơn.

c) Giảm đồ Bode

Trong mục phân tích hàm truyền bằng phương pháp toán tử ở chương 6, khi $K(s)$ là một hàm hữu tỷ và khi thay $s = j\omega$ ta có

$$K(\omega) = K \frac{(j\omega - s_{o1})(j\omega - s_{o2}) \dots (j\omega - s_{om})}{(j\omega - s_{c1})(j\omega - s_{c2}) \dots (j\omega - s_{cn})} \quad (7.86)$$

Xét trường hợp $m < n$, đặc tuyến logarit thập phân có dạng

$$A(\omega) = 20 \lg K + \sum_{i=1}^m 20 \lg |j\omega - s_{oi}| - \sum_{i=1}^n 20 \lg |j\omega - s_{ci}| \quad (7.87)$$

Đặc tuyến pha với $K > 0$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^m \arg(j\omega - s_{oi}) - \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - s_{ci}) \quad (7.88)$$

Biểu thức (7.87) cho ta thấy ưu điểm của đặc tuyến logarit ở chỗ nó chuyển tích các thừa số trong (7.86) thành tổng các số hạng tương ứng trong (7.87). Điều đó cho phép phân tích tính chất của hàm truyền đạt theo các thành phần trong tổng (7.87), trong trường hợp hệ thống phức tạp.

Bây giờ hãy xét ảnh hưởng của các đặc tuyến thành phần trong tổng (7.87). Ta biết rằng, các điểm cực và điểm không của hàm truyền có thể là số thực hoặc phức. Trước tiên, để đơn giản, ta xét hàm truyền có điểm không và điểm cực là các số thực. Khi đó thành phần thứ i trong tổng (7.87) có dạng

$$A_i = 20 \lg |j\omega - a_i| \tag{7.89}$$

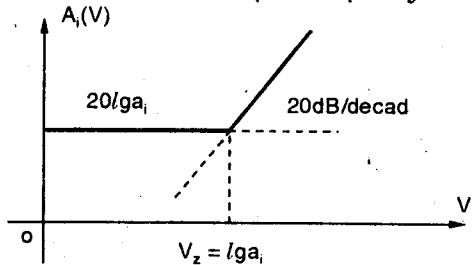
Khi $\omega \ll a_i$, một cách gần đúng ta có

$$A_i \approx 20 \lg a_i \tag{7.90}$$

Như vậy với các tần số nhỏ thì $A_i = const$.

Khi $\omega \gg a_i$
$$A_i \approx 20 \lg \omega = 20V \tag{7.91}$$

Khi ω rất lớn, đặc tuyến tần số logarit là hàm tuyến tính của tần số logarit V . Độ dốc của đặc tuyến thứ i là 20 dB/decad. Đồ thị của đặc tuyến thành phần thứ i , được làm gần đúng theo các biểu thức (7.90), (7.91) được biểu diễn trên H.7.15, được gọi là đặc tuyến tiệm cận của thành phần thứ i . Từ hình vẽ có thể thấy rằng, tại điểm gãy là giao điểm của hai đường thẳng, tương ứng với tần số V_z được xác định theo phương trình sau



Hình 7.15

$$20 \lg a_i = 20 \lg V_z$$

Suy ra
$$V_z = \lg a_i$$

Với phân tích trên đây, ta đã xây dựng đặc tuyến tiệm cận thành phần, có phương trình biểu diễn như sau

$$A_i = \begin{cases} 20 \lg a_i & V < V_z \\ 20V & V > V_z \end{cases} \tag{7.92}$$

Tương tự có thể xét cho các đặc tuyến thành phần tương ứng với các điểm cực thực của hàm truyền $K(\omega)$; đặc tuyến logarit thành phần trong trường hợp này có giá trị âm.

Bây giờ ta sẽ xét sai số do việc thay thế đặc tuyến logarit bằng các

đặc tuyến tiệm cận. Bởi vì

$$A_i = 20 \lg |j\omega - a_i| = 20 \lg \sqrt{\omega^2 + a_i^2}$$

Sai số lớn nhất sẽ xuất hiện tại điểm gãy, khi $\omega_z = a_i$. Giá trị đúng của A_i tại đó

$$A_i|_{\omega_z} = 20 \lg a_i \sqrt{2} = 20 \lg a_i + 3,01 \quad (7.93)$$

Như vậy, giá trị đúng của A_i lớn hơn giá trị tiệm cận 3dB.

Trong trường hợp khi điểm cực và điểm không của hàm truyền là số phức (ta luôn có các điểm cực và không là các cặp liên hợp phức), do vậy

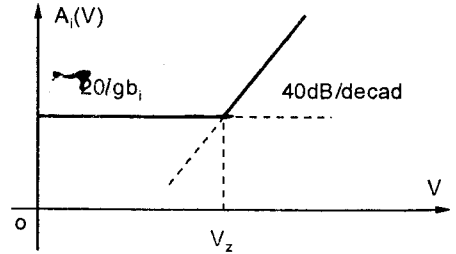
$$A_i = 20 \lg |j\omega - \sigma_i - j\omega_i| + 20 \lg |j\omega - \sigma_i + j\omega_i| = 20 \lg |b_i - \omega^2 + j\omega\alpha_i| \quad (7.94)$$

trong đó $b_i = \omega_i^2 + \sigma_i^2 = -2\sigma_i$.

Các đặc tuyến tiệm cận thứ i khi tần số nhỏ được mô tả bởi phương trình sau

$$A_i \approx 20 \lg b_i \quad \omega \rightarrow 0$$

Ở tần số lớn, các đặc tuyến tiệm cận là những đường thẳng có độ dốc 40dB/decad



Hình 7.16

$$A_i \approx 20 \lg \omega^2 = 40V \quad \omega \rightarrow \infty \quad (7.95)$$

Tần số logarit tại điểm gãy được xác định theo biểu thức

$$20 \lg b_i = 40V_z$$

Suy ra

$$V_z = \lg \sqrt{b_i} \quad (7.96)$$

Như vậy, đặc tuyến tiệm cận thành phần trong trường hợp điểm cực phức có phương trình biểu diễn sau đây

$$A_i = \begin{cases} 20 \lg b_i & V < V_z \\ 40V & V > V_z \end{cases} \quad (7.97)$$

Sai số do việc thay thế đặc tuyến logarit bằng đặc tuyến tiệm cận sẽ được xem xét khi xác định giá trị đúng của A_i tại điểm gãy

$$A_i = 20 \lg |b_i - \omega^2 + j\omega\alpha_i| = 20 \lg \sqrt{(b_i - \omega^2)^2 + \omega^2\alpha_i^2}$$

Tần số logarit tại điểm gãy $V = V_z$ được xác định bởi

$$V_z = \lg \sqrt{b_i} = \lg \omega_z$$

Suy ra

$$\omega_z^2 = b_i$$

$$\text{Như vậy} \quad A_i|_{\omega_i} = 20 \lg a_i \sqrt{b_i} \quad (7.98)$$

Nếu: $a_i \lg \sqrt{b_i} \approx 2\sigma_i \omega_i$ là nhỏ, tức điểm cực hoặc điểm không nằm gần trục $j\omega$, sai số sẽ rất lớn. Ở giới hạn, khi $\sigma_i = 0$, tức điểm cực hoặc điểm không nằm trên trục ảo $j\omega$, đặc tuyến tiệm cận sẽ không cho biết tính chất của hàm truyền tại điểm gãy.

Đặc tuyến tiệm cận của hàm truyền được suy từ (7.87) và được xác định theo các biểu thức (7.92), (7.97) được gọi là các đồ thị Bode hay giản đồ Bode.

Hãy xét một ví dụ về cách xác định giản đồ Bode sau đây

Ví dụ 7.8. Tìm và vẽ giản đồ Bode của hệ thống có hàm truyền được cho như sau

$$K(\omega) = \frac{20(j\omega + 4)}{(1 - \omega^2 + j\omega)(j\omega + 8)}$$

Giải. Có thể viết lại biểu thức của hàm truyền

$$K(\omega) = \frac{10(j\frac{\omega}{4} + 1)}{(1 - \omega^2 + j\omega)(j\frac{\omega}{8} + 1)}$$

Đặc tuyến logarit

$$A(\omega) = 20 \lg 10 + 20 \lg \left| j\frac{\omega}{4} + 1 \right| - 20 \lg |1 - \omega^2 + j\omega| - 20 \lg \left| j\frac{\omega}{8} + 1 \right|$$

Xác định các đặc tuyến tiệm cận thành phần

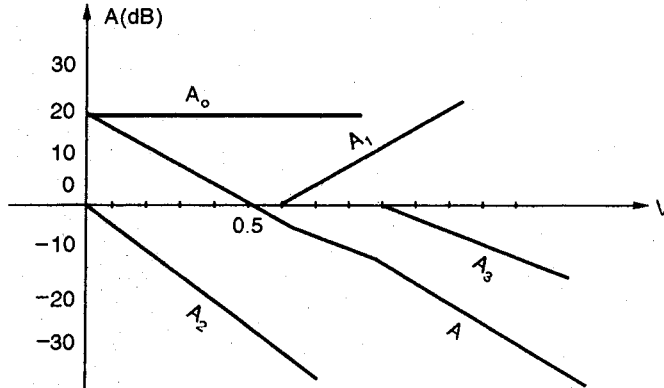
$$A_0 = 20 \lg 10 = 20 \text{dB}$$

$$A_1 = 20 \lg \left| j\frac{\omega}{4} + 1 \right| = \begin{cases} 0 & \text{khi } \omega \rightarrow 0 \\ 20V & \text{khi } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad V_{z1} = 0,6$$

$$A_2 = -20 \lg |1 - \omega^2 + j\omega| = \begin{cases} 0 & \text{khi } \omega \rightarrow 0 \\ -40V & \text{khi } \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad V_{z2} = 0$$

$$A_3 = -20 \lg \left| j\frac{\omega}{8} + 1 \right| = \begin{cases} 0 & \omega \rightarrow 0 \\ -20V & \omega \rightarrow \infty \end{cases} \quad V_{z3} = 0,9$$

Hàm truyền $K(\omega)$ có giản đồ Bode biểu diễn trên H.7.17.



Hình 7.17

7.3 ĐIỀU KIỆN THỰC HIỆN HỆ THỐNG TTD

Như đã xét trong chương 6, hệ thống TTD được đặc trưng bởi đặc tính thời gian: $k(t) = \mathcal{F}^{-1}[K(\omega)]$, và hệ thống sẽ ổn định nếu điều kiện sau đây thỏa mãn

$$\int_0^{\infty} |k(t)| dt < \infty \quad (7.99a)$$

hoặc

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k(t)| dt < \infty \quad (7.99b)$$

Mạch có đặc tính thời gian (đáp ứng xung) $k(t)$ thỏa mãn (7.99) được gọi là mạch ổn định BIBO (Bounded Input Bounded Output). Hệ thống có $k(t) = 0$ với $t < 0$ thỏa mãn (7.99a) là hệ thống nhân quả ổn định.

Tín hiệu ở đầu ra của hệ thống TTD được xác định trong miền thời gian

$$y(t) = k(t) * x(t)$$

Còn trong miền tần số, như đã biết

$$Y(\omega) = K(\omega) X(\omega)$$

Trong đó
$$K(\omega) = \mathcal{F}[k(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{-j\omega t} dt \quad (7.100)$$

Dựa vào điều kiện (7.99), có thể suy ra

$$|K(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{-j\omega t} dt \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} k(t) dt \right| < \infty$$

có nghĩa là

$$|K(\omega)| < \infty \quad (7.101)$$

Hàm $K(s)$ do đó là hàm giải tích đối với $\text{Res} \geq 0$ và

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega) = K(\infty) < \infty \quad (7.102)$$

Điều kiện (7.101) chứng tỏ hàm $K(\omega)$ là hàm hữu tỉ của biến $s = j\omega$, có bậc của tử số nhỏ hơn bậc mẫu số.

Bây giờ hãy xét xem, mạch có hàm truyền $K(\omega)$ thỏa mãn (7.101), và $K(\infty) \neq 0$ (mạch ổn định) có tồn tại hay không? (có thực hiện vật lý được không?) Dựa vào biểu thức (7.101), ta thấy rằng mạch chỉ có thể thực hiện được khi

$$k(t) = \mathcal{F}^{-1}[K(\omega)] = 0 \quad \forall t < 0 \quad (7.103)$$

Có thể viết biểu thức (7.100) dưới dạng

$$K(\omega) = K_o(\omega) + K(\infty) \quad (7.104)$$

trong đó $K_o(\omega)$ là hàm giải tích với $\text{Res} \geq 0$ và $\lim_{\omega \rightarrow \infty} K(\omega) = 0$

Như vậy, mạch có thể thực hiện được là mạch có hàm truyền thỏa mãn

$$\mathcal{F}^{-1}[K_o(\omega)] = 0 \quad \forall t < 0 \quad (7.105)$$

Ý nghĩa vật lý của biểu thức (7.105) là đáp ứng của mạch không thể đến trước tác động. Điều đó cũng có nghĩa là hệ thống có thể thực hiện được phải là hệ thống nhân quả.

Hãy xét ví dụ sau đây khi áp dụng điều kiện thực hiện mạch.

Ví dụ 7.9. Hãy xét xem mạch có hàm truyền được cho sau đây có thể thực hiện vật lý hay không?

$$K(\omega) = \frac{a}{\omega^2 + b^2} \quad ; \quad a > 0$$

Giải. Áp dụng điều kiện

$$k(t) = \mathcal{F}^{-1}[K(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\omega^2 + b^2} e^{j\omega t} d\omega = \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega^2 + b^2} d\omega$$

Áp dụng công thức tính tích phân đặc biệt, ta có

$$k(t) = \frac{a}{2b} e^{-b|t|}$$

Có thể thấy rằng: $k(t) \neq 0$; với: $t < 0$, do đó không thể thực hiện vật lý mạch với hàm truyền đã cho.

Cũng có thể dựa vào điều kiện năng lượng để xét điều kiện thực hiện mạch như sau: ở đầu vào của hệ thống có nguồn tác động là tín hiệu năng lượng (thỏa mãn (7.53)), có nghĩa là theo đẳng thức Parseval ta có

$$\int_0^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (7.106)$$

Tín hiệu ở đầu ra của hệ thống cũng sẽ là tín hiệu năng lượng

$$\int_0^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (7.107)$$

Hệ thống thỏa mãn (7.107) là hệ thống có thể thực hiện được.

Ví dụ 7.10. Giả thiết tín hiệu ngõ vào của hệ thống $x(t) = e^{-\alpha t} 1(t)$; $\alpha > 0$.

Xét điều kiện năng lượng để mạch có thể thực hiện.

Giải. Phổ của tín hiệu vào $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{\alpha + j\omega}$

Phổ của tín hiệu ở ngõ ra hệ thống: $Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = K(\omega)X(\omega)$

Điều kiện năng lượng để thực hiện mạch theo (7.107)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 \frac{1}{|\alpha + j\omega|^2} d\omega < \infty$$

tức là
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|K(\omega)|^2}{(\alpha^2 + \omega^2)} d\omega < \infty; \quad \forall \alpha \quad (7.108)$$

Biểu thức (7.108) là điều kiện năng lượng để mạch có thể thực hiện được.

ĐƯỜNG DÂY DÀI

8.1 KHÁI NIỆM VỀ MẠCH THÔNG SỐ RẪI

Mạch tuyến tính tập trung, dừng (*TTD*) được xét dựa trên giả thiết về sự dừng của trường điện từ do các điện tích và dòng điện sinh ra. Trường điện từ dừng là trường điện từ có phân bố dòng dẫn \vec{J}_d không đổi theo thời gian, do đó phân bố trường $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ cũng không đổi theo t . Do đạo hàm theo t của các đại lượng trên bằng không, nên phương trình Maxwell của trường dừng có dạng

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_d \quad (8.1a)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (8.1b)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (8.1c)$$

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad (8.1d)$$

Nếu điều kiện dừng trên đây không thỏa mãn, mô hình mạch *TTD* không còn đúng nữa. Khi đó cần phải xét ảnh hưởng do sự thay đổi của trường điện từ. Việc phân tích mạch trong trường hợp này phải dựa trên các định luật của lý thuyết trường, mà chủ yếu là hệ phương trình Maxwell. Đối với môi trường đồng nhất có chứa điện tích, hệ phương trình Maxwell có dạng

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_d \quad (8.2a)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.2b)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (8.2c)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{td} \quad (8.2d)$$

Các đại lượng $\vec{H}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{D}$ liên hệ với nhau qua các phương trình trạng thái mô tả môi trường

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.3)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (8.4)$$

Trong các phương trình trên, các vectơ $\vec{B}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{E}$ là hàm của thời gian và tọa độ không gian. Sự vận động của năng lượng điện từ được mô tả bằng phương trình tích các vectơ \vec{E} và \vec{H} được gọi là vectơ Poynting

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (8.5)$$

Khi điều kiện dừng không thỏa mãn, một sự thay đổi bất kỳ giá trị tức thời của nguồn tác động sẽ làm dòng và áp ở tại các điểm khác nhau của mạch cũng bị thay đổi. Từ các kiến thức về vật lý, ta biết rằng tốc độ truyền lan của sóng điện từ là hữu hạn, nó không vượt qua tốc độ ánh sáng. Do đó, một sự thay đổi của nguồn tác động, sẽ gây nên những sự thay đổi khác nhau ở những vị trí khác nhau của dòng và áp. Sự thay đổi đó thể hiện qua thời gian trễ τ , phụ thuộc vào khoảng cách giữa nguồn tác động với vị trí của điểm đang xét, ký hiệu là x . Thời gian trễ được xác định bởi tỉ số giữa khoảng cách và tốc độ truyền lan của sóng điện từ

$$\tau = \frac{x}{v} \quad (\text{s}) \quad (8.6)$$

Vị trí điểm xét càng xa nguồn, thời gian trễ càng lớn, thời gian trễ cực đại là: $\tau = l/v$; trong đó: l - là độ dài của mạch.

Điều kiện dừng của mạch cũng được xét dựa trên kích thước của mạch và bước sóng của tín hiệu tác động lên mạch. Nếu nguồn tác động là sin, có chu kỳ $T = \frac{1}{f}$, thì điều kiện dừng sẽ thỏa mãn nếu

$$\tau \ll T \quad (8.7)$$

Nếu điều kiện (8.7) thỏa mãn, tức là $x \ll \lambda$, dòng và áp tại mọi vị trí của mạch sẽ thay đổi đồng thời với sự thay đổi của nguồn tác động, do đó chúng chỉ là hàm của thời gian. Mạch khi đó là mạch có thông số tập trung, và quá trình vật lý xảy ra trong mạch sẽ được mô tả bằng phương trình vi phân như đã xét trước đây.

Như vậy, dựa trên kích thước của mạch và độ dài của bước sóng, ta có thể khẳng định mạch có thỏa mãn điều kiện dừng hay không, bởi vì

$$\lambda = vT \quad (8.8)$$

nên mạch sẽ thỏa mãn điều kiện (8.7), khi kích thước hình học của nó có thể so sánh với độ dài bước sóng của nguồn tác động. Người ta thường qui ước, mạch không thỏa mãn điều kiện dừng khi

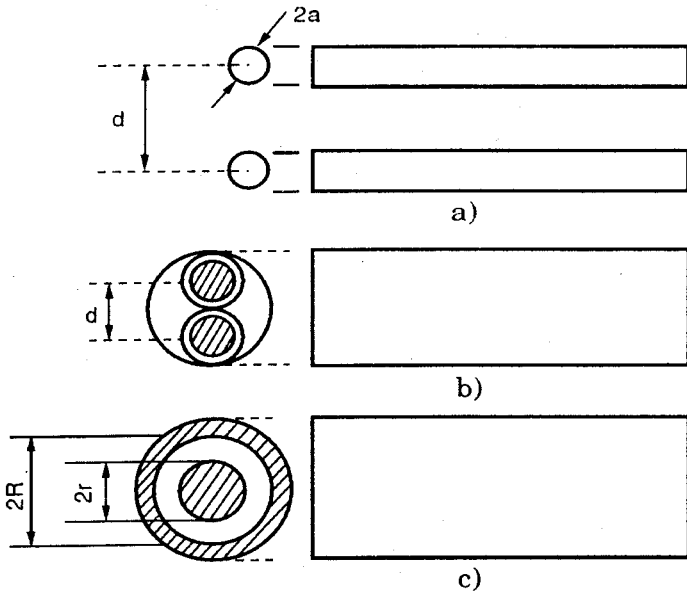
$$l \gg \frac{\lambda}{4} \tag{8.9}$$

và thỏa mãn khi $l \ll \frac{\lambda}{100}$ (8.10)

Trong thực tế, tồn tại những loại mạch mà kích thước hình học của nó rất đặc biệt như các đường dây dẫn điện. Đối với chúng, ta có thể xây dựng mô hình mạch, mặc dù mạch này không thỏa điều kiện dừng. Đường dây dẫn điện là loại mạch chỉ có một kích thước, ví dụ dọc theo trục Ox được coi là rất lớn hơn các kích thước theo trục Oy và Oz . Nếu ký hiệu kích thước mạch theo các trục tương ứng là l_x, l_y, l_z và giả thiết

$$l_x \gg \frac{\lambda}{4}; \quad l_y, l_z \ll \frac{\lambda}{100}$$

thì theo (8.9), (8.10), điều kiện dừng chỉ bị vi phạm ở một kích thước. Nếu có hai dây dẫn đặt song song theo trục Ox thì dọc theo chúng sẽ có dòng điện lan truyền. Dòng điện trong dây dẫn và điện áp trên chúng sẽ là hàm theo thời gian và tọa độ x . Với những mạch như vậy, để mô tả các hiện tượng xảy ra trong chúng, người ta dùng mô hình mạch có thông số phân bố đều theo trục Ox , với môi trường được coi là đồng nhất.



Hình 8.1: Ví dụ về các loại đường dây dài.

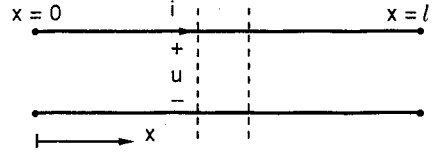
Để phân tích mạch nói trên, ta có thể dùng phương pháp phân tích mạch dựa trên các luật Kirchhoff. Mô hình mạch trong trường hợp này

được gọi là mô hình “Đường dây dài” (DDD). Mô hình đơn giản nhất và được sử dụng nhiều nhất là mô hình hai dây dẫn (đường dây song hành) như H.8.1a. Ngoài ra còn có cặp đối xứng (H.8.1b) và cặp đồng trục (H.8.1c).

8.2 CÁC THÔNG SỐ ĐƠN VỊ CỦA ĐƯỜNG DÂY DÀI

8.2.1 Định nghĩa

Dựa vào phân tích ở phần trên, ta có thể xây dựng được mô hình mạch cho đường dây dài đồng nhất, có các thông số phân bố đều dọc theo trục Ox , là trục truyền lan của sóng điện từ. Đường dây này được biểu diễn trên H.8.2. Dòng điện và điện áp trên nó là hàm của thời gian và khoảng cách.



Hình 8.2: Sơ đồ đường dây dài

Đường dây dài đồng nhất được mô tả bởi các thông số đơn vị được phân bố đồng đều trên đường dây và được định nghĩa như sau

- Điện trở đơn vị của đường dây biểu thị tổn hao nhiệt trên các dây dẫn có độ dài 1m, được ký hiệu R_0 và có đơn vị là $[\Omega/m]$.
- Điện cảm đơn vị của đường dây biểu thị năng lượng tích lũy trong từ trường của đoạn dây có độ dài 1m, được ký hiệu L_0 và có đơn vị là $[H/m]$.
- Điện dung đơn vị của đường dây, biểu thị năng lượng tích lũy trong điện trường giữa các dây dẫn có độ dài 1m, được ký hiệu là C_0 và có đơn vị là $[F/m]$.
- Điện dẫn rò đơn vị giữa các dây dẫn biểu thị tổn hao nhiệt trong điện môi của đoạn dây có độ dài 1m, được ký hiệu là G_0 và có đơn vị là $[S/m]$.

Các thông số đơn vị nêu trên còn được gọi là thông số sơ cấp của đường dây dài.

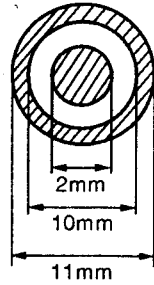
8.2.2 Cách xác định các thông số đơn vị

Trên bảng 8.1 cho ta các công thức xác định các thông số đơn vị của các loại đường dây song hành và cặp đồng trục, phụ thuộc vào kích thước hình học và loại điện môi cách điện giữa các dây dẫn.

Bảng 8.1: Công thức tính thông số đơn vị

	Song hành	Cáp đồng trục	Giải thích ký hiệu
L_o	$\frac{\mu}{\pi} \ln \frac{d}{a}$	$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$	a - bán kính dây dẫn.
C_o	$\frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d}{a}}$	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R}{r}}$	d - khoảng cách giữa hai dây dẫn.
R_o	$\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu_o f \rho}{\pi}}$	$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) \sqrt{\frac{\mu_o f \rho}{4\pi}}$	r - bán kính dây dẫn trong của cáp đồng trục.
G_o	$\omega C_o t g \delta$	$\omega C_o t g \delta$	R - bán kính dây dẫn ngoài của cáp đồng trục.
Z_c	$\frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{d}{a}$	$\frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{R}{r}$	ρ - diện trở suất của dây dẫn.
			δ - góc tổn hao điện môi.
			$\mu = \mu_r \mu_o ; \epsilon = \epsilon_r \epsilon_o ;$
			Z_c - trở kháng đặc tính.

Ví dụ 8.1. Một cáp đồng trục bằng đồng, có hằng số điện môi: $\epsilon_r = 2,4$, $t g \delta = 10^{-4}$. Đường dây làm việc ở tần số $f = 100\text{Mhz}$, có kích thước hình học như trên H.8.3 và điện trở suất: $\rho = 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$



Hình 8.3

Giải

- Điện trở đơn vị đối với dòng điện xoay chiều

$$R_o = \left(\frac{1}{10^{-3}} + \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} \right) \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 1,75 \cdot 10^{-8}}{4\pi}} = 0,627 [\Omega / m]$$

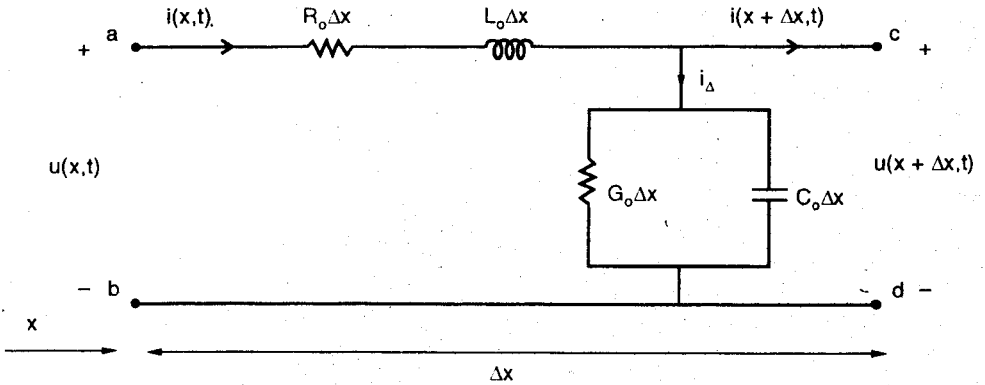
- Điện cảm đơn vị $L_o = 2 \cdot 10^{-7} \ln 5 = 3,219 \cdot 10^{-7} [H / m]$
- Điện dung đơn vị $C_o = \frac{2,4 \cdot 10^{-9}}{18 \ln 5} = 8,284 \cdot 10^{-11} [F / m]$
- Điện trở rò đơn vị $G_o = 2\pi \cdot 10^8 \cdot 8,284 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-4} = 5,205 \cdot 10^{-6} [S / m]$

8.3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG DÂY DÀI VÀ NGHIỆM

8.3.1 Phương trình đường dây dài

Bởi vì các thông số của đường dây dài phân bố dọc theo chiều dài của nó, nên dòng điện và điện áp được xác định dọc theo đường dây. Như đã phân tích ở trên, dòng điện và điện áp trên đường dây là hàm của thời

gian và khoảng cách. Trên H.8.4 là sơ đồ tương đương của đoạn dây có độ dài Δx , được xét ở khoảng cách x so với đầu đường dây. Đoạn Δx được chọn đủ nhỏ sao cho điều kiện dừng được thỏa mãn. Khi đó đoạn dây Δx được mô tả bởi các thông số tập trung $R_o\Delta x$; $L_o\Delta x$, $C_o\Delta x$; $G_o\Delta x$



Hình 8.4: Sơ đồ tương đương đoạn dây Δx

Khi ký hiệu: $u(x, t)$; $i(x, t)$; $u(x + \Delta x, t)$; $i(x + \Delta x, t)$ - là điện áp và dòng điện tại đầu và cuối đoạn dây Δx , ta có thể xác định chúng dựa vào định luật Kirchoff II

$$u(x, t) = R_o\Delta x i(x, t) + L_o\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + u(x + \Delta x, t) \quad (8.11)$$

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = R_o i(x, t) + L_o \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (8.12)$$

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = R_o i(x, t) + L_o \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (8.13)$$

Tại nút c, ta có thể viết phương trình Kirchoff I

$$i(x, t) = i_\Delta + i(x + \Delta x, t) \quad (8.14)$$

trong đó
$$i_\Delta = G_o\Delta x u(x + \Delta x, t) + C_o\Delta x \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial t}$$

Sử dụng khai triển Taylor hàm $u(x + \Delta x, t)$ ở lân cận x

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta x + \dots \\ \rightarrow i_\Delta &= G_o\Delta x u(x, t) + G_o \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta x^2 + \dots \\ &+ C_o\Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + C_o \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \Delta x^2 + \dots \end{aligned}$$

Bỏ qua các đại lượng tương ứng với Δx^2 ta được

$$i_{\Delta} = G_o \Delta x u(x, t) + C_o \Delta x \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (8.15)$$

Thay (8.15) vào (8.14) ta có

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = G_o u(x, t) + C_o \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (8.16)$$

Từ kết quả phân tích trên đây, ta có hệ phương trình cơ bản của đường dây dài như sau

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = R_o i(x, t) + L_o \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (8.17a)$$

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = G_o u(x, t) + C_o \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (8.17b)$$

8.3.2 Nghiệm của phương trình ĐDD với tác động sin

Ta sẽ phân tích đường dây dài với giả thiết rằng ở đầu đường dây, tại $x = 0$, có đặt nguồn tác động sin, tần số ω , trong khoảng thời gian t ($-\infty, +\infty$). Đồng thời cũng giả thiết rằng điện áp và dòng điện tại một điểm x bất kỳ trên đường dây $[0, l]$ cũng là sin, có cùng tần số với nguồn tác động, còn biên độ và góc pha thì tùy thuộc vào khoảng cách x .

Khi giả thiết như vậy, ta có thể phân tích ĐDD theo phương pháp vectơ biên độ phức (đã đề cập đến ở Chương 2 – Mạch điện I).

Dựa trên những giả thiết vừa nêu, có thể dự đoán nghiệm $u(x, t)$ và $i(x, t)$ của phương trình (8.17a, b) như sau

$$u(x, t) = \left| \dot{U}(x) \right| \cos[\omega t + \varphi(x)] \quad (8.18a)$$

$$i(x, t) = \left| \dot{I}(x) \right| \cos[\omega t + \psi(x)] \quad (8.18b)$$

hay ở dạng phức
$$u(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}(x) e^{j\omega t} \right\} \quad (8.19a)$$

$$i(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{I}(x) e^{j\omega t} \right\} \quad (8.19b)$$

trong đó các biên độ phức

$$\dot{U}(x) = \left| \dot{U}(x) \right| e^{j\varphi(x)} \quad (8.20a)$$

$$\dot{I}(x) = \left| \dot{I}(x) \right| e^{j\psi(x)} \quad (8.20b)$$

khi thay (8.19) vào (8.17) ta sẽ được phương trình ĐDD ở chế độ xác lập sin

$$-\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = (R_o + j\omega L_o)\dot{I}(x) \quad (8.21a)$$

$$-\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = (G_o + j\omega C_o)\dot{U}(x) \quad (8.21b)$$

Vi phân phương trình (8.21a) và thay (8.21b) vào ta có

$$\frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} - (R_o + j\omega L_o)(G_o + j\omega C_o)\dot{U}(x) = 0 \quad (8.22)$$

Đặt
$$\gamma = \sqrt{(R_o + j\omega L_o)(G_o + j\omega C_o)} \quad (8.23)$$

Phương trình (8.22) sẽ trở thành

$$\frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} - \gamma^2\dot{U}(x) = 0 \quad (8.24)$$

Tiến hành tương tự cho dòng điện, ta có

$$\frac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} - \gamma^2\dot{I}(x) = 0 \quad (8.25)$$

Nghiệm của hệ (8.24) và (8.25) có dạng

$$\dot{U}(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \quad (8.26a)$$

$$\dot{I}(x) = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x} \quad (8.26b)$$

Trong bốn hằng số A, B, C, D chỉ có hai hằng số độc lập bởi vì các nghiệm của (8.25) đồng thời cũng là nghiệm của (8.24).

Khi thay (8.26) vào (8.21) ta có

$$C = \frac{A}{Z_c}; \quad D = -\frac{B}{Z_c} \quad (8.27)$$

trong đó
$$Z_c = \sqrt{\frac{R_o + j\omega L_o}{G_o + j\omega C_o}} \quad (8.28)$$

được gọi là trở kháng sóng (hay trở kháng đặc tính) của đường dây dài. Khi thay (8.27) vào (8.26) ta nhận được

$$\dot{U}(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} \quad (8.29a)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{A}{Z_c} e^{-\gamma x} - \frac{B}{Z_c} e^{\gamma x} \quad (8.29b)$$

Hệ phương trình (8.29) chính là nghiệm tổng quát của ĐDD ở trạng thái xác lập sin.

Hệ số γ được định nghĩa theo (8.23) và xuất hiện trong các phương trình (8.29), tổng quát là một số phức

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (8.30)$$

trong đó, phần thực α được gọi là hệ số suy giảm biên độ đơn vị, đối với đường dây thực tế, nó là một số không âm

$$\alpha = \text{Re}\{\gamma\} \geq 0 \quad (8.31)$$

phần ảo β được gọi là hệ số di pha đơn vị, đó là một số luôn luôn dương

$$\beta = \text{Im}\{\gamma\} > 0 \quad (8.32)$$

Trở kháng sóng của đường dây định nghĩa theo (8.28) cũng có phần thực không âm

$$\text{Re}\{Z_c\} \geq 0 \quad (8.33)$$

Các thông số γ , Z_c xuất hiện trong nghiệm của phương trình ĐDD là hai thông số đầu tiên trong các thông số sóng thứ cấp của đường dây dài.

Các nghiệm (8.29a, b) có thể viết lại dưới dạng

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_t(x) + \dot{U}_{fx}(x) \quad (8.34a)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_t(x) - \dot{I}_{fx}(x) \quad (8.34b)$$

trong đó

$$\dot{U}_t(x) = Ae^{-\gamma x} = Ae^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad (8.35a)$$

$$\dot{U}_{fx}(x) = Be^{\gamma x} = Be^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (8.35b)$$

$$\dot{I}_t(x) = \frac{A}{Z_c} e^{-\gamma x} = \frac{A}{Z_c} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad (8.36a)$$

$$\dot{I}_{fx}(x) = \frac{B}{Z_c} e^{\gamma x} = \frac{B}{Z_c} e^{\alpha x} e^{j\beta x} \quad (8.36b)$$

Các hằng số A, B có thể được xác định với các điều kiện bờ tại $x = 0$.

Khi thay $x = 0$ vào (8.35) ta có

$$\dot{U}_t(0) = A = \dot{U}_{t1}; \quad \dot{U}_{fx}(0) = B = \dot{U}_{fx1}$$

Từ các hằng số A, B trên đây, có thể viết lại quá trình thời gian của các đại lượng $u_t(x, t)$, $u_{fx}(x, t)$, $i_t(x, t)$, $i_{fx}(x, t)$ tương ứng với các vectơ (8.35a, b) và (8.36a, b) như sau

$$u_t(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{t1} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} \right\} = \left| \dot{U}_{t1} \right| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad (8.37a)$$

$$u_{fx}(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{fx1} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} \right\} = \left| \dot{U}_{fx1} \right| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) \quad (8.37b)$$

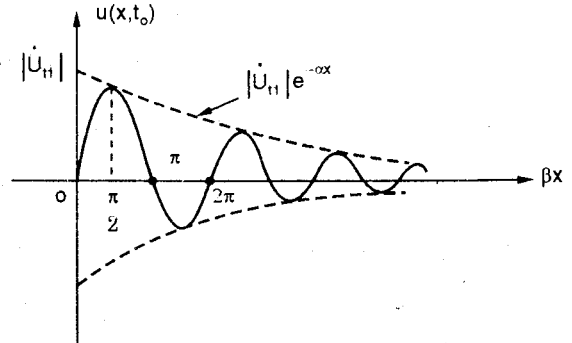
$$i_t(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\dot{U}_{t1}}{Z_c} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)} \right\} = \left| \frac{\dot{U}_{t1}}{Z_c} \right| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \psi_1) \quad (8.38a)$$

$$i_{fx}(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\dot{U}_{fx1}}{Z_c} e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} \right\} = \left| \frac{\dot{U}_{fx1}}{Z_c} \right| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \psi_2) \quad (8.38b)$$

trong đó, ta đã ký hiệu $\dot{U}_{t1} = \left| \dot{U}_{t1} \right| e^{j\varphi_1}$; $\dot{U}_{fx1} = \left| \dot{U}_{fx1} \right| e^{j\varphi_2}$

$$\psi_1 = \varphi_1 - \arg \{ Z_c \}; \quad \psi_2 = \varphi_2 - \arg \{ Z_c \}$$

Các nghiệm (8.37), (8.38) mô tả các sóng điện áp và dòng điện lan truyền trên đường dây. Sóng $u_t(x, t)$ có biên độ suy giảm hàm mũ theo khoảng cách x và dịch pha tăng theo khoảng cách. Ở một vị trí bất kỳ ($x = \text{const}$), nó là hàm sin theo thời gian, và tại một thời điểm bất kỳ ($t = \text{const}$) nó là hàm sin suy giảm theo khoảng cách x (H.8.5).



Hình 8.5: Minh họa đồ thị của sóng tới điện áp.

Sóng $u_t(x, t)$ lan truyền trên đường dây dọc theo chiều tăng của x nên được gọi là sóng điện áp tới. Tốc độ lan truyền của nó được gọi là tốc độ pha của sóng, được xác định theo

$$\omega t - \beta x + \varphi_1 = \text{const} \quad (8.39)$$

Nếu tại hai điểm cạnh nhau x_1, x_2 và tương ứng với chúng hai thời điểm t_1, t_2 , pha của sóng lan truyền giống nhau thì

$$\omega t_1 - \beta x_1 + \varphi_1 = \omega t_2 - \beta x_2 + \varphi_1 \quad (8.40)$$

Từ đó suy ra $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{\beta} = v$

Tương tự có thể phân tích với thành phần $u_{fx}(x, t)$ của nghiệm (8.37). Tại một thời điểm t xác định, nó cũng là một sóng sin, có biên độ tăng hàm mũ theo khoảng cách x , còn di pha thì giảm. Như vậy sóng này sẽ dịch chuyển từ cuối dây theo chiều x giảm, với vận tốc pha, và được gọi là sóng phản xạ.

Có thể phát biểu các nhận xét tương tự cho các thành phần $i_t(x, t)$, $i_{fx}(x, t) \rightarrow$ là sóng tới và sóng phản xạ dòng điện.

Vậy trong trường hợp tổng quát, điện áp $u(x, t)$ và dòng điện $i(x, t)$ trên đường dây là xếp chồng của sóng tới và sóng phản xạ

$$u(x, t) = u_t(x, t) + u_{fx}(x, t) \tag{8.42a}$$

$$i(x, t) = i_t(x, t) - i_{fx}(x, t) \tag{8.42b}$$

Theo lý thuyết trường điện từ, tốc độ pha lan truyền của sóng trong điện môi được xác định theo công thức

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{8.43}$$

với $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$; $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$

$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ [F/m] - hằng số điện môi của chân không.

ϵ_r - hằng số điện môi của môi trường

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m] - độ từ thẩm chân không

μ_r - độ từ thẩm môi trường

Như vậy
$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \tag{8.44}$$

Vì tốc độ của ánh sáng trong chân không là

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ (m/s)}$$

nên tốc độ của sóng điện áp và dòng điện

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \tag{8.45}$$

Nếu chấp nhận dây dẫn làm đường dây là các vật liệu không phải

sắt từ (tức là $\mu_r = 1$), và môi trường giữa các dây dẫn là không khí thì tốc độ pha $v = c$. Nếu môi trường giữa các dây là điện môi có hằng số $\epsilon_r > 1$ thì $v < c$.

Ví dụ 8.3. Ở đầu đường dây, tại $x = 0$ có đặt nguồn áp: $e_1(t) = 100 \cos(10^4 t)$ [V]. Giả thiết rằng trên đường dây chỉ có sóng tới. Hãy xác định quá trình thời gian của $i_1(t)$ tại đầu đường dây, điện áp $u_2(t)$ tại cuối đường dây, dòng điện $i_2(t)$ tại cuối đường dây và vận tốc pha v . Cho biết: $\alpha = 3 \cdot 10^{-5}$ [Np/m]; $l = 10$ [km]; $\beta = \pi \cdot 10^{-4}$ [rad/m]; $Z_c = 250 e^{j45^\circ}$ [Ω].

Giải. Áp dụng phương pháp vectơ biên độ phức cho đường dây ở trạng thái xác lập sin. Theo giả thiết trên đường dây chỉ có sóng tới, thì tại một điểm x bất kỳ, ta có

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_t(x) = \dot{U}_{t1} e^{-\gamma x}$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_t(x) = \dot{I}_{t1} e^{-\gamma x} = \frac{\dot{U}_{t1}}{Z_c} e^{-\gamma x}$$

• Ở đầu đường dây, tại $x = 0$

$$\dot{U}(x=0) = \dot{U}_{t1} = \dot{E}_1 = 100 \angle 0^\circ \text{ [V]}$$

$$\dot{I}(x=0) = \dot{I}_{t1} = \frac{\dot{U}_{t1}}{Z_c} = \frac{100}{250 \angle 45^\circ} = 400 \angle -45^\circ \text{ [mA]}$$

• Ở cuối đường dây, tại $x = l$

$$\begin{aligned} \dot{U}(x=l) &= \dot{U}_{t2} = \dot{U}_2 = \dot{E}_1 e^{-\gamma l} = \dot{E}_1 e^{-\alpha l} e^{-j\beta l} \\ &= 100 \cdot e^{-0,3} e^{-j\pi} = 74,1 \angle -180^\circ \text{ [V]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{I}(x=l) &= \dot{I}_{t2} = \dot{I}_2 = \dot{I}_1 e^{-\gamma l} = \frac{\dot{E}_1}{Z_c} e^{-\alpha l} e^{-j\beta l} \\ &= 400 \cdot e^{-0,3} \cdot e^{-j(180^\circ + 45^\circ)} = 296,3 \angle -225^\circ \text{ [mA]} \end{aligned}$$

Từ kết quả tính toán ở trên ta có thể viết quá trình thời gian của điện áp và dòng điện tại cuối đường dây

$$u_2(t) = 74,1 \cos(10^4 t - 180^\circ) \text{ [V]}$$

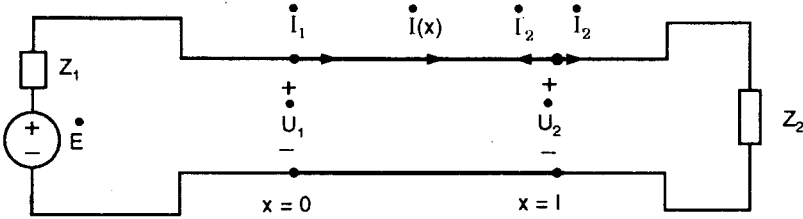
$$i_2(t) = 296,3 \cos(10^4 t - 225^\circ) \text{ [mA]}$$

Tốc độ pha của sóng lan truyền

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^4}{\pi \cdot 10^{-4}} = 0,318 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}$$

8.3.3 Mô tả bốn cực của đường dây dài

Người ta cũng thường xét *DDD* theo lý thuyết của mô hình mạng bốn cực (mạng hai cửa) như H.8.6.



Hình 8.6: Sơ đồ bốn cực của đường dây dài.

Khi coi điện áp và dòng điện ở đầu đường dây ($x = 0$) và cuối dây ($x = l$) như điện áp và dòng điện ở sơ cấp và thứ cấp của bốn cực

$$\dot{U}(x=0) = \dot{U}_1; \dot{I}(x=0) = \dot{I}_1 \tag{8.46a}$$

$$\dot{U}(x=l) = \dot{U}_2; \dot{I}(x=l) = \dot{I}_2 \tag{8.46b}$$

Hãy áp dụng điều kiện bờ $x = 0$ để tính các hằng số A, B trong các công thức (8.29). Thay (8.46) vào (8.29) ta được

$$\dot{U}_1 = A + B; \dot{I}_1 = \frac{1}{Z_c}(A - B)$$

Từ đó suy ra
$$A = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1) \tag{8.47a}$$

$$B = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1) \tag{8.47b}$$

Thay các hằng số vừa xác định ở (8.47) vào (8.29) ta có

$$\dot{U}(x) = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1)e^{\gamma x} \tag{8.48a}$$

$$\dot{I}(x) = \frac{1}{2Z_c}(\dot{U}_1 + Z_c \dot{I}_1)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2Z_c}(\dot{U}_1 - Z_c \dot{I}_1)e^{\gamma x} \tag{8.48b}$$

Lưu ý
$$\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = Ch\gamma x; \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = Sh\gamma x$$

Ta được
$$\dot{U}(x) = \dot{U}_1 Ch\gamma x - Z_c \dot{I}_1 Sh\gamma x$$

$$\dot{I}(x) = -\frac{\dot{U}_1}{Z_c} Sh\gamma x + \dot{I}_1 Ch\gamma x \tag{8.49b}$$

Các phương trình này cho phép xác định các biên độ phức của điện

áp và dòng điện tại một điểm x bất kỳ trên đường dây theo điện áp và dòng điện ở đầu đường dây.

Nếu xét điều kiện bờ ở cuối đường dây ($x = l$) theo biểu thức (8.46b) cho các phương trình trên ta sẽ nhận được hệ phương trình xác định điện áp và dòng điện thứ cấp theo điện áp và dòng điện sơ cấp \dot{U}_1 và \dot{I}_1

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 Ch\gamma l - Z_c \dot{I}_1 Sh\gamma l \quad (8.50a)$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{U}_1}{Z_c} Sh\gamma l + \dot{I}_1 Ch\gamma l \quad (8.50b)$$

Các hằng số A, B được xác định theo điều kiện bờ $x = l$

$$\dot{U}_2 = Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l}; \quad Z_c \dot{I}_2 = Ae^{-\gamma l} - Be^{\gamma l}$$

Vậy

$$A = \frac{1}{2} \left(\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2 \right) e^{\gamma l}$$

$$B = \frac{1}{2} \left(\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2 \right) e^{-\gamma l} \quad (8.51b)$$

Khi đưa các hệ số xác định theo (8.51) vào (8.29) ta được

$$\dot{U}(y) = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{\gamma l} e^{-\gamma(l-y)} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma l} e^{\gamma(l-y)} \quad (8.52a)$$

$$\dot{I}(y) = \frac{1}{2Z_c} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{\gamma l} e^{-\gamma(l-y)} - \frac{1}{2Z_c} (\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma l} e^{\gamma(l-y)} \quad (8.52b)$$

với ký hiệu: $y = l - x$ là khoảng cách từ điểm đang xét đến cuối đường dây ta được

$$\dot{U}(y) = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{\gamma y} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma y} \quad (8.53a)$$

$$\dot{I}(y) = \frac{1}{2Z_c} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{\gamma y} - \frac{1}{2Z_c} (\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma y} \quad (8.53b)$$

khi đưa vào các hàm hyperbolic, phương trình (8.53) có thể viết dưới dạng khác

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_2 Ch\gamma y + Z_c \dot{I}_2 Sh\gamma y \quad (8.54a)$$

$$\dot{I}(y) = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} Sh\gamma y + \dot{I}_2 Ch\gamma y \quad (8.54b)$$

Các phương trình này cho phép ta xác định điện áp và dòng điện tại

một điểm bất kỳ cách cuối đường dây một đoạn là y theo điện áp và dòng điện thứ cấp \dot{U}_2, \dot{I}_2 . Nếu $y = l$ (tức $x = 0$) thì

$$\begin{cases} \dot{U}(y=l) = \dot{U}_1 \\ \dot{I}(y=l) = \dot{I}_1 \end{cases}$$

Ta có
$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{Ch}\gamma l + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{Sh}\gamma l \quad (8.55a)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \operatorname{Sh}\gamma l + \dot{I}_2 \operatorname{Ch}\gamma l \quad (8.55b)$$

khi thay $\dot{I}'_2 = -\dot{I}_2$, ta có
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{Ch}\gamma l - Z_c \operatorname{Sh}\gamma l \dot{I}'_2 \\ \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{Sh}\gamma l}{Z_c} - \operatorname{Ch}\gamma l \dot{I}'_2 \end{cases}$$

Đây chính là phương trình ma trận A của ĐDD được xét như bốn cực. Ma trận A tương ứng là

$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{Ch}\gamma l & Z_c \operatorname{Sh}\gamma l \\ \frac{\operatorname{Sh}\gamma l}{Z_c} & \operatorname{Ch}\gamma l \end{bmatrix} \quad (8.56)$$

Ma trận này giống như ma trận của bốn cực có thông số tập trung (Chương 5 - Mạch điện I) nếu ta thừa nhận $\gamma = g$ với g là hệ số truyền đạt sóng của bốn cực.

Khi đưa vào (8.50) dòng $\dot{I}'_2 = -\dot{I}_2$ ta có

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{Ch}\gamma l - Z_c \dot{I}_1 \operatorname{Sh}\gamma l \quad (8.57a)$$

$$\dot{I}'_2 = \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \operatorname{Sh}\gamma l - \dot{I}_1 \operatorname{Ch}\gamma l \quad (8.57b)$$

và ma trận B sẽ là

$$B = \begin{bmatrix} \operatorname{Ch}\gamma l & Z_c \operatorname{Sh}\gamma l \\ \frac{\operatorname{Sh}\gamma l}{Z_c} & \operatorname{Ch}\gamma l \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

Giống như ma trận A.

Cần chú ý rằng các điện áp \dot{U}_1 và \dot{U}_2 trong các công thức trên được xác định bởi

$$\dot{U}_1 = \dot{E} - Z_1 \dot{I}_1 \quad (8.59a)$$

$$\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2 \quad (8.59b)$$

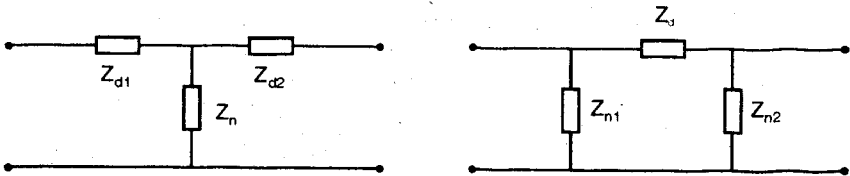
trong đó Z_1 - trở kháng nội của nguồn cung cấp

Z_2 - trở kháng tải; \dot{E} - sức điện động dạng phức.

Dựa vào các kết quả nhận được ở (8.56), ta thấy

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$$

Như vậy, bốn cực mô tả cho đường dây dài là có tính tương hỗ, tức là các ma trận của bốn cực chỉ có ba phần tử độc lập, do đó nó có thể được thay thế bởi một mạch điện đơn giản chỉ gồm có 3 phần tử. Kết cấu đơn giản nhất là sơ đồ tương đương hình T hay sơ đồ tương đương hình π như trên (H.8.7).



a) Mạch tương đương hình T; b) Mạch tương đương hình π

Hình 8.7: Sơ đồ bốn cực thay thế đường dây dài.

trong đó
$$Z_n = \frac{1}{A_{21}} = \frac{Z_c}{Sh\gamma l} \quad (8.60)$$

$$\begin{aligned} Z_{d1} &= \frac{A_{11} - 1}{A_{21}} = Z_c \frac{Ch\gamma l - 1}{Sh\gamma l} = Z_c \left(\frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l} - 2}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} \right) \\ &= Z_c \left[\frac{(e^{\gamma l/2} - e^{-\gamma l/2})^2}{(e^{\gamma l/2} - e^{-\gamma l/2})(e^{\gamma l/2} + e^{-\gamma l/2})} \right] = Z_c th \left(\frac{\gamma l}{2} \right) \\ Z_{d2} &= \frac{A_{22} - 1}{A_{21}} = Z_c th \frac{\gamma l}{2} \end{aligned} \quad (8.61)$$

$$Z_d = A_{12} = Z_c Sh\gamma l \quad (8.62)$$

$$Z_{n1} = \frac{A_{12}}{A_{22} - 1} = \frac{A_{12}}{A_{11} - 1} = \frac{Z_c}{th(\gamma l/2)} = Z_{n2} \quad (8.63)$$

(Các công thức tính cho bốn cực tương đương π hay T có thể tham khảo ở Chương 5 - Mạch điện I).

Ví dụ 8.4. Một đường dây dài 150m, có điện trở đơn vị: $R_o = 0,133 [\Omega/m]$, điện kháng đơn vị: $\omega L_o = 0,827 [\Omega/m]$; điện nạp đơn vị: $\omega C_o = 5,2 \cdot 10^{-6} [S/m]$; điện dẫn rò đơn vị: $G_o = 0$. Xác định các hệ số ma trận A của bốn cực tương đương đường dây nói trên.

Giải

$$\gamma = \sqrt{(0,133 + j0,827)j5,2 \cdot 10^{-6}} = 2,09 \cdot 10^{-3} \angle 85,4^\circ [1/m]$$

$$\gamma l = 0,313 \angle 85,4^\circ = 0,0251 + j0,312$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{0,133 + j0,827}{j5,2 \cdot 10^{-6}}} = 401 \angle -4,6^\circ [\Omega]$$

$$Ch\gamma l = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = \frac{1,025 \angle 17,9^\circ + 0,975 \angle -17,9^\circ}{2} = 0,952 \angle 0,5^\circ$$

$$Sh\gamma l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{2} = \frac{1,025 \angle 17,9^\circ - 0,975 \angle -17,9^\circ}{2} = 0,3084 \angle 85,6^\circ$$

Vậy các hệ số ma trận A

$$A_{11} = A_{22} = Ch\gamma l = 0,952 \angle 0,5^\circ$$

$$A_{12} = Z_c Sh\gamma l = 123,6 \angle 81^\circ [\Omega]$$

$$A_{21} = \frac{Sh\gamma l}{Z_c} = 0,00076 \angle 90,2^\circ [S]$$

Rõ ràng ta có thể kiểm tra lại $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$

8.3.4 Các thông số sóng của đường dây dài

Trong mục 8.3.1 ta đã đưa ra định nghĩa các thông số sóng của ĐDD, ở đây ta sẽ xét các tính chất của nó

1- Trở kháng sóng

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_o + j\omega L_o}{G_o + j\omega C_o}} = |Z_c(j\omega)| e^{j \arg Z_c(j\omega)} \quad (8.64)$$

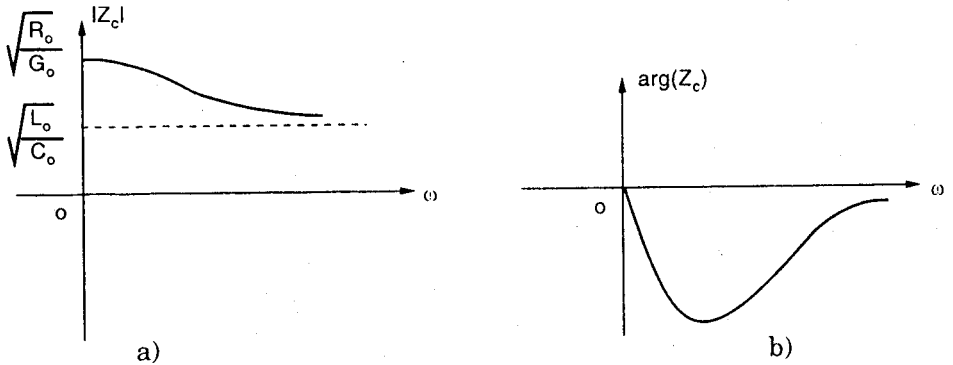
trong đó

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{L_o}{C_o} \frac{1 + \frac{R_o^2}{\omega^2 L_o^2}}{1 + \frac{G_o^2}{\omega^2 C_o^2}}} \quad (8.65)$$

$$\arg(Z_c) = \arctg \frac{\omega(L_o G_o - R_o C_o)}{R_o G_o + \omega^2 L_o C_o} \quad (8.66)$$

Đồ thị của hàm $|Z_c(j\omega)|$ và $\arg(Z_c)$ như trên H.8.8.

Ở tần số cao, khi $\omega \rightarrow \infty$ (gần với siêu cao tần), modul của trở kháng sóng tiến tới hằng số: $R_c = \sqrt{\frac{L_o}{C_o}}$; được gọi là điện trở đặc tính của đường dây, còn $\arg(Z_c)$ tiến tới 0.



Hình 8.8: Đồ thị của $|Z_c|$ và $\arg(Z_c)$ theo tần số.

Nếu các thông số của đường dây thỏa điều kiện

$$L_o G_o = R_o C_o \quad (8.67)$$

thì $|Z_c| = R_c$; và: $\arg(Z_c) = 0$ với mọi tần số. Đây là mô hình của loại đường dây không làm méo tín hiệu.

2- Hệ số truyền lan

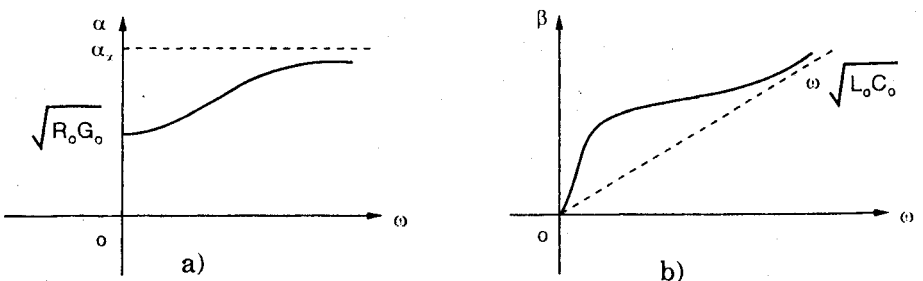
$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_o + j\omega L_o)(G_o + j\omega C_o)} \quad (8.68)$$

Sau khi biến đổi biểu thức (8.68) ta sẽ nhận được

$$\alpha(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(R_o G_o - \omega^2 L_o C_o) + \sqrt{(R_o^2 + \omega^2 L_o^2)(G_o^2 + \omega^2 C_o^2)} \right]} \quad (8.69)$$

$$\beta(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\omega^2 L_o C_o - R_o G_o) + \sqrt{(R_o^2 + \omega^2 L_o^2)(G_o^2 + \omega^2 C_o^2)} \right]} \quad (8.70)$$

Đồ thị của các hàm $\alpha(\omega)$ và $\beta(\omega)$ được vẽ trên H.8.9



Hình 8.9: Đồ thị của các hàm $\alpha(\omega)$ và $\beta(\omega)$

Hệ số suy hao đơn vị α sẽ tiến về giá trị tiệm cận α_∞ khi $\omega \rightarrow \infty$

$$\alpha_\infty = \frac{1}{2} \left[R_o \sqrt{\frac{C_o}{L_o}} + G_o \sqrt{\frac{L_o}{C_o}} \right] \quad (8.71)$$

Còn hệ số di pha β tiến tới tiệm cận được xác định bởi

$$\beta(\omega) = \omega \sqrt{L_o C_o} \quad (8.72)$$

Thứ nguyên các đại lượng γ, α, β là $\gamma \left[\frac{1}{m} \right]; \alpha \left[\frac{Np}{m} \right]$ hay $\alpha \left[\frac{dB}{m} \right]; \beta \left[\frac{rad}{m} \right]$.

Từ các phương trình (8.69) và (8.70) ta thấy rằng nếu điều kiện (8.67) thỏa mãn thì:

$$\gamma = \sqrt{R_o G_o} + j\omega \sqrt{L_o C_o} \quad (8.73)$$

tức là:
$$\alpha = \sqrt{R_o G_o}; \text{ và: } \beta = \omega \sqrt{L_o C_o} \quad (8.74)$$

Trong trường hợp này, đường dây có hệ số suy giảm không thay đổi đối với mọi tần số (đường dây không làm méo biên độ tín hiệu) còn hệ số di pha thì tỉ lệ tuyến tính với tần số (đường dây không làm méo pha của tín hiệu). Đường dây như vậy gọi là đường dây không gây méo, được đặc trưng bởi tốc độ pha không phụ thuộc tần số

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_o C_o}} = const \quad (8.75)$$

Trong trường hợp tổng quát, bên cạnh tốc độ pha (không thỏa điều kiện (8.67)), người ta đưa ra tốc độ nhóm sóng

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (8.76)$$

Để tìm hiểu ý nghĩa vật lý của đại lượng này, hãy giả thiết rằng, trên đường dây không méo đồng thời lan truyền hai tín hiệu sin có tần số ω_1 và ω_2 . Để đơn giản, ta giả thiết trên đường dây chỉ có sóng tới với biên độ và góc pha như nhau

$$u_{t1}(x, t) = \left| \dot{U} \right| e^{-\alpha x} \cos(\omega_1 t - \beta_1 x + \varphi) \quad (8.77a)$$

$$u_{t2}(x, t) = \left| \dot{U} \right| e^{-\alpha x} \cos(\omega_2 t - \beta_2 x + \varphi) \quad (8.77b)$$

Theo nguyên lý xếp chồng, điện áp tại một điểm x bất kỳ sẽ là tổng của các sóng tới

$$u(x, t) = u_{t1}(x, t) + u_{t2}(x, t) \quad (8.78)$$

Khi thay (8.77) vào (8.78) và thực hiện vài phép biến đổi lượng giác ta sẽ có

$$u(x,t) = 2 \left| \dot{U} \right| e^{-\alpha x} \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} x \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} x + \varphi \right) \quad (8.79)$$

Nếu các tần số ω_1 và ω_2 không khác nhau nhiều, tức là $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$ thì

$$\omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega; \quad \omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$$

$$\beta_1 + \beta_2 \approx 2\beta; \quad \beta_1 - \beta_2 = \Delta\beta$$

phương trình (8.79) sẽ được viết lại

$$u(x,t) = 2 \left| \dot{U} \right| e^{-\alpha x} \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\beta}{2} x \right) \cos(\omega t - \beta x + \varphi) \quad (8.80)$$

Bởi vì $\Delta\omega \ll \omega$ nên thành phần

$$2 \left| \dot{U} \right| e^{-\alpha x} \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\beta}{2} x \right)$$

Có thể coi là biên độ biến thiên chậm của điện áp $u(x, t)$ lan truyền trên đường dây với tốc độ pha: $v = \frac{\omega}{\beta}$

Tốc độ lan truyền sự thay đổi biên độ là tốc độ dịch chuyển của các điểm đồng pha dọc theo đường dây, tức là: $\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\beta}{2} x = \text{const}$

với tốc độ

$$v_g = \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (8.81)$$

Tốc độ v_g - là tốc độ lan truyền dọc đường dây của nhóm sóng có tần số khác nhau, nhưng lan truyền với cùng tốc độ pha trong trường hợp đường dây không gây méo.

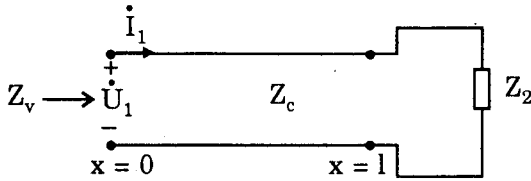
Đối với đường dây không méo, β là hàm tuyến tính của ω khi đó tốc độ pha và tốc độ nhóm sóng bằng nhau

$$v = v_g = \frac{1}{\sqrt{L_o C_o}} \quad (8.82)$$

Đường dây thỏa mãn điều kiện này là đường dây không tán xạ.

Trong thực tế, điều kiện $L_o G_o = R_o C_o$ thường không thỏa mãn, thông thường $L_o G_o < R_o C_o$. Để tăng tích số $L_o G_o$ người ta phải tăng điện cảm đơn vị của đường dây dài, điều đó có thể thực hiện được bằng nhân tạo, tức là có thể nối thêm vào đường dây tại những điểm thích hợp các điện cảm tập trung.

8.3.5 Trở kháng vào của đường dây dài



Hình 8.10: Sơ đồ xét trở kháng vào ĐDD.

Phương trình (8.55) cho phép ta xác định trở kháng vào của ĐDD có độ dài \$l\$ và trở kháng tải \$Z_2\$ (H.8.10)

$$Z_v = Z_c \frac{Z_2 \operatorname{Ch} \gamma l + Z_c \operatorname{Sh} \gamma l}{Z_2 \operatorname{Sh} \gamma l + Z_c \operatorname{Ch} \gamma l} = Z_c \frac{Z_2 + Z_c \operatorname{th} \gamma l}{Z_c + Z_2 \operatorname{th} \gamma l} \quad (8.83)$$

Sau khi biến đổi, trở kháng vào có dạng

$$Z_v = Z_c \frac{1 + \dot{n}_2 e^{-2\gamma l}}{1 - \dot{n}_2 e^{-2\gamma l}} \quad (8.84)$$

trong đó

$$\dot{n}_2 = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} \quad (8.85)$$

được gọi là hệ số phản xạ tại cuối đường dây.

Hãy xét trở kháng vào của đường dây dài trong các trường hợp đặc biệt sau

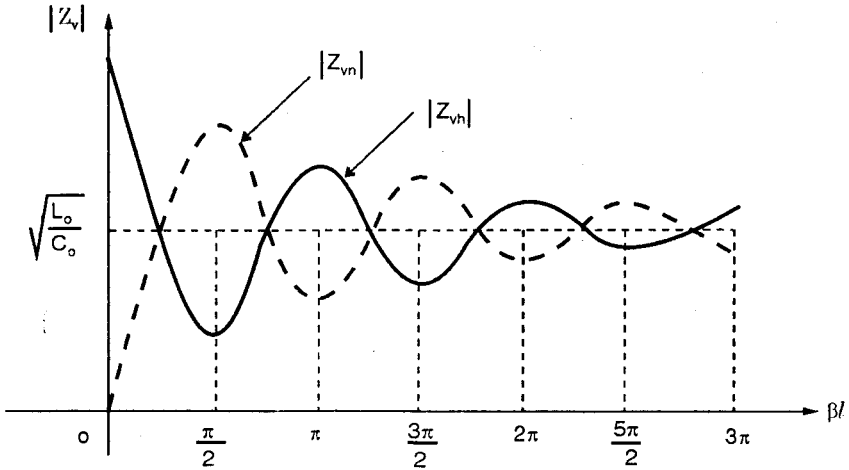
- Đường dây hở mạch cuối, tức \$Z_2 = \infty\$. Khi đó \$\dot{n}_2 = 1\$ và trở kháng vào bằng

$$Z_v = Z_{vh} = Z_c \operatorname{coth} \gamma l = Z_c \frac{1 + e^{-2\gamma l}}{1 - e^{-2\gamma l}} \quad (8.86)$$

- Đường dây ngắn mạch cuối, tức \$Z_2 = 0\$. Khi đó \$\dot{n}_2 = -1\$ và trở kháng vào bằng

$$Z_v = Z_{vn} = Z_c \operatorname{th} \gamma l = Z_c \frac{1 - e^{-2\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}} \quad (8.87)$$

Đồ thị biểu diễn modul trở kháng vào là hàm của \$\beta l\$ trong hai trường hợp trên được cho trên H.8.11. Modul của trở kháng vào ngắn mạch và hở mạch đều tiến tới modul của trở kháng sóng của ĐDD khi \$\beta l \to \infty\$.



Hình 8.11: Đồ thị modul trở kháng vào ngắn mạch và hở mạch.

Tại các điểm: $\beta l = \frac{\pi}{2} + k\pi$, modul trở kháng vào ngắn mạch (hở mạch) đạt giá trị cực đại (cực tiểu).

Còn tại các điểm: $\beta l = k\pi$, modul trở kháng vào ngắn mạch (hở mạch) đạt giá trị cực tiểu (cực đại).

Các điểm cực trị trên, nằm trên đường bao, biểu diễn bởi hàm $|\coth \gamma l|$.

Còn các điểm cực trị dưới nằm trên đường bao, mô tả bởi hàm $|th \gamma l|$.

Các trở kháng vào ngắn mạch và hở mạch được dùng để xác định các thông số sóng của ĐDD. Dựa trên các công thức (8.86) và (8.87) có thể suy ra công thức

$$Z_c = \sqrt{Z_{vn} \cdot Z_{vh}} \quad (8.88a)$$

$$th \gamma l = \sqrt{\frac{Z_{vn}}{Z_{vh}}} \quad (8.88b)$$

Ví dụ 8.5. Người ta đo được trở kháng vào ngắn mạch và hở mạch của đường dây song hành; dài $l = 200\text{km}$; làm việc ở tần số $\omega = 5.10^3$ (rad/s) là

$$Z_{vn} = 516 \angle 0^\circ 13' [\Omega]$$

$$Z_{vh} = 747 \angle -26^\circ 30' [\Omega]$$

Xác định các thông số sóng của đường dây $Z_c, \gamma, \alpha, \beta$.

Giải. Trở kháng sóng của đường dây được xác định theo (8.88a)

$$Z_c = \sqrt{Z_{vn} \cdot Z_{vh}} = 620 \angle -13^\circ [\Omega]$$

Hệ số lan truyền được xác định theo (8.88b)

$$\text{th}\gamma l = \sqrt{\frac{Z_{vn}}{Z_{vh}}} = 0,806 + j0,193$$

vì

$$\text{th}\gamma l = \frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1} \rightarrow e^{2\gamma l} = \frac{1 + \text{th}\gamma l}{1 - \text{th}\gamma l}$$

$$\rightarrow \gamma l = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \text{th}\gamma l}{1 - \text{th}\gamma l} \right] = \frac{1}{2} \ln \left[6,72e^{j54^\circ} \right]$$

$$\rightarrow \alpha l = \frac{1}{2} \ln(6,72) \rightarrow \alpha = 47,6 \cdot 10^{-4} \text{ [Np/km]}$$

$$\text{và } \beta l = 0,47 + k\pi \rightarrow \beta = 0,235 \cdot 10^{-2} + 0,0157k \text{ [rad/km]}$$

8.3.6 Đường dây hòa hợp tải

Đường dây hòa hợp tải (đường dây được phối hợp trở kháng) là đường dây có trở kháng tải bằng trở kháng sóng, tức là

$$Z_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_c \quad (8.89)$$

Khi đưa điều kiện (8.89) vào (8.53) ta sẽ được

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 e^{\gamma(l-x)} \quad (8.90a)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_2 e^{\gamma(l-x)} \quad (8.90b)$$

Tại $x = 0$, thì

$$\dot{U}(x=0) = \dot{U}_2 e^{\gamma l} = \dot{U}_1 \quad (8.91a)$$

$$\dot{I}(x=0) = \dot{I}_2 e^{\gamma l} = \dot{I}_1 \quad (8.91b)$$

Biểu thức (8.90) khi chú ý đến điều kiện bờ (8.91) sẽ là hệ phương trình biên độ phức của điện áp và dòng điện tại một điểm x bất kỳ, phụ thuộc vào điện áp và dòng điện tại đầu đường dây

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_1 e^{-\gamma x} \quad (8.92a)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_1 e^{-\gamma x} \quad (8.92b)$$

Trở kháng vào của đường dây dài hòa hợp tải sẽ là

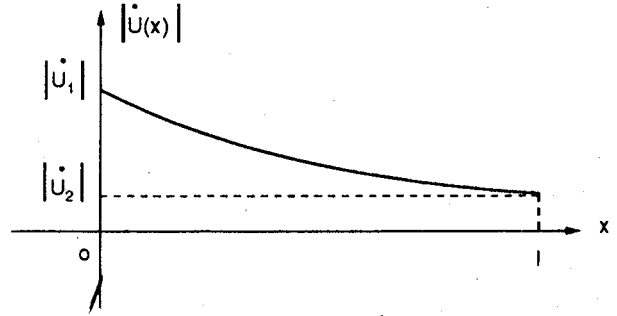
$$Z_v = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = Z_c \quad (8.93)$$

Điện áp và dòng điện tức thời tại một điểm bất kỳ suy ra từ (8.93)

$$u(x,t) = \left| \dot{U}_1 \right| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi) \quad (8.94a)$$

$$i(x,t) = \left| \dot{I}_1 \right| e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi - \arg(Z_c)) \quad (8.94b)$$

Như có thể thấy từ các biểu thức (8.94), điện áp và dòng điện trên đường dây hòa hợp chỉ có thành phần sóng tới, biến thiên theo qui luật sin, có biên độ suy giảm hàm mũ theo khoảng cách x , còn trễ pha thì tăng tuyến tính theo x (H.8.12).



Hình 8.12: Phân bố biên độ điện áp trên đường dây hòa hợp tải

8.3.7 Hệ số phản xạ, hệ số sóng đứng

1- Hệ số phản xạ

Từ phương trình (8.53) có thể thấy rằng hệ số phản xạ ở cuối đường dây được định nghĩa theo (8.85) là tỉ số giữa biên độ phức của điện áp sóng phản xạ và sóng tới tại cuối dây ($y = 0$).

Nếu ký hiệu sóng tới và phản xạ tại một điểm cách cuối đường dây một đoạn là y

$$\dot{U}_t = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma y} \quad (8.95a)$$

$$\dot{U}_{fx} = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma y} \quad (8.95b)$$

$$\dot{I}_t = \frac{1}{2Z_c} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma y} \quad (8.95c)$$

$$\dot{I}_{fx} = \frac{1}{2Z_c} (\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2) e^{-\gamma y} \quad (8.95d)$$

và nếu xét tại cuối đường dây, ta có

$$\frac{\dot{U}_{fx2}}{\dot{U}_{t2}} = \frac{\dot{U}_2 - Z_c \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_{fx2}}{\dot{I}_{t2}} \quad (8.96)$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có $\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2$, nên

$$\frac{\dot{U}_{fx2}}{\dot{U}_{t2}} = \frac{\dot{I}_{fx2}}{\dot{I}_{t2}} = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} = \dot{n}_2 \quad (8.97)$$

Khi đường dây được phối hợp trở kháng, tức là $Z_2 = Z_c$, ta có $\dot{n}_2 = 0$, do đó trên đường dây không có sóng phản xạ mà chỉ có sóng tới. Từ (8.97) có thể suy ra

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{t2} + \dot{U}_{fx2} = \dot{U}_{t2} \left(1 + \frac{\dot{U}_{fx2}}{\dot{U}_{t2}} \right) = \dot{U}_{t2} (1 + \dot{n}_2) \quad (8.98a)$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{t2} - \dot{I}_{fx2} = \dot{I}_{t2} \left(1 - \frac{\dot{I}_{fx2}}{\dot{I}_{t2}} \right) = \dot{I}_{t2} (1 - \dot{n}_2) \quad (8.98b)$$

Trong nhiều trường hợp, người ta cần có hệ số phản xạ tại một điểm trên đường dây dài, hệ số đó được xác định

$$\dot{n} = \frac{\dot{U}_{fx}(x)}{\dot{U}_t(x)} = \frac{\dot{I}_{fx}(x)}{\dot{I}_t(x)} = \dot{n}_2 e^{-2\gamma(l-x)} \quad (8.99)$$

2- Hệ số sóng đứng

Bây giờ, hãy nghiên cứu sự phân bố của điện áp và dòng điện trên DDD. Từ phương trình (8.53) và (8.85) có thể đưa ra biểu thức

$$\dot{U}(y) = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) e^{\gamma y} (1 + \dot{n}_2 e^{-2\gamma l}) \quad (8.100)$$

và
$$\dot{U}_{t2} = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + Z_c \dot{I}_2) \quad (8.101)$$

nên
$$\dot{U}(y) = \dot{U}_{t2} e^{\gamma y} (1 + \dot{n}_2 e^{-2\gamma l}) \quad (8.102)$$

Modul của điện áp $U = \sqrt{\dot{U} \dot{U}^*}$

Thay (8.102) vào biểu thức trên, ta có

$$U = \sqrt{\dot{U}_{t2} e^{\gamma y} (1 + \dot{n}_2 e^{-2\gamma l}) \dot{U}_{t2} e^{\gamma y} (1 + \dot{n}_2 e^{-2\gamma l})^*}$$

$$U = U_{t2} e^{\alpha y} \sqrt{1 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \dot{n}_2 e^{-2\gamma l} \right\} + \dot{n}_2^2 e^{-4\alpha y}} \quad (8.103)$$

Hãy xét thành phần thứ hai trong căn thức của (8.103) ta thấy

$$2 \operatorname{Re}\{n_2 e^{-2\gamma y}\} = 2 \operatorname{Re}\{n_2 e^{j\theta_2} e^{-2\alpha y} e^{-j2\beta y}\} = 2n_2 e^{-2\alpha y} \cos(\theta_2 - 2\beta y)$$

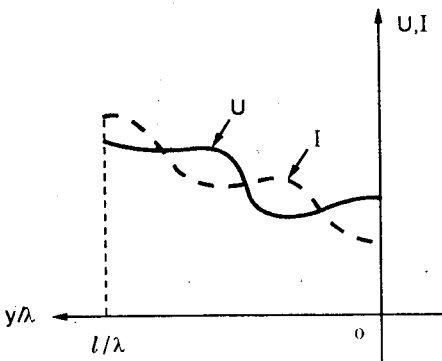
với $n_2 = n_2 e^{j\theta_2}$. Cuối cùng ta có

$$U = U_{t2} e^{\alpha y} \sqrt{1 + 2n_2 e^{-2\alpha y} \cos(\theta_2 - 2\beta y) + n_2^2 e^{-4\alpha y}} \quad (8.104)$$

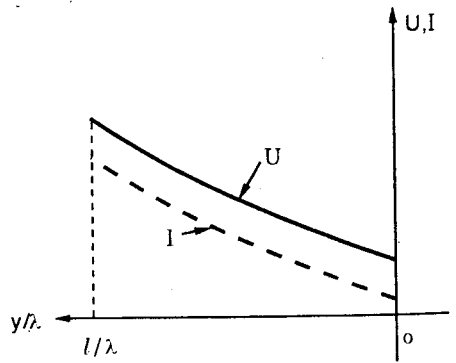
Biểu thức (8.104) cho biết sự phân bố của biên độ điện áp trên *DDD*. Bằng cách làm tương tự, ta sẽ nhận được biểu thức đối với dòng điện

$$I = \frac{U_{t2}}{|Z_c|} e^{\alpha y} \sqrt{1 - 2n_2 e^{-2\alpha y} \cos(\theta_2 - 2\beta y) + n_2^2 e^{-4\alpha y}} \quad (8.105)$$

Sự phân bố biên độ điện áp và dòng điện trên *DDD* theo các biểu thức (8.104) và (8.105) không phụ thuộc vào thời gian nên được gọi là sự phân bố sóng đứng. Từ (8.104), ta thấy các giá trị cực tiểu của điện áp xuất hiện ở những khoảng cách mà: $\cos(\theta_2 - 2\beta y) = -1$; và tại đó sẽ có giá trị cực đại của dòng điện. Sự phân bố biên độ của điện áp và dòng điện dọc *DDD* được biểu diễn trên H.8.13. Đường liền nét tương ứng với phân bố điện áp và đường nét đứt tương ứng với phân bố dòng điện.



Hình 8.13



Hình 8.14

Với đường dây dài hòa hợp tải, các công thức (8.104) và (8.105) sẽ có dạng

$$U = U_{t2} e^{\alpha y} = U_2 e^{\alpha y} \quad (8.106)$$

$$I = \frac{U_{t2}}{Z_c} e^{\alpha y} = I_2 e^{\alpha y} \quad (8.107)$$

Từ (8.106) và (8.107) có thể thấy rằng sự phân bố của sóng đứng trên *DDD* hòa hợp tải là hàm đơn điệu theo khoảng cách (H.8.14).

Để đặc trưng cho sự phân bố điện áp và dòng điện trên đường dây dài người ta đưa ra hệ số sóng đứng (*SWR*) được định nghĩa như sau

$$SWR = \frac{|\dot{U}_t| + |\dot{U}_{fx}|}{|\dot{U}_t| - |\dot{U}_{fx}|} = \frac{|\dot{I}_t| + |\dot{I}_{fx}|}{|\dot{I}_t| - |\dot{I}_{fx}|} \quad (8.108)$$

$$\text{Vì} \quad \left| \frac{\dot{U}_{fx}}{\dot{U}_t} \right| = n_2 e^{-2\alpha y} \quad (8.109)$$

$$\text{nên} \quad SWR = \frac{1 + n_2 e^{-2\alpha y}}{1 - n_2 e^{-2\alpha y}}$$

Có thể nhận thấy rằng, cả hệ số phản xạ và hệ số sóng đứng đều là hàm của khoảng cách kể từ cuối đường dây. Trong trường hợp đường dây hòa hợp tải, $n_2 = 0$ thì $SWR = 1$.

8.3.8 Đường dây dài vô hạn

Trong trường hợp đường dây dài vô hạn, tức là $l \rightarrow \infty$, nó sẽ có các tính chất tương tự ĐDD hòa hợp tải. Trên đường dây chỉ có sóng tới được mô tả bởi biểu thức (8.90) và (8.94), và tại một điểm bất kỳ trên ĐDD ta luôn có

$$\frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = Z_c \quad (8.111)$$

Trở kháng vào của đường dây dài vô hạn

$$Z_v = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_c \quad (8.112)$$

8.3.9 Các quan hệ năng lượng trên đường dây dài

Trong trường hợp tổng quát, đường dây có những quan hệ năng lượng như sau:

P_1 - công suất cung cấp từ nguồn cho ĐDD.

P_2 - công suất cung cấp cho tải

$P_{dd} = P_1 - P_2$ công suất tổn thất trên đường dây

$P_t(x)$ - công suất của sóng tới.

$P_{fx}(x)$ - công suất của sóng phản xạ

Các công suất P_1, P_2 được xác định theo các biểu thức

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_1 I_1^* \right\} = \frac{1}{2} \left| \dot{I}_1 \right|^2 \operatorname{Re} \{ Z_0 \} \quad (8.113)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_2 I_2^* \right\} = \frac{1}{2} \left| \dot{I}_2 \right|^2 \operatorname{Re} \{ Z_2 \} \quad (8.114)$$

và công suất tại một điểm y tính từ cuối dây xác định

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \dot{U} I^* \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{t2} e^{y} (1+n) \frac{\dot{U}_{t2}^* e^{y^*} (1-n^*)}{Z_c^*} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ U_{t2}^2 e^{2ay} \cdot \frac{1}{Z_c^*} \left[1-n^2 + j2 \operatorname{Im}(n) \right] \right\} \end{aligned}$$

Nếu ta ký hiệu $Y_c = \frac{1}{Z_c} = G + jB$

thì ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ U_{t2}^2 e^{2ay} (G - jB) \left[1-n^2 + j2 \operatorname{Im}(n) \right] \right\} \\ P &= \frac{1}{2} U_{t2}^2 e^{2ay} \cdot \left\{ G(1-n^2) + 2B \operatorname{Im}(n) \right\} \end{aligned} \quad (8.115a)$$

ở đây n - hệ số phản xạ tại điểm đang xét.

Nếu như trở kháng sóng của đường dây dài là số thực thì ta sẽ có:

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} = G \text{ và } B = 0$$

Do đó

$$P = \frac{1}{2} U_{t2}^2 e^{2ay} \cdot \frac{1}{Z_c} (1-n^2) \quad (8.115b)$$

$$\rightarrow P = \frac{1}{2} \left[\frac{\left| \dot{U}_t(x) \right|^2}{Z_c} - \frac{\left| \dot{U}_{fx}(x) \right|^2}{Z_c} \right] = P_t(x) - P_{fx}(x)$$

Bởi vì

$$\frac{\dot{U}_t(x)}{\dot{I}_t(x)} = Z_c; \quad \frac{\dot{U}_{fx}(x)}{\dot{I}_{fx}(x)} = Z_c$$

nên công suất của sóng tới và công suất sóng phản xạ có thể được xác định theo

$$P_t(x) = \frac{1}{2} \left| \dot{I}_t(x) \right|^2 Z_c \quad (8.116a)$$

$$P_{fx}(x) = \frac{1}{2} \left| \dot{I}_{fx}(x) \right|^2 Z_c \quad (8.116b)$$

và
$$\dot{I}_t(x) = \dot{I}_{t1} e^{-\gamma x} \quad (8.117a)$$

$$\dot{I}_{fx}(x) = \dot{I}_{fx1} e^{\gamma x} = \dot{I}_{fx2} e^{-\gamma(l-x)} \quad (8.117b)$$

Nên có thể viết (8.116) dưới dạng

$$P_t(x) = \frac{1}{2} \left| \dot{I}_{t1} \right|^2 Z_c e^{-2\alpha x} = P_{t1} e^{-2\alpha x} \quad (8.118a)$$

$$P_{fx}(x) = \frac{1}{2} \left| \dot{I}_{fx2} \right|^2 Z_c e^{-2\alpha(l-x)} = P_{fx2} e^{-2\alpha(l-x)} \quad (8.118b)$$

Từ đó
$$P_{t2} = P_t(x=l) = P_{t1} e^{-2\alpha l}$$

$$P_{fx1} = P_{fx}(x=0) = P_{fx2} e^{-2\alpha l}$$

Với
$$P_{t1} = \frac{1}{2} \left| \dot{I}_{t1} \right|^2 Z_c, P_{fx2} = \frac{1}{2} \left| \dot{I}_{fx2} \right|^2 Z_c \quad (8.120)$$

Tỉ số giữa công suất sóng phản xạ và sóng tới tại cuối dây

$$\frac{P_{fx2}}{P_{t2}} = \frac{\left| \dot{I}_{fx2} \right|^2}{\left| \dot{I}_{t2} \right|^2} = \left| \dot{n}_2 \right|^2 = n_2^2 \quad (8.121)$$

Ở điều kiện bờ
$$P_2 = P_{t2} - P_{fx2} \quad (8.122a)$$

$$P_1 = P_{t1} - P_{fx1} \quad (8.122b)$$

Công suất tiêu hao trên đường dây

$$P_{dd} = P_1 - P_2 = (P_{t1} - P_{t2}) - (P_{fx1} - P_{fx2})$$

Hiệu suất của đường dây được xác định

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100\%$$

Cần chú ý rằng công suất sóng tới $P_t(x)$ suy giảm hàm mũ theo sự tăng của khoảng cách kể từ đầu đường dây, từ giá trị cực đại của nó là P_{t1} còn công suất sóng phản xạ tăng hàm mũ theo sự tăng của x và đạt giá

trị cực đại tại cuối đường dây là P_{fx2} .

Ví dụ 8.6. Cho một đường dây có trở kháng sóng $Z_c = 100 [\Omega]$ và độ dài $l = 100$ [m], được phối hợp trở kháng tại cuối đường dây và được cung cấp nguồn áp sin lý tưởng ở đầu đường dây với biên độ $|\dot{E}| = 20$ [V]. Công suất tổn thất trên đường dây $P_{dd} = 1$ [W]. Hãy tìm hệ số suy giảm đơn vị của đường dây.

Giải. Công suất tổn thất trên đường dây

$$P_{dd} = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \frac{|\dot{E}|^2}{Z_c} [1 - e^{-2\alpha l}]$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-2\alpha l} = \frac{2P_{dd} Z_c}{|\dot{E}|^2} \Rightarrow e^{-2\alpha l} = 1 - \frac{2P_{dd} Z_c}{|\dot{E}|^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2l} \ln \left[1 - \frac{2P_{dd} Z_c}{|\dot{E}|^2} \right] = -\frac{1}{200} \ln \left[1 - \frac{200}{400} \right] = 0,346 \cdot 10^{-2} \text{ [Np/m]}$$

Với đường dây truyền tải điện, người ta đặc biệt quan tâm đến vấn đề truyền tải năng lượng điện. Đường dây truyền tải điện làm việc ở tần số rất thấp (50 ÷ 60 Hz), tức là bước sóng rất lớn. Môi trường giữa hai dây thường là không khí, và nối chung được cách điện rất tốt, các thông số đặc trưng của nó sẽ là

$$Z_o = R_o + j\omega L_o \quad (8.123a)$$

$$Y_o = j\omega C_o \text{ (thường cho } G_o = 0) \quad (8.123b)$$

$$\gamma = \sqrt{(R_o + j\omega L_o)(j\omega C_o)} = \sqrt{j\omega R_o C_o - \omega^2 L_o C_o} \quad (8.124a)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_o + j\omega L_o}{j\omega C_o}} = \sqrt{\frac{L_o}{C_o} - j \frac{R_o}{\omega C_o}} \quad (8.124b)$$

Nếu ta ký hiệu $Z = Z_o l$ và $Y = Y_o l$ thì từ các công thức (8.55) và (8.124) có thể suy ra nghiệm của phương trình đường dây tải điện

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 Ch\sqrt{ZY} + Z_c \dot{I}_2 Sh\sqrt{ZY} \quad (8.125a)$$

$$i_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_c} Sh\sqrt{ZY} + i_2 Ch\sqrt{ZY} \quad (8.125b)$$

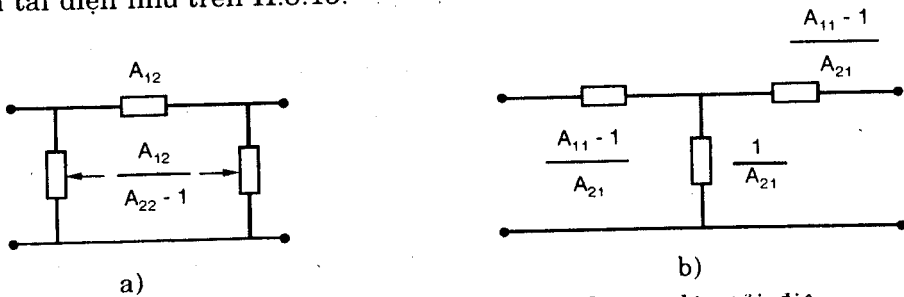
Ma trận A của đường dây tải điện

$$A = \begin{bmatrix} Ch\sqrt{ZY} & Z_c Sh\sqrt{ZY} \\ \frac{1}{Z_c} Sh\sqrt{ZY} & Ch\sqrt{ZY} \end{bmatrix} \quad (8.126)$$

Khi thực hiện khai triển chuỗi các hàm hyperbolic và chỉ giữ lại hai số hạng đầu, ta có

$$A_{11} = 1 + \frac{ZY}{2}; A_{21} = Y \left(1 + \frac{ZY}{6} \right); A_{12} = Z \left(1 + \frac{ZY}{6} \right); A_{22} = A_{11} \quad (8.127)$$

Từ đây có thể suy ra các sơ đồ tương đương dạng T, π của đường dây truyền tải điện như trên H.8.15.



Hình 8.15. Sơ đồ tương đương π, T của đường dây tải điện.

Các quan hệ năng lượng của đường dây tải điện được xác định dựa trên (8.125)

$$\dot{U}_1 = A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{I}_2$$

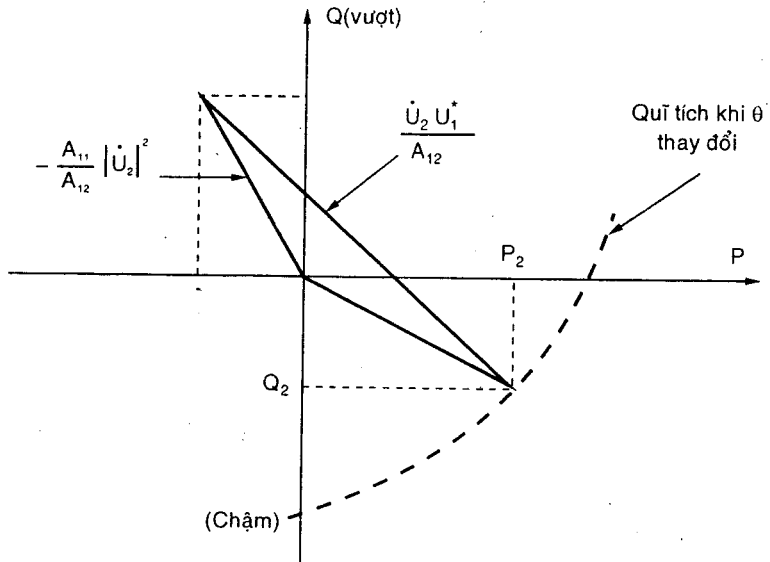
$$\frac{\dot{U}_2 \dot{U}_1^*}{A_{12}} = \frac{A_{11}}{A_{12}} \left| \dot{U}_2 \right|^2 + \dot{U}_2 \dot{I}_2^*$$

Suy ra
$$\dot{U}_2 \dot{I}_2^* = \frac{\dot{U}_2 \dot{U}_1^*}{A_{12}} - \frac{A_{11}}{A_{12}} \left| \dot{U}_2 \right|^2 = P_2 + jQ_2 \quad (8.128)$$

$$\Rightarrow P_2 + jQ_2 = \frac{\left| \dot{U}_1 \right| \left| \dot{U}_2 \right| \angle \theta}{A_{12}} - \frac{A_{11}}{A_{12}} \left| \dot{U}_2 \right|^2 \quad (8.129)$$

Nếu ta xem áp tại đầu và cuối đường dây có biên độ không đổi, thì rõ ràng, vế phải của (8.129) vạch nên một cung tròn, thay đổi theo góc lệch pha θ giữa áp đầu và cuối đường dây. Đồ thị vòng công suất nhận được

cho trên H.8.16.



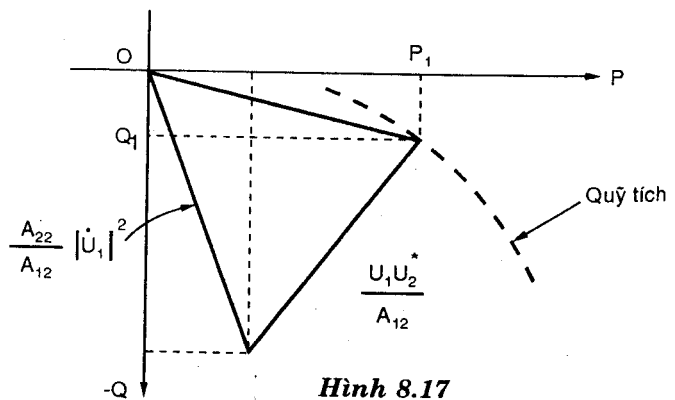
Hình 8.16: Đồ thị vòng công suất nhận

Vectơ $\frac{\dot{U}_2 \dot{U}_1^*}{A_{12}}$; có biên độ không đổi, góc pha thay đổi sẽ vạch nên

một cung tròn từ đó xác định các giá trị khác nhau của P_2 và Q_2 . Giới hạn của quỹ tích này có thể xác định từ giới hạn góc lệch pha θ giữa điện áp đầu và cuối đường dây.

Mặt khác ta lại có:

$\dot{U}_2 = A_{22} \dot{U}_1 - A_{12} \dot{I}_1$ (ma trận A và B là như nhau, xem (8.56) và (8.58)



Hình 8.17

Đồ thị vòng công suất phát

$$\Rightarrow \dot{U}_1 \dot{I}_1^* = \frac{A_{22}}{A_{12}} \left| \dot{U}_1 \right|^2 - \frac{\dot{U}_1 \dot{U}_2^*}{A_{12}}$$

$$\Rightarrow P_1 + jQ_1 = \frac{A_{22}}{A_{12}} \left| \dot{U}_1 \right|^2 - \frac{\dot{U}_1 \dot{U}_2^*}{A_{12}} \tag{8.130}$$

Với phân tích tương tự phần trên, từ phương trình (8.130) ta sẽ có đồ

thị vòng công suất phát như trên H.8.17.

8.4 ĐƯỜNG DÂY KHÔNG TỔN HAO

8.4.1 Nghiệm của phương trình đường dây không tổn hao

Đường dây không tổn hao là đường dây có các thông số đơn vị thỏa mãn

$$R_o = 0 \text{ và } G_o = 0 \quad (8.131)$$

Trong thực tế, không thể tồn tại đường dây không tổn hao theo đúng điều kiện trên, mặc dù trong những trường hợp nào đó người ta có thể chấp nhận. Ví dụ như đường dây làm việc ở tần số cao, do có $R_o \ll \omega L_o$ và $G_o \ll \omega C_o$, nên người ta có thể bỏ qua R_o và G_o . Như vậy, đường dây không tổn hao chỉ là một giả thiết để làm đơn giản việc phân tích và biểu diễn nghiệm của phương trình DDD .

Đường dây không tổn hao sẽ có các thông số thứ cấp như sau

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = j\beta = j\omega\sqrt{L_o C_o} \\ \alpha = 0; \beta = \omega\sqrt{L_o C_o} \\ Z_c = \sqrt{\frac{L_o}{C_o}} = R_c \\ v = v_g = \frac{1}{\sqrt{L_o C_o}} = const \end{array} \right. \quad (8.132)$$

Đường dây không tổn hao có hệ số suy giảm đơn vị bằng không ở mọi tần số, còn hệ số β tỉ lệ tuyến tính với tần số. Do đó đường dây không tổn hao là đường dây không gây méo. Bên cạnh đó, biên độ của các sóng điện áp và dòng điện lan truyền trên đường dây là như nhau, như vậy đường dây không tổn hao là đường dây không tán xạ, tốc độ pha và tốc độ nhóm sóng bằng nhau và không phụ thuộc vào tần số.

Nghiệm của phương trình DDD được xác định từ các công thức: (8.29), (8.50), (8.52), (8.54) áp dụng cho DDD không tổn hao

$$\dot{U}(x) = Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x} \quad (8.133a)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{A}{Z_c} e^{-j\beta x} - \frac{B}{Z_c} e^{j\beta x} \quad (8.133b)$$

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cos \beta x - jZ_c \dot{I}_1 \sin \beta x \quad (8.134a)$$

$$I(x) = -j \frac{\dot{U}_1}{Z_c} \sin \beta x + \dot{I}_1 \cos \beta x \quad (8.134b)$$

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_{t2} e^{j\beta y} + \dot{U}_{fx2} e^{-j\beta y} \quad (8.135a)$$

$$\dot{I}(y) = \frac{\dot{U}_{t2}}{Z_c} e^{j\beta y} - \frac{\dot{U}_{fx2}}{Z_c} e^{-j\beta y} \quad (8.135b)$$

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_2 \cos \beta y + jZ_c \dot{I}_2 \sin \beta y \quad (8.136a)$$

$$\dot{I}(y) = j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta y + \dot{I}_2 \cos \beta y \quad (8.136b)$$

trong đó: $y = l - x$; các công thức sóng tới và phản xạ được định nghĩa ở (8.95)

Quá trình thời gian của điện áp và dòng điện tương ứng

$$u(x, t) = |A| \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) + |B| \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) = u_t(x, t) + u_{fx}(x, t) \quad (8.137a)$$

$$i(x, t) = \frac{|A|}{Z_c} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) - \frac{|B|}{Z_c} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_2) = i_t(x, t) - i_{fx}(x, t) \quad (8.137b)$$

Có thể thấy từ các biểu thức trên, điện áp và dòng điện trên đường dây là xếp chồng của sóng tới và sóng phản xạ, biên độ của chúng không thay đổi theo khoảng cách, còn góc pha thì phụ thuộc tuyến tính theo khoảng cách x .

Hệ số di pha đơn vị β được xác định

$$\beta = \omega \sqrt{L_o C_o} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (8.138)$$

với λ là bước sóng lan truyền trên DDD. Công thức (8.138) chứng tỏ rằng quan hệ giữa β và λ giống như giữa ω và T . Như vậy có thể coi các hàm $\dot{U}(x)$ và $\dot{I}(x)$ trong các công thức (8.134), (8.136) là hàm tuần hoàn theo khoảng cách với chu kỳ

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (8.139)$$

khi đưa vào độ đo góc, có thể chứng minh các hàm $\dot{U}(x)$, $\dot{I}(x)$ là hàm tuần hoàn theo βy với chu kỳ

$$\beta \lambda = 2\pi \quad (8.140)$$

tích số: $\beta l = 2\pi \cdot \frac{l}{\lambda}$ - được gọi là độ dài góc của đường dây nó phụ thuộc

vào tỉ số $\frac{l}{\lambda}$, biểu thị sự phụ thuộc của góc pha vào sự dịch pha của điện

áp (dòng điện) từ đầu dây đến cuối dây.

Trở kháng vào của đường dây theo (8.83), (8.84)

$$Z_v = Z_c \frac{Z_2 \cos \beta l + j Z_c \sin \beta l}{Z_c \cos \beta l + j Z_2 \sin \beta l} = Z_c \frac{Z_2 + j Z_c \operatorname{tg} \beta l}{Z_c + j Z_2 \operatorname{tg} \beta l} \quad (8.141)$$

$$Z_v = Z_c \frac{1 + \dot{n}_2 e^{-j2\beta l}}{1 - \dot{n}_2 e^{-j2\beta l}} \quad (8.142)$$

Do tính chất tuần hoàn của $\dot{U}(x)$, $\dot{I}(x)$ với chu kỳ λ , người ta phân biệt các đường dây có độ dài đặc biệt sau

Đường dây phân tư sóng: là đường dây có độ dài bằng số lẻ lần $\lambda/4$

$$l = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}; \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (8.143)$$

Đường dây bán sóng: là đường dây có độ dài bằng số chẵn lần $\lambda/4$

$$l = 2k(\lambda/4); \quad k = 1, 2 \dots \quad (8.144)$$

Đường dây phân tư sóng có độ dài góc

$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} (2k + 1) \frac{\lambda}{4} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}; \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Khi đó $\operatorname{tg}(\beta l) = \infty$ và trở kháng vào bằng

$$Z_v = \frac{Z_c^2}{Z_2} \quad (8.145)$$

Với đường dây bán sóng ta có $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2k \frac{\lambda}{4} = k\pi$

Khi đó $\operatorname{tg}(\beta l) = 0$ và trở kháng vào bằng

$$Z_v = Z_2 \quad (8.146)$$

8.4.2 Phân bố điện áp và dòng điện trên ĐDD không tổn hao

1- Đường dây không tổn hao hòa hợp tải

Khi trở kháng thỏa điều kiện

$$Z_2 = Z_c = \sqrt{\frac{L_o}{C_o}} = R_c \quad (8.147)$$

là một số thực thuần túy, thì tại một điểm bất kỳ trên đường dây thuộc $[0, l]$ ta sẽ có các quan hệ

$$\frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_v = Z_c = R_c \quad (8.148)$$

Các biểu thức mô tả điện áp và dòng điện trên *DDD* không tổn hao, hòa hợp tải sẽ là

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_1 e^{-j\beta x} \quad (8.149a)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_1 e^{-j\beta x} \quad (8.149b)$$

$$u(x, t) = \left| \dot{U}_1 \right| \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad (8.150a)$$

$$i(x, t) = \left| \dot{I}_1 \right| \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1) \quad (8.150b)$$

Các biểu thức (8.150) cho thấy trên đường dây chỉ tồn tại sóng tới, không có sóng phản xạ là do $Z_2 = Z_c$ và $n_2 = 0$.

Công suất của nguồn được đưa toàn bộ đến tải qua sóng tới. Hình 8.18 biểu diễn quá trình sóng tới điện áp (dòng điện) trên đường dây hòa hợp tải tại các thời điểm: $t_k = k \frac{T}{12}$; $k = 0, 1, \dots, 12$

Có dạng
$$u(x, t_k) = \left| \dot{U}_1 \right| \cos(\omega t_k - \beta x) \quad (8.151)$$

Có thể nhận thấy từ H.8.18, đường thẳng nối các điểm cùng pha cho biết: sau một khoảng thời gian bằng chu kỳ, sóng sẽ đi được một quãng đường bằng độ dài bước sóng.

Đường dây không tổn hao hòa hợp tải có các tính chất sau

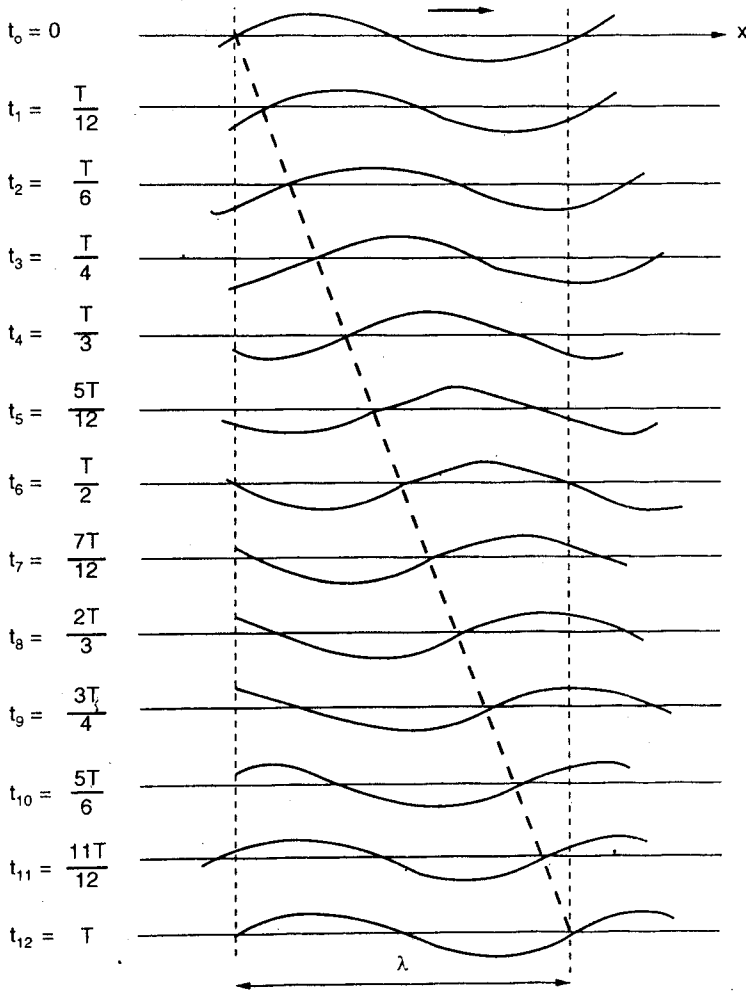
- Công suất phát của nguồn điện được đưa hoàn toàn đến tải qua sóng tới (không có sóng phản xạ)

- Tải của nguồn tác động là điện trở, không phụ thuộc độ dài đường dây và tần số làm việc

$$Z_v = Z_c$$

- Biên độ của điện áp và dòng điện không phụ thuộc độ dài đường dây và tần số nguồn tác động. Điều đó đảm bảo không có méo biên độ.

- Tốc độ pha và tốc độ nhóm sóng bằng nhau và không phụ thuộc tần số nguồn tác động, điều đó đảm bảo không có méo pha.



Hình 8.18: Sóng tới trên đường dây không tổn hao

2- Đường dây không tổn hao, hở mạch đầu cuối

Đường dây hở mạch cuối: $Z_2 = \infty$; $I_2 = 0$

Các công thức (8.136) có dạng

$$\dot{U}(y) = \dot{U}_2 \cos \beta y \tag{8.152a}$$

$$\dot{I}(y) = j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta y \tag{8.152b}$$

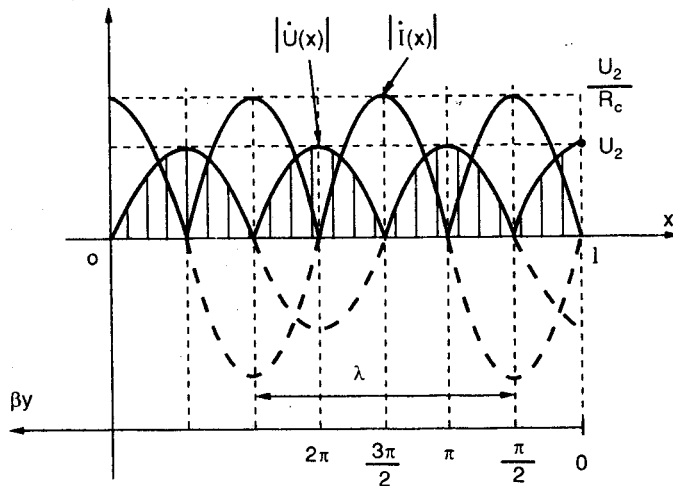
Các quá trình thời gian của điện áp và dòng điện

$$u(x, t) = \left| \dot{U}_2 \cos \beta y \right| \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (8.153a)$$

$$i(x, t) = \frac{\left| \dot{U}_2 \sin \beta y \right|}{Z_c} \cos\left(\omega t + \varphi_2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad (8.153b)$$

trong đó $y = l - x; \dot{U}_2 = \left| \dot{U}_2 \right| e^{j\varphi_2}$

Đồ thị của $\left| \dot{U}(x) \right|$ và $\left| \dot{I}(x) \right|$ theo βy được gọi là sự phân bố sóng đứng điện áp và dòng điện trên đường dây không tổn hao hở mạch đầu cuối, được biểu diễn trên (H.8.19).



Hình 8.19: Sóng đứng trên đường dây không tổn hao, hở mạch cuối.

Tại các điểm trên đường dây thỏa mãn

$$\beta y = (2k+1) \frac{\pi}{2}; \quad k = 0, 1, 2$$

hay $y = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \quad (8.154b)$

thì sóng đứng điện áp có giá trị bằng không, còn sóng đứng dòng điện có giá trị cực đại.

Tại các điểm thỏa mãn

$$\beta y = k\pi. \text{ hay } y = k \frac{\lambda}{2} \quad (8.155)$$

Sóng đứng điện áp có giá trị cực đại, còn sóng đứng dòng điện có giá trị bằng không.

Các giá trị cực đại của sóng đứng điện áp và dòng điện được gọi là “bụng sóng”, còn các cực tiểu được gọi là “nút sóng”. Sự phân bố của áp suất so với dòng điện một góc $\pi/4$. Chú ý rằng theo các công thức (8.109) và (8.110) hệ số sóng đứng và hệ số sóng chạy (được định nghĩa là nghịch đảo của hệ số sóng đứng) sẽ là

$$SWR = \infty; \frac{1}{SWR} = 0 \quad (8.156)$$

Tên gọi sóng đứng cho thấy rằng, tất cả các giá trị đặc trưng cho sóng đứng như: giá trị cực đại, giá trị cực tiểu, trị trung bình không thay đổi trên đường dây. Từ H.8.19 có thể thấy rằng: hai lần khoảng cách giữa hai nút hay bụng kề nhau bằng độ dài của một sóng đứng và bằng λ .

Sóng đứng cũng có thể được biểu diễn qua kết quả xếp chồng các sóng tới và sóng phản xạ. Theo công thức (8.135) khi $I_2 = 0$ ta có

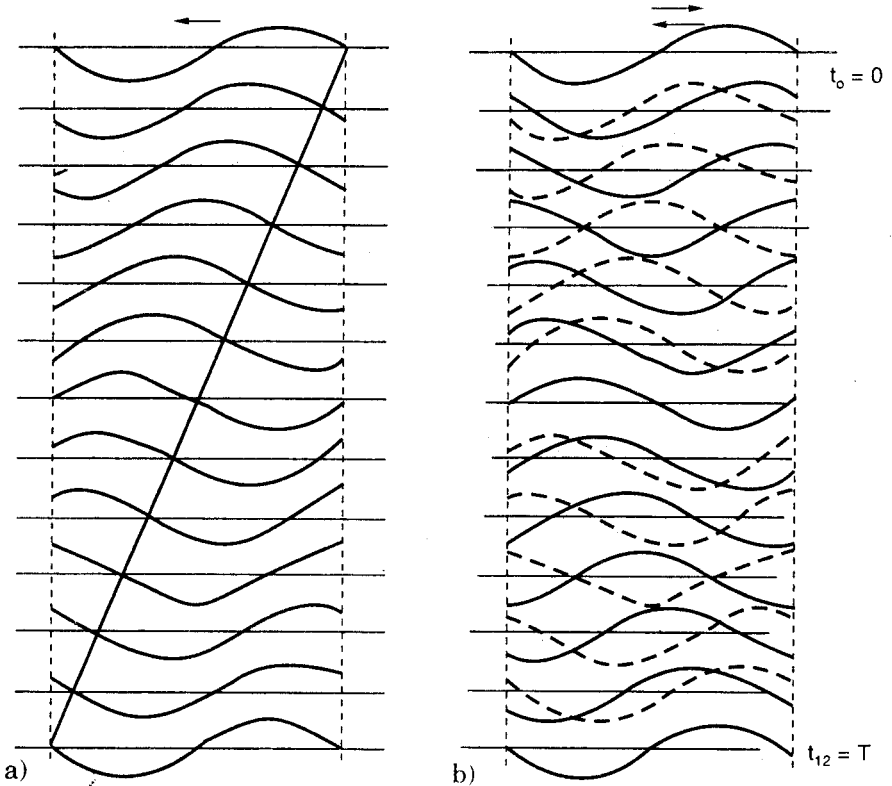
$$\dot{U}(y) = \frac{\dot{U}_2}{2} e^{j\beta y} + \frac{\dot{U}_2}{2} e^{-j\beta y} \quad (8.157a)$$

$$\dot{I}(y) = \frac{\dot{U}_2}{2Z_c} e^{j\beta y} - \frac{\dot{U}_2}{2Z_c} e^{-j\beta y} \quad (8.157b)$$

Từ đây có thể thấy rằng: $\dot{U}_2 = 2\dot{U}_{t2}$, $\dot{I}_2 = 0$

Điều đó có nghĩa là, điện áp ở cuối đường dây bằng hai lần điện áp sóng tới, còn dòng điện bằng không. Các kết quả nhận được có thể giải thích như sau: bởi vì quá trình thời gian của điện áp tại mỗi điểm trên đường dây trễ so với dòng một góc $\pi/2$, do đó công suất tiêu hao trên đường dây $P_{dd} = 0$, công suất tác dụng trên tải bằng không, nên công suất của nguồn cung cấp không bị thay đổi từ đầu dây đến cuối dây và không bị suy giảm khi trả lại nguồn dưới dạng sóng phản xạ. Đường dây có đặc trưng điện kháng, trên các đoạn của hai nút kề nhau của điện áp và dòng điện có sự trao đổi năng lượng điện từ trường.

Hình 8.20a biểu thị sự phân bố của sóng phản xạ dòng điện dọc đường dây tại các thời điểm t_k , cách nhau $T/12$, bắt đầu tại $t_0 = 0$. Nếu đặt H.8.20a và H.8.18 chồng lên H.8.20b, và thực hiện cộng các sóng tới và sóng phản xạ ta sẽ được phân bố sóng dọc theo DDD . Sóng nhận được không hề bị dịch chuyển trên đường dây chính là sóng đứng.



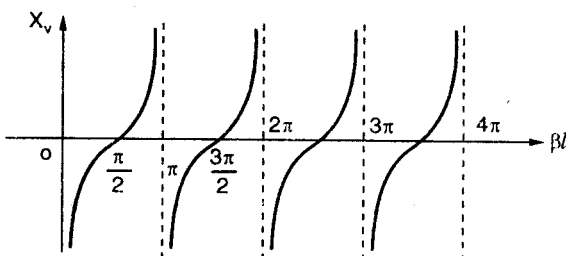
Hình 8.20: Sóng trên đường dây không tổn hao, hở mạch cuối.

Cũng có thể minh họa sự phân bố trở kháng vào của đường dây theo βl . Dựa vào (8.141) ta có

$$Z_v = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = -jZ_c \cot g\beta l = jX_v \tag{8.158}$$

Đồ thị của Z_v theo βl được biểu diễn trên (H.8.2). Ở các khoảng cách có độ dài $\pi/2$ được xác định bởi

$$k\pi < \beta l < (2k+1)\frac{\pi}{2}; \quad k = 0, 1, 2... \tag{8.159}$$



Hình 8.2: Phân bố điện kháng vào ĐDD không tổn hao, hở mạch cuối

điện kháng vào là dung kháng, còn ở các đoạn

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} < \beta l < (2k+2)\frac{\pi}{2} \quad (8.160)$$

điện kháng vào là cảm kháng.

Với đường dây là phần tư sóng, tại các điểm

$$\beta l = (2k+1)\frac{\pi}{2}; \quad l = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad (8.161)$$

sẽ xuất hiện các “bụng” dòng điện và “nút” điện áp, ta có: $X_v(\beta l) = 0$

điều đó chứng tỏ có cộng hưởng nối tiếp. Như vậy đường dây phần tư sóng hở mạch đầu cuối có trở kháng vào bằng không.

Với đường dây nửa sóng, tại các điểm

$$\beta l = k\pi \quad \text{hay} \quad l = k\frac{\lambda}{2} \quad (8.162)$$

sẽ xuất hiện các “bụng” điện áp và “nút” dòng điện, và: $X_v(\beta l) = \infty$

điều đó chứng tỏ có cộng hưởng song song. Đường dây nửa sóng hở mạch đầu cuối có trở kháng vào là vô cùng.

Ví dụ 8.7. Đường dây không tổn hao hở mạch cuối có trở kháng sóng $Z_c = 600 \text{ } [\Omega]$; chiều dài $l = 100 \text{ [km]}$, hệ số dịch pha $\beta = 0,01 \text{ [rad/km]}$.

Biết biên độ phức của điện áp đầu đường dây: $\dot{U}_1 = 60 \angle 0^\circ \text{ [V]}$. Hãy xác định biên độ phức dòng điện tại đầu đường dây và điện áp tại cuối đường dây.

Giải. Độ dài góc của đường dây: $\beta l = 1 \text{ [rad]}$

Biên độ phức của dòng điện tại đầu đường dây

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_v} = \frac{\dot{U}_1}{-jZ_c \cot g\beta l} = \frac{60}{-j600 \cot g(57,3^\circ)} = 0,155 \angle 90^\circ \text{ [A]}$$

Biên độ phức của áp tại cuối đường dây: $\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cos \beta l} = 111 \text{ [V]}$

8.4.3 Đường dây không tổn hao ngắn mạch cuối

Đường dây dài ngắn mạch cuối: $Z_2 = 0$; $\dot{U}_2 = 0$

Phương trình (8.136) có dạng

$$\dot{U}(x) = jZ_c \dot{I}_2 \sin \beta y \quad (8.163a)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cos \beta y \quad (8.163b)$$

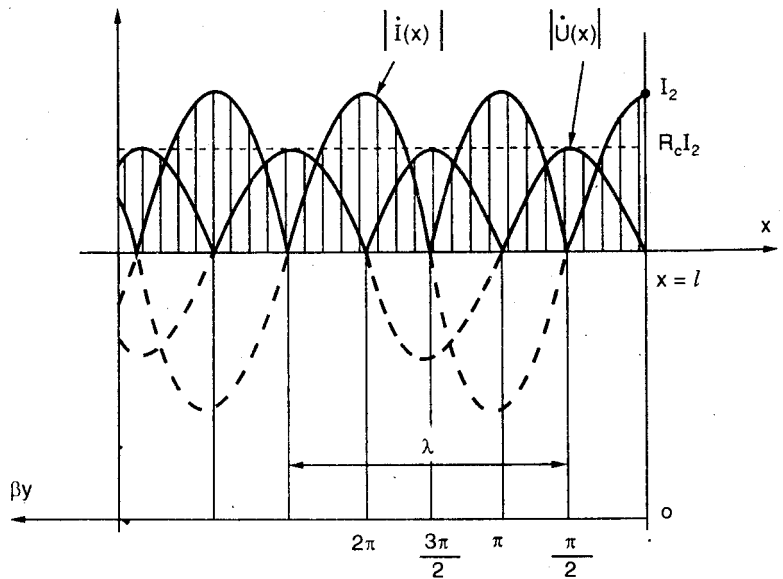
Quá trình thời gian tương ứng

$$u(x, t) = \left| Z_c \dot{I}_2 \sin \beta y \right| \cos \left(\omega t + \psi_2 + \frac{\pi}{2} \right) \quad (8.164a)$$

$$i(x, t) = \left| \dot{I}_2 \cos \beta y \right| \cos(\omega t + \psi_2) \quad (8.164b)$$

trong đó $y = l - x$; $\dot{I}_2 = \left| \dot{I}_2 \right| e^{j\psi_2}$

phân bố của $\left| \dot{U}(x) \right|$ và $\left| \dot{I}(x) \right|$ theo βy được cho trên H.8.22.



Hình 8.22: Sóng đứng điện áp và dòng điện khi đường dây ngắn mạch cuối

Từ hình vẽ có thể thấy rằng, cũng giống như trong trường hợp đường dây dài không tổn hao hở mạch cuối, sóng đứng trong trường hợp này có các tính chất như sau

- Phân bố điện áp trễ $\lambda/4$ so với dòng điện.
- Tại mỗi điểm trên đường dây, giá trị tức thời của điện áp nhanh pha hơn so với dòng điện một góc $\pi/2$.
- Hệ số sóng đứng và hệ số sóng chạy

$$SWR = \infty; \frac{1}{SWR} = 0 \quad (8.165)$$

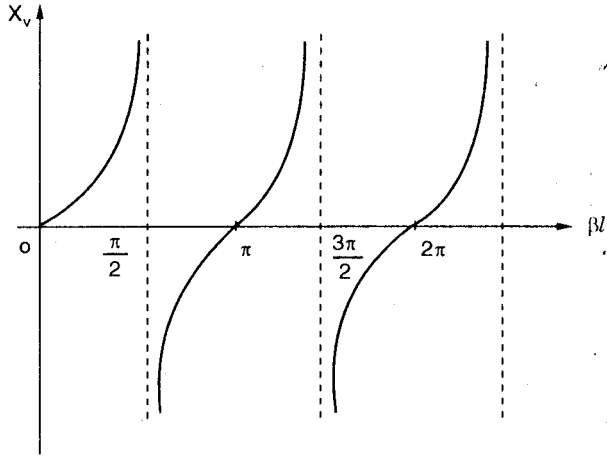
- Trở kháng vào của đường dây được xác định bởi công thức

$$Z_v = jZ_c \operatorname{tg} \beta l = jX_v \quad (8.166)$$

Đồ thị biểu diễn của $X_v(\beta l)$ được biểu diễn trên H.8.23. Trên các khoảng cách được xác định theo (8.159) và (8.160), đường dây ngắn mạch là cảm kháng và dung kháng. Ở các điểm theo (8.161) sẽ có các “bụng” của điện áp và “nút” của dòng điện. Theo đường dây phần tư sóng $X_v(\beta l) = 0$

điều đó chứng tỏ có cộng hưởng song song. Như vậy đường dây không tổn hao, phần tư sóng, ngắn mạch cuối có trở kháng vào vô cùng lớn.

Ở các điểm xác định theo (8.162) tương ứng với “bụng” của dòng điện và nút của điện áp (đường dây bán sóng): $X_v(\beta l) = 0$



Hình 8.23: Điện kháng vào đường dây không tổn hao ngắn mạch cuối.

điều đó chứng tỏ có cộng

hưởng nối tiếp. Do đó đường dây bán sóng ngắn mạch cuối có trở kháng vào bằng không.

Bởi vì: $Z_2 = 0$; nên: $n_2 = -1$; trên đường dây có sóng phản xạ.

Từ (8.135), khi: $\dot{U}_2 = 0$, ta có

$$\dot{U}(x) = \frac{Z_c \dot{I}_2}{2} e^{j\beta y} - \frac{Z_c \dot{I}_2}{2} e^{-j\beta y} \quad (8.167a)$$

$$\dot{I}(x) = \frac{\dot{I}_2}{2} e^{j\beta y} + \frac{\dot{I}_2}{2} e^{-j\beta y} \quad (8.167b)$$

Từ đó suy ra tại một điểm bất kỳ trên đường dây

$$\left| \dot{U}_t(x) \right| = \left| \dot{U}_{fx}(x) \right| = \frac{Z_c I_2}{2} \quad (8.168a)$$

$$\left| \dot{I}_t(x) \right| = \left| \dot{I}_{fx}(x) \right| = \frac{I_2}{2} \quad (8.168b)$$

Xét cuối dây với $y = 0$, từ phương trình (8.167) ta có

$$\left| \dot{I}_2 \right| = 2 \left| \dot{I}_{t2} \right|$$

Có nghĩa là biên độ dòng điện ở cuối đường dây gấp hai lần biên độ sóng tới.

8.4.4 Đường dây không tổn hao tải bất kỳ

Phương trình biên độ phức của điện áp và dòng điện trong trường hợp này sẽ là

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{t2} e^{j\beta y} + \dot{U}_{fx2} e^{-j\beta y} \quad (8.169a)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{t2} e^{j\beta y} - \dot{I}_{fx2} e^{-j\beta y} \quad (8.169b)$$

Có thể viết dưới dạng khác

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{t2} (e^{j\beta y} + \dot{n}_2 e^{-j\beta y}) \quad (8.170a)$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_{t2} (e^{j\beta y} - \dot{n}_2 e^{-j\beta y}) \quad (8.170b)$$

Với tải bất kỳ, \dot{n}_2 là một số phức có dạng

$$\dot{n}_2 = \left| \dot{n}_2 \right| e^{j\theta_2} = n_2 \angle \theta_2 \quad \text{với } -\pi \leq \theta_2 < \pi$$

Biến đổi (8.170) ta có

$$U = \left| \dot{U}(x) \right| = \left| \dot{U}_{t2} \right| \sqrt{1 + 2n_2 \cos(2\beta y - \theta_2) + n_2^2} \quad (8.171a)$$

$$I = \left| \dot{I}(x) \right| = \left| \dot{I}_{t2} \right| \sqrt{1 - 2n_2 \cos(2\beta y - \theta_2) + n_2^2} \quad (8.171b)$$

các phương trình (8.171) cho phép xác định phân bố điện áp và dòng điện trên đường dây không tổn hao.

Các giá trị cực đại của U và cực tiểu của I sẽ đạt được khi

$$\cos(2\beta y - \theta_2) = 1 \quad (8.172)$$

Có nghĩa là
$$\beta y = \frac{\theta_2}{2} + k\pi; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.173)$$

Giá trị cực đại của áp và cực tiểu của dòng tương ứng các điểm ở trên là

$$\left| \dot{U}(x) \right|_{\max} = \left| \dot{U}_{t2} \right| (1 + \left| \dot{n}_2 \right|) \quad (8.174a)$$

$$\left| \dot{I}(x) \right|_{\min} = \left| \dot{I}_{t2} \right| (1 - \left| \dot{n}_2 \right|) \quad (8.174b)$$

Các giá trị cực tiểu của điện áp và cực đại của dòng điện sẽ đạt được khi

$$\cos(2\beta y - \theta_2) = -1 \quad (8.175)$$

tức là tại các điểm

$$\beta y = \frac{\theta_2}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k = 0, 1, 2... \quad (8.176)$$

Các giá trị điện áp và dòng điện tương ứng tại các điểm đó

$$\left| \dot{U}(x) \right|_{\min} = \left| \dot{U}_{t2} \right| (1 - \left| \dot{n}_2 \right|) \quad (8.177a)$$

$$\left| \dot{I}(x) \right|_{\max} = \left| \dot{I}_{t2} \right| (1 + \left| \dot{n}_2 \right|) \quad (8.177b)$$

Các công thức (8.174) và (8.177) cho thấy sự phân bố của sóng đứng điện áp và dòng điện trên đường dây (H.8.24).

Hệ số sóng đứng được định nghĩa tổng quát là

$$SWR = \frac{\left| \dot{U}_t(y) \right| + \left| \dot{U}_{fx}(y) \right|}{\left| \dot{U}_t(y) \right| - \left| \dot{U}_{fx}(y) \right|} = \frac{\left| \dot{I}_t(y) \right| + \left| \dot{I}_{fx}(y) \right|}{\left| \dot{I}_t(y) \right| - \left| \dot{I}_{fx}(y) \right|} \quad (8.178)$$

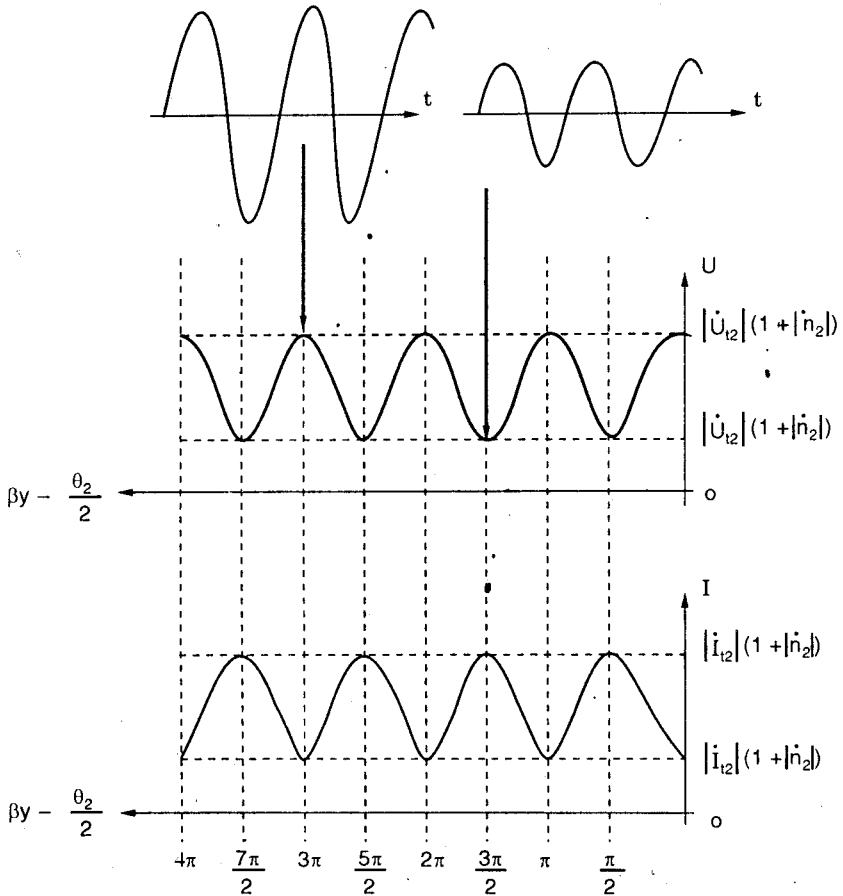
với trường hợp đang xét, ta có

$$SWR = \frac{\left| \dot{U}(y) \right|_{\max}}{\left| \dot{U}(y) \right|_{\min}} = \frac{\left| \dot{I}(y) \right|_{\max}}{\left| \dot{I}(y) \right|_{\min}} = \frac{1 + \left| \dot{n}_2 \right|}{1 - \left| \dot{n}_2 \right|} \quad (8.179)$$

và ta cũng nhận được $\left| \dot{n}_2 \right| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}$ (8.180)

Nhìn chung, hệ số SWR là một thông số dễ đo. Thiết bị chuyên dụng cho công việc này là SWR kế, làm việc trên nguyên tắc đo các thông số sóng đứng trên một cáp đồng trục có xẻ rãnh để lấy tín hiệu. Một thông số quan trọng cũng nhận được từ thiết bị này là y_{\min} : khoảng cách từ tải đến điểm cực tiểu điện áp đầu tiên. Như đã biết, hệ số phản xạ tại một điểm bất kỳ trên đường dây thỏa

$$\dot{n}(y) = \dot{n}_2 e^{-j2\beta y} = \left| \dot{n}_2 \right| \angle \theta_2 - 2\beta y$$



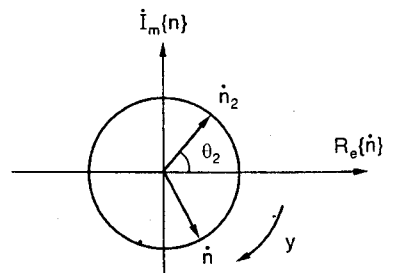
Hình 8.24: Phân bố sóng đứng trên đường dây không tổn hao, tải bất kỳ

Rõ ràng, quỹ tích của $\hat{n}(y)$ là một đường tròn, tâm trùng gốc tọa độ, bán kính bằng modul hệ số phản xạ tại tải $|\hat{n}_2|$, được minh họa như H.8.25.

Khi y thay đổi, góc pha hệ số phản xạ: $(\theta_2 - 2\beta y)$ sẽ thay đổi, và nếu như:

$$(\theta_2 - 2\beta y) = -\pi$$

sẽ làm cho áp cực tiểu lần thứ nhất. Nghiệm của biểu thức này là:



Hình 8.25: Đồ thị vòng hệ số phản xạ

$$y_{\min} = \frac{\theta_2 + \pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi}(\theta_2 + \pi) \quad (8.181)$$

(lưu ý ở đây $-\pi \leq \theta_2 < \pi$)

Ta có thể nhận thấy

- Khi Z_2 là thuần trở và lớn hơn Z_c , ta có $\theta_2 = 0$ và $y_{\min} = \frac{\lambda}{4}$. Điểm cực đại điện áp sẽ xuất hiện ngay tại tải.

- Khi Z_2 là thuần trở và nhỏ hơn Z_c , ta có $\theta_2 = -\pi$ và $y_{\min} = 0$. Tải chính là một điểm cực tiểu điện áp.

- SWR kể cũng có thể được dùng để đo trở kháng của tải bất kỳ khi biết trở kháng sóng của đường dây. Cách làm như sau: nếu biết được SWR và y_{\min} , biên độ và góc pha của hệ số phản xạ tại tải là

$$\left| \dot{n}_2 \right| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}; \quad \theta_2 = \frac{4\pi y_{\min}}{\lambda} - \pi \quad (8.182)$$

Từ đó, giá trị trở kháng tải

$$Z_2 = Z_c \frac{1 + \dot{n}_2}{1 - \dot{n}_2} \quad (8.183)$$

Ví dụ 8.8. Đường dây không tổn hao, chiều dài l , được cung cấp nguồn áp $e(t)$ và trở kháng tải cuối đường dây là Z_2 .

1. Trong trường hợp $Z_2 = Z_c$ và $Z_2 = \frac{1}{2}Z_c$, hãy xác định $e(t)$, nếu biết điện áp tức thời trên tải: $u_2(t) = 120 \sin(6\pi \cdot 10^4 t)$ [v] và $l = 400$ [m]

2. Trong cả hai trường hợp trên, hãy tính hệ số phản xạ tại cuối đường dây và hệ số sóng đứng.

Giải. Ta có: $\dot{U}_2 = 120 \angle 0^\circ$ [v]; $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^4} = 10^4$ [m]; $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = 0,08\pi$

[rad]

1- Khi $Z_2 = Z_c$ (đường dây được phối hợp trở kháng)

$$\dot{U}_2 = \dot{E} e^{-j\beta l} \rightarrow \dot{E} = \dot{U}_2 e^{j\beta l} = 120 e^{j0,08\pi} \text{ [v]}$$

hay

$$e(t) = 120 \sin(6\pi \cdot 10^4 t + 14^\circ 24') \text{ [v]}$$

2- Hệ số phản xạ và hệ số sóng đứng: $\dot{n}_2 = 0$, $SWR = 1$

3- Khi $Z_2 = \frac{1}{2}Z_c$

$$\dot{n}_2 = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} = -\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \angle -180^\circ; \text{ SWR} = \frac{1+n_2}{1-n_2} = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$$

Điện áp tại đầu đường dây

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \dot{U}_{t2}(e^{j\beta l} + \dot{n}_2 e^{-j\beta l}) = \frac{\dot{U}_2}{1+\dot{n}_2}(e^{j\beta l} + \dot{n}_2 e^{-j\beta l}) \\ &= \frac{120}{1-\frac{1}{3}} \left[e^{j14.4^\circ} - \frac{1}{3} e^{-j14.4^\circ} \right] = 180(0,646 + j0,332) = 131 \angle 27,2^\circ \text{ [V]} \end{aligned}$$

Suy ra $e(t) = 131 \sin(6\pi \cdot 10^4 t + 27,2^\circ)$ [V]

Trên đây vừa xét phân bố dòng áp trên đường dây không tổn hao trong một số trường hợp tải khác nhau. Sau đây có thể nêu ra một vài ứng dụng thực tế của đường dây không tổn hao trong kỹ thuật.

8.4.5 Đường dây biến áp $\lambda/4$

Trong thực tế, thường cần phải thực hiện phối hợp trở kháng tải với trở kháng nội của nguồn bằng các đoạn dây dài đặc biệt. Vấn đề này được thực hiện dễ dàng trong trường hợp các trở kháng đều là thực.

Khi xét đến biểu thức (8.141) về trở kháng vào đường dây không tổn hao, nếu chọn độ dài của đường dây sao cho

$$l = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.184)$$

thì ta có $Z_v = \frac{Z_c^2}{Z_2}$

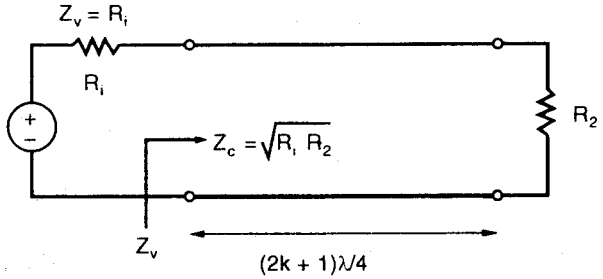
Điều kiện hòa hợp tải và nguồn: $Z_v = Z_i$, với Z_i = trở kháng nội của nguồn. Nếu: $Z_i = R_i$; và $Z_2 = R_2$ (H.8.26), ta có thể thực hiện phối hợp trở kháng giữa tải và nguồn nếu chọn đường dây có trở kháng sóng thỏa mãn

$$Z_c = \sqrt{R_i R_2} \quad (8.185)$$

khí đó $Z_v = R_i$

Nếu đường dây biến áp $\lambda/4$ được dùng để phối hợp sóng trên một mạch đường dây có $Z_2 \neq Z_c$ thì rõ ràng, nó chỉ được đặt tại các vị trí mà trở kháng vào trên đường dây là số thực thuần túy, tức là tại các điểm

bụng và nút điện áp. Do đó, trong khoảng cách nửa bước sóng tính từ tải, sẽ có hai vị trí để đặt đường dây biến áp $\lambda/4$.



Hình 8.26: Phối hợp trở kháng nhờ đường dây $\lambda/4$

8.4.6 Đường dây thực hiện mạch cộng hưởng

Như đã biết, trở kháng vào của đường dây $\lambda/4$ ngắn mạch cuối lớn vô cùng, điều đó cho phép sử dụng nó như một mạch cộng hưởng song song. Đường dây được sử dụng làm mạch cộng hưởng phải thỏa điều kiện: $R_o \ll \omega L_o$ và $G_o \ll \omega C_o$, trong đó có chú ý đến tổn hao.

Trở kháng vào của đường dây ngắn mạch cuối

$$Z_{vn} = Z_c \operatorname{th} \gamma l = Z_c \frac{\alpha l + jtg\beta l}{1 + j \operatorname{th} \alpha l \operatorname{tg} \beta l} \tag{8.186}$$

Nếu điện trở đơn vị của đường dây tương đối nhỏ, và $G_o = 0$ thì với $l = \lambda/4$ ta có

$$Z_{vn} \approx Z_c \cdot \frac{1}{\alpha l} = Z_{ch} \tag{8.187}$$

đại lượng này được gọi là trở kháng cộng hưởng của đường dây. Bây giờ hãy xét tính chất trở kháng vào của đường dây, ở tần số lân cận tần số tương ứng với $l = \lambda_o/4$, tức là

$$\lambda = \lambda_o + \Delta\lambda \tag{8.188}$$

với $\Delta\lambda \ll \lambda_o$. Khi thay (8.188) vào (8.186) ta có

$$Z_v(\lambda_o + \Delta\lambda) \approx Z_c \frac{\alpha l + j \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda_o + \Delta\lambda} \cdot \frac{\lambda_o}{4} \right)}{1 + j \alpha l \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda_o + \Delta\lambda} \cdot \frac{\lambda_o}{4} \right)} \approx Z_c \frac{\alpha l + j \operatorname{tg} \left[\frac{2\pi}{\lambda_o} \cdot \frac{\lambda_o}{4} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} \right) \right]}{1 + j \alpha l \operatorname{tg} \left[\frac{2\pi}{\lambda_o} \cdot \frac{\lambda_o}{4} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} \right) \right]}$$

Cuối cùng ta có

$$Z_v = Z_c \frac{\alpha l + j \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o}}}{1 + j \alpha l \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o}}} = Z_c \frac{\alpha l \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} + j}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} + j \alpha l} \tag{8.189}$$

Modul trở kháng vào

$$Z_v = \frac{Z_c}{\alpha l} \sqrt{\frac{\left(\alpha l \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} \cdot \frac{1}{\alpha l}\right)^2 + 1}} \quad (8.190)$$

Theo định nghĩa dải thông, là dải có tần số giới hạn sao cho

$$\frac{Z_v}{Z_{vii}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\left(\alpha \cdot \frac{\lambda_o}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} \cdot \frac{4}{\alpha\lambda_o}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (8.191)$$

Do suy giảm rất nhỏ, tức là: $\lambda_o \ll \frac{1}{\alpha\lambda_o}$ nên có thể tính

$$\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} \cdot \frac{4}{\alpha\lambda_o}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} \cdot \frac{4}{\alpha\lambda_o} = 1 \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o} = \frac{\alpha\lambda_o}{2\pi} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (8.192)$$

Độ rộng dải thông tương đối của mạch cộng hưởng

$$\frac{2\Delta\lambda}{\lambda_o} = \frac{2\alpha}{\beta} \quad (8.193)$$

và hệ số phẩm chất

$$Q = \frac{\beta}{2\alpha} \quad (8.194)$$

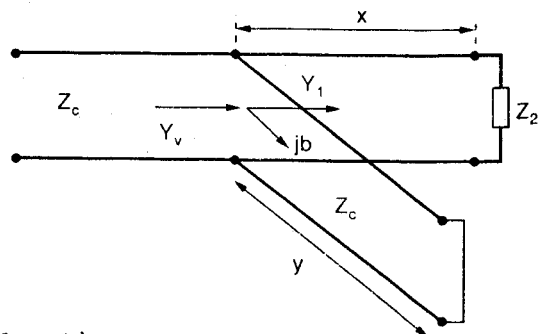
Khi suy giảm α rất nhỏ, phẩm chất Q sẽ có giá trị rất lớn (cỡ hàng nghìn). Đó chính là ưu điểm của mạch cộng hưởng bằng đường dây so với mạch cộng hưởng có thông số tập trung *RLC*.

8.4.7 Mạch vòng phối hợp tải

Y_1 - dẫn nạp vào đoạn dây x , tải Z_2

$j\beta$ - dẫn nạp vào cửa đường dây ngắn mạch

Y_v - dẫn nạp vào cửa mạch song song hai đường dây trên.



Hình 8.27: Kỹ thuật hòa hợp bằng mạch vòng đơn.

Một phương thức khác cũng thường được dùng trong việc phối hợp trở kháng đường dây dài là mạch vòng hòa hợp. Đây thường là một đường dây dài ngắn mạch cuối (vòng), bố trí song song với đường dây cần phối hợp và được đặt tại một vị trí tương thích tính từ tải. Trong kỹ thuật hòa hợp bằng mạch vòng đơn, người ta dùng một mạch vòng và sự phối hợp tải sẽ đạt được khi ta thay đổi vị trí đặt mạch vòng và chiều dài của nó. Giả sử trở kháng sóng của mạch vòng giống như trở kháng sóng của đường dây (H.8.27).

Rõ ràng, để không có sóng phản xạ trên đường dây Z_c phía bên trái của mạch vòng, thì ta phải có

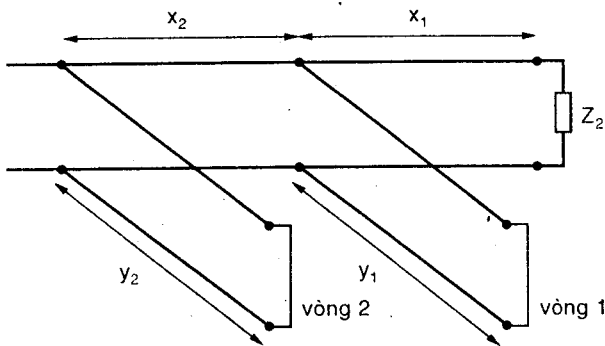
$$Y_v = Y_1 + jb = \frac{1}{Z_c} \quad (8.195)$$

Bài toán mạch vòng đơn là bài toán xác định x và y (trên H.8.27) ứng với các giá trị khác nhau của trở kháng tải Z_2 .

Áp dụng các công thức (8.141) hoặc (8.142) cho Y_1 trong (8.195) người ta sẽ nhận được hai lời giải của b (âm hoặc dương) ứng với các giá trị x . Các giá trị x chỉ nên chọn: $0 \leq x < \lambda/2$.

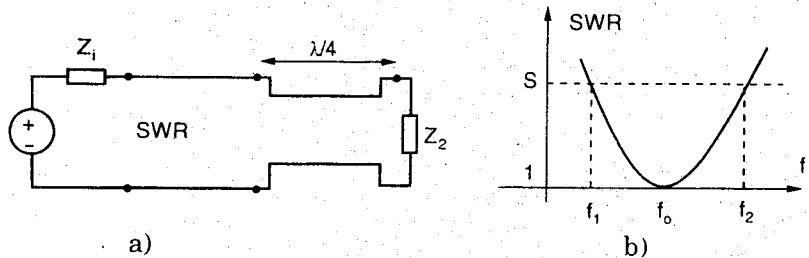
Từ giá trị b ta sẽ suy ra giá trị chiều dài mạch vòng y .

Trong mạch vòng đơn, về nguyên tắc để đạt phối hợp sóng, người ta cần thay đổi khoảng cách giữa mạch vòng và tải cũng như chiều dài mạch vòng ứng với các giá trị tải khác nhau hoặc tần số làm việc khác nhau. Nếu như dùng kỹ thuật mạch vòng đôi (H.8.28), sự hơn hẳn là ở chỗ người ta có thể cố định vị trí mạch vòng, sự phối hợp sóng vẫn có thể thực hiện bằng cách thay đổi chiều dài của các mạch vòng trong một khoảng biến thiên khá rộng của trở kháng tải.



Hình 8.28: Kỹ thuật phối hợp sóng nhờ mạch vòng đôi.

Một vấn đề cần lưu ý sau cùng ở phần này là trong các hệ thống phối hợp trở kháng trên ĐDD (đường dây biến áp $\lambda/4$, mạch vòng đơn, mạch vòng đôi ...), sự phối hợp trở kháng sẽ biến mất khi tần số thay đổi vì các khoảng cách so với bước sóng sẽ khác đi. Ví dụ, trong hệ đường dây biến áp $\lambda/4$, nếu tần số thay đổi, chiều dài của đường dây sẽ khác với $\lambda/4$. Hệ thống sẽ không có tính chất phối hợp trở kháng mặc dù tải không thay đổi. (H.8.29b) minh họa sự biến thiên của hệ số sóng đứng trên đường dây bên trái đường dây $\lambda/4$ (H.8.29a) theo tần số f .



Hình 8.29: Sự thay đổi theo tần số.

8.5 QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ TRÊN ĐƯỜNG DÂY DÀI

8.5.1 Phương trình toán tử của ĐDD

Khi thực hiện phép biến đổi Laplace lên trên phương trình ĐDD (8.17) đối với các đại lượng là hàm của thời gian, ta có

$$-\frac{dU(s)}{dx} = R_o I(s) + sL_o I(s) - L_o i_L(0^+) \quad (8.196a)$$

$$-\frac{dI(s)}{dx} = G_o U(s) + sC_o U(s) - C_o U_C(0^+) \quad (8.196b)$$

Trong trường hợp các điều kiện đầu bằng không, ta có thể đưa về dạng phương trình vi phân cấp hai như sau

$$\frac{d^2 U(s)}{dx^2} - \gamma^2 U(s) = 0 \quad (8.197)$$

với
$$\gamma(s) = \sqrt{(R_o + sL_o)(G_o + sC_o)} \quad (8.198)$$

= gọi là độ chấn sóng toán tử của ĐDD

Dòng điện
$$I(s) = -\frac{1}{(R_o + sL_o)} \frac{dU(s)}{dx} \quad (8.199)$$

Bằng cách sử dụng các điều kiện bờ

$$U(s)|_{x=0} = U_1(s) \tag{8.200a}$$

$$I(s)|_{x=0} = I_1(s) \tag{8.200b}$$

và ký hiệu
$$Z_c = \sqrt{\frac{R_o + sL_o}{G_o + sC_o}} \tag{8.201}$$

ta có nghiệm toán tử của phương trình ĐDD

$$\begin{cases} U(s) = U_1(s)Ch\gamma x - Z_c(s)I_1(s)Sh\gamma x & (8.202a) \\ I(s) = -\frac{U_1(s)}{Z_c(s)}Sh\gamma x + I_1(s)Ch\gamma x & (8.202b) \end{cases}$$

Việc phân tích nghiệm trong trường hợp tổng quát là tương đối khó khăn. Do đó, ta chỉ nêu ra một vài trường hợp cho việc tìm hiểu quá trình quá độ xuất hiện trên ĐDD và chỉ giới hạn bài toán khảo sát trên đường dây dài không tổn hao.

8.5.2 Đóng điện áp vào đường dây hở mạch cuối

Với đường dây trên H.8.30, ta có: $I_2(s) = 0$; $U_1(s) = \frac{E}{s}$

Đường dây không tổn hao nên

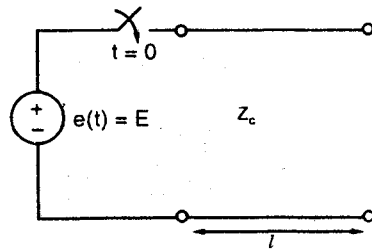
$$\gamma(s) = s\sqrt{L_o C_o}; \quad Z_c = \sqrt{\frac{L_o}{C_o}} = R_c$$

Từ (8.202) ta suy ra:

$$I_1(s) = \frac{U_1(s)Sh\gamma(s)l}{R_c Ch\gamma(s)l}$$

và
$$U(s) = U_1(s) \cdot \frac{[Ch\gamma x Ch\gamma l - Sh\gamma x Sh\gamma l]}{Ch\gamma l}$$

$$U(s) = \frac{E}{s} \cdot \frac{Ch\gamma(l-x)}{Ch\gamma l} = \frac{L(s)}{s.M(s)} \tag{8.203}$$



Hình 8.30: Đóng điện áp vào đường dây hở mạch cuối

Để tìm quá trình thời gian tại một điểm x so với đầu đường dây ta phải tìm biến đổi ngược \mathcal{L}^{-1} của (8.203), tức là tìm nghiệm của phương trình $sM(s) = 0$.

Nghiệm của phương trình $M(s) = 0$ là $Ch\gamma(s)l = 0$. Từ đó suy ra

$$\gamma l = j(2k+1)\frac{\pi}{2}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Theo giả thiết $\gamma(s) = s\sqrt{L_o C_o}$; do đó các điểm cực sẽ là

$$s_k = j \frac{(2k+1)\pi}{l\sqrt{L_o C_o}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Tương ứng ta có biến đổi ngược của (8.203)

$$u(x,t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t}, \quad t > 0 \quad (8.204)$$

Ta có $L(0) = E$; $M(0) = 1$; $L(s_k) = E \cos \left[\frac{(2k+1)}{2} (l-x)\pi \right]$

$$M'(s_k) = l\sqrt{L_o C_o} \operatorname{Sh} \left[j \frac{(2k+1)\pi}{2} \right] = jl\sqrt{L_o C_o} (-1)^k$$

Thay các giá trị này vào (8.204) ta nhận được

$$u(x,t) = E \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \left[\frac{(2k+1)}{2} (l-x)\pi \right]}{(2k+1)} e^{j \left(\frac{2k+1}{2} \right) \frac{\pi}{l\sqrt{L_o C_o}} t} \right\} \quad (8.205)$$

khi thay $\sum_{k=-\infty}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} + \sum_{k=-\infty}^{-1}$ và thực hiện vài biến đổi

$$u(x,t) = E \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \left[\left(\frac{2k+1}{2} \right) (l-x)\pi \right] \cos \left[\frac{2k+1}{2} \pi \frac{t}{l\sqrt{L_o C_o}} \right]}{2k+1} \right\} \quad (8.206)$$

Quá trình điện áp tại cuối đường dây ($x = l$) là

$$u_2(t) = E \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \left[\frac{2k+1}{2} \pi \frac{t}{l\sqrt{L_o C_o}} \right]}{2k+1} \right\}; \quad t > 0$$

Tốc độ pha trên đường dây không tổn hao là $v = 1/\sqrt{L_o C_o}$; do đó: $l\sqrt{L_o C_o}$ chính là thời gian sóng điện áp lan truyền hết đường dây. Khi ký hiệu $T_d = l\sqrt{L_o C_o}$ ta có

$$u_2(t) = E \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \left[\frac{(2k+1)}{2} \pi \frac{t}{T_d} \right]}{2k+1} \right\}; \quad t > 0 \quad (8.207)$$

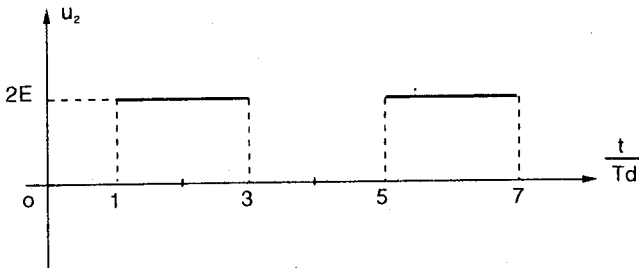
có thể tìm được $u_2(t) = 0$; với: $0 < \frac{t}{T_d} < 1$

$u_2(t) = 2E$; với: $1 < \frac{t}{T_d} < 3$

$u_2(t) = 0$; với: $3 < \frac{t}{T_d} < 5$

...

Quá trình thời gian của điện áp trên đường dây hở mạch cuối được biểu diễn trên H.8.31, đó là tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ: $T = 4T_d$



Hình 8.31: Biểu diễn áp cuối đường dây hở mạch cuối.

8.5.3 Đóng điện áp vào đường dây tải điện trở

Tại $t = 0$, đóng một nguồn áp $e(t)$ vào đường dây không tổn hao tải điện trở R_2 . Ta có

$$I_2(s) = -\frac{U_1(s)}{Z_c(s)} Sh\gamma(s)l + I_1(s) Ch\gamma(s)l = \frac{U_2(s)}{R_2}$$

Rút $I_1(s)$ từ phương trình này và thế vào (8.202a) ta sẽ có

$$U_2(s) = \frac{U_1(s) \cdot R_2}{R_2 Ch\gamma(s)l + Z_c(s) Sh\gamma(s)l}$$

khi biểu diễn các hàm hyperbolic qua các hàm mũ, điện áp trên tải sẽ có dạng

$$U_2(s) = U_1(s) e^{-sT_d} \frac{(1+n_2)}{(1+n_2 e^{-2sT_d})} \tag{8.208}$$

trong đó $n_2 = \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c}$ - là một số thực.

Thời gian truyền sóng trên đường dây là

$$T_d = l\sqrt{L_o C_o} = \frac{l}{v}$$

Nếu nguồn áp đầu đường dây là nguồn áp một chiều, ta có $U_1(s) = E/s$ nên

$$U_2(s) = \frac{E}{s} \frac{(1+n_2)}{(1+n_2e^{-2sT_d})} e^{-2sT_d} \quad (8.209)$$

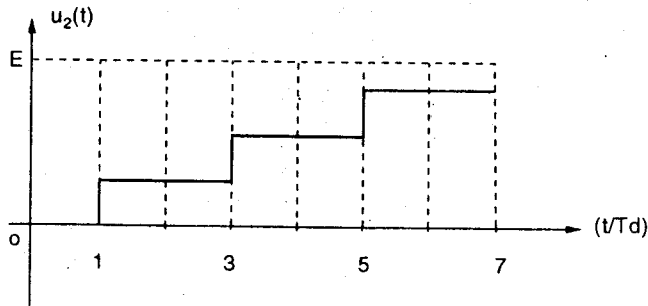
và do $|n_2| \leq 1$; $e^{-2sT_d} < 1$ với $\text{Re}\{s\} > 0$ nên

$$\begin{aligned} U_2(s) &= \frac{E}{s} (1+n_2) e^{-sT_d} \left\{ 1 - n_2 e^{-2sT_d} + n_2^2 e^{-4sT_d} - n_2^3 e^{-6sT_d} + \dots \right\} \\ &= \frac{E}{s} (1+n_2) \left\{ e^{-sT_d} - n_2 e^{-3sT_d} + n_2^2 e^{-5sT_d} - n_2^3 e^{-7sT_d} + \dots \right\} \end{aligned}$$

với $u_2(t) = L^{-1}\{U_2(s)\}$; ta có

$$\begin{aligned} u_2(t) &= E(1+n_2) \left\{ 1(t-T_d) - n_2 \cdot 1(t-3T_d) + n_2^2 1(t-5T_d) - \dots \right\} \\ &= E \left[1(t-T_d) + n_2 1(t-T_d) - n_2 1(t-3T_d) + \dots \right] \\ &= E \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ (-1)^j n_2^j 1[t - (2j+1)T_d] + n_2^{(j+1)} 1[t - (2j+1)T_d] \right\} \quad (8.210) \end{aligned}$$

Với $-1 < n_2 < 0$, quá trình điện áp được vẽ trên (H.8.32)



Hình 8.32: Điện áp tại cuối đường dây tải điện trở.

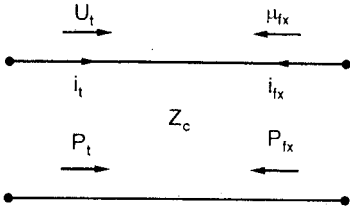
8.5.4. Đồ thị Zig - Zac (giản đồ bounce)

Từ biểu thức (8.210), có thể thấy quá trình điện áp ở cuối đường dây (hay tại một điểm bất kỳ $0 \leq x \leq l$) là kết quả của sự xếp chồng sóng tới và sóng phản xạ từ hai đầu đường dây (H.8.33). Ta có

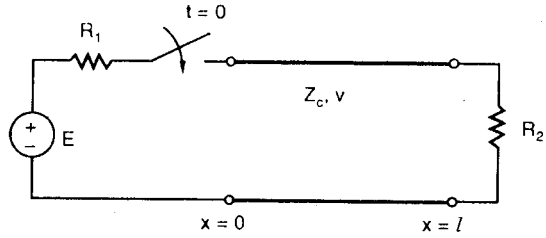
$$u = u_t + u_{fx} \quad (8.211a)$$

$$i = i_t - i_{fx} = \frac{1}{Z_c} (u_t - u_{fx}) \quad (8.211b)$$

$$P = P_t - P_{fx} = \frac{u_t^2}{Z_c} - \frac{u_{fx}^2}{Z_c} \quad (8.211c)$$



Hình 8.33: Các thành phần sóng tới và sóng phản xạ



Hình 8.34: Mô hình khảo sát quá độ đường dây tải trở

Hãy áp dụng điều này để xác định điện áp trên đường dây (H.8.34). Giả thiết là không tồn tại áp và dòng trên đường dây tại: $t < 0$; tại: $t = 0^+$, trên đường dây chỉ có sóng điện áp tới. Trở kháng vào của đường dây có giá trị bằng trở kháng sóng. Như vậy, điện áp tới tại đầu đường dây

$$u_{t1}^1 = E \cdot \frac{Z_c}{R_1 + Z_c} \tag{8.212a}$$

$$i_{t1}^1 = \frac{E}{R_1 + Z_c} \tag{8.212b}$$

Sau một khoảng thời gian $T_d = l/v$, sóng tới đi đến tải và bị phản xạ. Ta có

$$u_{fx2}^1 = u_{t1}^1 \cdot n_2 \tag{8.213a}$$

$$i_{fx2}^1 = \frac{1}{Z_c} \cdot u_{fx2}^1 \tag{8.213b}$$

với

$$n_2 = \frac{R_2 - Z_c}{R_2 + Z_c}$$

Sau đó, sóng phản xạ sẽ truyền ngược về đầu đường dây, và xuất hiện phản xạ tại $t = 2T_d$, để tạo ra sóng tới lần thứ hai truyền về phía tải. Điện áp và dòng tại đầu đường dây khi có thêm thành phần sóng tới lần thứ hai được viết

$$u = u_{t1}^1 + u_{fx1}^1 + u_{t1}^2 \tag{8.214a}$$

$$i = \frac{1}{Z_c} (u_{t1}^1 - u_{fx1}^1 + u_{t1}^2) \tag{8.214b}$$

trong đó u_{t1}^2 - sóng tới tại điểm đầu đường dây (lần thứ hai)

Theo điều kiện biên tại đầu đường dây

$$u = E - R_1 i \quad \Rightarrow \quad u_{t1}^1 + u_{fx1}^1 + u_{t1}^2 = E - \frac{R_1}{Z_c} (u_{t1}^1 - u_{fx1}^1 + u_{t1}^2)$$

$$\Rightarrow u_{t1}^2 \left[1 + \frac{R_1}{Z_c} \right] = u_{fx1}^1 \left[\frac{R_1}{Z_c} - 1 \right] + E - u_{t1}^1 \left[\frac{R_1}{Z_c} + 1 \right]$$

Dựa vào (8.212a) ta viết lại

$$u_{t1}^2 \left[1 + \frac{R_1}{Z_c} \right] = u_{fx1}^1 \left[\frac{R_1}{Z_c} - 1 \right]; \quad u_{t1}^2 = u_{fx1}^1 \cdot n_1 \quad (8.215)$$

với
$$n_1 = \frac{R_1 - Z_c}{R_1 + Z_c} \quad (8.216)$$

Như vậy ta thấy sóng phản xạ “nhìn” mạch đầu nguồn tương đương với điện trở R_1 . Nguồn áp xem như là ngắn mạch (hoặc nguồn dòng xem như là hở mạch).

Quá trình trên cứ tiếp tục như thế, các giá trị sóng tới và sóng phản xạ được xác định lần lượt như trên H.8.35.

Đồ thị biểu diễn quá trình trên có dạng như vậy gọi là đồ thị Zig - Zac (còn gọi là giản đồ bounce, hay giản đồ thời gian - khoảng cách). Để tìm hiểu thêm công dụng của đồ thị này ta xét một ví dụ cụ thể bằng số.

Ví dụ 8.9: Mạch như trên H.8.34 có các thông số

$$R_1 = 40 \text{ } [\Omega]; \quad R_2 = 120 \text{ } [\Omega];$$

$$Z_c = 60 \text{ } [\Omega]; \quad E = 100 \text{ } [v]$$

Hãy xây dựng đồ thị Zig-Zac của điện áp và dòng điện ?

Giải: Trước tiên, ta xác định một số thông số

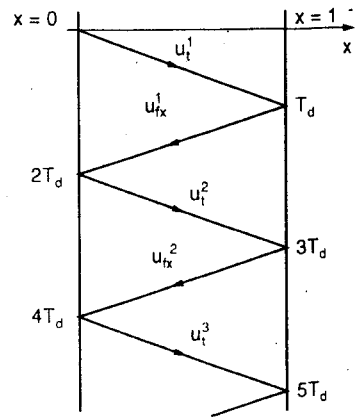
Sóng tới tại đầu đường dây

$$u_{t1}^1 = 100 \cdot \frac{60}{60 + 40} = 60 \text{ } [v]; \quad (i_{t1}^1 = \frac{60}{60} = 1A)$$

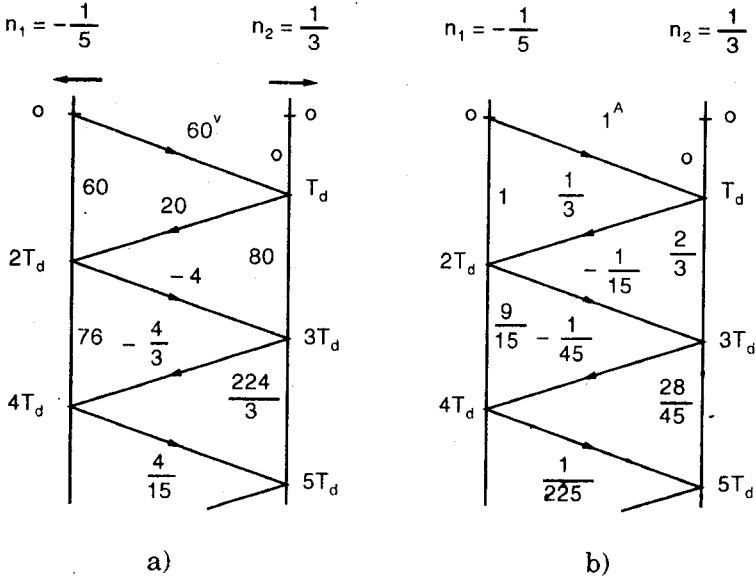
Hệ số phản xạ tại tải
$$n_2 = \frac{120 - 60}{120 + 60} = \frac{1}{3}$$

Hệ số phản xạ tại nguồn
$$n_1 = \frac{40 - 60}{40 + 60} = -\frac{1}{5}$$

Đồ thị Zig - Zac của điện áp và dòng điện cho tương ứng như trên H.8.36a,b.



Hình 8.35: Quá trình xuất hiện sóng tới và phản xạ

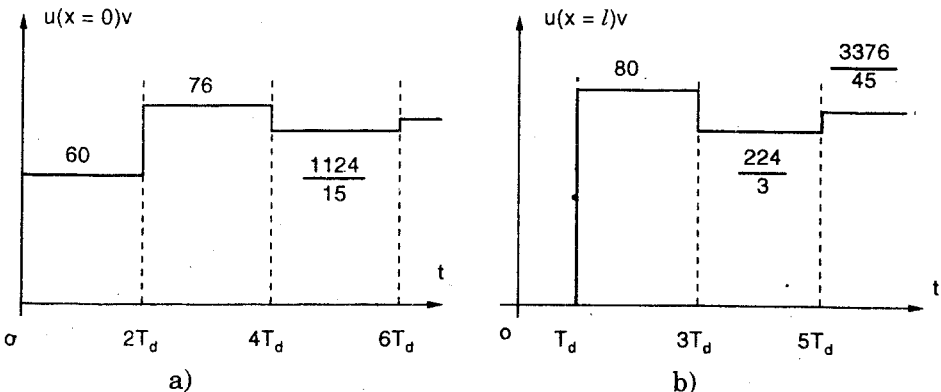


Hình 8.36: Đồ thị Zig-Zac của điện áp và dòng điện

Các mũi tên trên các đồ thị này biểu diễn hướng truyền của sóng. Từ đồ thị Zig - Zac, người ta có thể xác định được hai đồ thị quan trọng sau đây:

1- Đồ thị biểu diễn áp và dòng theo thời gian t

Từ đồ thị Zig - Zac, ta có thể suy ra biểu diễn áp hoặc dòng tại một điểm bất kỳ trên đường dây dài theo thời gian t. Áp và dòng chính là sự xếp chồng của các sóng tới và sóng phản xạ. Ta kẻ đường thẳng có tọa độ x (tương trưng cho một điểm đang xét), và cắt đồ thị Zig - Zac tại các điểm, cho biết các thời điểm mà điện áp hay dòng điện có sự biến thiên đột ngột do có sự khác nhau về số lượng sóng tới và sóng phản xạ. H.8.37a,b biểu diễn điện áp tại đầu đường dây (x = 0) và tại cuối đường dây (x = l) theo thời gian.



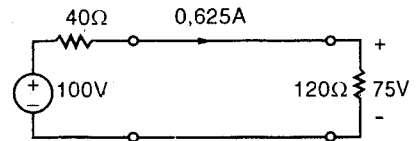
Hình 8.37: Biểu diễn áp tại đầu và cuối đường dây theo thời gian

Có thể nhận thấy rằng, từ các biểu diễn theo thời gian, khi ta cho $t \rightarrow \infty$ thì áp và dòng trên đường dây sẽ tiến về giá trị xác lập. Như vậy, các giá trị xác lập trên đường dây được hiểu là

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_t^k + \sum_{k=1}^{\infty} u_{fx}^k \quad (8.217a)$$

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} i_t^k - \sum_{k=1}^{\infty} i_{fx}^k \quad (8.217b)$$

Theo hướng phân tích như vậy, các giá trị xác lập nhận được sẽ tương tự như mạch trên H.8.38, xem như nguồn nối trực tiếp đến tải thông qua dây dẫn. Điều này hợp lý vì với nguồn áp một chiều, mô hình đường dây không tổn hao, chỉ có L_o và C_o , xem như là ngắn mạch và hở mạch.



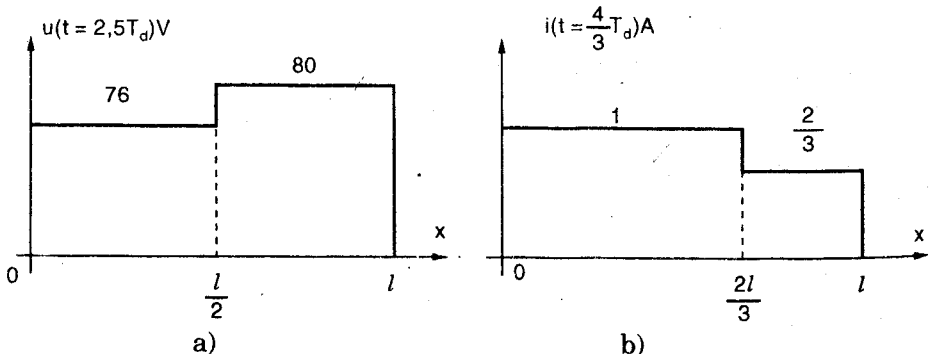
Hình 8.38: Chế độ xác lập của ví dụ 8.9

2- Đồ thị biểu diễn áp và dòng theo khoảng cách x

Từ đồ thị Zig - Zac, ta cũng có thể dựng được các đồ thị biểu diễn sự biến thiên của áp hay dòng trên đường dây theo khoảng cách x tại một thời điểm bất kỳ. Bằng cách kẻ đường thẳng song song với trục x, đi qua trục thời gian tại thời điểm khảo sát. Đường thẳng này cắt đồ thị Zig - Zac tại một điểm, có tọa độ x_o cho ta hai bên đường dây của x_o có phân bố áp hoặc dòng khác nhau do có sự khác nhau của số sóng tới và sóng phản xạ.

H.8.39a cho ta phân bố áp trên đường dây tại thời điểm $t = 2,5T_d$.

H.8.39b cho ta phân bố dòng trên đường dây tại thời điểm $t = \frac{4}{3}T_d$.



Hình 8.39: Biểu diễn áp, dòng theo khoảng cách ở ví dụ 8.9

8.5.5 Đường dây bất liên tục

Bây giờ, chúng ta xét đến trường hợp có một điểm nối giữa hai đường dây, có thể khác nhau về trở kháng sóng và tốc độ pha của sóng. Mô hình điểm nối giữa hai đường dây có thể xem như là một mạng hai cửa như trên H.8.40.



Hình 8.40: Đường dây bất liên tục

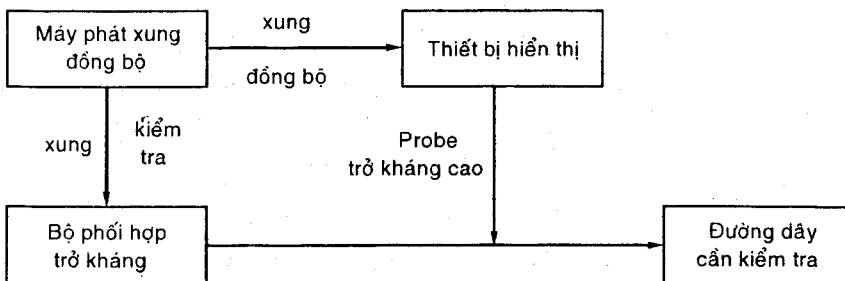
Khi sóng tới truyền đến cuối đường dây thứ nhất, ngoài sóng phản xạ tạo ra truyền ngược lại phía nguồn, còn xuất hiện một sóng truyền sang đường dây thứ hai gọi là sóng khúc xạ. Sóng khúc xạ sẽ đóng vai trò là sóng tới cho đường dây thứ hai. Để đặc trưng cho sóng khúc xạ, người ta cũng định nghĩa một hệ số, gọi là hệ số khúc xạ, được xác định bằng tỉ số giữa sóng khúc xạ và sóng tới. Hệ số khúc xạ được ký hiệu là τ .

$$\tau = \frac{u_{kx}}{u_t} \tag{8.218}$$

Tùy theo cấu trúc mạch tại mạng hai cửa, mà có khi hệ số này có thể được biểu diễn theo hệ số phản xạ.

Mặt khác, ta có thể thấy trên cấu trúc H.8.40, thì công suất của sóng tới cũng sẽ làm xuất hiện công suất khúc xạ truyền sang đường dây thứ hai. Công suất này được chứng minh là luôn luôn bé hơn công suất sóng tới.

Trên thực tế, ở các đường dây, sự bất liên tục xuất hiện ngoài thiết kế thường là do hư hỏng đường dây. Khi đó người ta có thể định vị điểm bất liên tục này nhờ một thiết bị gọi là *TDR* (Time - Domain Reflectometry). Sơ đồ khối của một hệ thống *TDR* kiểu mẫu cho trên H.8.41.



Hình 8.41: Sơ đồ khối hệ thống TDR cơ bản

Hệ thống *TDR* có một máy phát xung, gửi tín hiệu xung kiểm tra ra

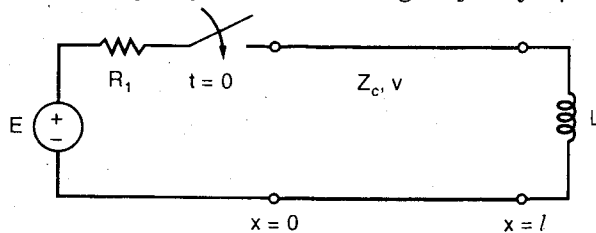
đường dây thông qua bộ phối hợp trở kháng. Các xung tới trên đường dây và xung phản xạ lại (từ điểm bất liên tục của đường dây) được ghi nhận lại trên thiết bị hiển thị nhờ một đầu dò (probe) trở kháng nhập rất cao. Bộ phối hợp trở kháng đảm bảo các sóng về từ đường dây cần kiểm tra sẽ không tạo ra sóng phản xạ trở lại. Thời gian nhận được sóng phản xạ từ đường dây cần kiểm tra và biên độ của chúng sẽ cho ta xác định vị trí xảy ra hư hỏng và đặc điểm của hư hỏng.

8.5.6 Đường dây tải kháng

Xét bài toán sóng truyền trên đường dây mà cuối đường dây hay tại điểm bất liên tục của đường dây có các phần tử kháng như trên H.8.42.

Tại $t = 0^+$, sóng tới tại đầu đường dây

$$\begin{cases} u_{t1} = E \cdot \frac{Z_c}{R_1 + Z_c} \\ i_{t1} = \frac{u_{t1}}{Z_c} \end{cases}$$



Hình 8.42: Đóng điện áp vào đường dây tải kháng

Tại cuối đường dây, ta có

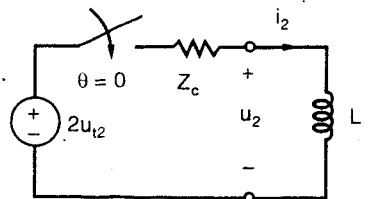
$$\begin{cases} u_2 = u_{t2} + u_{fx2} \\ i_2 = \frac{u_{t2}}{Z_c} - \frac{u_{fx2}}{Z_c} \Rightarrow Z_c i_2 = u_{t2} - u_{fx2} \end{cases}$$

Vậy

$$2u_{t2} = Z_c i_2 + u_2 \tag{8.219}$$

Dựa trên (8.219), người ta xây dựng được sơ đồ tương đương biểu diễn quan hệ giữa sóng tới và đáp ứng tại cuối đường dây như trên H.8.43. Sơ đồ này còn được gọi là sơ đồ tương đương Peterson.

Ở đây: $\theta = 0$ là góc thời gian khi sóng truyền đến cuối đường dây, quan hệ với biến thời gian t qua biểu thức



Hình 8.43

Sơ đồ tương đương khi sóng đến cuối đường dây

$$\theta = t - \frac{l}{v} = t - T_d \tag{8.220}$$

Bằng các phương pháp phân tích quá độ mạch tập trung, ta có thể

xác định được u_2 và i_2 trên sơ đồ H.8.43 như sau

$$u_2 = 2u_{t2}e^{-\frac{Z_c \theta}{L}} = 2u_{t2}e^{-\frac{Z_c(t-T_d)}{L}}; \theta > 0$$

$$i_2 = \frac{2u_{t2}}{Z_c} \left[1 - e^{-\frac{Z_c \theta}{L}} \right] = \frac{2u_{t2}}{Z_c} \left[1 - e^{-\frac{Z_c(t-T_d)}{L}} \right]; \theta > 0$$

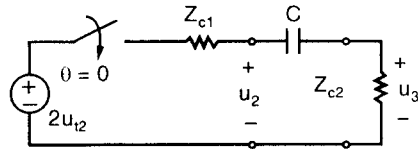
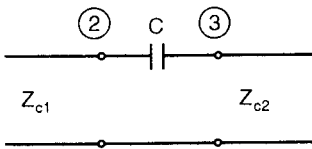
Từ đó, luôn luôn xuất hiện sóng phản xạ tại cuối đường dây và truyền ngược lại đầu đường dây

$$u_{fx2} = u_2 - u_{t2} \Rightarrow u_{fx2} = -u_{t2} + 2u_{t2}e^{-\frac{Z_c(t-T_d)}{L}}; \text{ khi } t > T_d$$

và

$$i_{fx2} = i_{t2} - i_2 = \frac{u_{t2}}{Z_c} - \frac{2u_{t2}}{Z_c} \left[1 - e^{-\frac{Z_c(t-T_d)}{L}} \right]; \text{ khi } t > T_d$$

Nếu như mạch điện kháng là chuyển tiếp giữa hai đường dây như trên H.8.44 thì sơ đồ tương đương xác định các đáp ứng tại cuối đường dây thứ nhất cho trên H.8.45.

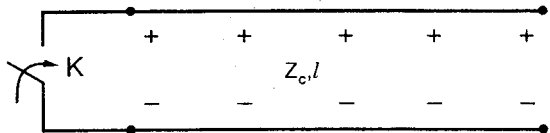


Hình 8.44: Chuyển tiếp hai đường dây **Hình 8.45:** Sơ đồ tương đương

Tham số $\theta = 0$ khi sóng truyền đến điểm 2. Như vậy, phân tích quá độ mạch tập trung (H.8.45) cho ta u_2 (áp cuối đường dây 1) và u_3 (áp đầu đường dây 2). Điện áp u_3 cũng sẽ đóng vai trò điện áp khúc xạ từ đường dây 1 sang đường dây 2.

8.5.7 Các bài toán với điều kiện đầu khác không

Xét quá độ trên đường dây dài với điều kiện đầu khác không. (H.8.46) cho ta mô hình bài toán. Tại $t = 0$, đóng khóa K, hãy xác định điện áp tại cuối dây nếu giả thiết trước đó điện áp tại các điểm trên đường dây bằng E , tức: $u(x, 0^-) = E$; và $i(x, 0^-) = 0$.



Hình 8.46: Đường dây điều kiện đầu khác không

Phương trình toán tử trong trường hợp này

$$-\frac{dU(s)}{dx} = sL_o I(s) \quad (8.221a)$$

$$-\frac{dI(s)}{dx} = sC_o U(s) - C_o u(0^-) \quad (8.221b)$$

Vi phân phương trình thứ nhất và thay phương trình thứ hai vào ta có

$$\frac{d^2 U(s)}{dx^2} = s^2 L_o C_o U(s) - sL_o C_o u(0^-)$$

hay là
$$\frac{d^2 U(s)}{dx^2} - \gamma^2(s)U(s) = -sL_o C_o u(0^-) \quad (8.222)$$

trong đó
$$\gamma(s) = s\sqrt{L_o C_o}$$

Phương trình (8.222) là phương trình vi phân không thuần nhất, có nghiệm riêng
$$U(s) = \frac{u(0^-)}{s}$$

Nên nghiệm tổng quát

$$U(s) = Ach\gamma x + Bsh\gamma x + \frac{u(0^-)}{s} \quad (8.223a)$$

Từ (8.221a) ta suy ra

$$I(s) = -\frac{1}{Z_c} [Ash\gamma x + Bch\gamma x] \quad (8.223b)$$

Xác định các hệ số A, B nhờ điều kiện bờ: áp đầu đường dây bằng không, và dòng cuối đường dây bằng không tại $t = 0^+$;

$$A = -\frac{u(0^-)}{s} \quad (8.224a)$$

$$B = \frac{u(0^-)}{s} \frac{sh\gamma(s)l}{ch\gamma(s)l} \quad (8.224b)$$

Thay (8.224) vào (8.223a), và cho $x = l$, ta có ảnh Laplace của điện áp tại cuối đường dây

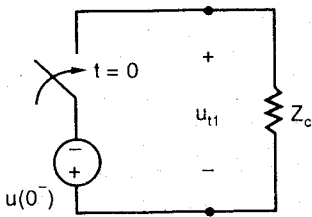
$$U_2(s) = \frac{E}{s} \left[1 - \frac{1}{ch\gamma(s)l} \right] \quad (8.225)$$

So sánh với (8.203), (cho $x = l$), có thể viết quá trình thời gian

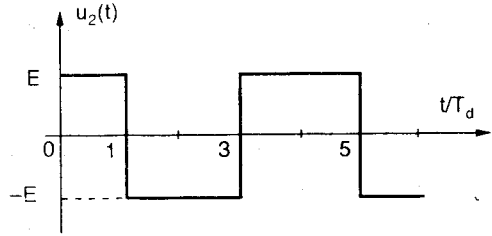
$$u_2(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \left[\frac{2k+1}{2} \pi \frac{t}{T_d} \right]}{(2k+1)} ; t > 0 \quad (8.226)$$

Quá trình thời gian của $u_2(t)$ cho trên H.8.47.

Công thức (8.226) cũng cho phép việc xây dựng đồ thị Zig - Zac của đường dây có tích lũy năng lượng. Sơ đồ tương đương để xác định sóng tới xuất hiện tại đầu đường dây do đóng khóa K cho trên H.8.48 và đồ thị Zig - Zac cho trên H.8.49.

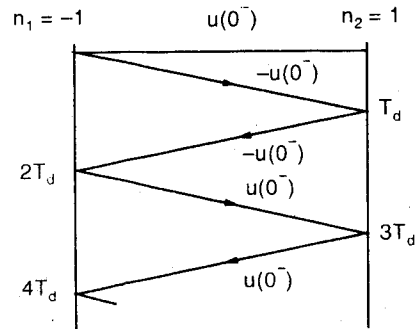


Hình 8.48: Sơ đồ tương đương tại điểm đóng khóa



Hình 8.47

Điện áp tại cuối đường dây



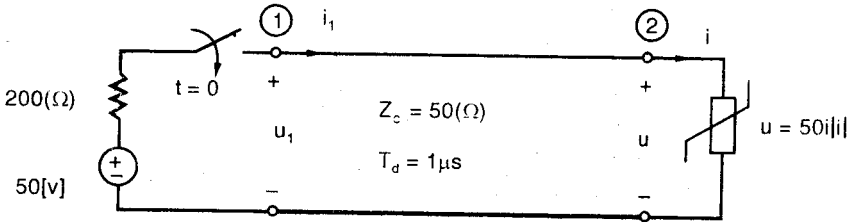
Hình 8.49: Đồ thị Zig - Zac

Điểm đặc biệt của sơ đồ tương đương (H.8.48) là sự xuất hiện của một nguồn áp, sức điện động bằng sơ kiện, nối tiếp và ngược chiều điện áp hở mạch trên khóa. Nếu bài toán là mở khóa, thì sẽ xuất hiện một nguồn dòng, giá trị dòng điện bằng sơ kiện, nối song song và ngược chiều dòng qua khóa. Ở trên đồ thị Zig - Zac ta thấy xuất hiện giá trị $u(0^-)$ được xếp chồng cùng với các sóng tới và sóng phản xạ. Từ đồ thị Zig - Zac này ta cũng có thể dễ dàng suy ra dạng sóng $u_2(t)$ nhận được trên H.8.47.

8.5.8 Đường dây tải phi tuyến

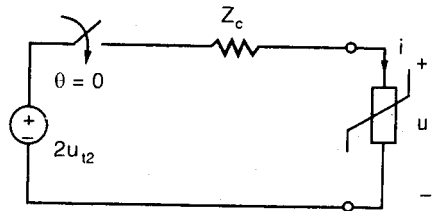
Phần này đề cập đến việc phân tích quá trình sóng trên đường dây khi có phần tử phi tuyến trong mạch bằng phương pháp đồ thị (còn gọi là phương pháp đặc tuyến tải).

Xét ví dụ đơn giản như trên H.8.50.



Hình 8.50: Đường dây tải trở phi tuyến

Sơ đồ tương đương dùng để xác định áp, dòng tại cuối đường dây khi có sóng tới truyền đến nó như trên H.8.51. Trên sơ đồ này



Hình 8.51: Sơ đồ tương đương tại cuối dây

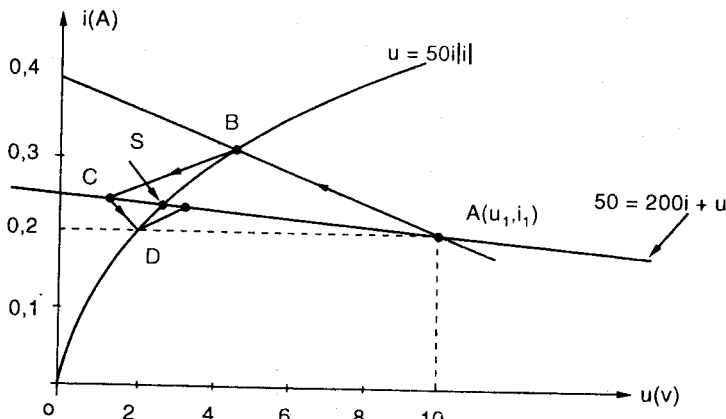
$$u_{t2} = u_{t1} = 50 \cdot \frac{50}{250} = 10 \text{ [v]}$$

$$\theta = t - T_d = t - 1\mu\text{s}$$

Đặc tuyến vào của mạng một cửa là

$$u = 2u_{t2} - Z_c i = 20 - 50i \tag{8.227}$$

Giao điểm của đường thẳng này với đặc tuyến của phần tử phi tuyến cho ta áp và dòng trên trở phi tuyến (tọa độ của điểm B) trên H.8.52.



Hình 8.52: Quá trình sóng trên đường dây tải trở phi tuyến

Như vậy, ta có thể hình dung, sóng xuất hiện trên đường dây bắt đầu từ điểm A, có tọa độ là áp, dòng tại đầu đường dây, là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 50 = 200i_1 + u_1 \\ u_1 = 50i_1 \end{cases}$$

khi sóng truyền ngược về đầu đường dây, áp dòng tại đầu đường dây sẽ thay đổi do có sự xếp chồng sóng tới và sóng phản xạ khác đi, và được xác định nhờ sơ đồ H.8.53.

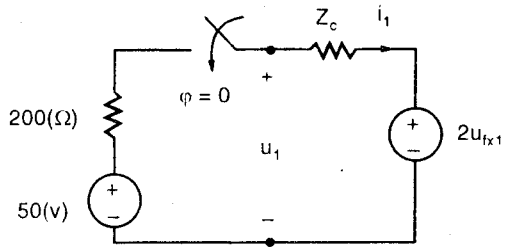
Dòng và áp tại đầu đường dây lúc này là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 50 = 200i_1 + u_1 \\ i_1 = \frac{1}{Z_c}u_1 - \frac{2}{Z_c}u_{fx1} \end{cases}$$

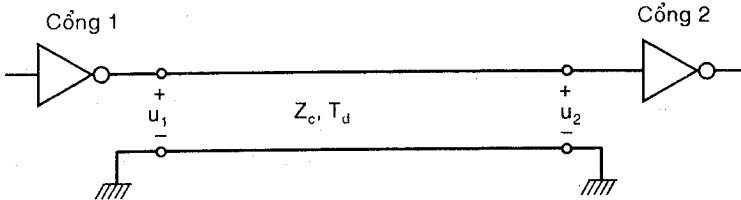
Từ điểm B, ta kẻ đường thẳng có hệ số góc $1/Z_c$ sẽ cắt đường thẳng $50 = 200i + u$ tại điểm C. Tọa độ điểm C cho ta áp và dòng tại đầu đường dây (H.8.52)

Quá trình cứ tiếp diễn cho đến khi xác lập tại điểm S, là giao điểm giữa đặc tuyến mạng một cửa đầu đường dây: $50 = 200i + u$; và đặc tuyến của trở phi tuyến. Ta thấy rằng tọa độ điểm S cũng chính là nghiệm xác lập của bài toán.

Chúng ta áp dụng phương pháp trên để phân tích một hệ thống gồm hai cổng đảo (NOT) kết nối nhờ một đường dây có trở kháng sóng Z_c và thời gian trễ T_d (H.8.54).



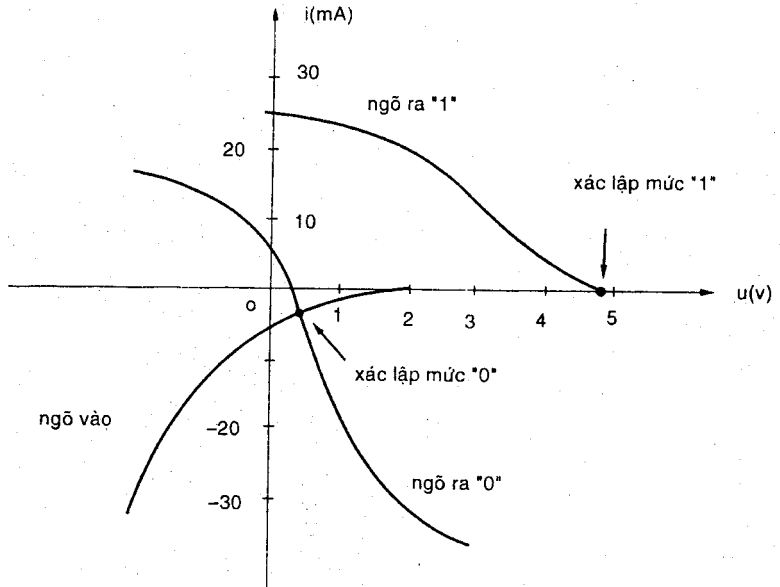
Hình 8.53: Sơ đồ tương đương tại đầu đường dây



Hình 8.54: Đường dây nối kết hai cổng đảo

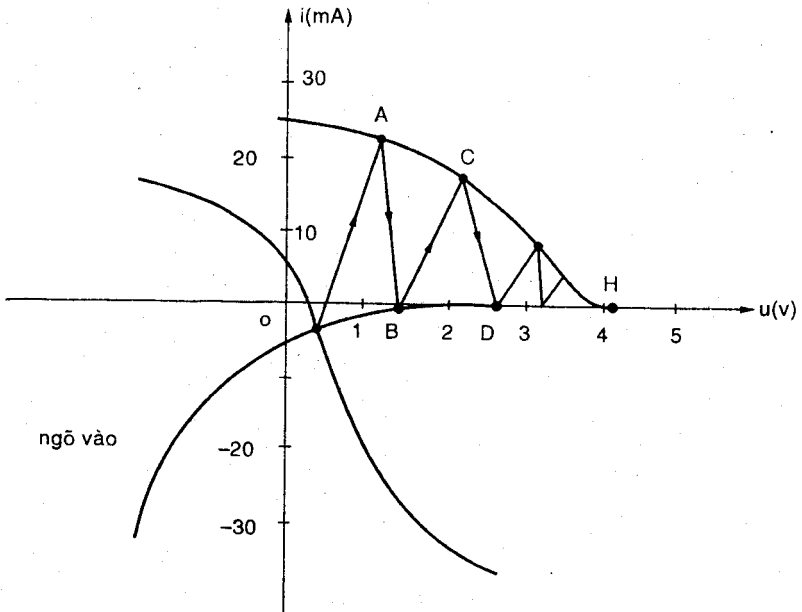
Trạng thái quá độ của đường dây có hai trường hợp: chuyển từ mức cao (logic “1”) xuống mức thấp (logic “0”) hoặc ngược lại. Các đặc tuyến u-i của cổng logic cho như trên H.8.55.

Bây giờ ra xét trường hợp ngõ vào của cổng đảo thứ nhất chuyển từ mức cao sang mức thấp. Tức là tại $t = 0$, đường dây chuyển từ mức thấp sang mức cao. Thế nhưng trên đường dây không thể xuất hiện ngay mức “1”, mà phải trải qua một quá trình quá độ. Nguyên nhân là do cả đặc tuyến phi tuyến ở ngõ ra cổng đảo và cả tính phản xạ khi sóng truyền trên đường dây.



Hình 8.55: Đặc tuyến $u - i$ của cổng logic

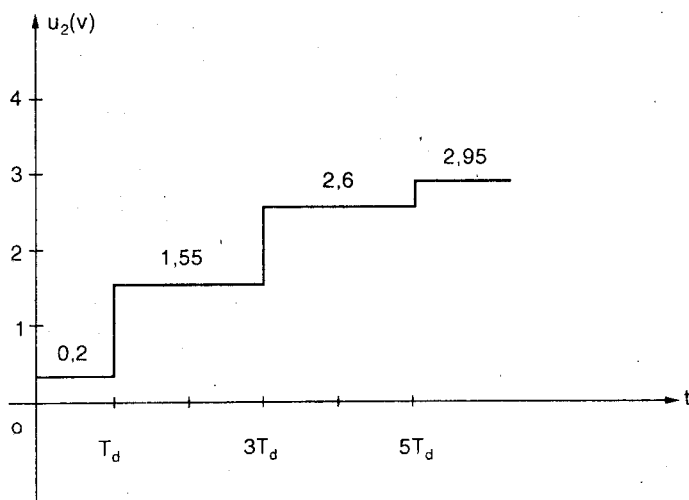
Xuất phát từ điểm xác lập "0" (trạng thái khởi động), ta kẻ đường thẳng có hệ số góc $1/Z_c$, cắt đặc tuyến ra tại điểm A, cho ta giá trị sóng tới lần thứ nhất (H.8.56).



Hình 8.56: Quá trình sóng trên đường dây giao tiếp giữa hai cổng đảo

Từ A , ta kẻ đường thẳng có hệ số góc $-1/Z_c$, cắt đặc tuyến ngõ vào của cổng logic hai tại điểm B , cho ta áp tại cuối đường dây. Quá trình cứ tiếp diễn như vậy và xác lập tại điểm H , xác định đường dây ở mức cao.

Như vậy, ta thấy rằng, khi ngõ ra của cổng logic 1 chuyển từ mức thấp sang mức cao, thì điện áp tại điểm cuối đường dây sẽ có dạng như trên H.8.57.



Hình 8.57: Dạng sóng điện áp tại cuối đường dây

Rõ ràng, phải mất một khoảng thời gian sau, điện áp tại cuối đường dây mới đạt đến mức cao (mức logic "1"). Chẳng hạn, nếu như một số cổng logic đảo hiểu mức "1" là lớn hơn $2,2$ [v], thì rõ ràng sau khoảng thời gian bằng $3T_d$, kể từ lúc cổng logic 1 chuyển trạng thái, thì cổng logic 2 mới chuyển trạng thái của nó, đó là đặc tính trễ của đường dây dài. Chính vì vậy, khi phân tích các mạch giao tiếp cổng dùng đường dây dài, chúng ta phải lưu ý đến điều đó.

Bảng ký hiệu dùng trong chương 8

Ký hiệu	Tên gọi	Đơn vị
R_o	Điện trở đơn vị	Ω/m
L_o	Điện cảm đơn vị	H/m
C_o	Điện dung đơn vị	F/m
G_o	Điện dẫn rò đơn vị	S/m
a	Bán kính đường dây song hành	m
d	Khoảng cách giữa hai dây song hành	m
r, R	Bán kính trong và ngoài cáp đồng trục	m
x	Khoảng cách tính từ đầu đường dây	m
y	Khoảng cách tính từ cuối đường dây	m
Z_c	Trở kháng sóng (trở kháng đặc tính)	Ω
Y_c	Dẫn nạp sóng	S
R_c	Điện trở sóng ($= \text{Re}\{Z_c\}$)	Ω
γ	Hệ số truyền lan	1/m
α	Hệ số suy giảm biên độ đơn vị	Np/m
β	Hệ số di pha đơn vị	rad/m
λ	Bước sóng	m
v	Tốc độ pha của sóng	m/s
u_{11}	Thành phần sóng áp tới tại điểm 1	V
u_{f1}	Thành phần sóng áp phản xạ tại điểm 1	V
i_{11}	Thành phần sóng dòng tới tại điểm 1	A
i_{f1}	Thành phần sóng dòng phản xạ tại điểm 1	A
l	Chiều dài đường dây	m
n	Hệ số phản xạ	
θ_2	Góc pha của hệ số phản xạ tại tải	rad
τ	Hệ số khúc xạ	
u_{kx}	Thành phần sóng áp khúc xạ	V
Z_v	Trở kháng vào của đường dây	Ω
SWR	Hệ số sóng đứng (tỉ số sóng đứng)	
1/SWR	Hệ số sóng chạy	
T_d	Thời gian trễ của đường dây	s
P_l	Công suất sóng tới	W
P_{fx}	Công suất sóng phản xạ	W
P_{kx}	Công suất sóng khúc xạ	W
η	Hiệu suất của đường dây	

MẠCH KHÔNG TUYẾN TÍNH

Có thể nói rằng, các phần tử R , L , C tuyến tính và mạch điện được tạo thành từ chúng, chỉ là trường hợp riêng của mạch không tuyến tính (KTT). Trong các hệ thống kỹ thuật thực tế, thì phần lớn các mạch có chứa các phần tử KTT . Các phần tử thực tế như điện trở, tụ điện, cuộn dây có lõi sắt từ, diode, đèn điện tử, transistor... có các quá trình vật lý xảy ra trong chúng không ít thì nhiều đều là KTT .

Trong lý thuyết mạch tuyến tính đã xét trước đây, các phần tử thực tế được lý tưởng hóa để tạo ra cho chúng một mô hình tuyến tính, có thể chấp nhận được trong những điều kiện làm việc nào đó của phần tử. Các tính chất KTT khi đó là không mong muốn, ví dụ khi phân tích mạch khuếch đại người ta phải tuyến tính hóa các phần tử KTT .

Các phần tử KTT được sử dụng để tạo nên các quá trình KTT , mà mạch tuyến tính không thể tạo ra được như các quá trình chỉnh lưu, điều chế, tách sóng, tạo dao động... Mạch KTT do đó là mạch có chứa ít nhất một phần tử KTT , hoặc về mặt toán học có thể nói rằng, mạch KTT được mô tả bằng hệ phương trình vi phân phi tuyến.

Các phần tử KTT thực tế rất đa dạng, sau đây ta nhận xét sơ lược các phần tử KTT và các đặc trưng cơ bản của chúng.

9.1 CÁC PHẦN TỬ KTT VÀ CÁC ĐẶC TRƯNG

9.1.1 Các phần tử KTT

Giá trị của các phần tử KTT nói chung không có biểu diễn giải tích thuận tiện, nó thường được mô tả bằng các đặc tuyến (đặc trưng) thực nghiệm, được cho dưới dạng các quan hệ dòng điện - điện áp đối với điện trở, từ thông - dòng điện đối với cuộn dây và điện tích - điện áp đối với tụ điện.

Có nhiều cách phân loại phần tử KTT , cách phân loại tổng quát nhất là dựa vào phần tử KTT có hay không có các nhân tố điều khiển làm ảnh hưởng đến đặc trưng của nó. Khi đó có thể phân biệt thành hai loại: phần tử KTT bị điều khiển (phụ thuộc) và không bị điều khiển (không phụ thuộc).

Các phần tử *KTT* không bị điều khiển là các phần tử có đặc trưng được mô tả chỉ bởi một hàm. Sau đây, sẽ khái quát một số phần tử *KTT* cơ bản và đặc trưng của chúng.

1- Điện trở *KTT*

Điện trở *KTT* được xác định bởi quan hệ giữa dòng điện và điện áp

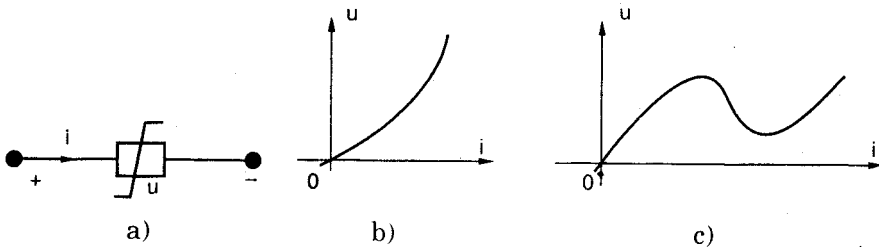
$$u = f_R(i) \tag{9.1}$$

hay $i = \varphi_R(u) \tag{9.2}$

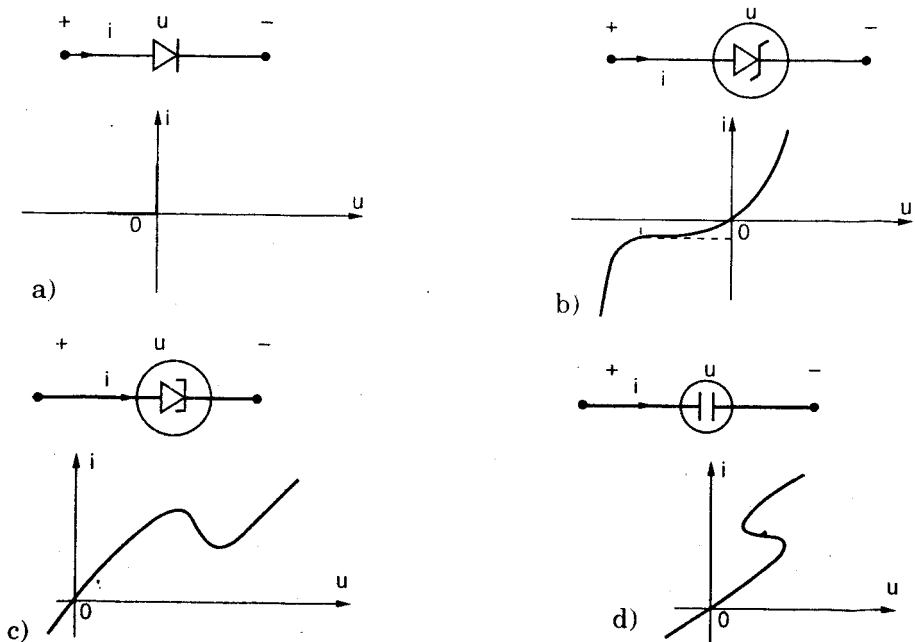
trong đó: $f_R(), \varphi_R()$ - là các hàm liên tục trong khoảng $(-\infty, \infty)$ và

$$\varphi_R = f_R^{-1} \text{ (hàm ngược).}$$

Các đặc tuyến được mô tả bởi các phương trình (9.1), (9.2) sẽ đi qua gốc tọa độ và nằm ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba (H.9.1).



Hình 9.1: Điện trở *KTT*



Hình 9.2: Một số ví dụ của điện trở *KTT*.

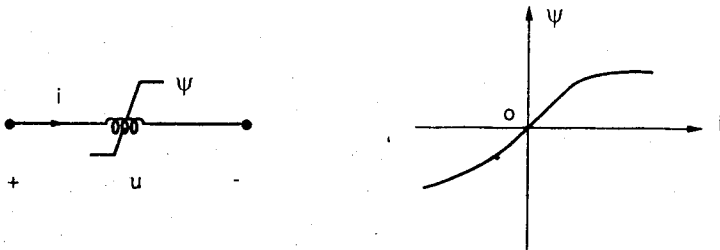
Nếu điện trở *KTT* có đặc tuyến (9.1) mà không có (9.2) ta gọi nó là phần tử phụ thuộc dòng (điện áp là hàm đơn trị của dòng điện và không có điều ngược lại (H.9.1c). Nếu điện trở *KTT* có đặc tuyến (9.2) mà không có (9.1) thì nó là phần tử phụ thuộc áp (dòng là hàm đơn trị của áp và không có điều ngược lại). Trong trường hợp điện trở không tuyến tính có thể biểu diễn đặc tuyến ở cả hai dạng (dòng là hàm đơn trị của điện áp và ngược lại) thì đó là phần tử trở *KTT* không phụ thuộc.

Các điện trở *KTT* trong thực tế thường gặp là diode lý tưởng (H.9.2a); diode ổn áp (H.9.2b), diode đường hầm (H.9.2c); đèn khí lạnh (H.9.2d).

2- Điện cảm KTT

Điện cảm không tuyến tính được cho bởi đặc tuyến quan hệ giữa từ thông và dòng điện (H.9.3) có dạng

$$\psi = f_L(i) \tag{9.3}$$



Hình 9.3: Điện cảm KTT

Điện áp trên phần tử điện cảm *KTT* khi đó được xác định

$$u = \frac{d\psi}{dt} \tag{9.4}$$

Trong các công thức trên, hàm $f_L()$ là hàm liên tục trong khoảng $(-\infty, \infty)$, đi qua gốc tọa độ và ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba. Ngoài phương trình (9.3), điện cảm *KTT* còn được biểu diễn dưới dạng

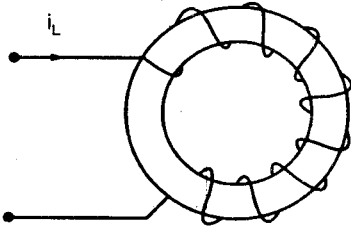
$$i = \varphi_L(\psi) \tag{9.5}$$

với $\varphi_L() = f_L()^{-1}$ (hàm ngược)

Ngoài ra, người ta cũng có thể biểu diễn (9.4) dưới dạng

$$u = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = L(i) \cdot \frac{di}{dt} \tag{9.6}$$

Phương trình (9.6) cho phép ta biểu diễn điện cảm *KTT* theo mô hình điện cảm tuyến tính, chỉ khác giá trị điện cảm *L* không phải là hằng số, mà là hàm theo dòng điện chạy qua phần tử điện cảm *KTT*.



Hình 9.4: Phần tử điện cảm thực tế

A - tiết diện lõi [m^2]

l - chiều dài trung bình mạch vòng xuyên [m].

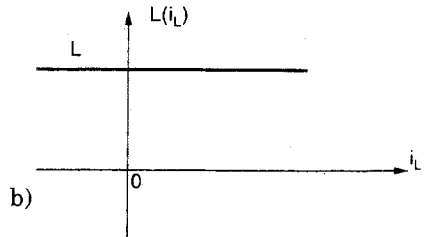
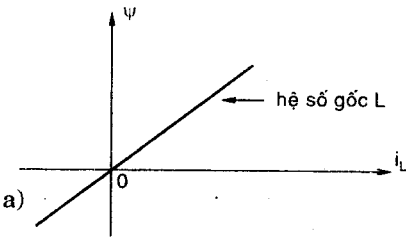
Chúng ta có thể xét một ví dụ: Cuộn dây hình xuyên quẩn trên vật liệu không nhiễm từ (không khí, gỗ...) như trên H.9.4. Ta có

$$\psi(t) = L i_L(t)$$

và
$$L = \mu_o \cdot \frac{N^2 A}{l} \quad [H] \quad (9.7)$$

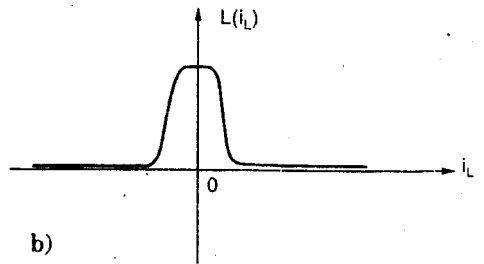
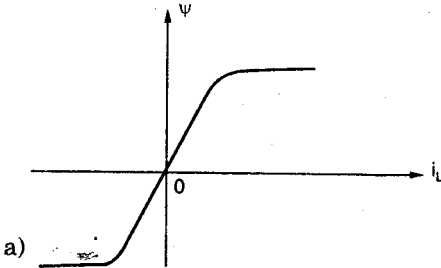
trong đó N - số vòng dây quẩn

Rõ ràng, giá trị điện cảm L khi đó là hằng số và đồ thị mô tả quan hệ $\psi(i_L)$ và $L(i_L)$ như trên H.9.5a,b.



Hình 9.5: Đặc tuyến $\psi(i_L), L(i_L)$ của cảm tuyến tính

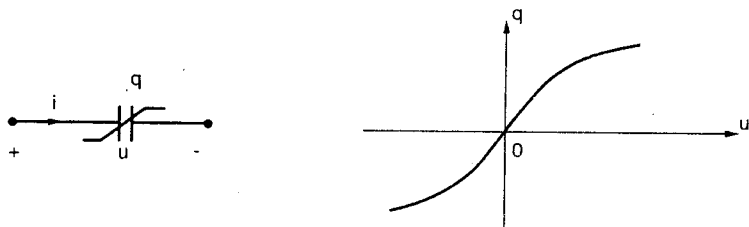
Bây giờ, nếu ta thay thế vật liệu làm lõi hình xuyên trong H.9.4 bằng một vật liệu nhiễm từ thì các đặc tuyến $\psi(i_L)$ và $L(i_L)$ không còn là đường thẳng nữa mà có dạng như trên H.9.6a,b. Đây là một minh họa cho phần tử phi tuyến.



Hình 9.6: Đặc tuyến $\psi(i_L), L(i_L)$ của điện cảm KTT

3- Điện dung KTT

Điện dung không tuyến tính được đặc trưng bởi quan hệ KTT giữa điện tích và điện áp trên tụ điện (H.9.7)



Hình 9.7: Điện dung KTT

Đặc tuyến của phần tử điện dung KTT được mô tả dưới dạng

$$q = f_c(u) \tag{9.8}$$

và dòng điện qua tụ được xác định

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{9.9}$$

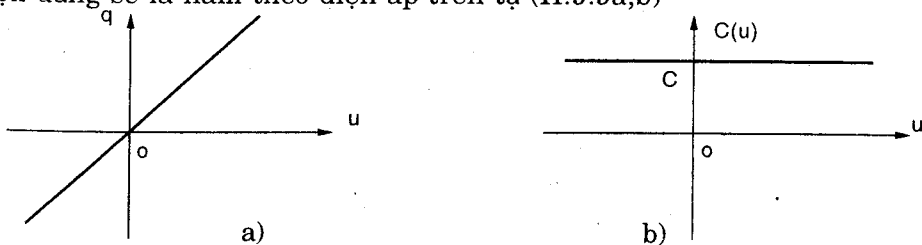
trong đó $f_c(\cdot)$ - là hàm liên tục trong khoảng $(-\infty, \infty)$, đạo hàm liên tục qua gốc tọa độ (q, u) và nằm ở góc phần tư thứ nhất và thứ ba. Điện dung KTT còn được mô tả bằng quan hệ

$$u = \varphi_c(q) \tag{9.10}$$

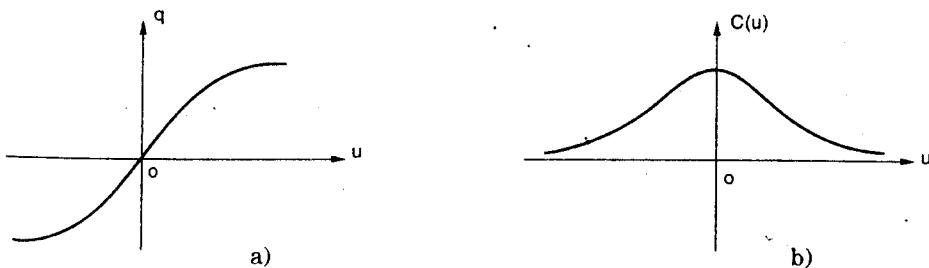
Dòng điện qua điện dung KTT, xác định theo (9.9) còn được viết dưới dạng

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du} \cdot \frac{du}{dt} = C(u) \frac{du}{dt} \tag{9.11}$$

Như vậy, phần tử điện dung tuyến tính được xét trước đây có thể xem là một trường hợp đặc biệt của phần tử điện dung KTT vì quan hệ $q(u)$ là đường thẳng và giá trị điện dung C là hằng số (H.9.8a,b). Phần tử điện dung KTT có quan hệ $q(u)$ không còn là đường thẳng nữa và giá trị điện dung sẽ là hàm theo điện áp trên tụ (H.9.9a,b)

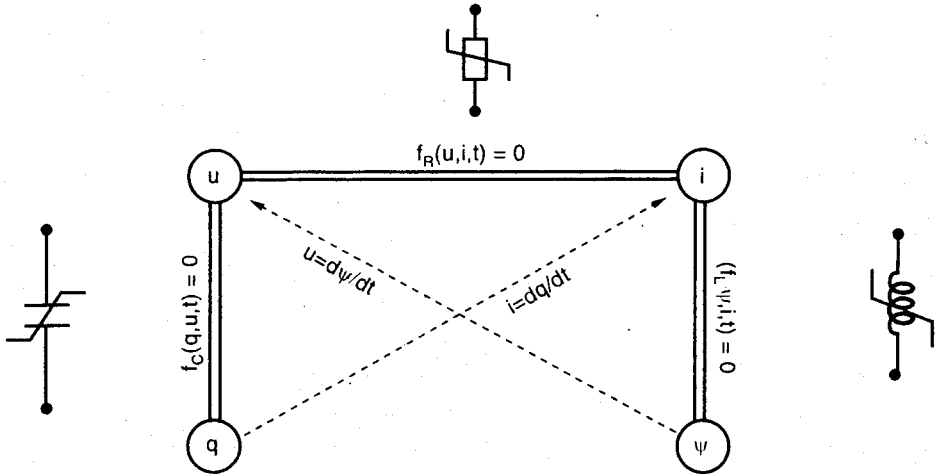


Hình 9.8: Quan hệ $q(u), C(u)$ của điện dung tuyến tính



Hình 9.9: Quan hệ $q(u), C(u)$ của điện dung KTT

Tóm lại, ta có thể minh họa quan hệ giữa các đại lượng trên các phần tử không tuyến tính cơ bản như trên H.9.10.



Hình 9.10: Quan hệ giữa các phần tử KTT

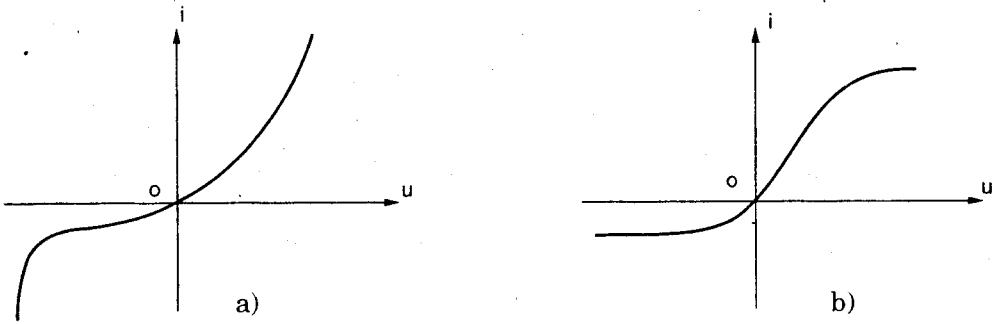
Những phần tử điện trở, điện cảm, điện dung *KTT* được định nghĩa trên đây là mô hình toán học lý tưởng của các phần tử thực tế. Tất nhiên sẽ có sự khác nhau giữa phần tử thực tế và phần tử lý tưởng, do quá trình vật lý xảy ra trong các phần tử thực tế rất phức tạp. Các đại lượng vật lý như điện áp, dòng điện, từ thông hay điện tích trong các định nghĩa trên là các hàm biến thiên theo thời gian, còn các đặc tuyến của các phần tử *KTT* lý tưởng lại không phụ thuộc vào sự thay đổi đó. Trong thực tế, các phần tử *KTT* ít nhiều đều phụ thuộc vào các quá trình tác động lên nó. Nếu các phần tử *KTT* ít phụ thuộc vào điều kiện làm việc, thì mô hình lý tưởng theo định nghĩa trên là đúng đắn. Nếu phần tử *KTT* phụ thuộc nhiều vào điều kiện làm việc, thì sự phụ thuộc đó không thể bỏ qua, và như vậy cần phải xây dựng cho phần tử *KTT* một mô hình phức tạp hơn, mô hình này sẽ bao gồm nhiều phần tử lý tưởng trên đây.

Tùy thuộc vào điều kiện làm việc, người ta phân biệt các đặc tuyến của các phần tử *KTT* thành các loại sau

1- Đặc tuyến tĩnh được xác định khi đo lường phần tử *KTT* làm việc với các quá trình biến thiên chậm theo thời gian.

2- Đặc tuyến động được đo lường khi các phần tử *KTT* làm việc với quá trình điều hòa.

3- Đặc tuyến xung được xác định khi phần tử *KTT* làm việc với các quá trình biến thiên đột ngột theo thời gian.

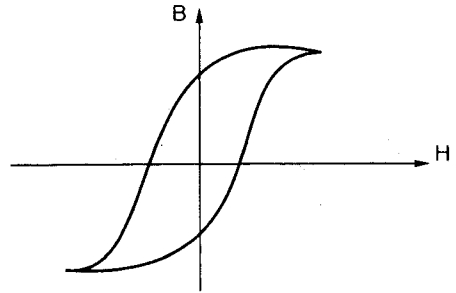


Hình 9.11: Đặc tuyến $i = \varphi(u)$

a) của diode ổn áp; b) của diode điện tử

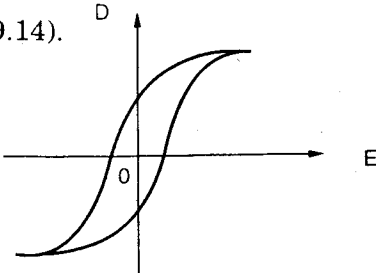
Ví dụ, đặc tuyến $i = \varphi(u)$ của các diode ổn áp và điện tử như trên H.9.11 không bị thay đổi nhiều lắm ở các điều kiện làm việc tĩnh và động trong phạm vi tần số lớn. Với các điện trở nhiệt bán dẫn, các đặc tuyến tĩnh và động của nó phụ thuộc mạnh vào nhiệt độ.

Điện cảm KTT là mô hình toán của các phần tử thực như cuộn dây có lõi sắt từ. Quan hệ KTT $\psi(i)$ nhận được từ quan hệ KTT $B(H)$ của vật liệu sắt từ dùng làm lõi. Đặc tuyến tĩnh và động của điện cảm KTT rất khác nhau. Bởi vì đặc tuyến động phụ thuộc rất nhiều vào tần số của quá trình đó.

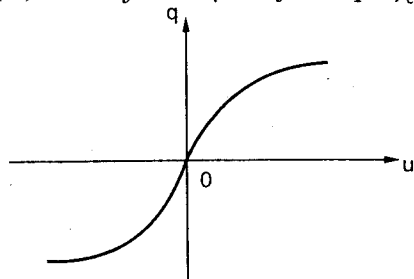


Hình 9.12: Chu trình từ trễ của vật liệu sắt từ

Điện dung KTT được định nghĩa ở trên là mô hình toán của các tụ điện có cách điện là điện môi. Các vật liệu điện môi được cho bởi đặc tuyến KTT giữa điện cảm D và cường độ điện trường E . Quan hệ này không những KTT mà còn đa trị (H.9.13). Người ta có thể dựa vào đường cong $D(E)$ để suy ra đặc tuyến: $q = f_c(u)$ (H.9.14).



Hình 9.13: Đường cong phân cực điện môi



Hình 9.14: Đặc tuyến $q(u)$ của tụ điện, cách điện điện môi

Đặc tuyến tĩnh $D(E)$ và đường cong $q(u)$ rất khác đặc tuyến động, bởi vì đặc tuyến động phụ thuộc nhiều vào tần số của quá trình đó.

Các phần tử KTT không điều khiển vừa nêu ở trên là các phần tử KTT hai cực. Các phần tử KTT bị điều khiển là các phần tử nhiều cực. Chúng được đặc trưng bởi các họ đặc tuyến tương ứng với các thông số điều khiển khác nhau. Các phần tử KTT bị điều khiển như có thể thấy là các ba cực bán dẫn (transistor) và các đèn điện tử ba cực và nhiều cực.

9.1.2 Các thông số đặc trưng của các phần tử KTT

Các phần tử KTT được nêu trên đây sẽ được đặc trưng bằng một số các thông số liên quan đến điều kiện làm việc của nó, được định nghĩa như sau

1- Điện trở tĩnh và động

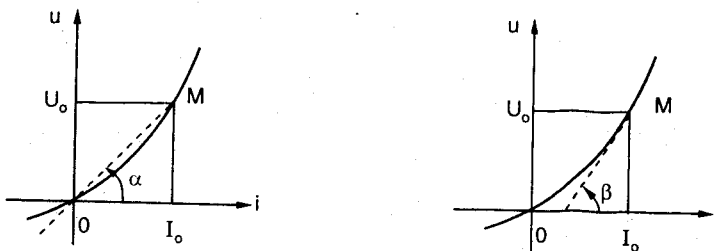
Điện trở KTT có đặc tuyến: $u = f_R(i)$; có điện trở tĩnh được định nghĩa bởi tỉ số giữa điện áp và dòng điện tại điểm làm việc $M(U_o, I_o)$ trên đặc tuyến tĩnh (H.9.15a)

$$R_o = \left. \frac{u}{i} \right|_M \quad (9.12)$$

Điện trở động của điện trở KTT được định nghĩa bởi đạo hàm của điện áp theo dòng điện tại điểm làm việc (H.9.15b).

$$R_d = \left. \frac{du}{di} \right|_M \quad (9.13)$$

Điện trở tĩnh theo biểu diễn hình học trên H.9.15a bằng $tg\alpha$ (α là góc tạo nên bởi đường cát tuyến OM với trục i). Điện trở động theo H.9.15b bằng $tg\beta$ (β = góc tạo bởi đường tiếp tuyến tại điểm M với trục i).



Hình 9.15: Điện trở tĩnh và điện trở động

Cả điện trở tĩnh và điện trở động đều phụ thuộc vào điểm làm việc trên đặc tuyến của phần tử KTT . Nó là hàm của dòng điện

$$R_o = R_o(i); R_d = R_d(i) \quad (9.14)$$

Cần chú ý rằng, với một số phần tử KTT , trong một khoảng biến

thiên nào đó của dòng điện và điện áp, điện trở động của nó có thể nhận giá trị âm (điện trở *KTT* có đặc tuyến như H.9.1c), còn giá trị của điện trở tĩnh thì luôn luôn dương.

2- Điện cảm tĩnh và động

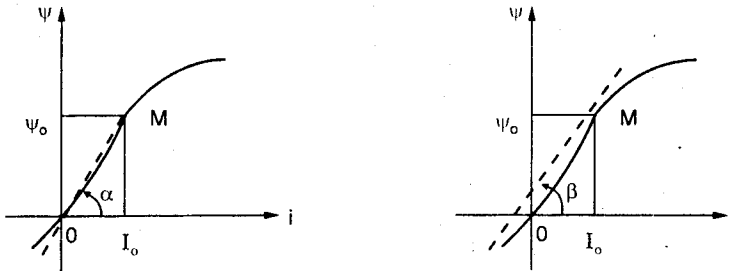
Đối với điện cảm *KTT* có đặc tuyến: $\psi = f_L(i)$; ta có định nghĩa sau:

Điện cảm tĩnh là tỉ số giữa từ thông và dòng điện tại điểm làm việc $M(\psi_o, I_o)$ (H.9.16a)

$$L_o = \frac{\psi}{i} \Big|_M \tag{9.15}$$

Điện cảm động L_d được định nghĩa bởi đạo hàm của từ thông theo dòng điện tại điểm làm việc M (H.9.16b)

$$L_d = \frac{d\psi}{di} \Big|_M \tag{9.16}$$



Hình 9.16: Điện cảm tĩnh và điện cảm động

Cả hai thông số minh họa trên H.9.16 đều phụ thuộc vào vị trí của điểm làm việc M , tức là

$$L_o = L_o(i); L_d = L_d(i) \tag{9.17}$$

Khi biết giá trị của điện cảm động, điện áp trên cảm *KTT* sẽ được xác định:

$$u = L_d(i) \cdot \frac{di}{dt} \tag{9.18}$$

3- Điện dung tĩnh và động

Đối với điện dung *KTT* có đặc tuyến $q = f_c(u)$ có các thông số tĩnh và động được định nghĩa như sau

$$C_o = \frac{q}{u} \Big|_M \tag{9.19}$$

$$C_d = \frac{dq}{du} \Big|_M \tag{9.20}$$

Biểu diễn hình học của hai thông số trên cũng tương tự như đối với các phần tử điện trở *KTT* và điện cảm *KTT* đã xét ở trước. Các thông số tĩnh và động của điện dung *KTT* đều phụ thuộc vào điểm làm việc của phần tử. Khi đã biết giá trị điện dung động $C_d(u)$ ta có thể xác định được dòng điện đi qua nó

$$i = C_d(u) \cdot \frac{du}{dt} \quad (9.21)$$

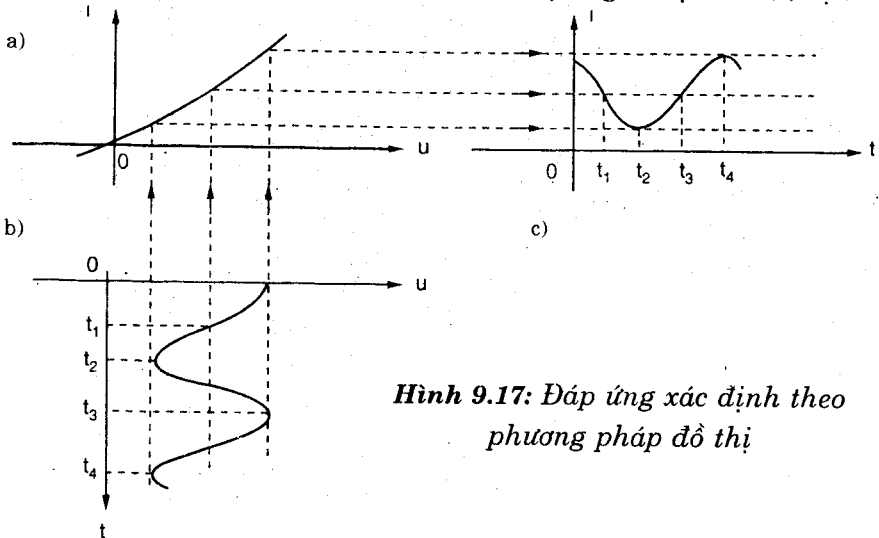
Từ các thông số tĩnh và động được định nghĩa trên đây, có thể nói rằng, các thông số tĩnh được dùng để mô tả phần tử *KTT* tại điểm làm việc, còn các thông số động được dùng để mô tả phần tử *KTT* tại điểm làm việc tĩnh, có nguồn tác động biến thiên theo thời gian.

9.1.3 Các phương pháp phân tích mạch *KTT*

Khác với mạch tuyến tính, mạch *KTT* được mô tả bởi một hệ phương trình *KTT*. Do đó, không thể áp dụng nguyên lý xếp chồng và nguyên lý tỷ lệ cho mạch *KTT*. Với mạch *KTT* không có các phương pháp chung để giải hệ phương trình vi phân mô tả chúng. Tùy theo những bài toán cụ thể mà người ta có thể dùng phương pháp giải gần đúng được nêu sau đây

1- Phương pháp đồ thị

Nội dung của phương pháp này dựa vào các đặc tuyến của các phần tử *KTT* để tìm ra đáp ứng của mạch dưới dạng đồ thị khi biết tác động ở đầu vào. Trên H.9.17a là đặc tuyến volt-ampere của một trở *KTT* nào đó. Nếu đặt vào nó một điện áp biến thiên theo thời gian như trên H.9.17b thì dòng điện qua trở *KTT* có thể được xác định theo phương pháp đồ thị. Như có thể thấy từ hình vẽ, bằng cách xác định giá trị của $u(t)$ tại những



Hình 9.17: Đáp ứng xác định theo phương pháp đồ thị

thời điểm đã chọn, và sau đó đóng lên đặc tuyến của phần tử *KTT*. Người ta có thể vẽ được dạng của dòng điện theo thời gian (H.9.17c).

Phương pháp đồ thị cho ta kết quả định tính, dễ sử dụng trong trường hợp nguồn tác động có dạng đơn giản. Trong trường hợp phân tích cần kết quả chính xác phải áp dụng phương pháp giải tích.

2- Phương pháp giải tích

Như đã biết, mỗi phần tử *KTT* đều được cho trước các đặc tuyến biểu diễn các quan hệ giữa các đại lượng vật lý trên chúng, tức là quan hệ giữa tác động – đáp ứng. Trong một số trường hợp, khi phân tích mạch *KTT*, người ta cần phải thiết lập quan hệ giữa tác động và đáp ứng dưới dạng:

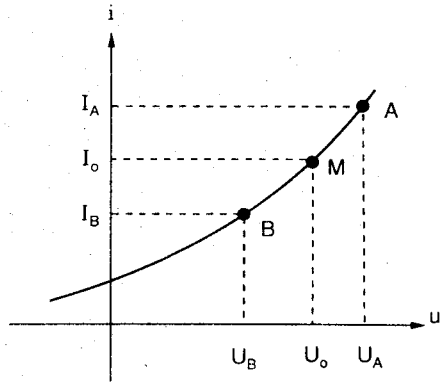
$$y(t) = f[x(t)]$$

Các biểu thức giải tích biểu diễn các đặc tuyến của phần tử *KTT* cũng chỉ ở dạng gần đúng, thỏa mãn một số yêu cầu thực tế, nhằm làm đơn giản việc phân tích mạch, và cho phép áp dụng những công cụ toán thông dụng.

Như vậy phương pháp giải tích là phương pháp biểu diễn các đặc tuyến của phần tử *KTT* bằng các biểu thức giải tích tiện lợi, người ta thường gặp một số biểu diễn sau

Biểu diễn gần đúng đặc tuyến bằng đa thức nguyên.

Giả thiết phần tử *KTT* được cho bởi đặc tuyến $i = f(u)$ có được từ thực nghiệm hoặc từ nhà sản xuất (H.9.18). Phần tử *KTT* có điểm làm việc được chọn là $M(U_o, I_o)$. Có thể biểu diễn gần đúng đặc tuyến của phần tử *KTT* bằng khai triển Taylor tại điểm làm việc *M* như sau



Hình 9.18: Biểu diễn gần đúng đặc tuyến

$$i = a_0 + a_1(u - U_o) + a_2(u - U_o)^2 + \dots + a_n(u - U_o)^n \tag{9.22}$$

Các hệ số a_n được xác định bởi

$$a_n = \frac{f^n(U_o)}{n!} \tag{9.23}$$

trong đó $f^n(U_o)$ - là đạo hàm cấp n của hàm $i = f(u)$ tại điểm làm việc $M(U_o, I_o)$. Trong thực tế tùy theo mức độ chính xác yêu cầu, người ta sẽ hạn chế bậc của đa thức (9.22). Biểu thức (9.23) là công thức xác định các

hệ số khai triển Taylor trong trường hợp hàm $f(u)$ đã xác định. Đối với các phần tử *KTT*, hàm $f(u)$ thường được cho bằng đặc tuyến thực nghiệm, do đó, các hệ số a_n cũng phải được xác định từ thực nghiệm. Ví dụ khi hạn chế đa thức (9.22) ở bậc hai, ta cần xác định a_0, a_1, a_2 . Để tìm chúng, ngoài điểm làm việc M , ta cần chọn thêm hai điểm A, B trên đặc tuyến của phần tử *KTT* (H.9.18). Cách xác định như vậy gọi là phương pháp ba tung độ. Ta sẽ thiết lập ra phương trình mô tả đặc tuyến của phần tử *KTT* tại ba điểm đã chọn

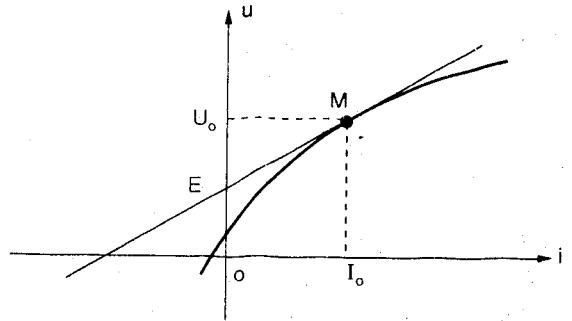
$$\begin{aligned} a_0 &= I_0 \\ a_0 + a_1(U_A - U_0) + a_2(U_A - U_0)^2 &= I_A \\ a_0 + a_1(U_B - U_0) + a_2(U_B - U_0)^2 &= I_B \end{aligned} \quad (9.24)$$

Từ ba phương trình (9.24), ta sẽ có a_0, a_1, a_2 . Trong trường hợp cần bậc cao hơn, cách làm tương tự sẽ cho ta các hệ số a_n cần thiết.

Biểu diễn đặc tuyến bằng đường gãy khúc (phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn đặc tuyến).

Trong thực tế phân tích mạch *KTT*, nhiều trường hợp phải thay thế đặc tuyến của phần tử *KTT* bằng những đoạn thẳng. Điều đó hoàn toàn là để làm đơn giản việc phân tích và biểu diễn kết quả.

Phương pháp này gọi là phương pháp tuyến tính hóa đặc tuyến của phần tử *KTT*. Để thực hiện việc tuyến tính hóa đặc tuyến, xét một phần tử *KTT* có đặc tuyến như trên H.9.19. Hàm $u = f(i)$ liên tục và khả vi tại lân cận điểm làm việc $M(U_0, I_0)$.



Hình 9.19: Biểu diễn đặc tuyến bằng đoạn thẳng

Hàm $u = f(i)$ có thể khai triển bằng chuỗi Taylor tại điểm $M(U_0, I_0)$:

$$u = f(i) = f(I_0) + f'(I_0)(i - I_0) + \frac{f''(I_0)}{2!}(i - I_0)^2 + \dots \quad (9.25)$$

Nếu giới hạn đa thức (9.25) ở bậc nhất thì một cách gần đúng

$$u \approx f(I_0) + f'(I_0)(i - I_0) \quad (9.26)$$

Bởi vì tại điểm $M(U_0, I_0)$ ta có

$$f(I_o) = U_o; f'(I_o) = \left. \frac{du}{di} \right|_M = R_d$$

nên biểu thức (9.26) viết lại

$$u \approx U_o + R_d(i - I_o) \tag{9.27}$$

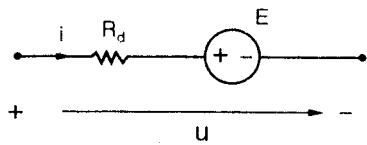
hay
$$u \approx E + R_d i \tag{9.28}$$

trong đó, R_d là điện trở động của điện trở *KTT* tại điểm làm việc, còn E được xác định theo biểu thức

$$E = U_o - R_d I_o \tag{9.29}$$

Biểu thức (9.28) chính là phương trình đường thẳng tiếp tuyến với đặc tuyến $u = f(i)$ tại điểm M và cắt trục điện áp tại điểm E được xác định theo (9.29)

Từ các phân tích trên đây, có thể thấy rằng, đặc tuyến của phần tử *KTT* ở lân cận điểm làm việc có thể được làm gần đúng bằng một đoạn thẳng. Điều này cũng có nghĩa là ta đã thay thế một phần tử *KTT* bằng một phần tử hai cực tuyến tính như trên H.9.20.



Hình 9.20: Hai cực tuyến tính thay thế phần tử *KTT*

Việc làm gần đúng trên đây được sử dụng trong trường hợp phần tử *KTT* chịu tác động gồm hai thành phần.

$$i = I_o + i_{ac}(t) \tag{9.30}$$

ở đây I_o - là thành phần một chiều;

$i_{ac}(t)$ - là thành phần xoay chiều, thỏa mãn $|i_{ac}(t)_{\max}| \ll I_o$.

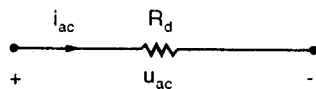
Khi đó, áp trên phần tử *KTT* cũng sẽ gồm hai thành phần:

$$u = U_o + u_{ac}(t) \tag{9.31}$$

trong đó $u_{ac}(t)$ - là thành phần xoay chiều của điện áp $u(t)$ tại điểm làm việc M . Từ (9.28) ta có:

$$u_{ac}(t) = R_d i_{ac}(t) \tag{9.32}$$

Điều đó chứng tỏ rằng, khi thành phần xoay chiều có biên độ nhỏ xuất hiện trên nền thành một chiều, thì điện trở *KTT* có thể được thay thế bằng điện trở tuyến tính, có giá trị bằng điện trở



Hình 9.21: Sơ đồ thay thế trở *KTT* đối với thành phần xoay chiều tín hiệu nhỏ

động tại điểm làm việc (H.9.21).

3- Phương pháp tiệm cận

Để giải phương trình vi phân *KTT* khi phân tích mạch *KTT*, người ta thường dùng các giả thiết gần đúng để giảm bậc của phương trình, làm cho phương trình đơn giản và dễ phân tích hơn. Các phương pháp này gọi là phương pháp tiệm cận. Có hai phương pháp thường gặp sau đây

1- Phương pháp chuẩn tuyến tính

Phương pháp này dùng để phân tích mạch *KTT* ở trạng thái xác lập, khi xét mạch tạo dao động điều hòa. Khi đó dao động sinh ra trong mạch đã ổn định, biên độ và tần số của nó có thể coi là không đổi. Do đó có thể thay thế các thông số của phần tử *KTT* bằng các thông số trung bình, tương ứng với biên độ của dao động ổn định. Các giá trị trung bình là hằng số và phương trình vi phân *KTT* được làm gần đúng bằng phương trình vi phân tuyến tính để có thể giải được dễ dàng.

2- Phương pháp biên độ biến thiên chậm

Phương pháp này dùng để phân tích mạch *KTT* ở trạng thái quá độ. Khi các dao động sinh ra trong mạch đã ổn định (mạch dao động điều hòa), các thông số của hệ thống *KTT* không còn thay đổi. Ở giai đoạn này, người ta giả thiết rằng biên độ của dao động sinh ra thay đổi ít so với bản thân dao động. Do đó có thể bỏ qua các đạo hàm theo biên độ và sẽ làm giảm bậc hệ phương trình.

4- Phương pháp hình ảnh pha

Để giải các phương trình vi phân bậc cao, người ta còn dùng phương pháp hình ảnh pha, tức là vẽ nên các đường cong tích phân của phương trình vi phân *KTT*. Trong trường hợp phương trình vi phân bậc hai, hình ảnh pha sẽ là các đường cong phẳng và được biểu diễn trên mặt phẳng pha.

Phương pháp hình ảnh pha cho phép giải các phương trình vi phân *KTT* ở trường hợp tổng quát nhất mà không cần đặt các giả thiết để làm đơn giản hóa. Kết quả sẽ cho biết đầy đủ các hiện tượng xảy ra trong hệ thống *KTT* ở cả chế độ quá độ và xác lập, với cả dao động điều hòa và không điều hòa.

5- Phương pháp số

Việc phân tích mạch *KTT* bằng phương pháp đồ thị, giải tích hay các phương pháp khác vừa nêu trên sẽ trở nên khó khăn trong trường hợp

mạch phức tạp, số lượng phần tử *KTT* lớn. Khi đó cần có sự trợ giúp của máy tính với các phương pháp số dùng để giải các hệ phương trình vi phân phi tuyến. Việc đi sâu nghiên cứu cơ sở toán học của các phương pháp số sẽ vượt ra khỏi khuôn khổ của giáo trình. Trong giáo trình này chỉ đề cập các phương pháp số thường được dùng trong phân tích các mạch điện.

Như đã nói ở trên, không có một phương pháp thống nhất nào giải hệ phương trình vi phân *KTT*, do đó việc lựa chọn phương pháp thích hợp là nhiệm vụ của người phân tích và mức độ chính xác mà bài toán phân tích yêu cầu.

9.2 MẠCH ĐIỆN TRỞ KHÔNG TUYẾN TÍNH

Trong phần này đề cập một số phương pháp phân tích mạch điện trở *KTT* được tạo nên bởi các phần tử có đặc tuyến $u = f(i)$ hay $i = \varphi(u)$ cùng với các nguồn tác động. Nếu nguồn tác động lên mạch không đổi theo thời gian, ta sẽ có mạch *KTT* nguồn một chiều, còn nếu tác động biến thiên theo thời gian, ta sẽ có mạch *KTT* nguồn xoay chiều. Việc phân tích sẽ đi kèm một số ví dụ minh họa.

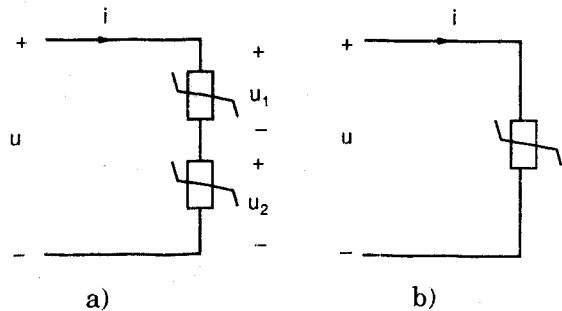
9.2.1 Mạch *KTT* nguồn một chiều

Như có thể thấy từ những phân tích ở trên, đặc tuyến của phần tử *KTT* có vai trò rất quan trọng trong việc phân tích mạch *KTT*. Trong trường hợp khi mạch có nhiều phần tử *KTT*, hoặc có cả phần tử tuyến tính và các nguồn tác động, ta cần phải xây dựng cho cả phần mạch đó một đặc tuyến tổng hợp (đối với mạng một cửa phi tuyến), hoặc đặc tuyến truyền đạt (đối với mạng hai cửa phi tuyến). Đặc tuyến tổng hợp hoặc đặc tuyến truyền đạt của mạch *KTT* chủ yếu phụ thuộc vào cách nối ghép các phần tử *KTT* hoặc tuyến tính.

1- Đặc tuyến tổng hợp của mạng một cửa *KTT*

a) Nối ghép các phần tử *KTT* (phép cộng đồ thị)

Trên H.9.22a là sơ đồ nối tiếp hai điện trở *KTT* có đặc tuyến lần lượt là $u_1 = f_1(i)$; và $u_2 = f_2(i)$. H.9.22b là phần tử điện trở *KTT*, tương đương với mạch nối tiếp hai phần tử



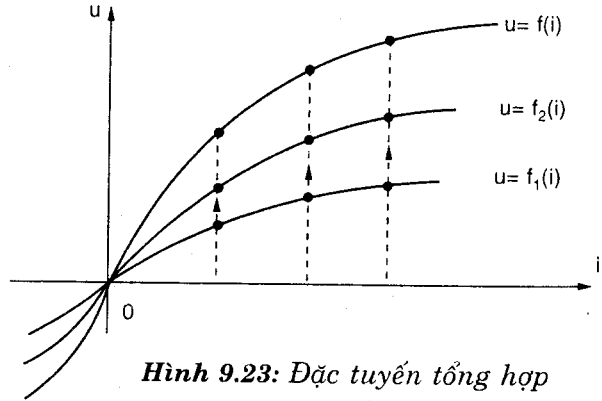
Hình 9.22: Mắc nối tiếp hai điện trở *KTT*

KTT ở trên.

Theo định luật Kirchoff về điện áp, ta có thể viết phương trình cho mạch trên H.9.22a

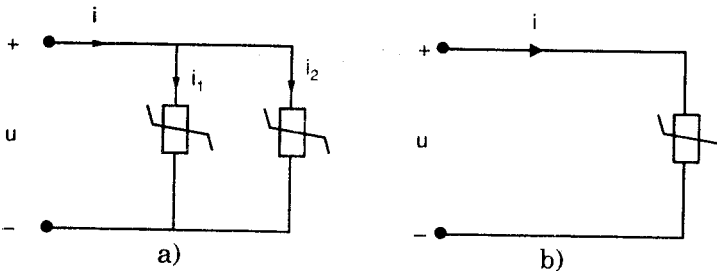
$$u = u_1 + u_2 = f_1(i) + f_2(i) = f(i) \quad (9.33)$$

Bởi vì dòng điện trong mạch nối tiếp các phần tử *KTT* là như nhau, nên khi vẽ các đặc tuyến của các phần tử *KTT* trên cùng một hệ trục tọa độ (u, i) , ta có thể xác định đặc tuyến tổng hợp của phần tử *KTT* tương đương. Tại các giá trị dòng điện trên trục i , ta xác định các giá trị điện áp trên các phần tử *KTT* thành phần. Áp trên phần tử *KTT* tương đương bằng tổng áp trên các phần tử tại các giá trị dòng điện xác định (H.9.23). Đặc tuyến tổng hợp trong trường hợp này chỉ xây dựng được nếu như các phần tử trở *KTT* là phụ thuộc dòng hoặc không phụ thuộc.



Hình 9.23: Đặc tuyến tổng hợp mạch nối tiếp

Tương tự nếu cho hai phần tử trở *KTT* có các đặc tuyến: $i_1 = \varphi_1(u)$; $i_2 = \varphi_2(u)$; mắc song song như trên H.9.24a thì ta cũng có sơ đồ của phần tử *KTT* như trên H.9.24b.



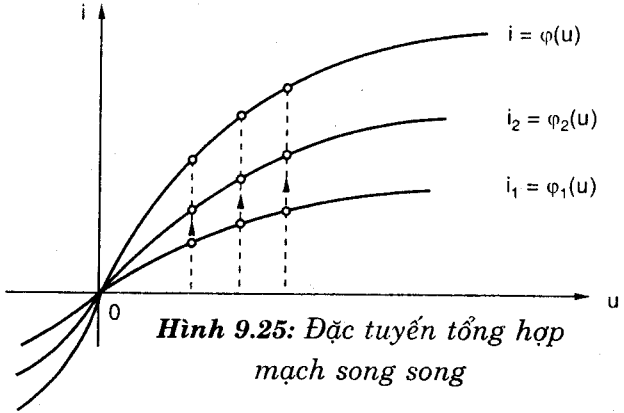
Hình 9.24: Mắc song song hai trở *KTT*

Áp dụng định luật Kirchoff về dòng cho mạch song song, ta có

$$i = i_1 + i_2 = \varphi_1(u) + \varphi_2(u) = \varphi(u) \quad (9.34)$$

Để xác định đặc tuyến tổng hợp của phần tử *KTT* tương đương (H.9.24b), ta vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ (u, i) các đặc tuyến của các phần tử trở *KTT*. Bởi vì trong mạch nối song song, áp trên các phần tử là

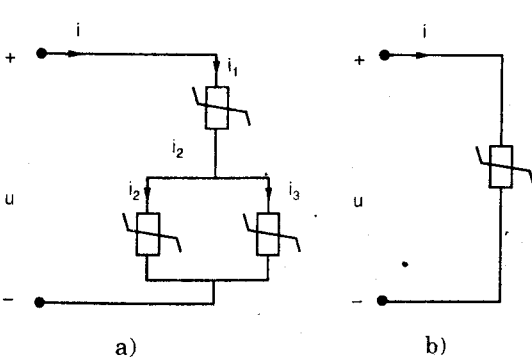
như nhau, nên tại các giá trị điện áp đã chọn, ta xác định các dòng điện qua các trở *KTT*. Và từ đó, xác định được dòng điện qua trở *KTT* tương đương. (H.9.25).



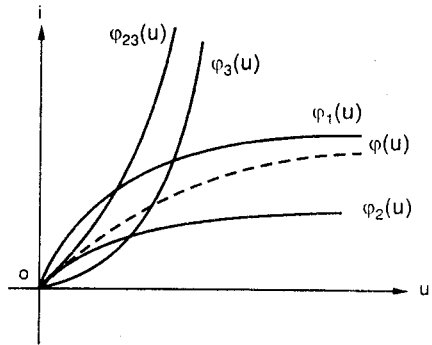
Hình 9.25: Đặc tuyến tổng hợp mạch song song

Đặc tuyến tổng hợp của mạch phi tuyến mắc song song chỉ xây dựng được nếu các trở *KTT* là phần tử phụ thuộc áp hay không phụ thuộc.

Nếu như trong mạch có nhiều điện trở *KTT*, mắc song song và nối tiếp, như trên H.9.26a, thì đặc tuyến tổng hợp của mạch tương đương ba phần tử (H.9.26b) được xây dựng như sau



Hình 9.26: Mạch phi tuyến nối hỗn hợp



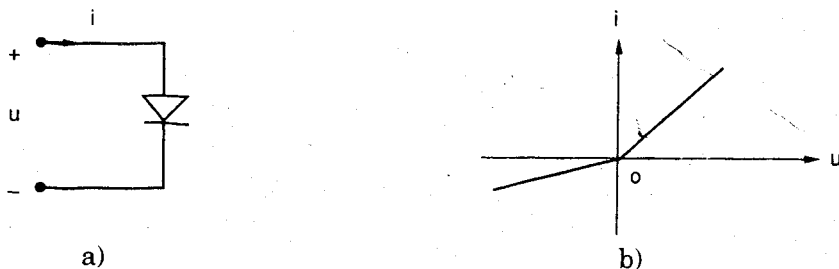
Hình 9.27: Đặc tuyến tổng hợp của mạch phi tuyến hỗn hợp

Trên cùng một hệ trục tọa độ (u, i) , ta vẽ đặc tuyến tổng hợp của hai trở *KTT* mắc song song, và sau đó thực hiện cho mạch nối tiếp của phần tử thứ ba với phần tử tương đương của hai phần tử song song. Đặc tuyến tổng hợp và cách xác định nó như trên H.9.27.

b) Mạng một của phi tuyến có nguồn

Trong mạch *KTT* một chiều, nhiều khi cũng cần xây dựng đặc tuyến tổng hợp của mạch mắc nối tiếp hoặc song song trở *KTT* với nguồn áp hoặc nguồn dòng một chiều.

Giả thiết phần tử *KTT* là diode bán dẫn (H.9.28a) và có đặc tuyến được làm gần đúng bằng hai đoạn thẳng (H.9.28b).



Hình 9.28: Diode bán dẫn (a) và đặc tuyến gần đúng (b)

Hãy xác định đặc tuyến tổng hợp của mạch mắc nối tiếp và song song diode bán dẫn với nguồn áp và nguồn dòng một chiều.

Xét mạch mắc nối tiếp trên H.9.29a,b của diode bán dẫn với nguồn áp một chiều E . Phương trình mô tả tương ứng.

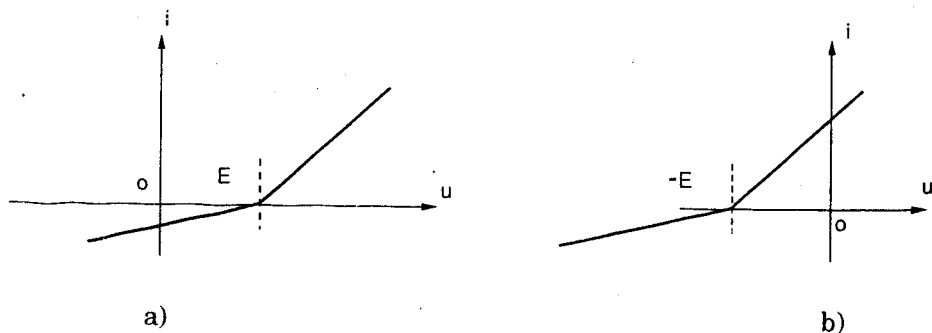
$$(a) \quad u = u_d + E = f_d(i) + E \quad (9.35)$$

$$(b) \quad u = u_d - E = f_d(i) - E \quad (9.36)$$



Hình 9.29: Trở KTT nối tiếp nguồn áp một chiều E

Đồ thị của các phương trình (9.35) và (9.36) được vẽ trên (H.9.30a,b).



Hình 9.30: Đặc tuyến tổng hợp của mạch nối tiếp nguồn áp

Từ các đồ thị có thể thấy rằng, việc mắc nối tiếp phần tử điện trở KTT với nguồn áp một chiều E sẽ làm dịch chuyển đặc tuyến của nó dọc theo trục áp một đoạn $\pm E$.

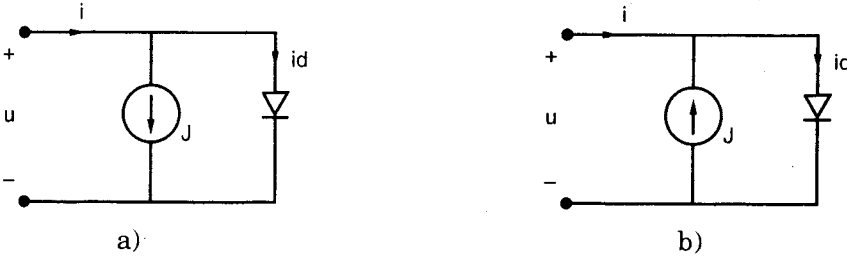
Trong trường hợp mạch nối song song diode bán dẫn với nguồn dòng

một chiều (H.9.31a,b), các phương trình mô tả mạch tương ứng là

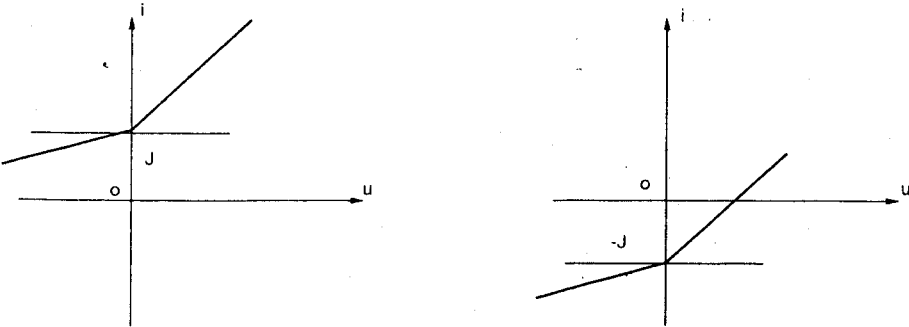
$$(a) \quad i = i_d + J = J + \varphi_d(u) \quad (9.37)$$

$$(b) \quad i = i_d - J = -J + \varphi_d(u) \quad (9.38)$$

trong đó đặc tuyến của diode bán dẫn là $i_d = \varphi_d(u)$; và nguồn dòng một chiều có giá trị dòng điện là J .



Hình 9.31: Trở KTT nối song song nguồn dòng một chiều J

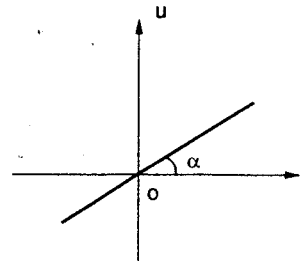


Hình 9.32: Đặc tuyến tổng hợp của mạch nối song song nguồn dòng

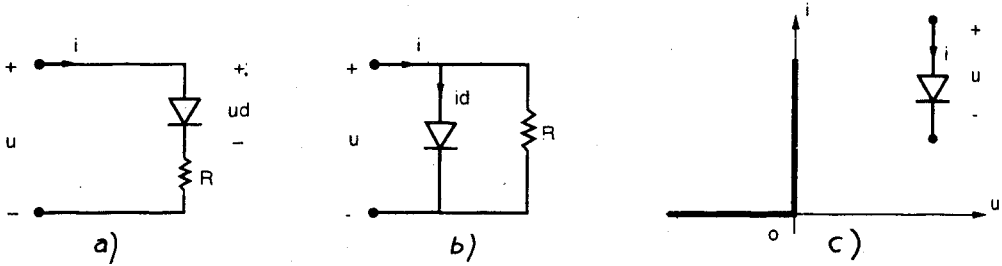
Đồ thị của các phương trình (9.37), (9.38) được biểu diễn trên các (H.9.32a,b), trong đó, đặc tuyến của diode bán dẫn bị dịch chuyển theo trục dòng điện một đoạn $\pm J$.

c)- Nối ghép trở KTT và trở tuyến tính

Áp dụng tư tưởng ở phần 1. khi xây dựng đặc tuyến tổng hợp của mạch gồm có các phần tử trở KTT và trở tuyến tính: ta có đặc tuyến volt-amper của phần tử điện trở tuyến tính là đường thẳng, có hệ số góc: $tg\alpha = \frac{u}{i} = R$ (H.9.33).



Hình 9.33: Đặc tuyến của phần tử trở tuyến tính



Hình 9.34: Mạch chứa phần tử KTT và tuyến tính

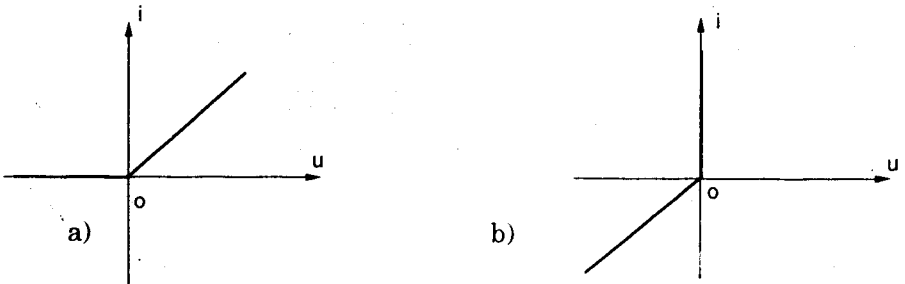
Như vậy, đặc tuyến tổng hợp của mạch nối tiếp và song song phần tử KTT với điện trở tuyến tính (H.9.34a,b), với giả thiết phần tử KTT có đặc tuyến như (H.9.34c), được xây dựng như sau

Phương trình mô tả cho các mạch trên H.9.34a,b

$$(a) \quad u = u_R + u_d = Ri + f_d(i) \tag{9.39}$$

$$(b) \quad i = i_d + i_R = Gu + \varphi_d(u) \tag{9.40}$$

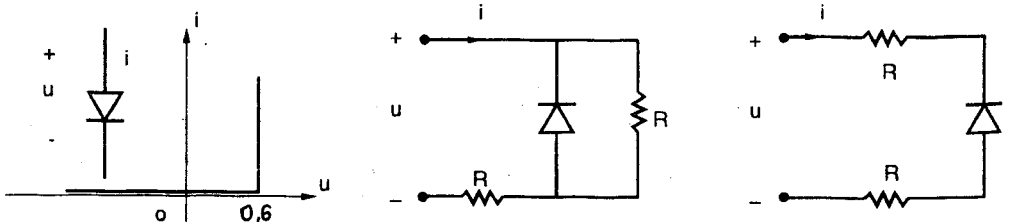
trong đó $G = \frac{1}{R}$.



Hình 9.35: Đặc tuyến tổng hợp của mạch hình 9.34

Đồ thị biểu diễn các phương trình (9.39), (9.40) tương ứng với các H.9.35a, H.9.35b.

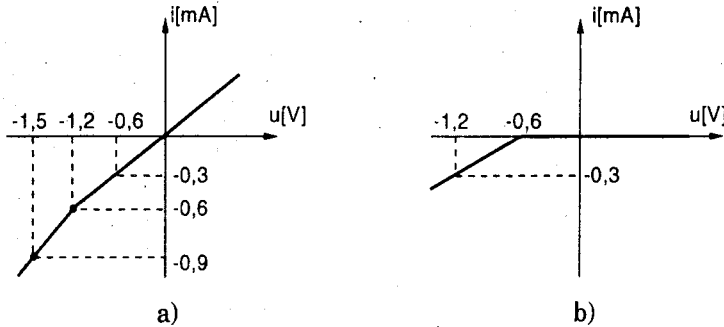
Ví dụ 9.1. Xây dựng đặc tuyến tổng hợp của mạch phi tuyến như trên (H.9.36b,c), biết phần tử diode có đặc tuyến như H.9.36a.



Hình 9.36: Mạch cho ví dụ 9.1

Cho biết giá trị điện trở: $R = 1 \text{ [K}\Omega\text{]}$.

Đặc tuyến tổng hợp của các mạch H.9.36b và H.9.36c được cho trên các H.9.37a, H.9.37b.

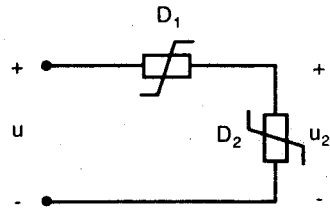


Hình 9.37: Đặc tuyến tổng hợp của mạch hình 9.36

2- Đặc tuyến truyền đạt

Đặc tuyến tổng hợp đề cập ở phần trên là đặc tuyến đặc trưng cho mạng một cửa. Nó cho ta xác định đáp ứng từ tác động ở cùng một cửa. Nếu đặt vào mạng một cửa nguồn dòng J , ta có: $i = J$; và do đó áp trên mạng một cửa, u sẽ được xác định từ đặc tuyến tổng hợp. Cũng tương tự, ta sẽ xác định được dòng điện i khi đặt vào mạng một cửa một nguồn áp E .

Đặc tuyến truyền đạt mang ý nghĩa khác. Nó mô tả quan hệ tác động - đáp ứng trên mạch khi hai đại lượng này không ở trên cùng một cửa. Xét một mạch phi tuyến như trên H.9.38, cần xác định qui luật biến thiên của điện áp u_2 (trên trở KTT D_2) theo điện áp đặt vào mạch u . Quan hệ $u_2 = f(u)$ được gọi là đặc tuyến truyền đạt.



Hình 9.38: Mạch KTT với quan hệ “vào-ra”

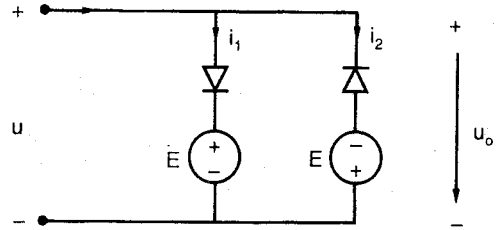
Thông thường, đối với đặc tuyến truyền đạt, người ta không dùng thuật ngữ “tác động - đáp ứng” như ở đặc tuyến tổng hợp mà hay dùng tên gọi “vào - ra” cho các thông số trên đặc tuyến. Các thông số trên đặc tuyến tổng hợp bắt buộc phải là dòng - áp, trong khi ở đặc tuyến truyền đạt thì tùy ý.

Để xây dựng đặc tuyến truyền đạt cũng có nhiều phương pháp, trong đó thông dụng nhất là:

- Phương pháp phân tích một chiều.
- Phương pháp đồ thị.

- Phương pháp số (thường dùng nhất là phép lặp Newton-Raphson): tức là tiến hành bài toán phân tích một chiều nhiều lần khi cho tín hiệu vào thay đổi trên một khoảng đủ lớn áp hay dòng.

Ví dụ 9.2. Cho mạch KTT như trên H.9.39, với giả thiết các trở KTT (diode) có đặc tuyến như trên H.9.34c, hãy xây dựng đặc tuyến tổng hợp: $u = f(i)$; và đặc tuyến truyền đạt: $u_o = g(u)$.

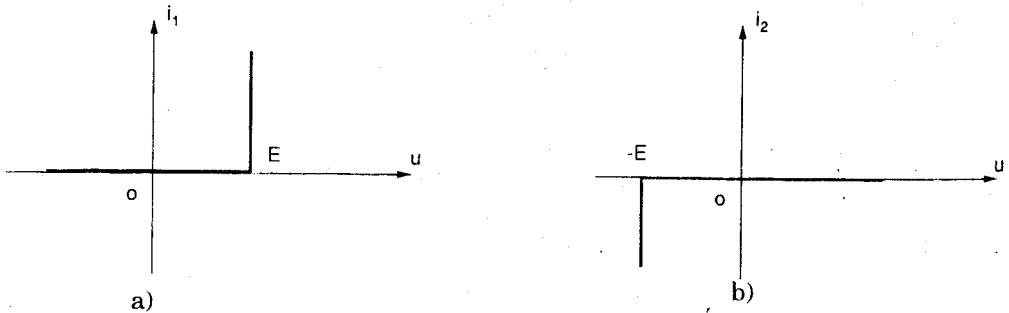


Hình 9.39: Mạch cho ví dụ 9.2

Phương trình của nhánh bên trái và bên phải

$$u = E + f_d(i) ; u = -E - f_d(i)$$

Đồ thị tương đương của mỗi nhánh như trên H.9.40a,b.

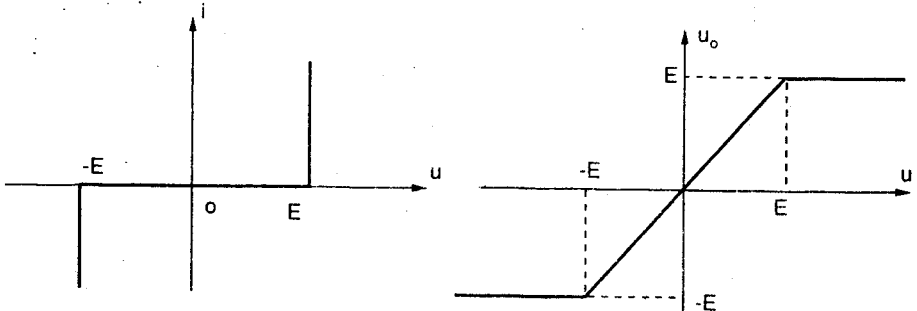


Hình 9.40: Đặc tuyến tổng hợp của mỗi nhánh trong ví dụ 9.2

Dòng điện trong mạch i được xác định

$$i = i_1 + i_2$$

Phép cộng đồ thị cho ta đặc tuyến tổng hợp của mạch trên H.9.41.



Hình 9.41: Đặc tuyến tổng hợp của ví dụ 9.2

Hình 9.42: Đặc tuyến truyền đạt $u_o = g(u)$ của ví dụ 9.2

Để xây dựng đặc tuyến truyền đạt, ta áp dụng phương pháp phân tích một chiều trên mạch đã cho. Ta thấy

Khi: $-E < u < E \rightarrow i = 0$; và: $u_o = u$

$$u > E \rightarrow u_o = E$$

$$u < -E \rightarrow u_o = -E$$

Từ đó, ta nhận được đặc tuyến truyền đạt như trên H.9.42.

3- Đặc tuyến của phần tử KTT ba cực và mạng hai cửa KTT

Như đã đề cập trong chương 5 trước đây: mạng hai cửa tuyến tính thông thường được mô tả bằng một phương trình ma trận, và ma trận trạng thái được xem là thông số đặc trưng cho mạng hai cửa tuyến tính. Nó cho phép ta có thể khảo sát hay phân tích các mạch điện có chứa mạng hai cửa tuyến tính mà không cần quan tâm đến cấu trúc bên trong.

Đối với mạng hai cửa có chứa phần tử KTT cũng tương tự, tức là cũng tồn tại sáu biểu diễn hệ phương trình dòng áp trên hai cửa, mô tả quan hệ giữa hai đại lượng trạng thái theo hai đại lượng trạng thái còn lại trong bốn đại lượng $\{u_1, i_1, u_2, i_2\}$. Chỉ khác đây là các hệ phương trình không tuyến tính. Sáu dạng hệ phương trình trạng thái cho mạng hai cửa KTT được cho trong bảng 9.1.

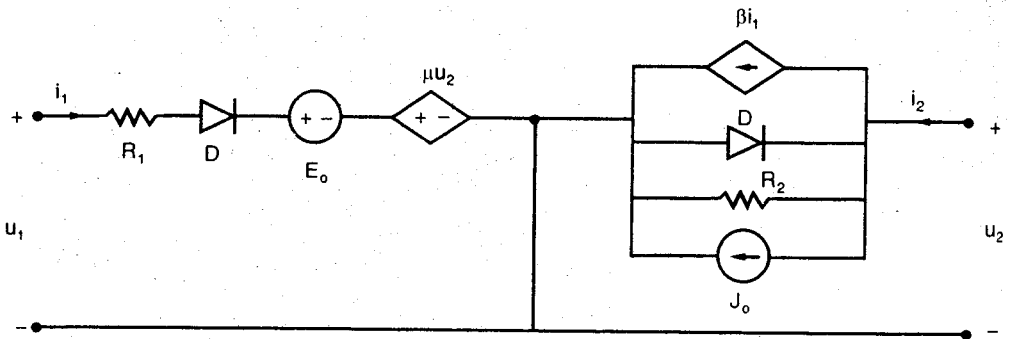
Bảng 9.1: Các hệ phương trình trạng thái của mạng hai cửa KTT

Hệ phương trình dạng Z $\begin{cases} u_1 = f_1(i_1, i_2) \\ u_2 = f_2(i_1, i_2) \end{cases}$	Hệ phương trình dạng Y $\begin{cases} i_1 = f_1(u_1, u_2) \\ i_2 = f_2(u_1, u_2) \end{cases}$
Hệ phương trình dạng H $\begin{cases} u_1 = f_1(i_1, u_2) \\ i_2 = f_2(i_1, u_2) \end{cases}$	Hệ phương trình dạng G $\begin{cases} i_1 = f_1(u_1, i_2) \\ u_2 = f_2(u_1, i_2) \end{cases}$
Hệ phương trình dạng A $\begin{cases} u_1 = f_1(u_2, -i_2) \\ i_1 = f_2(u_2, -i_2) \end{cases}$	Hệ phương trình dạng B $\begin{cases} u_2 = f_1(u_1, -i_1) \\ i_2 = f_2(u_1, -i_1) \end{cases}$

Mỗi hệ phương trình trạng thái có thể xây dựng nên hai họ đường cong. Ví dụ như ở hệ phương trình dạng Z: nếu ta cho thay đổi thông số i_2 thì quan hệ $u_1 = f(i_1)$ là một họ đường cong theo i_2 và tương tự ta cũng có quan hệ $u_2 = f(i_2)$ là một họ đường cong theo các giá trị của thông số i_1 . Về mặt nguyên lý, các họ đường cong này là như nhau, nhưng thật ra các họ đường cong theo các hệ phương trình trạng thái khác nhau có dạng khác nhau. Và đôi khi, để chính xác cho kết quả phân tích, người ta phải chọn các phương trình trạng thái diễn tả các họ đường cong gần với dạng tuyến tính nhất.

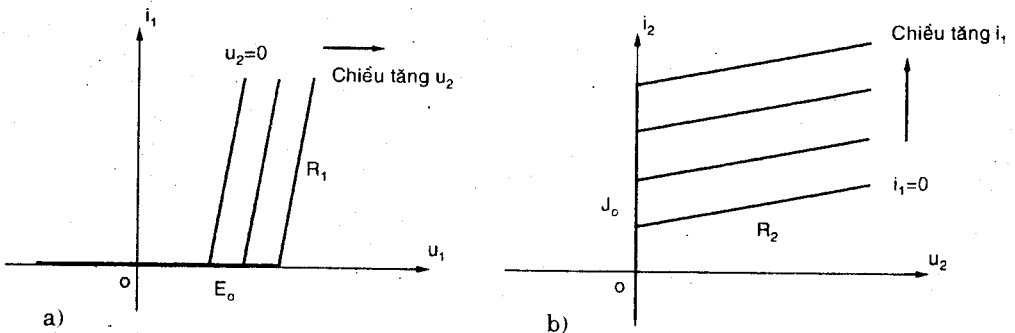
Xét mạng hai cửa *KT* trên H.9.43, hệ phương trình dạng *H* viết cho nó có dạng

$$\begin{cases} u_1 = f_1(i_1) + \mu u_2 & (9.41) \\ i_2 = f_2(u_2) + \beta i_1 & (9.42) \end{cases}$$



Hình 9.43: Mạng hai cửa *KTT*

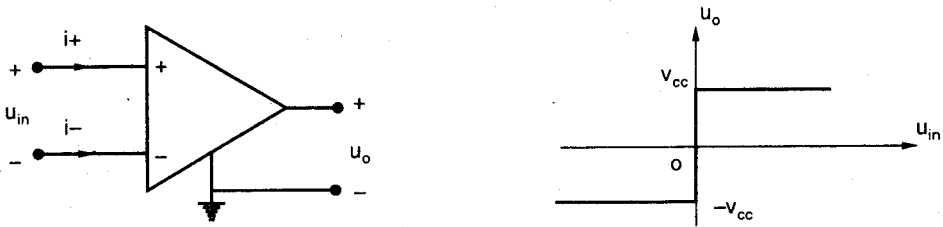
Rõ ràng, nếu ta xem u_2 và i_1 như là các tham số thì quan hệ $u_1 = f_1(i_1) + \mu u_2$; và $i_2 = f_2(u_2) + \beta i_1$ sẽ vẽ nên hai họ đường cong, mô tả quan hệ áp dòng trên hai cửa của mạng hai cửa *KTT* (H.9.44a,b). Phần tử trở *KTT* (diode) trong sơ đồ này có đặc tuyến như trên H.9.34c.



Hình 9.44: Họ đặc tuyến của mạng hai cửa *KTT*

4- Mạch có chứa phân tử khuếch đại thuật toán (*OP-AMP*)

Trong chương 3 chúng ta đã đề cập đến phần tử *OP-AMP* và các phương pháp phân tích mạch có chứa *OP-AMP*, nhưng chỉ xét ở miền tuyến tính. Ở phần này ta đề cập thêm một số vấn đề liên quan đến vùng bão hòa ở đặc tuyến của *OP-AMP*. Để đơn giản, ta xét mô hình *OP-AMP* lý tưởng (H.9.45a) và đặc tuyến truyền đạt như trên H.9.45b.

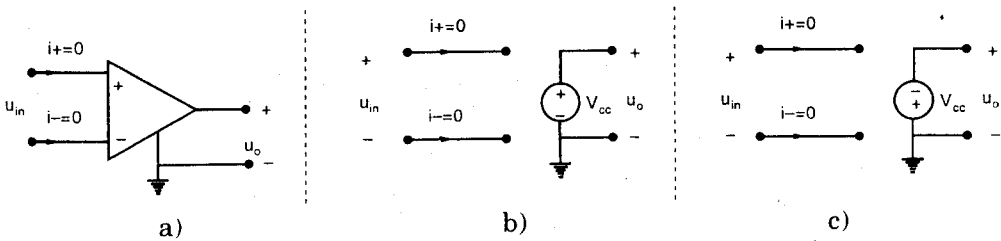


Hình 9.45: Mô hình OP-AMP và đặc tuyến của nó

Hệ phương trình mô tả cho OP-AMP lý tưởng cho bởi

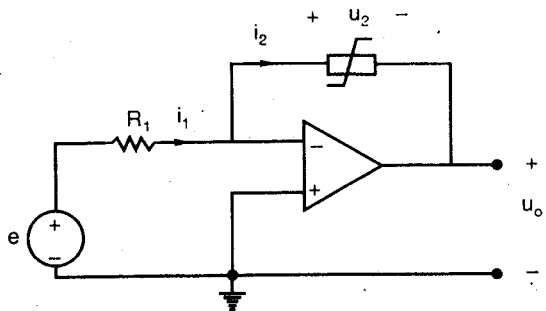
$$\begin{cases} i_+ = 0 & (9.43a) \\ i_- = 0 & (9.43b) \\ u_o = V_{cc} \cdot \frac{|u_{in}|}{u_{in}} ; \text{ nếu } u_{in} \neq 0 & (9.43c) \\ u_{in} = 0 ; -V_{cc} < u_o < V_{cc} & (9.43d) \end{cases}$$

(V_{cc} và $-V_{cc}$ là các điện thế cấp nguồn cho OP-AMP)



Hình 9.46: Ba sơ đồ tương đương cho ba miền làm việc của OP-AMP

Hệ phương trình trên tương đối công kênh và khó khăn cho phân tích, cho nên để đơn giản người ta hay dùng các sơ đồ tương đương, thay thế cho phân tử OP-AMP, ở các miền tuyến tính hay bão hòa của nó (H.9.46). Các sơ đồ này cũng diễn tả đủ các phương trình (9.43). Ở miền tuyến tính, mô hình OP-AMP như trên H.9.46a, thỏa mãn các phương trình (9.43a), (9.43b) và (9.43d). Sơ đồ H.9.46b cho mô hình OP-AMP ở miền bão hòa dương, thỏa mãn các phương trình (9.43a), (9.43b) và (9.43c) với $u_{in} > 0$. Sơ đồ H.9.46c cho mô hình OP-AMP ở miền bão hòa âm, thỏa mãn các phương trình (9.43a), (9.43b) và (9.43c) với $u_{in} < 0$.



Hình 9.47: Mạch OP-AMP chứa phần tử trở KTT

Phần lớn các mạch chứa *OP-AMP* được thiết kế làm việc trong miền tuyến tính. Các mạch này cũng có thể chứa các phần tử tuyến tính hoặc không tuyến tính. Ngoài ra, có một số mạch *OP-AMP* được thiết kế làm việc trên cả ba miền của nó nhằm tạo ra những hiệu ứng đặc biệt. Khi đó *OP-AMP* được xem xét dưới mô hình một phần tử *KTT*.

Mạch trên H.9.47 cho ta ví dụ về mạch *OP-AMP* có chứa phần tử trở *KTT* có đặc trưng: $u_2 = f(i_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Do} \quad i_2 = i_1 = \frac{e}{R_1} \quad \text{và} \quad u_o = -u_2 \\ \text{nên} \quad u_o = -f\left(\frac{e}{R_1}\right) \end{aligned} \quad (9.44)$$

Điều kiện của tín hiệu vào mạch e phải thỏa mãn

$$-V_{cc} < -f\left(\frac{e}{R_1}\right) < V_{cc} \quad (9.45)$$

Các phương trình (9.44) và (9.45) cho ta đặc tuyến truyền đạt $u_o = g(e)$ của mạch *KTT* với phần tử *OP-AMP* được xét trong miền tuyến tính.

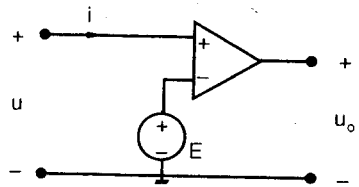
Trong một số lớn mạch điện, *OP-AMP* có thể làm việc trong cả ba miền trên đặc tuyến của nó. Điều này xảy ra khi biên độ của một hay nhiều tín hiệu vào vượt khỏi giới hạn trong một hay nhiều khoảng thời gian nào đó. Khi đó, người ta nói *OP-AMP* làm việc trong miền *KTT*. Việc khảo sát các đặc tuyến

tổng hợp hay đặc tuyến truyền đạt của mạch trong trường hợp này thường dựa vào các sơ đồ tương đương ở ba miền như trên H.9.46. Và khi biết được các đặc tuyến này, dạng tín hiệu ra sẽ dễ dàng xác định được khi biết được dạng tín hiệu vào.

Xét ví dụ cần xây dựng đặc tuyến tổng hợp: $i = \varphi(u)$; và đặc tuyến truyền đạt: $u_o = g(u)$, của mạch so sánh dùng *OP-AMP* như trên H.9.48. Ta có $u_{in} = u - E$

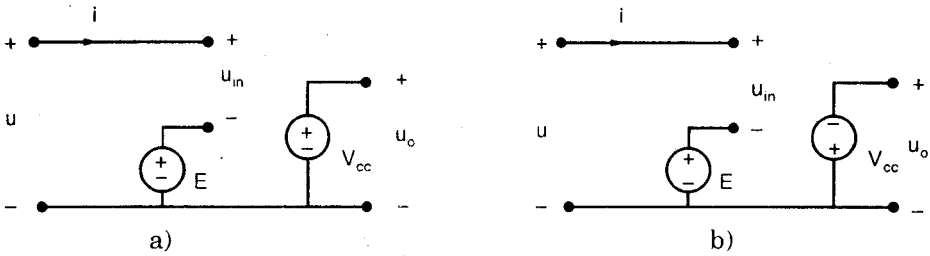
Cho nên *OP-AMP* làm việc trong vùng tuyến tính khi và chỉ khi $u = E$. Trong trường hợp này ta có

$$i = 0; \quad -V_{cc} < u_o < V_{cc} \quad (9.46)$$



Hình 9.48: Mạch so sánh dùng *OP-AMP*

Ở vùng bão hòa dương, sơ đồ thay thế cho mạch như trên H.9.49a



Hình 9.49: Sơ đồ ở chế độ bão hòa dương và bão hòa âm

Ta có: $u_{in} = u - E$. Vậy OP-AMP làm việc ở chế độ bão hòa dương nếu $u > E$, và khi đó

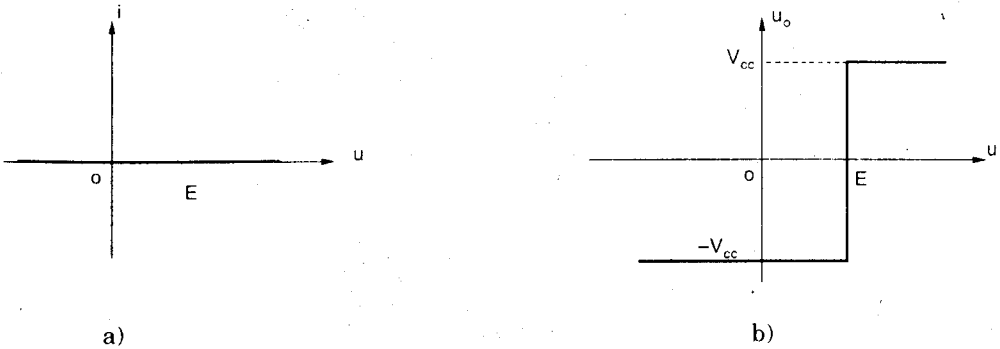
$$i = 0; u_o = V_{cc} \tag{9.47}$$

Ở vùng bão hòa âm, sơ đồ thay thế cho mạch như trên H.9.49b.

Ta có: $u_{in} = u - E$. Vậy OP-AMP làm việc ở chế độ bão hòa âm nếu: $u < E$, và khi đó

$$i = 0; u_o = -V_{cc} \tag{9.48}$$

Từ các phương trình (9.46), (9.47) và (9.48) cùng với các điều kiện của tín hiệu vào u ta có thể dựng được đặc tuyến tổng hợp của mạch H.9.50a và đặc tuyến truyền đạt H.9.50b.

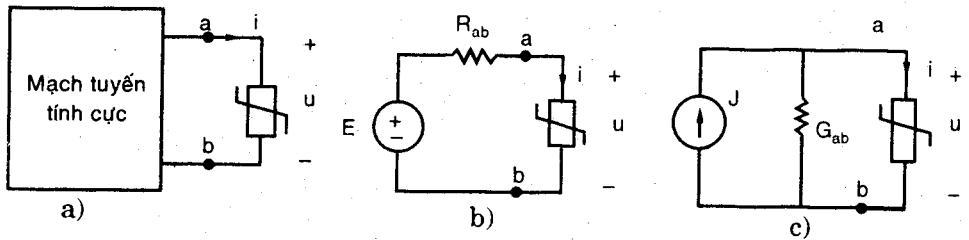


Hình 9.50: Đặc tuyến tổng hợp và đặc tuyến truyền đạt.

5- Phân tích mạch trở KTT nguồn một chiều

Khi phân tích mạch điện trở KTT một chiều, để xác định điện áp và dòng trên phần tử KTT (xác định điểm làm việc) người ta thường áp dụng phương pháp nguồn tương đương Thévenin-Norton. Nguồn tương đương là phần mạch tuyến tính tích cực, gồm điện trở tuyến tính và nguồn một chiều. Điện trở không tuyến tính được mắc nối tiếp với nguồn áp tương

đương Thévenin, hoặc song song với nguồn dòng tương đương Norton (H.9.51a,b,c).



Hình 9.51: Nguồn tương đương của mạch KTT

Các thông số của nguồn tương đương được xác định như sau

- Nguồn áp Thévenin có sức điện động E , bằng áp hở mạch tại hai cực a-b, và điện trở tuyến tính R_{ab} là trở tương đương nhìn từ hai cực a-b khi triệt tiêu nguồn tác động.

- Nguồn dòng Norton có giá trị dòng điện J , bằng dòng ngắn mạch qua cửa a-b, và: $G_{ab} = 1/R_{ab}$. Các sơ đồ trên (H.9.51b,c) có nhiều phương pháp giải, thông thường nhất là các phương pháp giải tích, đồ thị, phương pháp số và phương pháp tuyến tính hóa.

1- Phương pháp giải tích

Giả sử phần tử trở KTT trên H.9.51b có đặc tuyến của phần tử phụ thuộc áp

$$i = 4u^2 \quad (9.49)$$

Phương trình mạch tương ứng với nguồn Thévenin

$$u = E - R_{ab}i \quad (9.50)$$

Từ (9.49) và (9.50) ta có

$$4R_{ab}u^2 + u - E = 0 \quad (9.51)$$

Nếu cho $E = 2$ [v]; $R_{ab} = 0,25$ [Ω] thì (9.51) có hai nghiệm là

$$u = 1$$
 [v] và $u = -2$ [v]

Hai điểm làm việc tương ứng

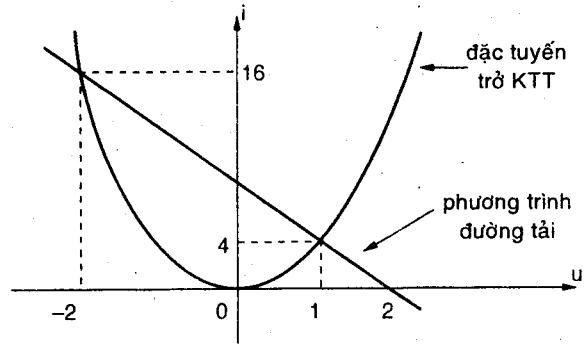
$$u_1 = 1$$
 [v] ; $i_1 = 4$ [A] (9.52a)

$$u_2 = -2$$
 [v] ; $i_2 = 16$ [A] (9.52b)

Trong thực tế, rất hiếm các bài toán KTT được giải theo phương pháp giải tích do khó diễn tả đặc trưng phần tử KTT bằng một hàm toán học vừa đủ chính xác và có thể giải được. Chúng ta sẽ tiếp tục tìm hiểu và phương pháp khác.

2- Phương pháp đồ thị (đường tải)

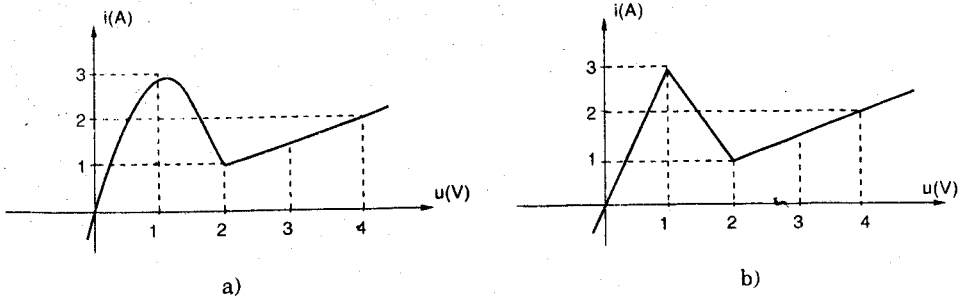
Nếu đặc trưng của phần tử *KTT* được cho dưới dạng đồ thị thì bài toán (9,51b,c) sẽ được giải theo phương pháp đồ thị. Người ta xây dựng trên cùng một hệ trục tọa độ $u - i$ hai đường đặc tuyến: một đặc tuyến của trở *KTT* và một đặc tuyến của mạch nguồn tương đương Thévenin - Norton. Giao



Hình 9.52: Giải theo phương pháp đồ thị

điểm của hai đường này sẽ cho ta điểm làm việc. Ví dụ trên được minh họa theo phương pháp đồ thị như trên H.9.52. Các kết quả ghi nhận được cũng tương tự như ở trên. Đặc tuyến của mạch nguồn tương đương còn được gọi là đường tải. Nó là đường thẳng, cắt trục điện áp tại giá trị E và trục dòng điện tại giá trị E/R_{ob} . Phương pháp đồ thị (còn gọi là phương pháp đường tải) được sử dụng rất rộng rãi trong thực tiễn bởi vì thường các đặc tuyến của phần tử *KTT* được cho là đường cong đo lường, khi đó phương pháp giải tích không thể áp dụng. Tính chất trực quan của phương pháp đồ thị cũng giúp chúng ta rất nhiều trong việc phân tích và thiết kế mạch *KTT*.

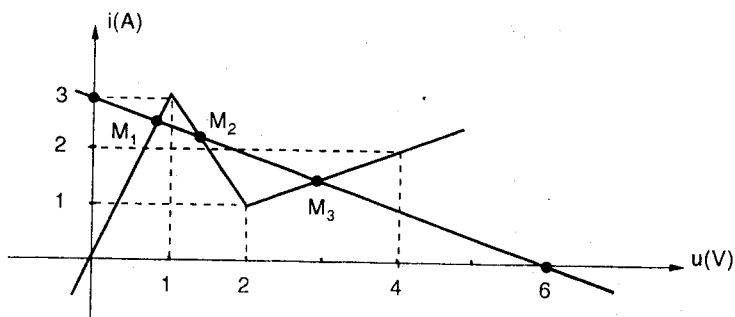
3- Phương pháp tuyến tính hóa từng đoạn đặc tuyến



Hình 9.53: Đặc tuyến diode và xấp xỉ của nó.

Giả sử phần tử trở *KTT* trong H.9.51 là phần tử diode đường hầm có đặc tuyến như trên H.9.53a. Một cách gần đúng, người ta có thể xấp xỉ đặc tuyến này thành ba đoạn thẳng như trên H.9.53b.

Nếu ta cho các thông số trên H.9.51b là: $E = 6$ [v]; $R_{ab} = 2$ [Ω] và vẽ chồng hai đặc tuyến: một của trở KTT và một của mạch nguồn Thévenin trong một đồ thị $u - i$ thì ta có như trên H.9.54.



Hình 9.54: Các điểm làm việc

Theo H.9.54, ta có thể chia trục điện áp u thành ba miền.

$$\text{Miền 1:} \quad u \leq 1 \quad (9.53a)$$

$$\text{Miền 2:} \quad 1 < u \leq 2 \quad (9.53b)$$

$$\text{Miền 3:} \quad u > 2 \quad (9.53c)$$

Trong mỗi miền, ta có thể thay thế các đặc tuyến bằng các phương trình

$$\text{Miền 1:} \quad i = 3u \quad (9.54a)$$

$$\text{Miền 2:} \quad i = -2u + 5 \quad (9.54b)$$

$$\text{Miền 3:} \quad i = 0,5u \quad (9.54c)$$

Phương trình đường tải:

$$u = 6 - 2i \quad (9.55)$$

Giải (9.54a) và (9.55), ta có điểm làm việc trong miền 1

$$M_1(U_1, I_1) = M_1\left(\frac{6}{7}, \frac{18}{7}\right)$$

Giải (9.54b) và (9.55) ta có điểm làm việc tương đương miền 2

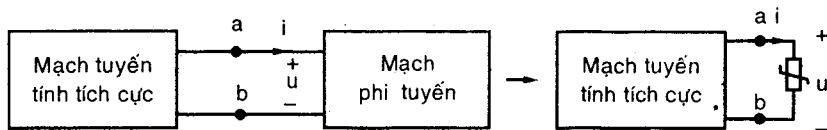
$$M_2(U_2, I_2) = M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Giải (9.54c) và (9.55) ta có điểm làm việc trong miền 3

$$M_3(U_3, I_3) = M_3\left(3, \frac{3}{2}\right)$$

Trong trường hợp tổng quát, phần mạch bên phải trên H.9.51a không phải là một phần tử trở KTT mà là một mạch KTT , có nhiều phần tử tuyến tính và không tuyến tính thì các phương pháp trên chỉ sử dụng

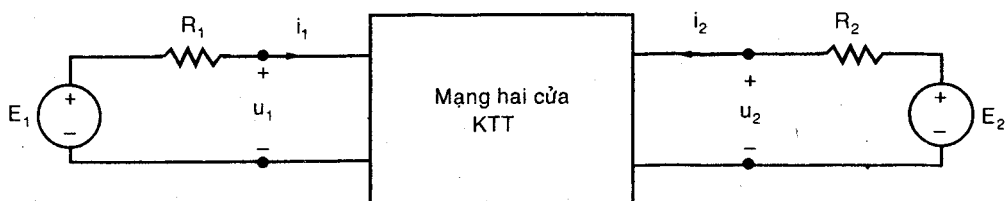
được khi ta tiến hành rút gọn phần mạch *KTT* trở về phần tử *KTT* tương đương bằng cách xây dựng đặc tuyến tổng hợp của mạng một cửa *KTT* (H.9.55).



Hình 9.55: Rút gọn cho mạng một cửa *KTT*

6- Phân tích mạch chứa mạng hai cửa *KTT*

Xét mạch chứa mạng hai cửa *KTT* như trên H.9.56, trong đó các phần mạch tuyến tính có nguồn ở phía sơ cấp và thứ cấp của mạng hai cửa đã được rút gọn theo phương pháp nguồn tương đương Thévenin - Norton.



Hình 9.56: Mạch chứa mạng hai cửa *KTT*

Các phương pháp thường được dùng để phân tích mạch (H.9.56) là phương pháp giải tích và phương pháp đồ thị.

1- Phương pháp giải tích

Tương tự như phân tích mạch có chứa mạng một cửa *KTT*, ở đây đối với các phần mạch tuyến tính ở sơ cấp, và thứ cấp của mạng hai cửa *KTT*, ta có hai phương trình biểu diễn đặc tuyến của mạch nguồn tương đương Thévenin - Norton

$$u_1 = E_1 - R_1 i_1 \tag{9.56a}$$

$$i_1 = (E_1 - u_1) / R_1 \tag{9.56b}$$

$$u_2 = E_2 - R_2 i_2 \tag{9.57a}$$

$$i_2 = (E_2 - u_2) / R_2 \tag{9.57b}$$

Với mạng hai cửa *KTT*, ta có hai phương trình trong số sáu hệ phương trình trạng thái của mạng hai cửa (bảng 9.1). Do đó chúng ta đã nhận được bốn phương trình để giải cho bốn ẩn số u_1, i_1, u_2, i_2 . Từ đó, xác định được các điểm làm việc cho mạng hai cửa *KTT*.

2- Phương pháp đồ thị (đường tải kép)

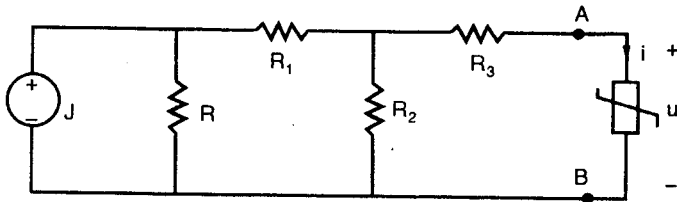
Trong phần 5.2, chúng ta đã khảo sát phương pháp đồ thị (đường tải) để xác định điểm làm việc cho phần tử *KTT* hai cực. Bây giờ ta mở rộng cho phần tử *KTT* ba cực, bốn cực (mạng hai cửa). Hai đường tải tương ứng với các mạch nguồn tương đương Thévenin-Norton ở phần sơ cấp và thứ cấp mạng hai cửa sẽ được vẽ chồng lên hai đồ thị $u-i$, mô tả hai họ đặc tuyến của mạng hai cửa *KTT*. Giao điểm của đường tải thứ nhất (phương trình 9.56) với quan hệ $u_1 = f_1(i_1)$ cho ta điểm làm việc của ngõ vào mạng hai cửa và giao điểm của đường tải thứ hai (phương trình 9.57) với quan hệ $u_2 = f_2(i_2)$ cho ta hai điểm làm việc tại ngõ ra của mạng hai cửa.

Thông thường, các quan hệ: $u_1 = f_1(i_1)$; và: $u_2 = f_2(i_2)$; của mạng hai cửa *KTT* là các họ đặc tuyến vì nó còn phụ thuộc vào thông số thứ ba đã đề cập ở phần đặc tuyến mạng hai cửa *KTT*, cho nên các đường tải sẽ giao với đặc tuyến tại nhiều điểm. Do đó, người ta có thể dùng kèm phương pháp chuyển đổi đường tải để xác định các điểm làm việc cho mạng hai cửa *KTT*.

Ví dụ 9.3. Cho mạch có một phần tử *KTT* như trên H.9.57. Hãy dùng phương pháp đồ thị để tìm áp dòng trên trở *KTT* và công suất tiêu hao trên nó. Cho biết

$J = 7$ [mA]; $R_1 = 200$ [Ω]; $R = 600$ [Ω]; $R_2 = 800$ [Ω]; $R_3 = 300$ [Ω];
và đặc tuyến của trở *KTT* theo bảng

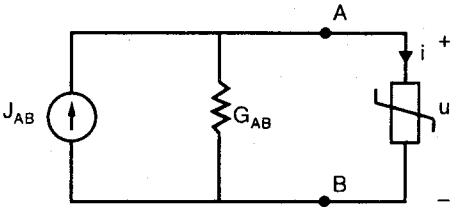
u [V]	0,1	0,32	0,6	1,1	2	2,8
i [mA]	0,5	1	1,5	2	2,5	3



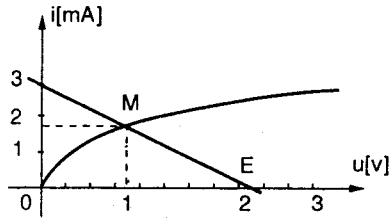
Giải. Thay thế phần mạch tuyến tính tích cực nhìn từ hai cực A-B bằng nguồn dòng tương đương như trên H.9.58. Trong đó

$$\begin{aligned}
 J_{AB} &= J \cdot \frac{R}{R + R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} \\
 &= J \cdot \frac{R R_2}{(R + R_1)(R_2 + R_3) + R_2 R_3} = 3 \text{ [mA]}
 \end{aligned}$$

$$G_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_3 + \frac{(R+R_1)R_2}{R+R_1+R_2}} = \frac{R+R_1+R_2}{RR_2 + RR_3 + R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = \frac{1}{700} [S]$$



Hình 9.58: Sơ đồ nguồn dòng tương đương



Hình 9.59: Nghiệm của ví dụ 9.3

Dòng và áp trên phần tử KTT được xác định theo phương pháp đồ thị. Dựa trên sơ đồ tương đương H.9.58 và các thông số vừa xác định trên đây, ta có phương trình đường tải

$$u = \frac{J_{AB} - i}{G_{AB}}$$

Trên cùng một đồ thị $u-i$, ta vẽ đặc tuyến của phần tử KTT theo bảng đã cho và phương trình đường tải xác định ở trên. Giao điểm của chúng là điểm M (0,9 [v]; 1,75[mA]) chính là điện áp và dòng điện trên phần tử trở KTT (H.9.59).

Công suất tiêu hao trên phần tử KTT

$$P = u_o I_o = 0,9 \cdot 1,75 = 1,575 [mW]$$

Tất nhiên với mạch trong ví dụ trên đây, ta cũng có thể giải khi thay thế phần mạch tuyến tính tích cực bằng nguồn tương đương Thévenin với các thông số

$$E = J_{AB} \cdot R_{AB} = 2,1 [v]$$

trong đó

$$R_{AB} = 700 [\Omega]$$

7- Phương pháp số phân tích mạch KTT nguồn một chiều

Nghiệm của bài toán phi tuyến hiếm khi tồn tại dưới dạng giải tích, và nếu như mạch khảo sát có dạng phức tạp thì phương pháp đồ thị cũng gặp khó khăn. Khi đó, phương pháp số với sự trợ giúp của máy tính điện tử để giải bài toán phi tuyến tỏ ra hiệu quả.

Bài toán phi tuyến một chiều giải theo phương pháp số bao gồm hai bước:

- 1- Thiết lập hệ phương trình cân bằng mạch
- 2- Giải hệ phương trình cân bằng theo giải thuật số.

a) Thiết lập hệ phương trình cân bằng

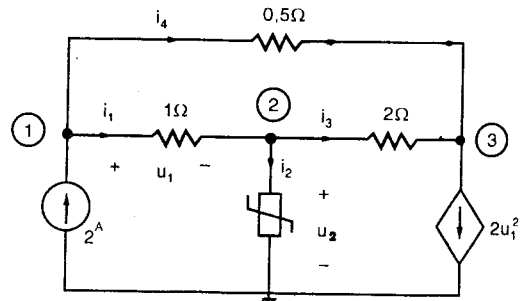
Hệ phương trình cân bằng mạch được thiết lập dựa trên các định luật cơ bản của mạch: luật Kirchhoff và các đặc trưng của các phần tử mạch. Ta có thể thiết lập các phương trình phi tuyến này bằng phương pháp thế nút, dòng mắt lưới (dòng vòng) hay các phương pháp quen thuộc khác.

Ví dụ 9.4. Hãy thiết lập hệ phương trình thế nút cho mạch trên H.9.60, biết đặc tuyến của trở phi tuyến

$$u_2 = \sqrt[3]{i_2}$$

Theo các định luật Kirchhoff

$$\begin{cases} i_1 + i_4 = 2 \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_3 + i_4 - 2u_1^2 = 0 \end{cases}$$



Hình 9.60: Mạch ví dụ 9.4

Trên các phần tử mạch

$$\begin{cases} i_1 = \varphi_1 - \varphi_2 \\ i_2 = \varphi_2^3 \\ i_3 = \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_3) \\ i_4 = 2(\varphi_1 - \varphi_3) \end{cases}$$

Thế vào trên

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 + 2(\varphi_1 - \varphi_3) = 2 \\ \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_2^3 - \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \\ \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_3) + 2(\varphi_1 - \varphi_3) - 2(\varphi_1 - \varphi_2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\varphi_1 - \varphi_2 - 2\varphi_3 - 2 = 0 \\ 2\varphi_1 - 3\varphi_2 - 2\varphi_2^3 + \varphi_3 = 0 \\ 4\varphi_1 - 4(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \varphi_2 - 5\varphi_3 = 0 \end{cases}$$

Để thành lập được hệ phương trình mô tả: cần lưu ý khi viết hệ phương trình thế nút, các phần tử trở KTT phải là phần tử phụ thuộc áp; khi viết hệ phương trình dòng mắt lưới (dòng vòng) thì các trở KTT phải là phụ thuộc dòng, và các phương pháp khác cũng phải có yêu cầu tương tự.

b) Các giải thuật số

Các giải thuật số được dùng rộng rãi để phân tích mạch trở KTT nguồn một chiều là phương pháp lặp đơn giản và phương pháp Newton-Raphson.

Phương pháp lặp đơn giản

Mọi phương pháp số thực chất đều là trường hợp đặc biệt của phương pháp lặp. Chúng ta có thể hình dung phương pháp lặp đơn giản qua ví dụ sau

Tìm nghiệm của phương trình

$$x = F(x) = 4 - 2x^{\frac{1}{3}} \tag{9.58}$$

Đầu tiên ta chọn một giá trị đầu x_0 và tính: $x_1 = F(x_0)$. Nếu: $x_1 = x_0$; thì x_0 chính là nghiệm cần tìm và quá trình tính kết thúc. Tuy nhiên, thường là $x_1 \neq x_0$ khi đó ta cần một giải thuật cho phép xác định nghiệm với độ chính xác mong muốn.

Chẳng hạn, ta có thể dùng giải thuật lặp sau đây

Chọn $x_0 = 10$ và tính

$$x_1 = F(x_0) = 4 - 2\sqrt[3]{10} = -0,31 ; \quad x_2 = F(x_1) = 4 - 2\sqrt[3]{-0,31} = 5,35$$

$$x_3 = F(x_2) = 4 - 2\sqrt[3]{5,35} = 0,5 ; \quad x_4 = F(x_3) = 4 - 2\sqrt[3]{0,5} = 2,41$$

$$x_5 = F(x_4) = 4 - 2\sqrt[3]{2,41} = 1,32 ; \quad x_6 = F(x_5) = 4 - 2\sqrt[3]{1,32} = 1,81$$

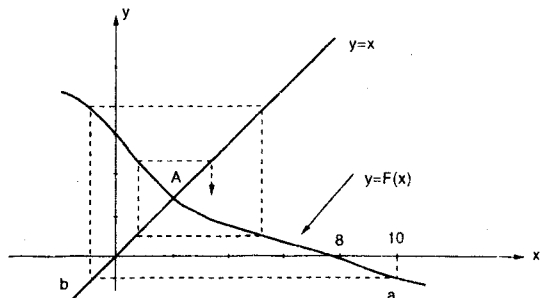
$$x_7 = F(x_6) = 4 - 2\sqrt[3]{1,81} = 1,56 ; \quad x_8 = F(x_7) = 4 - 2\sqrt[3]{1,56} = 1,67$$

$$x_9 = F(x_8) = 4 - 2\sqrt[3]{1,67} = 1,62 ; \quad x_{10} = F(x_9) = 4 - 2\sqrt[3]{1,62} = 1,65$$

$$x_{11} = F(x_{10}) = 4 - 2\sqrt[3]{1,65} = 1,64 ; \quad x_{12} = F(x_{11}) = 4 - 2\sqrt[3]{1,64} = 1,64$$

Ở bước lặp thứ 12, ta thu được nghiệm: $x = 1,64$; với sai số 0,01.

Về mặt hình học, nghiệm của phương trình: $x = F(x)$ là tọa độ giao điểm A của đường phân giác: $y = x$, và đường cong phi tuyến: $y = F(x)$, như trên H.9.61. Đường thẳng đứng hoành độ x_0 cắt đường: $y = F(x)$, tại điểm a, đường nằm ngang qua a cắt đường phân giác tại b có tọa độ



Hình 9.61: Thuật toán lặp đơn giản

x_1 . Tiếp tục như vậy ta sẽ có điểm A cần tìm.

Nội dung của phương pháp lặp đơn giản

Cho phương trình cân bằng có dạng: $x = F(x)$, dưới các điều kiện phù hợp mà ta không đề cập ở đây, nghiệm có thể được tìm theo qui trình

- Chọn giá trị đầu x_0

- Xác định: $x_{n+1} = F(x_n)$; $n = 0, 1, 2, \dots$

+ Nếu: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ (ε là sai số mong muốn) thì quá trình lặp chấm dứt.

Lưu ý: Phương pháp lặp đơn giản vẫn đúng cho trường hợp n phương trình khi đó

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{F}(\bar{x}_n); \text{ với: } \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_n \text{ là các vectơ} \quad (9.59)$$

Tuy dễ dùng nhưng phương pháp lặp đơn giản thường hội tụ rất chậm, do đó trên thực tế người ta thường dùng một phương pháp khác có tốc độ hội tụ cao hơn: phương pháp Newton-Raphson.

Phương pháp Newton-Raphson

Để có một ý niệm sơ bộ về phương pháp Newton-Raphson, xét phương trình cân bằng một biến

$$f(x) = 0 \quad (9.60)$$

Bỏ qua các vô cùng bé bậc cao khi khai triển Taylor hàm $f(x)$ xung quanh điểm x_n và thay $x = x_{n+1}$

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad (9.61)$$

$$\text{Suy ra} \quad x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} \cdot f(x_n) \quad (9.62)$$

Đây chính là giải thuật Newton-Raphson đối với hàm một biến

Nếu đặt: $F(x_n) = x_n - [f'(x_n)]^{-1} \cdot f(x_n)$ ta sẽ có

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

Như vậy, phương pháp Newton-Raphson chỉ là một trường hợp đặc biệt của phương pháp lặp đơn giản.

Lấy ví dụ trong phương pháp lặp ở trước và giải lại bằng phương pháp Newton-Raphson.

Đặt: $f(x) = x - 4 + 2\sqrt[3]{x}$; và tìm nghiệm của: $f(x) = 0$, bằng giải thuật Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - 4 + 2x_n^{1/3}}{1 + \frac{2}{3}x_n^{-2/3}} \equiv F(x_n)$$

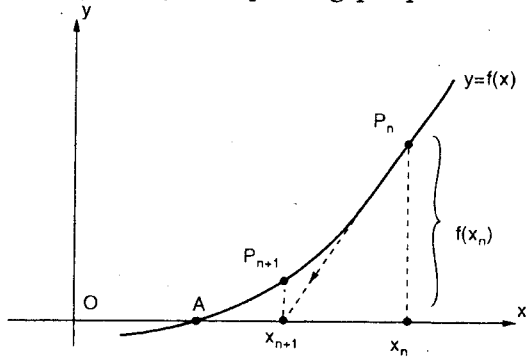
Cũng chọn: $x_0 = 10$, và tính

$$x_1 = F(x_0) = 0,99; \quad x_2 = F(x_1) = 1,60$$

$$x_3 = F(x_2) = 1,64; \quad x_4 = F(x_3) = 1,64$$

Ngay ở bước lặp thứ 4, ta đã thu được nghiệm với sai số 0,01. Điều này cho thấy phương pháp Newton-Raphson hội tụ nhanh hơn phương pháp lặp đơn giản rất nhiều, và đó là lý do tại sao phương pháp Newton-Raphson thường được dùng để giải phương trình phi tuyến.

Về mặt hình học, nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ thực chất là tọa độ giao điểm A của đường cong $y = f(x)$, và trục hoành (H.9.62). Gọi P_n là điểm trên đường cong ứng với x_n , đường tiếp tuyến qua P_n sẽ có độ dốc $f'(x_n)$.



Hình 9.62: Thuật toán Newton-Raphson

Từ $x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)$; ta nhận thấy x_{n+1} chính là tọa độ của giao điểm giữa trục hoành và đường tiếp tuyến qua P_n . Tương ứng với x_{n+1} là một điểm P_{n+1} trên đường cong. Lặp lại quá trình này, ta sẽ xác định được nghiệm cần tìm ứng với điểm A.

Bây giờ ta hãy mở rộng giải thuật Newton-Raphson cho hệ n phương trình phi tuyến

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, n \tag{9.63}$$

Đặt: vectơ $\bar{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$; với: $x_i^{(j)}$ - là giá trị của x_i ở bước lặp thứ j

$$f_i(\bar{x}) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \text{ hay } \bar{f}(\bar{x}) = 0$$

Bỏ qua các hài bậc cao và khai triển Taylor xung quanh vectơ $\bar{x}^{(j)}$

$$f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{x}^{(j)}) + \frac{\partial f_i(\bar{x}^{(j)})}{\partial x_1} (x_1 - x_1^{(j)}) + \dots + \frac{\partial f_i(\bar{x}^{(j)})}{\partial x_n} (x_n - x_n^{(j)})$$

Điều ta chờ đợi là $\bar{x}^{(j+1)}$ thỏa phương trình $0 = f_i(\bar{x}^{(j+1)})$, suy ra

$$0 = f_i(x^{-(j)}) + \frac{\partial f_i(x^{-(j)})}{\partial x_1} (x_1^{(j+1)} - x_1^{(j)}) + \dots + \frac{\partial f_i(x^{-(j)})}{\partial x_n} (x_n^{(j+1)} - x_n^{(j)})$$

Nếu đặt

$$J(\bar{x}^{(j)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x}^{(j)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x}^{(j)})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x}^{(j)})}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_n(\bar{x}^{(j)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (9.64)$$

= ma trận Jacobian của $\bar{f}(\bar{x})$ tại $\bar{x}^{(j)}$

thì

$$J(\bar{x}^{(j)}) \cdot (\bar{x}^{(j+1)} - \bar{x}^{(j)}) = -\bar{f}(\bar{x}^{(j)}) \quad (9.65)$$

Do đó giải thuật Newton-Raphson đối với hệ n phương trình sẽ là

$$\bar{x}^{(j+1)} = \bar{x}^{(j)} - \left[J(\bar{x}^{(j)}) \right]^{-1} \cdot \bar{f}(\bar{x}^{(j)}) \quad (9.66)$$

Nội dung của thuật toán Newton-Raphson: tóm tắt ba bước như sau

1- Chọn số bước tính cực đại m ; chọn sai số $\varepsilon > 0$; chọn giá trị khởi động x_0 ; đặt $j = 0$

2- Giải phương trình (9.62) để tìm giá trị $x^{(j+1)}$

3- if $\|x^{(j+1)} - x^{(j)}\| < \varepsilon$: ngừng tính

else thay thế j bằng $j + 1$

If $(j+1) \geq m$: ngừng tính

else quay lại bước hai

Nếu x là một vectơ thì sai số ở bước tính thứ $(j + 1)$ được xác định theo

$$\|x^{(j+1)} - x^{(j)}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^P [x_i^{(j+1)} - x_i^{(j)}]^2} \quad (9.67)$$

trong đó: P - là độ dài của vectơ nghiệm cần tìm.

9.2.2 Mạch trở KTT nguồn xoay chiều

Việc phân tích mạch KTT xoay chiều tương đối phức tạp ngay cả khi nguồn tác động là điều hòa và tất nhiên càng phức tạp hơn nhiều khi nguồn tác động là tuần hoàn. Như đã nói ở trước không có một phương pháp thống nhất nào để phân tích mạch KTT, tùy trường hợp cụ thể mà ta sẽ sử dụng các phương pháp gần đúng đã nêu ở mục 9.1.3.

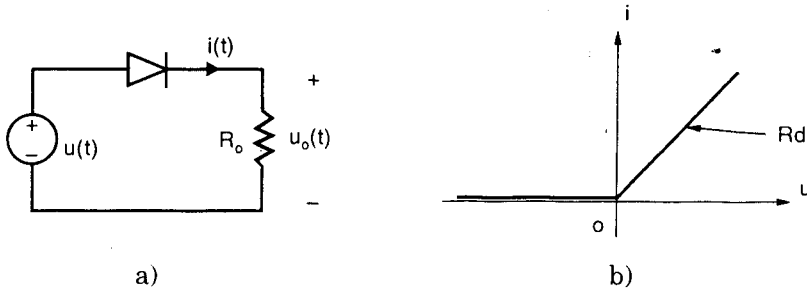
Sau đây ta sẽ xét một số ví dụ để minh họa việc áp dụng các phương

pháp phân tích mạch *KTT* cho từng quá trình *KTT* cụ thể thường gặp.

1- Phương pháp đồ thị

Là phương pháp xác định đáp ứng của mạch *KTT* nhờ vào việc dựng đồ thị. Phương pháp này được thực hiện vẫn dựa vào đặc tuyến tổng hợp hoặc đặc tuyến truyền đạt của mạch.

Xét sơ đồ mạch chỉnh lưu dùng một diode bán dẫn như trên H.9.63a và đặc tuyến của trở *KTT* (diode) cho trên H.9.63b.



Hình 9.63: Mạch chỉnh lưu

Từ đặc tuyến tổng hợp của mạch gồm hai phần tử trở *KTT* (diode) và điện trở tải R_o ; tại các giá trị t đã chọn, ta sẽ có các giá trị tương ứng của $u(t)$. Dóng các giá trị $u(t)$ tìm được lên đặc tuyến tổng hợp, ta sẽ có dạng dòng điện trong mạch $i(t)$.

Nếu điện áp $u(t)$ có dạng sin

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) \tag{9.68}$$

Dòng điện qua mạch có dạng

$$i(t) = \begin{cases} \frac{U_m}{R_o + R_d} \sin(\omega t) & 2k\pi < \omega t < (2k + 1)\pi \\ 0 & (2k + 1)\pi < \omega t < (2k + 2)\pi \end{cases} \tag{9.69}$$

Điện áp trên tải

$$u_o(t) = R_o i(t) \tag{9.70}$$

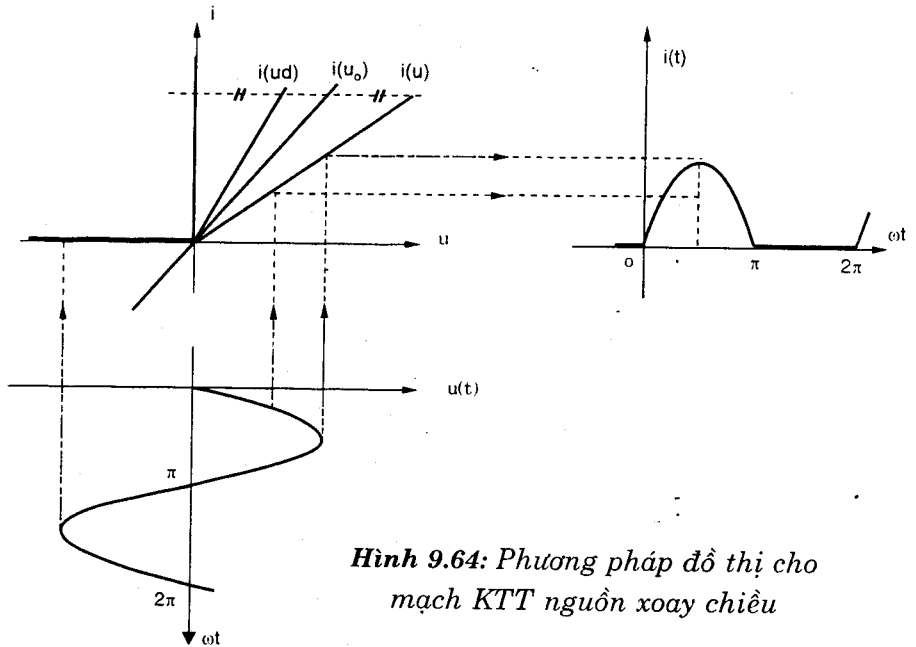
Dạng dòng điện $i(t)$ theo phương pháp đồ thị cho trên H.9.64.

Sau khi khai triển dòng điện $i(t)$ thành chuỗi lượng giác Fourier, ta được

$$u_o(t) = \frac{U_m R_o}{R_o + R_d} \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos 2\omega t}{1.3} + \frac{\cos 4\omega t}{3.5} + \frac{\cos 6\omega t}{5.7} + \dots \right] \right] \tag{9.71}$$

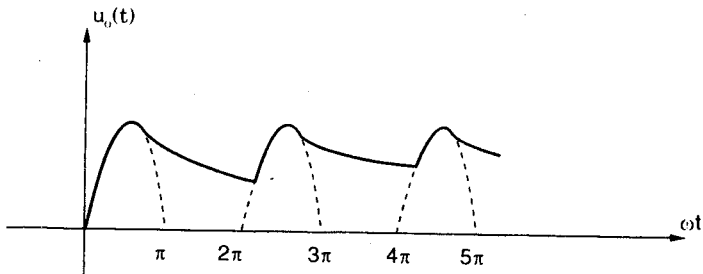
Thành phần một chiều trong điện áp trên tải

$$U_o = \frac{U_m R_o}{\pi(R_o + R_d)} \quad (9.72)$$



Hình 9.64: Phương pháp đồ thị cho mạch KTT nguồn xoay chiều

Thành phần một chiều chính là giá trị trung bình của điện áp $u_o(t)$. Nó cũng có thể được xác định theo công thức tính trị trung bình trực tiếp trên dạng tín hiệu $i(t)$ theo phương pháp đồ thị. Trong các mạch chỉnh lưu thực tế, để giảm các tải trọng điện áp tải (biểu thức 9.71), người ta nối song song với tải R_o một tụ điện C_o . Tụ điện C_o sẽ phóng điện qua R_o trong thời gian diode không dẫn điện, làm cho $u_o(t)$ có dạng bằng phẳng hơn (H.9.65).



Hình 9.65: Dạng $u_o(t)$ khi có thêm tụ điện song song R_o

Phương pháp đồ thị chiếm một vị trí rất quan trọng trong phân tích mạch *KTT* nguồn xoay chiều bởi lý do

- Đáp ứng hoàn toàn được xác định, nếu như ta xác định được đặc tuyến tổng hợp hoặc đặc tuyến truyền đạt của mạch.

- Mặc dù bị hạn chế về độ chính xác, nhưng phương pháp đồ thị có tính trực quan cao và không phụ thuộc vào dạng nguồn tác động, tần số của tác động. Nó cũng áp dụng được nếu tác động lên mạch có cả tín hiệu một chiều và tín hiệu xoay chiều, hoặc tín hiệu xoay chiều nhiều tần số. Không phải phương pháp phân tích mạch *KTT* nào cũng có nhiều ưu điểm như vậy.

2- Phương pháp giải tích

Xét một ứng dụng khác của phần tử *KTT* trong mạch điều chế biên độ *AM* bằng cách nối tiếp phần tử *KTT* với một mạch tuyến tính. Phương pháp giải tích được áp dụng nếu người ta làm gần đúng đặc tuyến của điện trở *KTT* theo biểu thức

$$i = \varphi(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 \tag{9.73}$$

Nếu tác động lên mạch hai quá trình điều hòa có tần số khác nhau, tổng của chúng

$$u(t) = U_{m1} \sin \Omega t + U_{m2} \sin \omega t \tag{9.74}$$

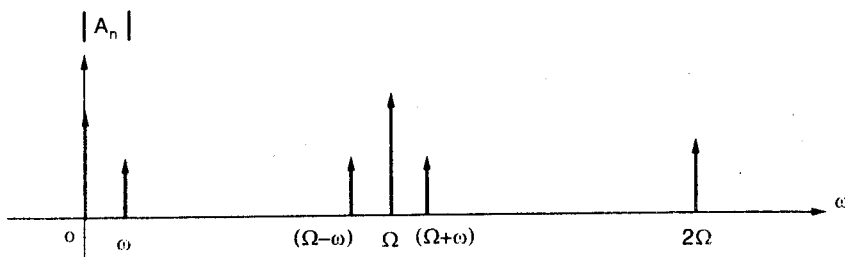
trong đó giả thiết $\Omega \gg \omega$. Thay (9.74) vào (9.73) ta có

$$i = a_0 + a_1(U_{m1} \sin \Omega t + U_{m2} \sin \omega t) + a_2(U_{m1} \sin \Omega t + U_{m2} \sin \omega t)^2$$

Thực hiện vài phép toán lên hàm *i*, ta có:

$$\begin{aligned} i = & a_0 + a_1U_{m1} \sin \Omega t + a_1U_{m2} \sin \omega t + \frac{1}{2}a_2U_{m1}^2 + \frac{1}{2}a_2U_{m2}^2 \\ & - \frac{1}{2}a_2U_{m1}^2 \cos 2\Omega t - \frac{1}{2}a_2U_{m2}^2 \cos 2\omega t \\ & + a_2U_{m1}U_{m2} \cos(\Omega - \omega)t - a_2U_{m1}U_{m2} \cos(\Omega + \omega)t \end{aligned} \tag{9.75}$$

Phổ biên độ dòng điện (9.75) được biểu diễn trên H.9.66a.



Hình 9.66a: Phổ biên độ dòng điện

Nếu phần mạch tuyến tính nối tiếp với phần tử *KTT* là một mạch cộng hưởng, có tần số cộng hưởng bằng Ω , và phẩm chất *Q* được chọn thích hợp, thì dòng qua mạch cộng hưởng sẽ gồm các thành phần

$$i(t) = a_1 U_{m1} \sin \Omega t + a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\Omega - \omega)t - a_2 U_{m1} U_{m2} \cos(\Omega + \omega)t \quad (9.76)$$

hay là
$$i(t) = a_1 U_{m1} \left(1 + 2 \frac{a_2}{a_1} U_{m2} \sin \omega t\right) \sin \Omega t \quad (9.77)$$

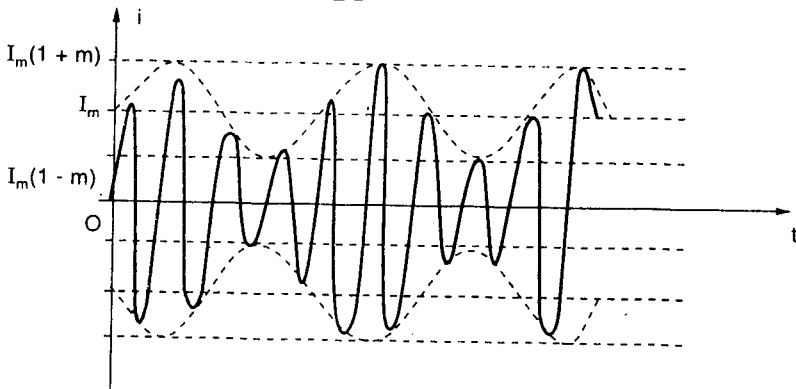
Nếu ký hiệu
$$\begin{cases} I_m = a_1 U_{m1} \\ m = 2 \frac{a_2}{a_1} U_{m2} \end{cases} \quad (9.78)$$

Ta sẽ có
$$i(t) = I_m (1 + m \sin \omega t) \sin \Omega t \quad (9.79)$$

Biểu thức (9.79) mô tả quá trình sóng mang có tần số Ω bị điều chế biên độ bởi tín hiệu điều hòa có tần số ω (H.9.66b), ta gọi đó là tín hiệu điều biên.

Trong thực tế, quá trình tần số thấp không phải là tín hiệu điều hòa mà là tín hiệu tin tức tần số thấp có dải tần từ ω_{\min} + ω_{\max} . Hệ số *m* được gọi là độ sâu điều chế. Trong trường hợp điều chế không méo *m* lấy giá trị trong khoảng

$$0 \leq m \leq 1 \quad (9.80)$$



Hình 9.66b: Dạng tín hiệu bị điều chế biên độ

3- Phương pháp tuyến tính hóa đoạn đặc tuyến

Rất nhiều phần tử trở *KTT* trong thực tế như diode, transistor làm việc dưới điện áp không đổi lớn hơn rất nhiều tín hiệu áp nó xử lý. Trong trường hợp đó, người ta có thể thay thế phần tử *KTT* bằng phần tử tuyến tính (xem phần 9.1.3). Một đoạn đặc tuyến của phần tử *KTT* sẽ được tuyến tính hóa. Phương pháp này gọi là phương pháp tuyến tính hóa và

được dùng rất rộng rãi trong các bài toán phi tuyến. Ví dụ 9.5 sẽ minh họa phương pháp này.

Ví dụ 9.5. Bốn cực tuyến có ma trận A được cho.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3(k\Omega) \\ 2(mS) & 5 \end{bmatrix}$$

ở ngõ vào của bốn cực có tác động

$$e(t) = E + 2 \sin(10^4 t) \text{ [v]}$$

Tải của bốn cực là điện trở KTT có đặc tuyến volt-amper dưới dạng bảng.

i (mA)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
U (V)	0	2,3	4,6	6,3	7,4	7,4	6,5	5,4	3,9	2,7	1,5	1,0	2,0	3,5	5,2

1- Hãy xác định thành phần một chiều E của nguồn tác động để cho điểm làm việc của phần tử KTT ở vào điểm giữa đoạn trở âm đặc tuyến.

2- Tại giá trị E xác định, tìm dòng điện $i(t)$ qua trở KTT .

Giải. Bốn cực được cho ở đầu bài chỉ có một phần tử KTT , do đó có thể thay thế phần mạch tuyến tính có nguồn $e(t)$ bằng nguồn tương đương Thévenin (H.9.67a). Phần tử KTT là tải của nguồn tương đương.



Hình 9.67: Sơ đồ nguồn tương đương ở ví dụ 9.5

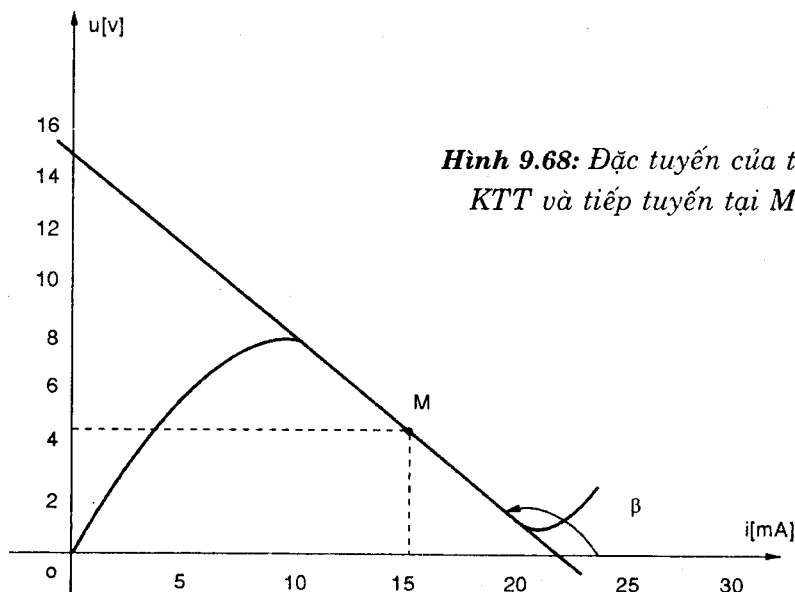
Các thông số của nguồn tương đương Thévenin được xác định như sau:

- Điện áp $u_2(t)$ là điện áp trên bốn cực hở mạch, xác định theo ma trận A

$$u_2(t) = \frac{e(t)}{A_{11}} = \frac{e(t)}{2} = \frac{E}{2} + \sin(10^4 t) \text{ [v]} = \frac{E}{2} + u_{2ac}(t)$$

- Điện trở tương đương R nhìn từ các cực hở mạch khi ngắn mạch nguồn $e(t)$

$$R = \frac{A_{12}}{A_{11}} = 1,5 \text{ [K}\Omega\text{]}$$

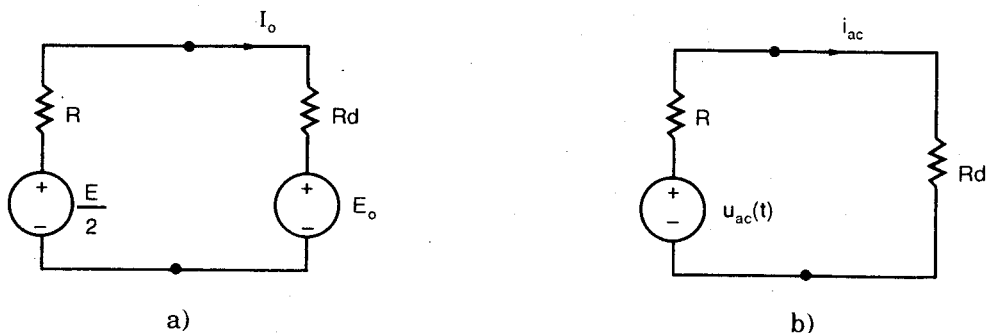


Hình 9.68: Đặc tuyến của trở KTT và tiếp tuyến tại M

Đặc tuyến của phần tử KTT được vẽ trên H.9.68. Từ đồ thị ta thấy: điểm giữa của phần trở âm của đặc tuyến có tọa độ M (4,5 [v]; 15 [mA]). Ở lân cận điểm làm việc này ta có thể làm gần đúng đặc tuyến của phần tử KTT bằng đoạn thẳng tiếp tuyến với đặc tuyến tại điểm M. Đường thẳng có phương trình $u = E_o + R_d i$

Từ đồ thị ta có $E_o = 15 [v]$, là giao điểm của tiếp tuyến với trục điện áp. Điện trở động của phần tử KTT được xác định theo định nghĩa

$$R_d = \operatorname{tg} \beta = -0.7 [K\Omega]$$



Hình 9.69: Sơ đồ cho thành phần một chiều và xoay chiều.

Phần tử KTT có thể được thay thế bằng hai cực tuyến tính (H.9.67b), đó chính là tải của nguồn tương đương vừa xét ở trên. Mạch trên H.9.67b là mạch tuyến tính, do đó có thể áp dụng nguyên lý xếp chồng để phân tích. Dòng điện qua phần tử KTT là do cả thành phần một chiều và xoay chiều của nguồn gây ra. Sơ đồ tương đương để xét các thành phần một

chiều và xoay chiều của dòng điện được vẽ trên H.9.69a,b.

Trong mạch tương đương một chiều H.9.69a có nguồn E_o và $E/2$, giá trị E được chọn để sao cho dòng I_o có giá trị như đã chọn tại điểm làm việc M . Theo định luật Kirchhoff 2 ta có

$$E = 2E_o + 2I_o(R + R_d) = 30 + 2.15.10^{-3}(1,5.10^3 - 0,7.10^3) = 54 \text{ [v]}$$

Thành phần xoay chiều trong mạch trên H.9.69b được xác định

$$i_{ac} = \frac{u_{2ac}}{R + R_d} = \frac{\sin(10^4 t)}{(1,5 - 0,7)10^3} = 1,25 \sin(10^4 t) \text{ [mA]}$$

Dòng điện qua phần tử KTT

$$i(t) = I_o + i_{ac} = 15 + 1,25 \sin(10^4 t) \text{ [mA]}$$

9.3 MẠCH KTT ĐỘNG

Mạch phi tuyến động là mạch phi tuyến mà ở đó yếu tố thời gian không thể bỏ qua. Như vậy, trong hệ phương trình phi tuyến mô tả cho mạch xuất hiện thêm một biến thời gian t . Khác với phần 9.2.2 trong mạch trở KTT nguồn xoay chiều, yếu tố thời gian không ảnh hưởng đến quá trình tính toán. Nhưng trong một số mạch KTT có chứa các phần tử tích lũy năng lượng, quá trình chuyển hóa năng lượng giữa các phần tử mạch theo thời gian bắt buộc mạch phải được diễn tả bằng một hệ phương trình vi tích phân phi tuyến, và công cụ toán để tìm nghiệm cho nó cũng là một vấn đề không đơn giản. Mặt khác, trong các mạch KTT có các phần tử cảm và dung KTT , chịu tác động bởi nguồn điều hòa tần số ω , thì đặc tuyến của các phần tử KTT lại bị thay đổi theo tần số nên việc giải càng trở nên phức tạp hơn.

Các phương pháp phân tích mạch phi tuyến động có thể được chia thành hai nhóm: các phương pháp số và các phương pháp phi số.

9.3.1 Các phương pháp phi số

Mạch phi tuyến động cũng có thể thừa hưởng các phương pháp của các loại mạch phi tuyến trước đó trong việc phân tích, nhưng có hiệu chỉnh lại cho phù hợp đặc tính của nó.

1- Phương pháp đồ thị

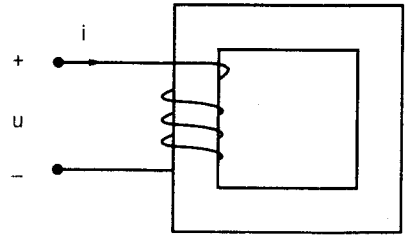
Đặc điểm của các mạch KTT chứa các phần tử tích lũy năng lượng (L và C), quan hệ giữa các đại lượng áp - dòng trên mạch không thể biểu diễn thành hàm trực tiếp. Có nghĩa là ta không có khái niệm về đặc

tuyến tổng hợp hay đặc tuyến truyền đạt ở mạch *KTT* động. Thông thường, tồn tại một quan hệ vi tích phân của áp, dòng với những đại lượng trung gian x khác là từ thông đối với phần tử cảm *KTT* và là điện tích đối với điện dung *KTT*. Trong trường hợp đơn giản nhất, có thể tồn tại những quan hệ hàm giữa đại lượng trung gian này với đại lượng còn lại áp hoặc dòng.

Nội dung của phương pháp đồ thị ở mạch phi tuyến động là kết hợp hai quan hệ đó lại với nhau: từ trạng thái đã biết, dùng một trong hai quan hệ để tìm ra đại lượng trung gian $x(t)$; và từ đó, dựa vào quan hệ còn lại suy ra đại lượng cần tìm.

Ví dụ với một cuộn dây có lõi thép, nếu biết được dòng điện qua nó là $i(t)$, có thể dùng quan hệ $\psi(i)$ của lõi để tìm ra đường cong $\psi(t)$ (đây xem là đại lượng trung gian). Đạo hàm đường cong này bằng đồ thị sẽ được điện áp $u(t)$ trên lõi. Ngược lại, nếu biết $u(t)$ bằng cách tích phân ta tìm được hàm $\psi(t)$, sau đó dùng đặc tuyến $\psi(i)$ có thể vẽ được đường cong $i(t)$. Phương pháp này dùng cho mạch có một phần tử *KTT*.

Xét cuộn dây quấn trên lõi sắt như H.9.70 có đặc tính $\psi(i)$. Áp và dòng trên cuộn dây quan hệ với nhau qua đại lượng trung gian là từ thông ψ



Hình 9.70: Cuộn dây quấn trên lõi sắt

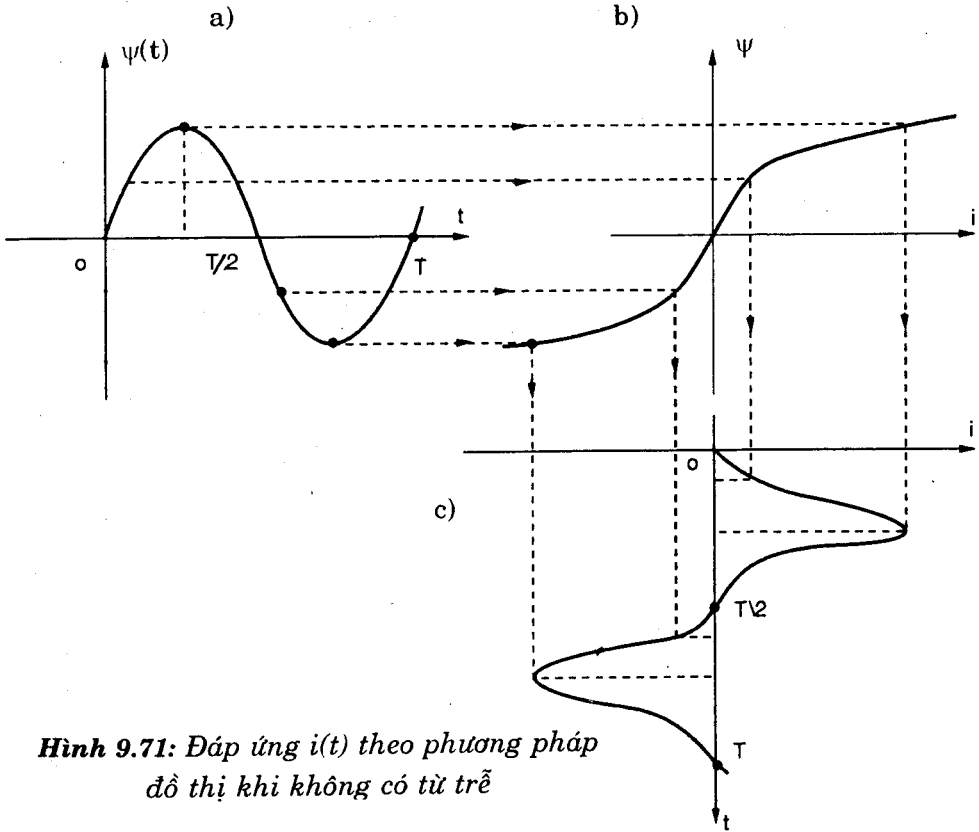
$$u = \frac{d\psi}{dt}; \quad \psi = \psi(i) \quad (9.81)$$

Khi biết dạng $u(t)$ hoặc $i(t)$, ta có thể tìm được $\psi(t)$ và do đó xác định được $i(t)$ hoặc $u(t)$ theo phương pháp đồ thị.

Giả sử áp đặt vào cuộn dây có dạng: $u(t) = U_m \cos \omega t$. Ta có

$$\psi = \int u dt = \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t = \psi_m \sin \omega t \quad (9.82)$$

Bỏ qua tổn hao sắt từ, đặc tuyến $\psi(i)$ có dạng như trên H.9.71b. Dòng điện $i(t)$ xác định theo phương pháp đồ thị như sau: tại một thời điểm $t = t_1$, ta có: $\psi(t_1) = \psi_1$, và nhờ đường cong $\psi(i)$ ta có giá trị $i(t_1) = i_1$. Như vậy được một điểm trên đường cong $i(t)$. Thực hiện nhiều lần trong một chu kỳ của $\psi(t)$ ta sẽ có dạng dòng điện $i(t)$ (H.9.71c).



Hình 9.71: Đáp ứng $i(t)$ theo phương pháp đồ thị khi không có từ trễ

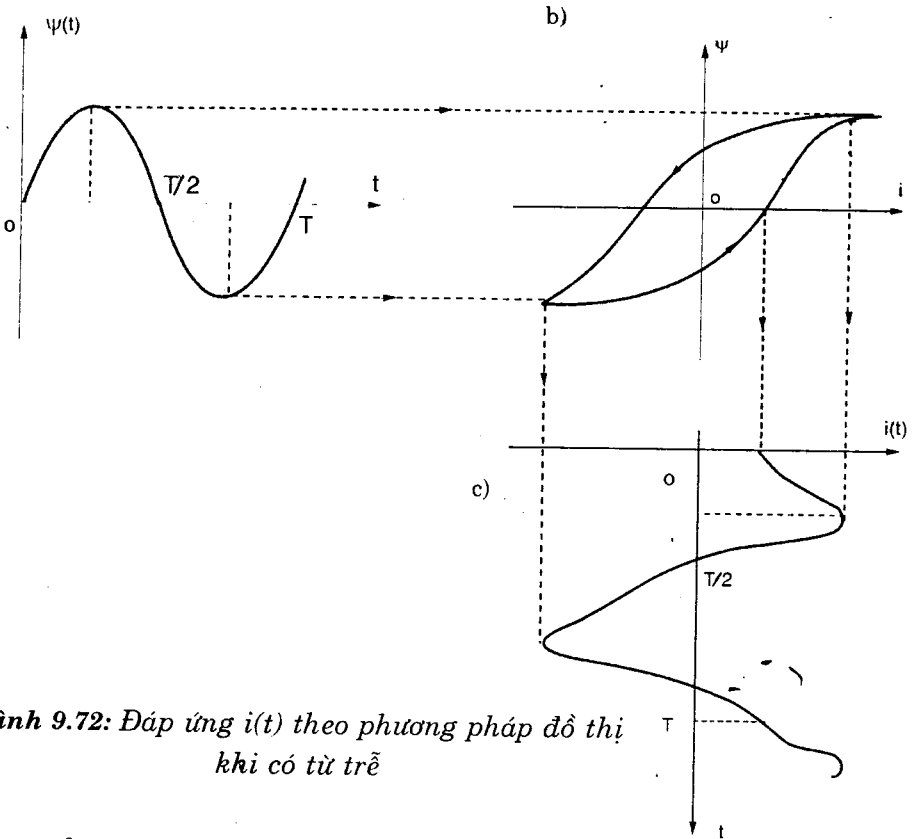
Khi xét đến tổn hao sắt từ, đường cong $\psi(i)$ sẽ có trễ từ như trên H.9.72b. Ta cũng vẽ được $i(t)$ theo cách trên. Tuy nhiên ta có thể thấy điểm không của $i(t)$ và $\psi(t)$ không trùng nhau.

Nếu ta tác động vào mạch nguồn hình sin thì điện áp trên mạch cũng được xác định theo phương pháp đồ thị tương tự.

Qua các minh họa trên, ta có nhận xét về dạng dòng và áp trong cuộn dây lõi sắt

- Với kích thích là hình sin, đáp ứng nhận được sẽ có dạng không sin. Lõi sắt làm việc càng bão hòa thì đáp ứng càng nhọn đầu, và các hài bậc cao xuất hiện trong đáp ứng có biên độ càng lớn.

- + Khi không xét đến tổn hao sắt từ, các đường cong $\psi(t)$ và $i(t)$ có điểm không và điểm cực đại trùng nhau, và đối xứng qua trục tung. Vì thế, các hài cơ bản của chúng trùng pha. Điều hòa cơ bản của điện áp vuông pha với điều hòa cơ bản của từ thông cho nên cũng vuông pha với điều hòa cơ bản của dòng điện, khiến tổn hao năng lượng trong cuộn dây bằng không (phù hợp với giả thiết).



Hình 9.72: Đáp ứng $i(t)$ theo phương pháp đồ thị khi có từ trễ

Khi kể đến tổn hao sắt từ thì điều hòa cơ bản của dòng điện và điện áp không vuông pha với nhau nữa, do đó tổn thất năng lượng bên trong cuộn dây lõi sắt sẽ khác không.

• Các đường cong đáp ứng thường có dạng đối xứng nửa sóng, cho nên phổ của chúng chỉ tồn tại các hài lẻ. Điều này là do đặc tính $\psi(i)$ của cuộn dây đối xứng qua gốc tọa độ. Cũng suy ra rằng, với phần tử KTT có đặc tuyến không đối xứng qua gốc, phổ của đáp ứng sẽ có đầy đủ các hài lẻ và hài chẵn.

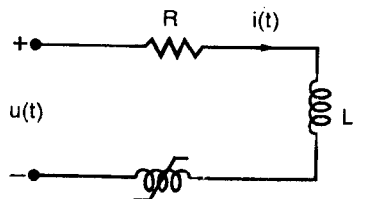
2- Phương pháp giải tích

Xét mạch trên H.9.73 bao gồm một cuộn cảm tuyến tính, một điện trở tuyến tính và một cảm KTT mắc nối tiếp. Mạch điện cung cấp bởi nguồn áp điều hòa có dạng

$$u(t) = U_m \sin \omega t$$

Quan hệ $i = \varphi(\psi)$, cho dưới dạng

$$i = a_1 \psi + a_3 \psi^3 + a_5 \psi^5 + \dots \tag{9.83}$$



Hình 9.73: Mạch KTT động

Phương trình mô tả mạch trên H.9.73

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{d\psi}{dt} = U_m \sin \omega t \quad (9.84)$$

Sau khi vi phân hai vế của phương trình, ta có

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{d^2 \psi}{dt^2} - \omega U_m \cos \omega t = 0 \quad (9.85)$$

Trong trường hợp nguồn tác động là tuần hoàn, đáp ứng trên mạch cũng sẽ là tuần hoàn, nếu ta chỉ giới hạn một số hài của quá trình tuần hoàn, ví dụ

$$\psi = A_1 \cos \omega t + A_3 \cos 3\omega t + A_5 \cos 5\omega t + B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + B_5 \sin 5\omega t$$

$$\psi = f_1(t) \quad (9.86)$$

Khi thay hàm $f_1(t)$ vào đặc trưng của phần tử điện cảm KTT (9.83) ta sẽ nhận được hàm $f_2(t)$. Sau đó thay $\psi = f_1(t)$ và $i = f_2(t)$ vào (9.85) ta sẽ nhận được phương trình có dạng

$$F(t, A_1, A_3, A_5, B_1, B_3, B_5) \approx 0 \quad (9.87)$$

dấu gần đúng trong biểu thức (9.87) là do ta bỏ qua các hài bậc cao trong đáp ứng. Ta nhận thấy việc giải phương trình (9.87) là không dễ dàng. Nếu như ta hạn chế bớt số hài diễn tả ở (9.86) thì (9.87) có thể giải được nhưng sẽ phạm phải sai số lớn. Mặc dù cho được biểu thức của nghiệm nhưng yếu tố này là một khuyết điểm lớn của phương pháp giải tích.

Ví dụ 9.6. Cuộn dây (H.9.70) có số vòng dây $w = 500$, quấn trên gông từ có đường cong từ hóa xấp xỉ gần đúng bằng đa thức

$$H = 100B + 200B^3$$

với cường độ từ trường có đơn vị $\frac{A}{m}$ và từ cảm là Tesla. Gông từ có tiết diện $S = 10^{-3} [m^2]$; và chiều dài trung bình: $l = 0,5 [m]$.

Cuộn dây chịu tác dụng của áp xoay chiều: $u(t) = 110\sqrt{2} \cos \omega t [v]$

Xác định dòng qua cuộn dây theo phương pháp giải tích, biết $f = 50 \text{Hz}$.

Giải. Từ quan hệ $B(H)$, ta thành lập quan hệ $i(\psi)$ của gông từ (xem thêm các công thức ở phần 9.4 mạch từ)

$$B = \frac{\psi}{\omega S} = \frac{\psi}{500 \cdot 10^{-3}} = 2\psi; \quad H = \frac{\omega i}{l} = \frac{500i}{0,5} = 1000i$$

Thay các công thức này vào đa thức của đường cong từ hóa

$$1000i = 200\psi + 1600\psi^3 \rightarrow i = 0,2\psi + 1,6\psi^3$$

Từ thông móc vòng trên cuộn dây

$$\psi(t) = \frac{110\sqrt{2}}{\omega} \sin \omega t = \psi_m \sin \omega t$$

Thế vào quan hệ $i(\psi)$ của lõi ta nhận được

$$\begin{aligned} i(t) &= 0,2\psi_m \sin \omega t + 1,6\psi_m^3 \sin^3 \omega t \\ &= 0,2\psi_m \sin \omega t + 1,6\psi_m^3 \left[\frac{3 \sin \omega t - \sin 3\omega t}{4} \right] \\ &= (0,2\psi_m + 1,2\psi_m^3) \sin \omega t - 0,4\psi_m^3 \sin 3\omega t \end{aligned}$$

với

$$\psi_m = \frac{110\sqrt{2}}{100\pi} = 0,495 \text{ [wb]}$$

Vậy

$$i(t) = 0,245 \sin \omega t - 0,048 \sin 3\omega t \text{ [A]}$$

3- Phương pháp cân bằng hài điều hòa

Một trong các phương pháp hay dùng cho mạch phi tuyến động để xác định điều hòa cơ bản và một số hài bậc cao là vận dụng nguyên tắc cân bằng hài. Tư tưởng của phương pháp này là, nếu có đẳng thức

$$\sum_{n=1}^k A_{nc} \cos n\omega t + \sum_{n=1}^k A_{ns} \sin n\omega t = 0 \quad (9.88)$$

thì vì các hàm $\sin(k\omega t)$ và $\cos(k\omega t)$ là các hàm độc lập tuyến tính nên biên độ của mỗi điều hòa phải triệt tiêu

$$A_{nc} = 0; A_{ns} = 0 \quad (9.89)$$

Nội dung của phương pháp này như sau: hệ phương trình mô tả mạch, sau khi rút gọn sẽ về phương trình vi phân như sau

$$F(t, x, x', x'' \dots) = 0 \quad (9.90)$$

Vế trái (9.90) là biểu thức của tín hiệu cần tìm $x(t)$ cùng các đạo hàm của nó. Ngoài ra nó còn chứa thêm các nguồn tác động bên ngoài, thường là các nguồn điều hòa tần số ω .

Khi mạch ở chế độ xác lập, thì $x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ T . Ta có thể biểu diễn nó dưới dạng

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nc} \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} A_{ns} \sin n\omega t = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \psi_n) \quad (9.91)$$

Trong tính toán gần đúng, tùy yêu cầu của bài toán, người ta thường

chỉ đề cập đến vài hài chính trong (9.91). Giả sử chỉ tìm biên độ các hài từ hài cơ bản đến hài bậc k nào đó, tức là

$$x(t) = A_{1c} \cos \omega t + A_{1s} \sin \omega t + \dots + A_{kc} \cos k\omega t + A_{ks} \sin k\omega t \quad (9.92)$$

Theo phương pháp cân bằng hài, để tìm biên độ các hài này, người ta thay (9.92) vào phương trình vi phân mô tả mạch (9.90). Sau khi tính toán và sắp xếp các số hạng cùng một điều hòa với nhau ta sẽ được phương trình dạng

$$\begin{aligned} & C_1(A_{1c}, A_{1s}, \dots, A_{kc}, A_{ks}) \cos \omega t + S_1(A_{1c}, A_{1s}, \dots, A_{kc}, A_{ks}) \sin \omega t + \dots \\ & + C_k(A_{1c}, A_{1s}, \dots, A_{kc}, A_{ks}) \cos k\omega t + \\ & + S_k(A_{1c}, A_{1s}, \dots, A_{kc}, A_{ks}) \sin k\omega t + \Sigma (\text{hài bậc cao}) = 0 \end{aligned} \quad (9.93)$$

Trong đó $C_n()$ và $S_n()$ là các hệ số của các điều hòa cos và sin sau khi đã gộp thừa số chung. Theo nguyên tắc cân bằng hài các hệ số này phải đồng thời triệt tiêu, và ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1(A_{1c}, A_{1s}, \dots, A_{kc}, A_{ks}) = 0 \\ S_1(A_{1c}, A_{1s}, \dots, A_{kc}, A_{ks}) = 0 \\ \vdots \\ C_k(A_{1c}, A_{1s}, \dots, A_{kc}, A_{ks}) = 0 \\ S_k(A_{1c}, A_{1s}, \dots, A_{kc}, A_{ks}) = 0 \end{cases} \quad (9.94)$$

Giải hệ (9.94) sẽ được biên độ của các hài cần tìm. Nếu kể đến m hài trong biểu thức nghiệm (9.92) thì nói chung phải xác định $2m$ giá trị biên độ $A_{1c}, A_{1s}, \dots, A_{mc}, A_{ms}$ của các thành phần sin() và cos(), hoặc là m giá trị biên độ và m giá trị góc pha ban đầu, chúng đều là nghiệm của hệ phương trình (9.94).

Vậy nội dung của phương pháp cân bằng hài là chuyển việc giải hệ phương trình vi phân (9.90) thành việc giải hệ phương trình đại số (9.94). Thông thường (9.94) được giải bằng phương pháp số.

Ví dụ 9.7. Cho mạch KTT như trên H.9.74, biết

Trở KTT có đặc tuyến

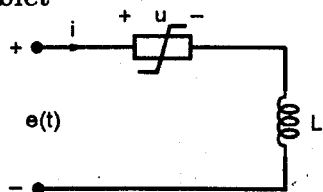
$$u = 40i + 1400i^3; \quad e(t) = 17 \sin 1000t \text{ [v]};$$

$$L = 23 \text{ [mH]}$$

Xác định hài cơ bản của dòng điện

$$\text{trong mạch } i(t) = I_m \sin(1000t - \varphi)$$

theo phương pháp cân bằng hài điều hòa.



Hình 9.74: Mạch ví dụ 9.7

Giải. Phương trình mô tả mạch

$$L \frac{di}{dt} + u - e(t) = 0; \quad L \frac{di}{dt} + 40i + 1400i^3 - e(t) = 0$$

Thay biểu thức của hài cơ bản vào phương trình trên

$$23I_m \cos(1000t - \varphi) + 40I_m \sin(1000t - \varphi) + 1400I_m^3 \sin^3(1000t - \varphi) - 17 \sin 1000t = 0$$

Để đơn giản khi phân tích, ta đặt: $\theta = 1000t - \varphi$.

$$\rightarrow 23I_m \cos \theta + 40I_m \sin \theta + 1400I_m^3 \sin^3 \theta - 17 \sin(\theta + \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow 23I_m \cos \theta + 40I_m \sin \theta + 350I_m^3 [3 \sin \theta - \sin 3\theta]$$

$$- 17 \sin \theta \cos \varphi - 17 \cos \theta \sin \varphi = 0$$

Bỏ đi các thành phần lớn hơn bậc 1, ta có hệ

$$\begin{cases} 40I_m + 1050I_m^3 - 17 \cos \varphi = 0 \\ 23I_m - 17 \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

Khử biến φ ta sẽ có một phương trình bậc ba theo I_m , giải ra ta có:

$$I_m = 0,2 [A]; \quad \varphi = 15,7^\circ$$

Vậy điều hòa bậc nhất gần đúng của dòng điện có dạng

$$i(t) = 0,2 \sin(1000t - 15,7^\circ) [A]$$

4- Phương pháp chuẩn tuyến tính

Trong khi phân tích chế độ xác lập của mạch phi tuyến động, ta có thể xem các đại lượng áp, dòng trên các phần tử KTT đã ổn định về mặt biên độ. Khi đó, người ta sẽ thay thế các phần tử KTT bằng các phần tử tuyến tính, và xem như các thành phần dòng áp trên các phần tử này là điều hòa cùng tần số. Nhờ vậy, người ta chuyển hệ phương trình vi phân phi tuyến về hệ phương trình vi phân tuyến tính để áp dụng một công cụ đơn giản đó là phương pháp vectơ biên độ phức. Ta có thể thấy qua vài minh họa sau đây

- Với phần tử trở KTT phụ thuộc dòng: $u = f_R(i) = R(i).i$. Ta thay

$$u = R_u i \quad \text{với} \quad R_u = R(I_m) \quad (9.95)$$

trong đó: I_m - là biên độ của dòng điện.

- Với phần tử cảm KTT có quan hệ: $\psi = f_L(i) = L(i).i$. Ta thay

$$\psi = L_u i \quad \text{với} \quad L_u = L(I_m) \quad (9.96)$$

• Với phần tử dung KTT có quan hệ: $q = f_c(u) = C(u).u$. Ta thay

$$q = C_u.u \text{ với } C_u = C(U_m) \quad (9.97)$$

U_m - là biên độ của áp trên tụ.

Do các đại lượng chuẩn tuyến tính lại là hàm của đại lượng chưa biết, cho nên các phương trình đại số nhận được đa số được giải bằng phép lặp (phương pháp lặp đơn giản hay phép lặp Newton-Raphson).

Nếu trở tuyến tính có đặc tuyến phụ thuộc dòng

$$u = ai + bi^3 \quad (9.98)$$

Giả sử dòng điện qua trở KTT có dạng: $i(t) = I_m \sin \omega t$ thì

$$u = aI_m \sin \omega t + bI_m^3 \sin^3 \omega t = aI_m \sin \omega t + \frac{bI_m^3}{4} [3 \sin \omega t - \sin 3\omega t]$$

$$\approx \left[a + \frac{3}{4} bI_m^2 \right] I_m \sin \omega t \Rightarrow u = \left[a + \frac{3}{4} bI_m^2 \right] i(t)$$

Dựa vào (9.95) rõ ràng phần tử trở KTT được chuẩn tuyến tính bằng điện trở tuyến tính

$$R_u = a + \frac{3}{4} bI_m^2 \quad (9.99)$$

Giá trị này lại phụ thuộc vào biên độ của dòng điện qua phần tử KTT ở chế độ xác lập.

Ví dụ 9.8. Giải ví dụ 9.7 theo phương pháp chuẩn tuyến tính.

Giải. Nếu ta đặt $i(t) = I_m \sin(1000t + \varphi)$; thì phần tử trở KTT sẽ được chuẩn tuyến tính bằng

$$R_u = 40 + 1050I_m^2$$

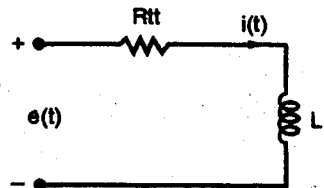
Mạch chuẩn tuyến tính của H.9.74 cho trên H.9.75

Sử dụng phương pháp biên độ phức, ta có

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R_u + j\omega L}$$

$$\Rightarrow I_m \angle \varphi = \frac{17 \angle 0^\circ}{40 + 1050I_m^2 + j23}$$

I_m - là nghiệm của phương trình



Hình 9.75: Sơ đồ chuẩn tuyến tính

$$I_m = \frac{17}{\sqrt{(40 + 1050I_m^2)^2 + 23^2}}$$

Giải bằng phương pháp lặp đơn giản ta có

$$I_m = 0,2; \varphi = -\arctg \frac{23}{40 + 1050I_m^2} = -15,7^\circ$$

Vậy: $i(t) = 0,2 \sin(1000t - 15,7^\circ)$ [A]

5- Phương pháp sơ đồ tương đương tín hiệu nhỏ

Đây là một phương pháp giải gần đúng được sử dụng tương đối rộng rãi trong kỹ thuật. Phương pháp này chuyển việc giải một mạch *KTT* động thành việc giải một mạch *KTT* nguồn một chiều, và tiếp đến là việc giải một mạch tuyến tính động.

Phương pháp này dựa trên cơ sở toán là dùng khai triển Taylor cho hàm đặc tuyến quanh điểm làm việc của các phần tử *KTT*. Do đó, nó thường dùng để phân tích các mạch *KTT* làm việc ở chế độ đặc biệt: các đại lượng gồm một thành phần không đổi đủ lớn, cộng thêm một thành phần biến thiên có biên độ bé. Các bước thực hiện của phương pháp này như sau

1- Tính toán điểm làm việc một chiều

Cho triệt tiêu tất cả các nguồn xoay chiều trong mạch, chỉ để lại các nguồn một chiều. Do các đại lượng dòng, áp trong mạch là thành phần không đổi, cho nên người ta thay thế các cuộn cảm (tuyến tính hay phi tuyến) bằng cách cho ngắn mạch, và cho hở mạch các tụ điện (tuyến tính và phi tuyến).

Thành phần một chiều U_0 và I_0 của các đại lượng áp và dòng trên mạch sẽ xác định được nhờ các phương pháp phân tích mạch *KTT* nguồn một chiều.

2- Xác định thành phần xoay chiều

Cho triệt tiêu tất cả các nguồn một chiều độc lập, chỉ để lại các nguồn xoay chiều trong mạch. Các phần tử tuyến tính được giữ nguyên. Các phần tử *KTT* thì được thay thế bằng sơ đồ tương đương tuyến tính của nó (chính là phần tử tuyến tính tương đương tại điểm làm việc của phần tử *KTT* dựa trên khai triển Taylor) như sau:

• *Điện trở KTT*: được thay bằng giá trị điện trở động tại điểm làm việc

$$R_d = \frac{du}{di}(I_0) \quad (9.100)$$

với I_o - là thành phần dòng không đổi được xác định ở bước 1.

- *Điện cảm KTT*: được thay bằng giá trị điện cảm động:

$$L_d = \frac{d\psi}{di}(I_o) \quad (9.101)$$

- *Điện dung KTT*: được thay thế bằng giá trị điện dung động

$$C_d = \frac{dq}{du}(U_o) \quad (9.102)$$

• *Nguồn phụ thuộc KTT*: được thay thế bằng nguồn phụ thuộc tuyến tính tương đương. Giả sử có nguồn dòng phụ thuộc áp

$$i_1 = f_{pt}(u_2)$$

với $f_{pt}(\)$ - là một hàm phi tuyến.

Áp dụng khai triển Taylor cho hàm $f_{pt}(u_2)$ quanh điểm làm việc U_{20} của nó ta có

$$i_1 \sim f_{pt}(U_{20}) + f'_{pt}(U_{20})(u_2 - U_{20}) + \dots$$

Chỉ xét riêng cho thành phần xoay chiều thì rõ ràng ta có thể thay thế bằng nguồn dòng phụ thuộc tuyến tính điện áp như sau

$$i_{1ac}(t) = f'_{pt}(U_{20}) \cdot u_{2ac}(t) \quad (9.103)$$

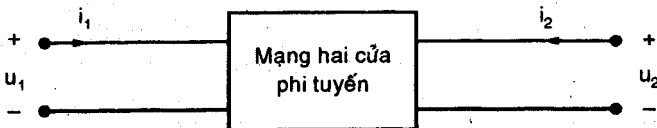
Như vậy, nguồn phụ thuộc tuyến tính tương đương có hệ số phụ thuộc là $f'_{pt}(U_{20})$ với U_{20} là giá trị tính được ở phần 1.

- *Đối với mạng hai cửa KTT*

Cho mạng hai cửa *KTT* như trên H.9.76 được mô tả bằng phương trình trạng thái dạng Z

$$\begin{cases} u_1 = f_1(i_1, i_2) \\ u_2 = f_2(i_1, i_2) \end{cases} \quad (9.104)$$

với các giá trị I_{10}, I_{20} không đổi, và $i_{1ac}(t), i_{2ac}(t)$ là những lượng biến



Hình 9.76: Mạng hai cửa phi tuyến

thiên nhỏ, thì các đạo hàm riêng của các hàm $f_1(), f_2()$ theo i_1, i_2 tùy thuộc vào các giá trị một chiều I_{10}, I_{20} như sau

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11}(I_{10}, I_{20}) = \frac{\partial f_1}{\partial i_1}(I_{10}, I_{20}) \\ R_{12}(I_{10}, I_{20}) = \frac{\partial f_1}{\partial i_2}(I_{10}, I_{20}) \\ R_{21}(I_{10}, I_{20}) = \frac{\partial f_2}{\partial i_1}(I_{10}, I_{20}) \\ R_{22}(I_{10}, I_{20}) = \frac{\partial f_2}{\partial i_2}(I_{10}, I_{20}) \end{array} \right. \quad (9.105)$$

Mạng hai của *KTT* được thay thế bằng mạng hai của tuyến tính, và thành phần xoay chiều trên hai cửa quan hệ với nhau theo

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1ac} = R_{11}i_{1ac} + R_{12}i_{2ac} \\ u_{2ac} = R_{21}i_{1ac} + R_{22}i_{2ac} \end{array} \right. \quad (9.106)$$

Đáp ứng cần tìm của phương pháp này sẽ là xếp chồng của thành phần không đổi và thành phần xoay chiều xác định từ sơ đồ tương đương tín hiệu nhỏ.

Mặc dù có ràng buộc nhưng phương pháp này được sử dụng rất rộng rãi, vì toàn bộ các bài toán trong lĩnh vực khuếch đại tín hiệu nhỏ đều có thể sử dụng phương pháp này.

6- Tạo dao động điều hòa

Dao động điều hòa (dao động sin) được tạo ra trong mạch *KTT* tùy theo loại phần tử *KTT* được dùng trong mạch, người ta phân biệt thành hai loại mạch tạo dao động sin là

1- Mạch dao động hai cực, trong đó phần tử *KTT* được dùng là các diot bán dẫn hay điện tử có điện trở âm.

2- Mạch tạo dao động bốn cực, trong đó phần tử *KTT* được dùng là các đèn điện tử hay transistor - Mạch tạo dao động sin bốn cực dựa trên nguyên lý phản hồi, do đó nó còn có tên là mạch dao động có phản hồi.

Trong mục này chúng ta sẽ giới hạn xét đối với mạch dao động hai cực.

Từ nguyên lý mạch tuyến tính ta biết rằng, mạch điện khi không có tín hiệu bên ngoài đưa đến, nó sẽ làm việc ở chế độ tự do. Nếu trong mạch có dao động nào đó được sinh ra, thì đó là do năng lượng có sẵn trong mạch. Về mặt toán học, mạch điện ở trong trạng thái tự do sẽ được mô tả bằng phương trình vi phân cấp hai thuần nhất

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + 2\alpha \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0 \quad (9.107)$$

Nghiệm tổng quát của (9.107) có dạng

$$X = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_r t + \varphi) \quad (9.108)$$

trong đó

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (9.109)$$

A, φ - là các hằng số tích phân được xác định bởi điều kiện đầu của bài toán.

Như có thể thấy từ biểu thức (9.108), tùy theo giá trị của α , mà dao động trong mạch sẽ có các khả năng tiến triển như sau

- Nếu $\alpha > 0$, biên độ của dao động sẽ suy giảm, dao động trong mạch tắt dần, và mạch sẽ trở về trạng thái ổn định.

- Nếu $\alpha < 0$, biên độ dao động tăng dần, ta gọi là mạch tự kích, do đó mạch sẽ không ổn định.

Khi $\alpha = 0$ phương trình (9.107) trở về dạng

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \quad (9.110)$$

Nghiệm của (9.110) sẽ là dao động điều hòa

$$X = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (9.111)$$

Có thể thấy rằng, với trường hợp $\alpha < 0$, theo lý thuyết, biên độ sẽ tăng đến ∞ khi $t \rightarrow \infty$. Trong thực tế dao động sẽ đạt đến một giá trị hữu hạn nào đó và khi đó ta nói mạch có dao động sin, nó phải có hệ số α là một hàm số của dao động. Ban đầu α phải âm để mạch dễ dao động (tự kích), khi dao động tăng thì α phải giảm, đến lúc dao động đạt được giá trị mong muốn thì α phải triệt tiêu để mạch có dao động ổn định. Hệ số α trong (9.107) không phải là hằng số, nó phải là hàm số của X , do đó mạch dao động phải được mô tả bằng phương trình vi phân phi tuyến, tức là mạch tạo dao động trải qua ba giai đoạn: mạch có khả năng tự kích, dao động được sinh ra, dao động tiến tới ổn định. Như đã nói ở mục 9.1.3, để phân tích mạch dao động sin, người ta dùng phương pháp tiệm cận, cụ thể là

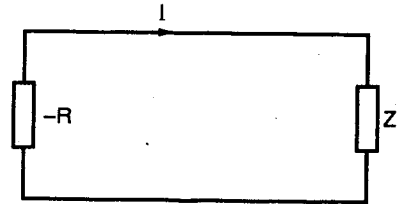
- Ở chế độ làm việc tĩnh của mạch KTT, người ta tìm điều kiện tự kích của mạch, tức là điều kiện $\alpha < 0$. Khi đó có thể thay thế phần tử KTT bằng một phần tử tuyến tính tương đương. Với giả thiết gần đúng này, ta coi α là hằng số, (9.107) khi đó sẽ là phương trình vi phân tuyến

tính thuần nhất.

Phương pháp để phân tích mạch trong giai đoạn này được gọi là phương pháp chuẩn tuyến tính.

- Giai đoạn tiếp theo là giai đoạn thiết lập dao động (trạng thái quá độ). Dao động được sinh ra, biên độ và tần số đều thay đổi theo hệ số α . Trong giai đoạn này, để phân tích mạch *KTT*, người ta giả thiết rằng biên độ của dao động thay đổi chậm so với dao động. Với giả thiết đó, có thể bỏ qua đạo hàm của biên độ theo dao động, do đó người ta gọi là phương pháp biên độ biến thiên chậm.

- Dao động đã được hình thành, biên độ và tần số của nó đã đi đến ổn định, mạch ở chế độ xác lập. Trong giai đoạn này, do biên độ của dao động đã ổn định, nên có thể thay các thông số của phần tử *KTT* bằng các thông số trung bình không đổi. Với giả thiết như vậy, phần tử *KTT* được coi gần đúng là một phần tử tuyến tính; do đó phương pháp phân tích mạch trong giai đoạn này được gọi là phương pháp chuẩn tuyến tính.



Hình 9.77: Mạch dao động

Bây giờ ta sẽ xét mạch tạo dao động sin dùng phần tử trở âm như trên H.9.77, với phương trình mạch

$$I(-R + Z) = 0 \quad (9.112)$$

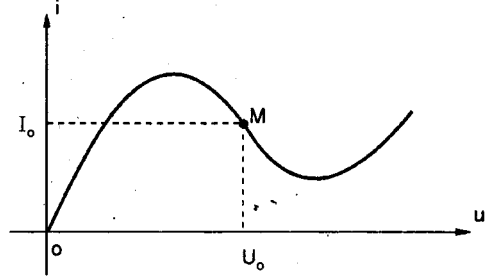
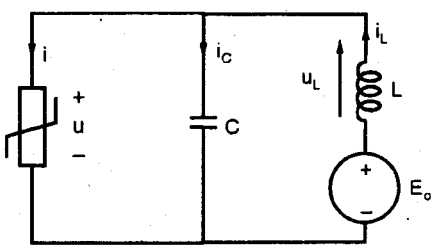
Để mạch sinh ra dao động, khi không có nguồn tác động bên ngoài, tức là dòng điện $I \neq 0$, thì tổng trở kháng trong mạch phải triệt tiêu

$$\operatorname{Re}\{Z\} - R = 0 \quad (9.113a)$$

$$I_m\{Z\} = 0 \quad (9.113b)$$

Điều kiện (9.113a) tương đương với điều kiện $\alpha = 0$ ($Q = \infty$), có nghĩa là tổn hao trong mạch phải bằng không, điều kiện này được gọi là điều kiện biên độ. Điều kiện (9.113b) được gọi là điều kiện pha hay điều kiện tần số, nó biểu thị sự bù điện kháng trong mạch. Mỗi mạch dao động điều hòa đều phải thỏa mãn hai điều kiện này. Nếu điều kiện (9.113a) không thỏa mãn, dao động sinh ra có thể tăng hoặc giảm, ta không có được dao động sin. Điều kiện (9.113b) sẽ thỏa mãn nếu mạch có các phần tử L , C . Phần tử có trở kháng Z trên H.9.77 là các mạch cộng hưởng song song hoặc nối tiếp. Hãy xét mạch dao động trở âm đơn giản trên H.9.78a, gồm một phần tử trở âm có đặc tuyến $i = \varphi(u)$ như trên H.9.78b và mạch dao động LC .

Nguồn E_o được chọn để đảm bảo điểm làm việc $M(U_o, I_o)$ của phần tử KTT nằm ở giữa đoạn đặc tuyến có độ dốc âm.



Hình 9.78: Mạch dao động trở âm

Giả thiết đặc tuyến $i = \varphi(u)$ ở lân cận điểm làm việc $M(u_o, I_o)$ được làm gần đúng bằng đa thức bậc ba

$$i - I_o = -a_1(u - u_o) + a_3(u - u_o)^3 \quad (9.114)$$

Có thể thiết lập phương trình cho mạch ở H.9.78a dựa theo các định luật Kirchhoff

$$i - i_L + i_C = 0 \quad (9.115)$$

$$E_o - u_L - u = 0 \quad (9.116)$$

trong đó $i_c = C \frac{du}{dt}$; $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, với i_L được xác định từ (9.115).

Từ phương trình (9.116) ta sẽ có được

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + L \frac{di}{du} \frac{du}{dt} + u - E_o = 0 \quad (9.117)$$

Đặt $\tau = \omega_o t$; với: $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, và đạo hàm biểu thức (9.114) ta được

$$\frac{di}{du} = -a_1 + 3a_3(u - u_o)^2 \quad (9.118)$$

(Chú ý $\frac{du}{di} = R_d$ của phần tử trở âm). Phương trình (9.117) khi để ý đến (9.118) sẽ có dạng

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} + \sqrt{\frac{L}{C}} a_1 \left[-1 + \frac{3a_3}{a_1} (u - u_o)^2 \right] \frac{du}{d\tau} + u - E_o = 0 \quad (9.119)$$

Phương trình (9.119) mô tả mạch tạo dao động sin là phương trình vi phân KTT , có hệ số đứng trước số hạng đạo hàm bậc nhất là hàm của dao động u .

Trong phương trình (9.119) ta sẽ dùng biến mới

$$X = \frac{u - u_0}{\sqrt{\frac{a_1}{3a_3}}} = \frac{u - u_0}{\xi} \quad (9.120)$$

và

$$\frac{dX}{d\tau} = \sqrt{\frac{3a_3}{a_1}} \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\xi} \frac{du}{d\tau} \quad (9.121)$$

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} = \sqrt{\frac{3a_3}{a_1}} \frac{d^2 u}{d\tau^2} = \frac{1}{\xi} \frac{d^2 u}{d\tau^2} \quad (9.122)$$

trong đó $\xi = \sqrt{\frac{a_1}{3a_3}}$; $\varepsilon = \sqrt{\frac{L}{C}} a_1$

Thay các biểu thức (9.120 ÷ 9.122) vào (9.119) ta sẽ được

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + \varepsilon(X^2 - 1) \frac{dX}{d\tau} + \frac{1}{\xi}(u - E_0) = 0 \quad (9.123)$$

Bởi vì tại điểm làm việc của phần tử *KTT* (H.9.78a) ta có: $u_0 = E_0$, nên (9.123) sẽ có dạng

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + \varepsilon(X^2 - 1) \frac{dX}{d\tau} + X = 0 \quad (9.124)$$

(9.124) là phương trình vi phân *KTT*, có tên là phương trình Vander *Pol*, nó không có nghiệm chính xác. Nghiệm gần đúng của (9.124)

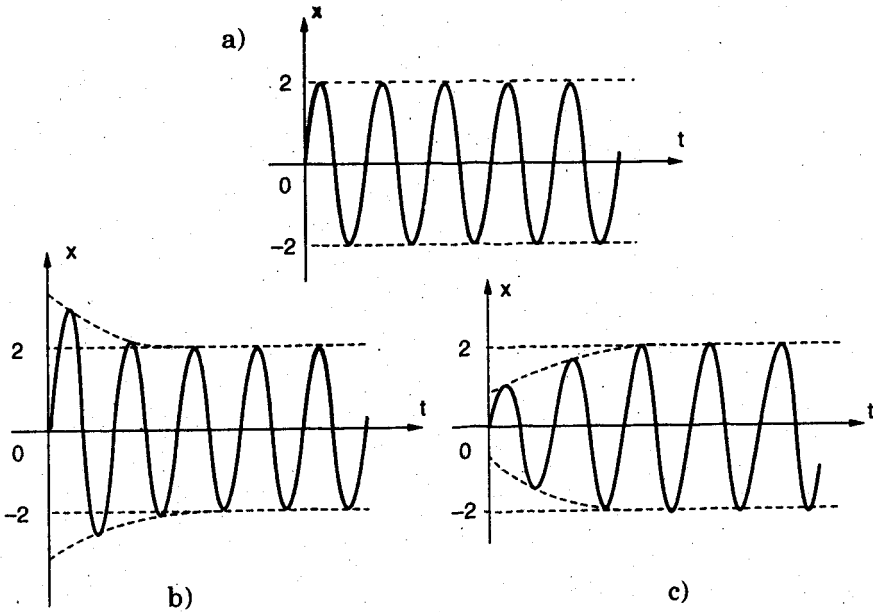
$$X(\omega_0 t) = \frac{2}{\sqrt{1 + Ae^{-\varepsilon t}}} \sin \omega_0 t \quad (9.125)$$

trong đó A - là hằng số tích phân được xác định bởi điều kiện đầu. Tùy theo giá trị của A mà dao động sinh ra sẽ có dạng như trên H.9.79. Nếu $A = 0$ dao động sinh ra sẽ là dao động điều hòa có biên độ (H.9.79a)

$$X_m = 2$$

Nếu $A < 0$, biên độ dao động mới sinh ra lớn hơn 2, sau một khoảng thời gian sẽ giảm đến giá trị ổn định: $X_m = 2$ (H.9.79b);

Nếu $A > 0$, biên độ dao động sẽ tăng đến giá trị giới hạn: $X_m = 2$ (H.9.79c).



Hình 9.79: *Nghiệm của phương trình Vander Pol*

Điểm làm việc $M(U_o, I_o)$ thường được chọn ở giữa đoạn đặc tuyến có điện trở âm, còn các hệ số a_1, a_3 của đặc tuyến (9.114) phải được chọn để sao cho biên độ của dao động ở xác lập không vượt quá vùng điện trở âm.

Điện trở KTT có đặc tuyến $i = \varphi(u)$ trên H.9.78b thường được dùng là diode tunel. Sự phụ thuộc $i = \varphi(u)$ tương tự cũng có thể có được ở các cực có phản hồi thích hợp để tạo ra dao động trong mạch.

9.3.2. Các phương pháp số phân tích mạch KTT động

Cho đến ngày nay, phân tích số cho mạch phi tuyến động là xu hướng càng được ưa chuộng do sự phát triển của công cụ toán và tốc độ của máy tính cá nhân.

Phân tích số mạch phi tuyến động cũng bao hàm hai bài toán độc lập:

- 1- Thiết lập các phương trình trạng thái.
- 2- Giải phương trình trạng thái bằng phương pháp số.

1- Thiết lập phương trình trạng thái

Như đã biết, phương trình trạng thái của mạch cấp 1 có dạng

$$x' = f(x, t)^{(*)} \tag{9.126}$$

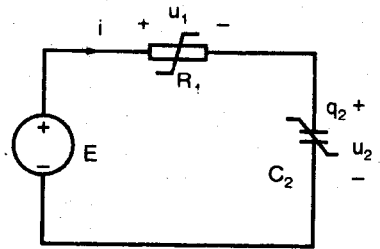
(*) Dấu ký hiệu đạo hàm theo t. $x' = \frac{dx}{dt}$

Mở rộng cho mạch cấp cao, hệ phương trình trạng thái được viết dưới dạng

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad (9.127)$$

Cho mạch điện phi tuyến như H.9.80, hãy thiết lập phương trình trạng thái (nếu tồn tại) ứng với biến trạng thái u_2 hoặc q_2 trong ba trường hợp sau đây

- 1- R_1 tuyến tính, và: $u_2 = \ln(q_2 + 1)$
- 2- R_1 tuyến tính, và: $u_2 = q_2^3 - 3q_2$
- 3- $u_1 = i^3 - 3i$, và: $q_2 = Cu_2$



Hình 9.80: Mạch để thiết lập phương trình trạng thái

Trường hợp 1: R_1 tuyến tính; và $u_2 = \ln(q_2 + 1)$

Trên trở tuyến tính: $i = \frac{1}{R_1} u_1 = \frac{1}{R_1} (E - u_2)$

Trên tụ phi tuyến: $i = q_2 = \frac{dq_2}{du_2} u_2$

nên
$$u_2 = \frac{E - u_2}{R_1 dq_2 / du_2}$$

mà $u_2 = \ln(q_2 + 1)$; nên $q_2 = e^{u_2} - 1$; từ đó: $dq_2 / du_2 = e^{u_2}$

Do đó phương trình trạng thái ứng với biến trạng thái u_2 là

$$u_2 = \frac{E - u_2}{R_1} e^{-u_2}$$

Ngoài ra, ta cũng có thể thiết lập phương trình trạng thái ứng với q_2 . Thật vậy

$$q_2 = i = \frac{1}{R_1} (E - u_2); \quad q_2 = \frac{1}{R_1} [E - \ln(q_2 + 1)]$$

Trường hợp 2: R_1 tuyến tính và $u_2 = q_2^3 - 3q_2$

Một cách tương tự
$$q_2 = i = \frac{1}{R_1} (E - u_2)$$

do đó phương trình trạng thái ứng với biến trạng thái q_2 là

$$q_2 = \frac{1}{R_1} [E - (q_2^3 - 3q_2)]$$

Tuy nhiên ứng với u_2 sẽ không tồn tại một phương trình trạng thái nào. Thật vậy

$$u_2 = \frac{E - u_2}{R_1 dq_2 / du_2}$$

Do hàm $q_2(u_2)$ đa trị (chẳng hạn tại $u_2 = 0$ tồn tại ba giá trị khác nhau của q_2) nên dq_2 / du_2 cũng đa trị, dẫn đến phương trình trạng thái đối với u_2 không tồn tại duy nhất.

Trường hợp 3: $u_1 = i^3 - 3i$ và $q_2 = Cu_2$

Từ $q_2 = i$

mà $u_1 = E - u_2 = E - \frac{1}{C} q_2$

Hàm $i(u_1)$ đa trị nên $i(q_2)$ cũng đa trị, do đó sẽ không tồn tại phương trình trạng thái ứng với q_2 .

Mặt khác $u_2 = \frac{1}{C} i$

Hàm $i(u_1)$ đa trị nên $i(u_2) = i(E - u_1)$ cũng đa trị: không thể thiết lập phương trình trạng thái ứng với q_2 .

Trong trường hợp không tồn tại phương trình trạng thái, nhờ xét đến các điện dung hoặc điện cảm ký sinh, ta vẫn có thể thiết lập phương trình trạng thái (xem sách bài tập). Chính vì vậy, trong phần tiếp theo, chúng ta có thể giả thiết rằng phương trình trạng thái luôn luôn tồn tại:

$$x' = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (9.128)$$

Bài toán này còn được gọi là bài toán điều kiện đầu. Nghiệm của bài toán điều kiện đầu tổng quát ít khi tồn tại dưới dạng giải tích mà thường được xác định bằng phương pháp số.

2- Giải thuật số

Mặc dù tồn tại nhiều giải thuật số để giải bài toán điều kiện đầu

$$x' = f(x, t) \text{ với } x(t_0) = x_0$$

nhưng phần lớn chúng đều dựa trên hai tiếp cận cơ bản: phương pháp khai triển Taylor và phương pháp đa thức hóa.

Giả thiết chung được duy trì trong phần này là bước thời gian

$h = t_{n+1} - t_n$ không đổi.

Có nghĩa là ở bước lặp thứ n , $t_n = nh + t_0$.

1- Phương pháp khai triển Taylor

Để thiết lập công thức lặp, khai triển Taylor sẽ được thực hiện đến một bậc phù hợp. Bậc khai triển càng cao, độ chính xác sẽ càng lớn. Có hai dạng chủ yếu của phương pháp khai triển Taylor: 1. giải thuật Taylor; 2. Giải thuật Runge - Kutta. Giải thuật Taylor là giải thuật đòi hỏi tính trực tiếp các đạo hàm riêng, một công việc thường nặng nề và kém chính xác. Do đó trên thực tế, để tránh những tính toán này, người ta thường dùng giải thuật Runge - Kutta.

Giải thuật Taylor

Giả sử $\hat{x}(t)$ là nghiệm chính xác của phương trình trạng thái: $x' = f(x, t)$; $x(t_0) = x_0$. Ở $t = t_{n+1}$, khai triển Taylor $\hat{x}(t)$ quanh t_n , lưu ý: $h = t_{n+1} - t_n$

$$\hat{x}(t_{n+1}) = \hat{x}(t_n) + \frac{1}{1!} \hat{x}^{(1)}(t_n) \cdot (t_{n+1} - t_n) + \dots + \frac{1}{p!} \hat{x}^{(p)}(t_n) \cdot (t_{n+1} - t_n)^p + \dots$$

$$\hat{x}(t_{n+1}) = \hat{x}(t_n) + \frac{1}{1!} h \hat{x}^{(1)}(t_n) + \dots + \frac{1}{p!} h^p \hat{x}^{(p)}(t_n) + \dots$$

Bỏ qua các thành phần bậc cao hơn p và thay $x' = f(x, t)$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{1!} h f(x_n, t_n) + \dots + \frac{1}{p!} h^p f^{(p-1)}(x_n, t_n)$$

Như vậy, giải thuật Taylor bậc p sẽ có dạng

$$x_{n+1} = x_n + h T_p(x_n, t_n; h)$$

$$T_p(x_n, t_n; h) = f(x_n, t_n) + \frac{1}{2!} h f^{(1)}(x_n, t_n) + \dots + \frac{1}{p!} h^{p-1} f^{(p-1)}(x_n, t_n) \quad (9.129)$$

Trong trường hợp $p = 1$, ta có giải thuật Euler thuận

$$x_{n+1} = x_n + h f(x_n, t_n) \quad (9.130)$$

Tuy là giải thuật số đơn giản, nhưng do độ chính xác kém, giải thuật Euler thuận thường ít sử dụng trong thực tế tính toán.

Đối với giải thuật Taylor bậc 2

$$x_{n+1} = x_n + h \left[f(x_n, t_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, t_n) \right]$$

$$x_{n+1} = x_n + h \left\{ f(x_n, t_n) + \frac{h}{2} [f_x(x_n, t_n) \cdot f(x_n, t_n) + f_t(x_n, t_n)] \right\} \quad (9.131)$$

với $f_x = \partial f / \partial x$; $f_t = \partial f / \partial t$

Tuy nhiên tính toán các đạo hàm riêng trong giải thuật Taylor thường nặng nề và kém chính xác, nhất là khi $f(x, t)$ không có dạng giải tích. Vì thế hai nhà toán học Runge và Kutta đã đề nghị một phương pháp rất độc đáo vừa tránh tính toán đạo hàm vừa giữ nguyên tắc sai số so với giải thuật Taylor.

Giải thuật Runge - Kutta

Ý tưởng cơ bản là thay hàm $T_p(x_n, t_n; h)$ bằng một hàm $K_p(x_n, t_n; h)$ không chứa đạo hàm riêng của $f(x, t)$ sao cho

$$|K_p(x_n, t_n; h) - T_p(x_n, t_n; h)| \leq Rh^p; \text{ với } R = \text{const}$$

Do đó, giải thuật Runge - Kutta bậc p sẽ có cùng bậc sai số với giải thuật Taylor nhưng tính toán dễ dàng hơn nhiều. Tuy nhiên do không thể đánh giá chính xác sai số trong từng bước lập, khả năng kiểm soát sai số của phương pháp Runge - Kutta sẽ phần nào bị hạn chế.

Chẳng hạn khi $p = 2$, thay cho

$$T_2(x_n, t_n; h) = f(x_n, t_n) + \frac{h}{2} [f_x(x_n, t_n) \cdot f(x_n, t_n) + f_t(x_n, t_n)]$$

chúng ta định nghĩa

$$K_2(x_n, t_n; h) = a_1 f(x_n, t_n) + a_2 f[x_n + \alpha h f(x_n, t_n), t_n + \beta h]$$

trong đó a_1, a_2, α và β được xác định sao cho

$$|K_p(x_n, t_n; h) - T_p(x_n, t_n; h)| \leq Rh^p$$

Dùng khai triển Taylor

$$f[x_n + \alpha h f(x_n, t_n), t_n + \beta h] = f(x_n, t_n) + \alpha h f(x_n, t_n) \cdot f_x(x_n, t_n) + \beta h f_t(x_n, t_n) + O(h^2)$$

do đó

$$K_2(x_n, t_n; h) = (a_1 + a_2) f(x_n, t_n) + h [a_2 \alpha f(x_n, t_n) \cdot f_x(x_n, t_n) + a_2 \beta f_t(x_n, t_n)] + O(h^2)$$

so sánh với biểu thức của $T_2(x_n, t_n; h)$, ta có

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 \alpha = 0,5 \\ a_2 \beta = 0,5 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a_1 = 1 - a_2 \\ \alpha = \beta = \frac{1}{2a_2} \end{cases}$$

Như vậy giải thuật Runge - Kutta bậc 2 sẽ là

$$x_{n+1} = x_n + (1 - a_2)hf(x_n, t_n) + a_2hf\left[x_n + \frac{h}{2a_2}f(x_n, t_n), t_n + \frac{h}{2a_2}\right] \quad (9.132)$$

Các trường hợp đặc biệt của giải thuật Runge - Kutta bậc 2

- Giải thuật Heun's: $a_2 = 0.5$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\{f(x_n, t_n) + f[x_n + hf(x_n, t_n), t_n + h]\} \quad (9.133)$$

- Giải thuật Euler - Cauchy cải tiến: $a_2 = 1$

$$x_{n+1} = x_n + hf\left[x_n + \frac{h}{2}f(x_n, t_n), t_n + \frac{h}{2}\right] \quad (9.134)$$

- Giải thuật Runge - Kutta bậc 4:

Do có độ chính xác cao đồng thời lại không quá phức tạp, giải thuật Runge - Kutta bậc 4 thường được dùng để tăng bước thời gian h , thời gian tính toán vì thế sẽ giảm

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hK_4(x_n, t_n; h) \\ K_4(x_n, t_n; h) &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= f(x_n, t_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}k_2, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_4 &= f(x_n + hk_3, t_n + h) \end{aligned} \quad (9.135)$$

Tuy nhiên giải thuật Runge - Kutta có hai nhược điểm

Thứ nhất, do khó đánh giá sai số trong từng bước lặp nên h thường được chọn lớn hơn mức cần thiết, làm tăng khối lượng tính toán.

Thứ hai, hàm $f(x, t)$ phải được tính toán đến 4 lần trong một bước lặp mà những giá trị này lại không thể dùng cho các bước sau, do đó hiệu quả tính toán của phương pháp kém hơn so với phương pháp đa thức hóa.

2- Phương pháp đa thức hóa

Về mặt toán học, một hàm liên tục bất kỳ có thể xấp xỉ bởi một đa

thức có bậc đủ cao. Tuy vậy trên thực tế, sai số do giải thuật và do máy tính sẽ tăng đáng kể theo k nên người ta chỉ dùng những giá trị k nhỏ hơn 10.

Giả sử phương trình trạng thái có dạng: $x' = f(x, t)$, với: $x(t_0) = x_0$ có nghiệm chính xác $\hat{x}(t)$. Ý tưởng cơ bản của phương pháp là tìm $\hat{x}(t)$ dưới dạng

$$\hat{x}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ là những hằng số})$$

sao cho nếu các hàm $\hat{x}(t_n), \hat{x}(t_{n-1}), \dots, \hat{x}(t_{n-p})$ và các đạo hàm $\hat{x}'(t_n), \hat{x}'(t_{n-1}), \dots, \hat{x}'(t_{n-p})$ chính xác thì $\hat{x}(t_{n+1})$ cũng là nghiệm chính xác của bài toán.

Giải thuật đa thức hóa bậc p có dạng

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \\ a_0 x_n + \dots + a_p x_{n-p} + h[b_{-1} f(x_{n+1}, t_{n+1}) + b_0 f(x_n, t_n) + \dots + b_p f(x_{n-p}, t_{n-p})] \end{aligned} \quad (9.136)$$

Khác với giải thuật Taylor, các giá trị tính được trước đó sẽ được dùng lại để tính x_{n+1} , dẫn đến hiệu quả cao hơn trong tính toán. Do đó khi $p > 1$ giải thuật này còn được gọi là giải thuật đa bước, trong khi giải thuật Taylor luôn luôn là giải thuật đơn bước. Một lưu ý khác là khi $b_{-1} \neq 0$ giải thuật đa bước có tính ẩn vì x_{n+1} xuất hiện ở cả hai vế.

Ràng buộc về độ chính xác

Để x_{n+1} được tính chính xác, các giá trị của $a_0, \dots, a_p, b_{-1}, \dots, b_p$ phải thỏa mãn ràng buộc về độ chính xác. Chẳng hạn với $k = 2$ và $p = 0$:

$$\hat{x}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

$$x_{n+1} = a_0 x_n + h[b_{-1} f(x_{n+1}, t_{n+1}) + b_0 f(x_n, t_n)]$$

$$\text{mà } f(x_{n+1}, t_{n+1}) = \hat{x}'(t_n + h) = \alpha_1 + 2\alpha_2(t_n + h)$$

$$f(x_n, t_n) = \hat{x}'(t_n) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t_n$$

$$\text{nên } x_{n+1} = a_0 x_n + h\{b_{-1}[\alpha_1 + 2\alpha_2(t_n + h)] + b_0(\alpha_1 + 2\alpha_2 t_n)\}$$

$$x_{n+1} = a_0 x_n + h\{\alpha_1(b_{-1} + b_0) + 2\alpha_2 t_n(b_{-1} + b_0) + \alpha_2 h(2b_{-1})\} \quad (1)$$

Ta sẽ xác định: a_0, b_{-1}, b_0 , sao cho: $x_{n+1} = \hat{x}(t_{n+1})$; và: $x_n = \hat{x}(t_n)$

$$\hat{x}(t_{n+1}) = \alpha_0 + \alpha_1(t_n + h) + \alpha_2(t_n + h)^2$$

$$\hat{x}(t_{n+1}) = \alpha_0 + \alpha_1 t_n + \alpha_2 t_n^2 + h(\alpha_1 + 2\alpha_2 t_n + \alpha_2 h) = \hat{x}(t_n) + h(\alpha_1 + 2\alpha_2 t_n + \alpha_2 h)$$

nên $x_{n+1} = x_n + h(\alpha_1 + 2\alpha_2 t_n + \alpha_2 h)$ (2)

So sánh (1) và (2)

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_{-1} + b_0 = 1 \text{ có nghĩa là} \\ 2b_{-1} = 1 \end{cases} \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_{-1} = \frac{1}{2} \\ b_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Đây chính là ràng buộc về độ chính xác của giải thuật khi $k = 2$, $p = 0$. Khi đó

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[f(x_{n+1}, t_{n+1}) + f(x_n, t_n)] \quad (9.137)$$

Giải thuật đa thức bậc hai này được gọi là giải thuật hình thang vì thành phần thứ hai của nó có thể giải thích như diện tích của một hình thang.

Mở rộng phân tích trên một cách tương tự cho trường hợp tổng quát với k và p bất kỳ, ràng buộc về độ chính xác sẽ là

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^p a_i = 1 \\ \sum_{i=0}^p (-1)^j a_i + j \sum_{i=-1}^p (-1)^{j-1} b_i = 1 \quad j = 1, 2, \dots, k \end{cases} \quad (9.138)$$

Thông thường người ta chọn: $p = k-1$, và: $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$. Khi đó tùy theo giá trị b_{-1} có hai giải thuật chính sau đây

+ $b_{-1} = 0$: giải thuật hiển (giải thuật Adams - Bashforth) (Bảng 9.2)

+ $b_{-1} \neq 0$: giải thuật ẩn (giải thuật Adams - Moulton) (Bảng 9.3)

Bảng 9.2

Bậc	Giải thuật Adams - Bashforth
1	$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n)$ (Euler thuận)
2	$x_{n+1} = x_n + h[\frac{3}{2}f(x_n, t_n) - \frac{1}{2}f(x_{n-1}, t_{n-1})]$
3	$x_{n+1} = x_n + h[\frac{23}{12}f(x_n, t_n) - \frac{16}{12}f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{5}{12}f(x_{n-2}, t_{n-2})]$
4	$x_{n+1} = x_n + h[\frac{55}{24}f(x_n, t_n) - \frac{59}{24}f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{37}{24}f(x_{n-2}, t_{n-2}) - \frac{9}{24}f(x_{n-3}, t_{n-3})]$
5	$x_{n+1} = x_n + h[\frac{1901}{720}f(x_n, t_n) - \frac{2774}{720}f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{2616}{720}f(x_{n-2}, t_{n-2}) - \frac{1274}{720}f(x_{n-3}, t_{n-3}) + \frac{251}{720}f(x_{n-4}, t_{n-4})]$
6	$x_{n+1} = x_n + h[\frac{4277}{1440}f(x_n, t_n) - \frac{7923}{1440}f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{9982}{1440}f(x_{n-2}, t_{n-2}) - \frac{7298}{1440}f(x_{n-3}, t_{n-3}) + \frac{2877}{1440}f(x_{n-4}, t_{n-4}) - \frac{475}{1440}f(x_{n-5}, t_{n-5})]$

Bảng 9.3

Bậc	Giải thuật Adams - Moulton
1	$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1}, t_{n+1})$ (Euler nghịch)
2	$x_{n+1} = x_n + h[\frac{1}{2}f(x_{n+1}, t_{n+1}) + \frac{1}{2}f(x_n, t_n)]$
3	$x_{n+1} = x_n + h[\frac{5}{12}f(x_{n+1}, t_{n+1}) + \frac{8}{12}f(x_n, t_n) - \frac{1}{12}f(x_{n-1}, t_{n-1})]$
4	$x_{n+1} = x_n + h[\frac{9}{24}f(x_{n+1}, t_{n+1}) + \frac{19}{24}f(x_n, t_n) - \frac{5}{24}f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{1}{24}f(x_{n-2}, t_{n-2})]$
5	$x_{n+1} = x_n + h[\frac{251}{720}f(x_{n+1}, t_{n+1}) + \frac{646}{720}f(x_n, t_n) - \frac{264}{720}f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{106}{720}f(x_{n-2}, t_{n-2}) - \frac{19}{720}f(x_{n-3}, t_{n-3})]$
6	$x_{n+1} = x_n + h[\frac{475}{1440}f(x_{n+1}, t_{n+1}) + \frac{1427}{1440}f(x_n, t_n) - \frac{798}{1440}f(x_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{482}{1440}f(x_{n-2}, t_{n-2}) - \frac{173}{1440}f(x_{n-3}, t_{n-3}) + \frac{27}{1440}f(x_{n-4}, t_{n-4})]$

Giải thuật ẩn thường có độ chính xác cao hơn giải thuật hiển vì nó đòi hỏi ít hơn một giá trị trước đó của $f(x, t)$. Tuy nhiên, khi đó tính toán x_{n+1} có thể phức tạp hơn vì x_{n+1} tồn tại ở cả hai vế.

Khởi động giải thuật đa bước

Khác với giải thuật đơn bước, giải thuật đa bước không thể tự khởi động. Chẳng hạn đối với giải thuật hiển ($b_{-1} = 0$)

$$x_{n+1} = a_0 x_n + h[b_0 f(x_n, t_n) + \dots + b_p f(x_{n-p}, t_{n-p})]$$

Để tính được x_{n+1} , ta cần phải biết trước $p+1$ giá trị của: $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p}$; trong khi chỉ có x_0 được cho. Để có các giá trị này, giải thuật đơn bước phải được thực hiện trước ít nhất $p+1$ lần, trước khi giải thuật đa bước được khởi động. Do chính xác cao và dễ lập trình, giải thuật Runge - Kutta bậc 4 thường được sử dụng để khởi động các giá trị đầu. Do chỉ cần tính trong $p + 1$ bước lặp, khả năng kiểm soát sai số yếu của giải thuật Runge - Kutta sẽ không có ảnh hưởng lớn. Sau đó, ta tiếp tục tính toán bằng giải thuật đa bước do hiệu quả tính toán cao và khả năng kiểm soát sai số.

3- Hệ thống hóa các giải thuật số

Một cách tổng quan, các phương pháp số khảo sát ở trên được liệt kê lại như sau

Mạch phi tuyến diện trở

- Phương pháp lặp đơn giản
- Phương pháp Newton - Raphsôn

Mạch phi tuyến động

- Phương pháp khai triển Taylor
 - # Giải thuật Taylor
 - Giải thuật Euler thuận
 - # Giải thuật Runge - Kutta
 - Giải thuật Runge - Kutta bậc hai
 - > Giải thuật Heun's
 - > Giải thuật Euler - Cauchy cải tiến
 - Giải thuật Runge - Kutta bậc bốn
- Phương pháp đa thức hóa
 - # Giải thuật hiển Adams - Bashforth

- Giải thuật Euler thuận
- # Giải thuật ẩn Adams – Moulton
- Giải thuật Euler nghịch

4- Phân tích sai số

Phân tích sai số là một vấn đề hết sức quan trọng đối với chất lượng tính toán của phương pháp số. Tuy nhiên phân tích sai số một cách đầy đủ đòi hỏi những dẫn suất toán học tương đối phức tạp, vượt ra ngoài phạm vi của một giáo trình mạch điện. Do đó, ở đây chúng tôi chỉ giới thiệu một số kết quả chung nhất liên quan đến sai số.

Xét một bài toán điều kiện đầu: $x' = f(x, t), x(t_0) = x_0$

Giả sử giải thuật hoàn toàn chính xác tại t_n , sai số của giải thuật ở t_{n+1} sẽ là:

$$\varepsilon = \hat{x}(t_{n+1}) - x_{n+1}$$

với: $\hat{x}(t_{n+1})$ - là nghiệm chính xác tại t_{n+1} ; x_{n+1} - là kết quả tính được bằng giải thuật số.

Đối với mạch phi tuyến điện trở

Giả sử tồn tại $L < 1$ sao cho $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ thì ở bước lặp thứ j :

- Phương pháp lặp đơn giản: $\varepsilon^{(j+1)} \leq L\varepsilon^{(j)}$

- Phương pháp Newton – Raphson: $\varepsilon^{(j+1)} \leq L[\varepsilon^{(j)}]^2$

Phương pháp Newton – Raphson sẽ hội tụ nhanh hơn phương pháp lặp đơn giản. Đó là lý do tại sao phương pháp Newton – Raphson rất phù hợp để giải phương trình phi tuyến tính.

Đối với mạch phi tuyến động

Giải thuật Taylor

- Giải thuật Euler thuận: $\varepsilon = \frac{h^2}{2} \hat{x}''(\tau) = O(h^2), t_n < \tau < t_{n+1}$

- Giải thuật Euler nghịch: $\varepsilon = -\frac{h^2}{2} \hat{x}''(\tau) = O(h^2), t_n < \tau < t_{n+1}$

- Giải thuật hình thang: $\varepsilon = -\frac{h^3}{12} \hat{x}'''(\tau) = O(h^3), t_n < \tau < t_{n+1}$

Như vậy giải thuật hình thang có độ chính xác cao hơn các giải thuật Euler.

Giải thuật đa thức hóa bậc k

$$\varepsilon = C_k \hat{x}^{(k+1)}(\tau) h^{k+1} = O(h^{k+1}), -ph < \tau < h$$

$$\text{Do đó } C_k = \frac{1}{(k+1)!} \left\{ (p+1)^{k+1} - \left[\sum_{i=0}^{p-1} a_i (p-i)^{k+1} + (k+1) \sum_{i=-1}^{p-1} b_i (p-i)^k \right] \right\}$$

9.4 MẠCH TỪ

Mạch từ được hiểu là phần không gian hữu hạn trong đó có dòng từ thông chảy theo những đường định hướng trong lõi thép. Như đã biết việc hình thành từ thông là do sự tồn tại từ trường được xác định bởi vectơ từ cảm \vec{B} và cường độ từ trường \vec{H} , trong trường hợp tổng quát chúng là hàm của thời gian và vị trí không gian. Từ trường được mô tả bởi hệ phương trình Maxwell, đối với trường tĩnh (các vectơ \vec{B}, \vec{H} không thay đổi theo thời gian) có dạng

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (9.139)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (9.140)$$

trong đó \vec{J} là vectơ mật độ dòng. Các vectơ \vec{B} và \vec{H} có quan hệ với nhau được xác định bởi phương trình

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (9.141)$$

ở đây $\mu = \mu_0 \mu_r$ là độ từ thẩm của môi trường ;

μ_0 - độ từ thẩm của chân không; μ_r - độ từ thẩm tương đối của môi trường.

Trong trường hợp trường biến thiên theo thời gian nhưng thỏa mãn điều kiện dừng, nó cũng được mô tả bởi các phương trình (9.139), (9.140). Cùng với từ trường còn có vectơ cường độ điện trường \vec{E} , liên hệ với vectơ từ cảm \vec{B} theo phương trình Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Nguồn sinh ra trường tĩnh là dây dẫn hoặc mạch điện có dòng một chiều chảy qua, còn nguồn sinh ra trường biến thiên là dây dẫn hay mạch điện có dòng xoay chiều.

Trong thực tế, từ thông được đóng kín trên đường khép kín được tạo nên bởi sắt từ có quan hệ $\vec{B}(\vec{H})$ là KTT, đa trị và các thuận từ, nghịch từ có quan hệ $\vec{B}(\vec{H})$ tuyến tính, đơn trị.

Sau đây ta sẽ xét các mạch từ có từ thông không thay đổi theo thời gian (trường tĩnh) và mạch từ có từ thông biến thiên theo thời gian.

9.4.1 Mạch từ từ thông không đổi

Đối với mạch từ thì định luật về dòng từ thông có ý nghĩa rất quan trọng. Theo định luật này, lưu số của vectơ cường độ từ trường \vec{H} dọc theo mạch đóng kín sẽ bằng tổng đại số các dòng điện xuyên qua mạch này. Định luật được phát biểu dưới dạng công thức toán học sau đây

$$e_M = \int_l H_t dl = \sum_{k=1}^n I_k \tag{9.142}$$

trong đó e_M - sức từ động;

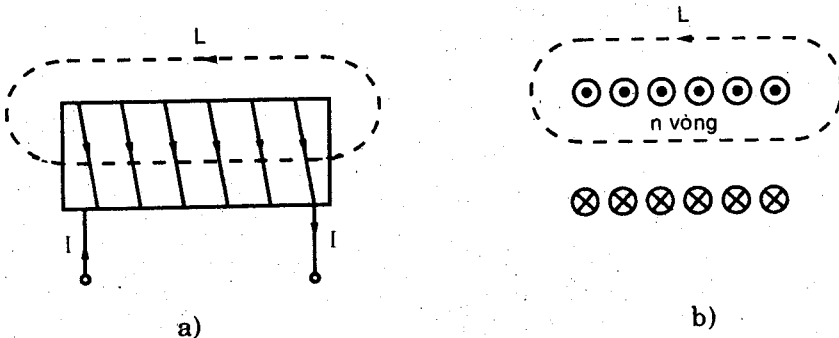
H_t - thành phần tiếp tuyến của vectơ \vec{H} với đường l .

Dấu của I_k trong tổng phụ thuộc vào chiều của nó so với chiều của đường l và được xác định dựa vào qui tắc vặn nút chai.

Trường hợp trong cuộn dây có dòng một chiều I và số vòng n (H.9.81), công thức (9.142) có dạng

$$e_M = \int_l H_t dl = In = \theta \tag{9.143}$$

ở đây θ - được gọi là dòng từ.



Hình 9.81: Cuộn dây có dòng một chiều

Nếu đường dây l hở mạch, thì tích phân dọc đường này gọi là áp từ U_M

$$U_M = \int_l H_t dl \tag{9.144}$$

Trong từ trường có vectơ từ cảm \vec{B} , thì từ thông Φ qua bề mặt S được xác định bởi công thức

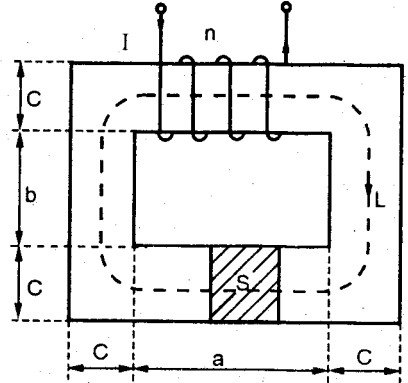
$$\Phi = \iint_S B_p d\sigma \tag{9.145}$$

trong đó B_p - là thành phần pháp tuyến của vectơ \vec{B} với mặt phẳng S .

Sau đây sẽ xét một số định luật cơ bản của mạch từ. Để mô tả và phân tích mạch từ, ta có thể lập những sơ đồ mạch để mô tả sự ghép nối các bộ phận lõi sắt của hệ thống từ. Sơ đồ đó cũng có những điểm giống với sơ đồ mạch điện về cách mô tả biến trạng thái và kết cấu hình học (graph, đỉnh nhánh, vòng, tập cắt...) và các phép tính (định luật Ôm, định luật Kirchhoff).

1- Định luật Ôm

Ta gọi nhánh là một đoạn sơ đồ mạch có dòng từ thông Φ chảy từ đầu đến cuối. Một nhánh có thể nối tiếp bởi nhiều đoạn nhỏ, mỗi đoạn dài l có cùng một vật liệu dẫn từ. Do đó khi hình dáng hình học bảo đảm sự phân bố trường tương đối đều trên tiết diện, tức là vectơ \vec{B} và \vec{H} như nhau ở mọi điểm của mặt cắt bất kỳ của lõi, thì từ thông tạo ra thông lõi được tính theo công thức



Hình 9.82: Mạch từ không phân nhánh

$$\Phi = \iint_S B_p d\sigma = \iint_S B d\sigma = B \int \int_S d\sigma = BS \quad (9.146)$$

và theo định luật về dòng từ 9.143

$$e_M = In = \int_l H_t dl = \int_l H dl = H \int_l dl = Hl \quad (9.147)$$

Trong các công thức (9.146) và (9.147); $S = c^2$ - là diện tích của tiết diện ngang của lõi, $l = 2a + 2b + c$ - là độ dài trung bình của đường sức từ trong lõi (xem H.9.82).

Từ phương trình 9.147 ta có

$$H = \frac{e_M}{l} \quad (9.148)$$

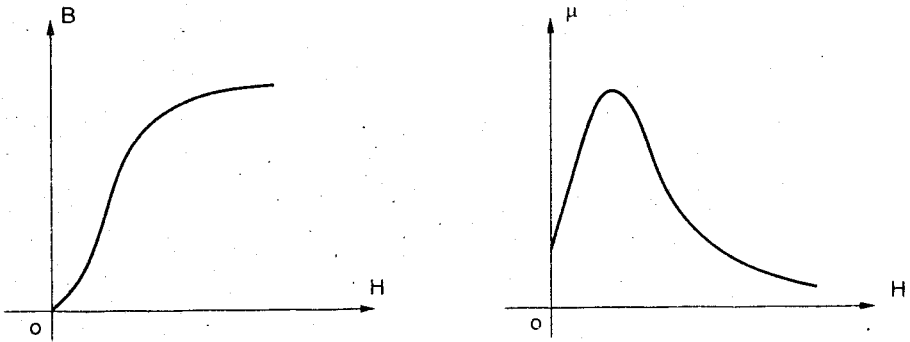
$$\text{Bởi vì } B = \mu H \text{ nên } B = \mu \frac{e_M}{l} \quad (9.149)$$

Khi thay (9.149) vào (9.146) ta được

$$\Phi = \frac{e_M}{l} = \frac{e_M}{\mu S} \quad (9.150)$$

hay là
$$\Phi = \frac{U_M}{R_M} \tag{9.151}$$

trong đó
$$R_M = \frac{l}{\mu S} \tag{9.152}$$

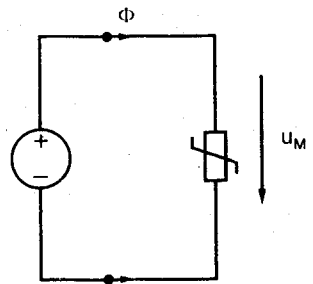


Hình 9.83: Đặc tuyến vật liệu làm lõi

Các phương trình (9.150), (9.151) được gọi là định luật Ôm của mạch từ, còn R_M được xác định theo (9.152) là từ trở. Từ trở trong trường hợp tổng quát là hàm *KTT* của cường độ từ trường và từ áp U_M . Điều đó xuất phát từ quan hệ *KTT* của $\mu(H)$ gây nên do đặc tuyến *KTT* $B(H)$ của vật liệu làm lõi. Quan hệ $\mu(H)$ được xác định bởi đường cong từ hóa đầu tiên bỏ qua hiện tượng từ trễ (xem H.9.83).

Từ trở được xác định theo công thức (9.152) được gọi là từ trở tĩnh tại điểm làm việc trên đặc tuyến $\Phi = f(U_M)$. Phương trình (9.151) cho phép ta xây dựng nên sơ đồ mạch tương đương cho mạch từ đang xét (H.9.84).

Trên đây ta đã xét mạch từ không phân nhánh và định luật Ôm mô tả quan hệ giữa các đại lượng vật lý trên nó.



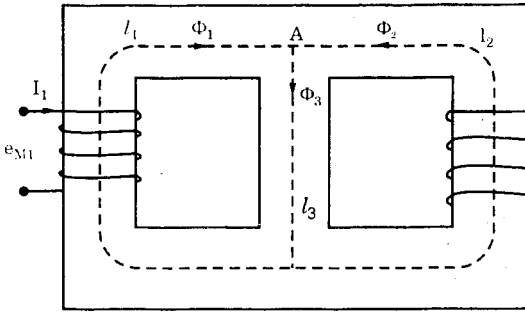
Hình 9.84
Sơ đồ tương đương

2- Định luật Kirchhoff

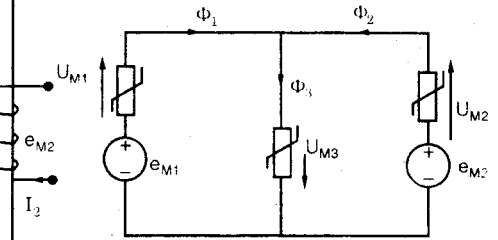
Ta gọi đỉnh hay nút là chỗ nối (liên thông dòng từ) của hai hay nhiều nhánh. Ở mỗi đỉnh sẽ có những dòng từ thông chảy tới và chảy đi. Giữa một cặp đỉnh sẽ có một từ áp.

Xét một mạch từ phân nhánh như trên H.9.85, trên đó có hai cuộn dây với số vòng quấn là n_1 và n_2 , dòng điện qua chúng tương ứng là I_1 và I_2 . Khi thừa nhận các đường sức từ trung bình trên mỗi nhánh là

l_1, l_2, l_3 ta có thể viết phương trình cho từ thông tại nút A như sau



Hình 9.85: Mạch từ phân nhánh



Hình 9.86: Sơ đồ tương đương của mạch trên hình 9.85

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \quad (9.153)$$

trong đó $\Phi_1 = B_1 S, \Phi_2 = B_2 S, \Phi_3 = B_3 S$.

Phương trình (9.153) chính là định luật Kirchhoff I cho mạch từ phân nhánh, được phát biểu như sau

Tổng đại số các dòng từ thông tại một đỉnh hay tập cắt là bằng không.

Trong trường hợp tổng quát, định luật Kirchhoff I của mạch từ có thể viết dưới dạng

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0 \quad (9.154)$$

Ta hãy xây dựng sơ đồ tương đương cho mạch đang xét trên H.9.85. Từ định luật về dòng từ, đối với mạch có các đường sức hữu hạn l_1, l_2, l_3 ta có phương trình

$$e_{M1} = I_1 n_1 = U_{M1} + U_{M3} = H_1 l_1 + H_3 l_3 \quad (9.154)$$

$$e_{M2} = I_2 n_2 = U_{M2} + U_{M3} = H_2 l_2 + H_3 l_3 \quad (9.155)$$

Các phương trình này chính là định luật Kirchhoff II cho mạch đang xét, có sơ đồ tương đương trên H.9.86. Trong trường hợp tổng quát, đối với một mạch từ bất kỳ, định luật Kirchhoff II có thể phát triển như sau:

Theo một vòng kín tổng đại số các từ áp bằng tổng các sức từ động.

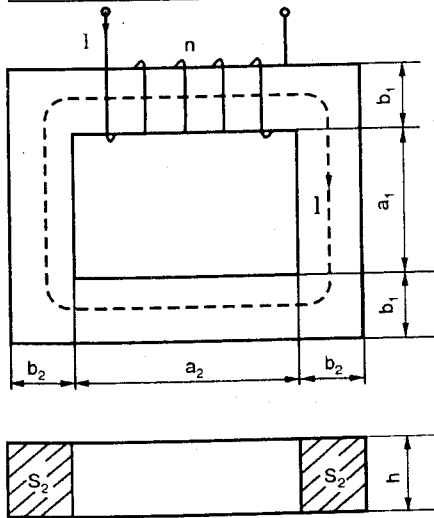
$$\sum_{k=1}^n U_{Mk} = \sum_{i=1}^m e_{Mi} \quad (9.156)$$

Để tiện lợi cho việc tính toán, dưới đây sẽ ghi lại các đại lượng vật lý

xuất hiện trong quá trình phân tích mạch từ và các đơn vị của nó.

Bảng 9.4

Các đại lượng vật lý	Ký hiệu	Đơn vị trong hệ SI	
		Tên	Ký hiệu
Từ cảm	B	Tesla	$1T = \text{wb}/\text{m}^2$
Từ thông	Φ	Weber	$1\text{wb} = 1 \text{VS}$
Cường độ từ trường	H	Amper/met	$1 \text{A}/\text{m}$
Độ từ thẩm	$\mu = \mu_0 \mu_r$	Henry/met	$1 \text{H}/\text{m}$
Từ áp	u_M	Amper	1A
Sức từ động	e_M		
Dòng từ	θ		
Từ trở	R_M	Nghịch đảo của Henry	1H^{-1}



Hình 9.87: Mạch từ không phân nhánh

Từ đường cong từ hóa $B(H)$ trên H.9.88, ta có thể xác định giá trị B tương ứng với giá trị H tính theo (9.158). Do đó có thể tính được

$$\Phi = BS \tag{9.159}$$

2- Với giả thiết ở câu a, hãy xác định dòng từ θ để lõi có được từ thông Φ tìm được ở trên.

Ví dụ 9.9. Xét một mạch từ không phân nhánh (H.9.87), lõi ferric có đường cong $B(H)$ được cho trước (H.9.88). Trên lõi ferric có quấn cuộn dây n vòng và cuộn dây có dòng điện một chiều I .

1- Hãy xác định từ thông Φ với giả thiết $b_1 = b_2 = b$, do đó $S_1 = S_2$ và $\theta = In$.

Từ định luật về dòng từ

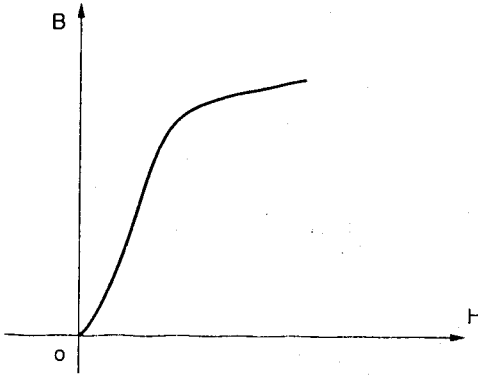
$$In = Hl \tag{9.157}$$

$$\text{Suy ra } H = \frac{In}{l} \tag{9.158}$$

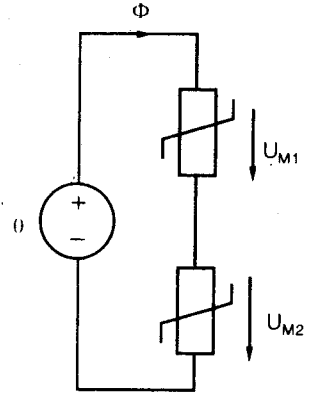
trong đó $l = 2a_1 + 2a_2 + \pi b$

Với giá trị Φ và diện tích S đã biết ta có: $B = \frac{\Phi}{S}$.

Từ đường cong từ hóa trên H.9.88, ta sẽ tìm được giá trị cường độ từ trường H , tương ứng với giá trị B tìm được trên đây và do đó $\theta = Hl$



Hình 9.88



Hình 9.89

3- Giả thiết rằng: $b_1 \neq b_2 \rightarrow S_1 \neq S_2$. Hãy xác định θ khi đã biết từ thông Φ .

Từ cảm trong phần lõi có tiết diện: $S_1 = b_1 h$; và độ dài $l_1 = 2a_1 + \frac{1}{2} \pi b_1$ là

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} \quad (9.160a)$$

Từ cảm trong phần lõi có $S_2 = b_2 h$ và $l_2 = 2a_2 + \frac{1}{2} \pi b_2$

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} \quad (9.160b)$$

Bởi vì đây là mạch từ không phân nhánh nên từ thông bằng nhau trong cả hai phần lõi, cường độ từ trường H_1 và H_2 tương ứng với B_1 và B_2 có thể xác định từ đường cong $B(H)$ trên H.9.88.

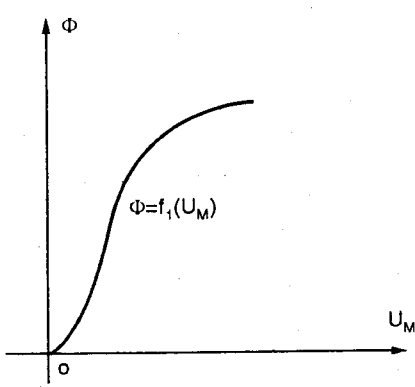
Từ định luật về dòng từ (9.143), với mạch từ đang xét có sơ đồ tương đương trên H.9.89, ta có phương trình xác định θ

$$\theta = In = U_{M1} + U_{M2} = H_1 l_1 + H_2 l_2 \quad (9.161)$$

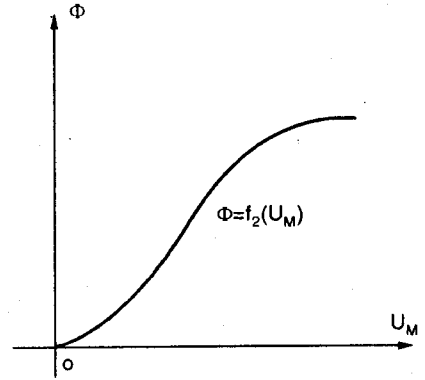
4- Với giả thiết như trong phần c, hãy tìm từ thông khi đã biết θ . Để giải bài toán này, ta cần xây dựng một đặc tuyến ứng dụng. Khi đã biết đường cong $B(H)$, với đoạn có tiết diện S_1 và độ dài l_1 , có thể xây

dựng đặc tuyến $\Phi = f_1(U_M)$ (xem H.9.90a) dựa trên các biểu thức

$$\Phi = BS_1; U_M = Hl_1 \quad (9.162)$$



a)



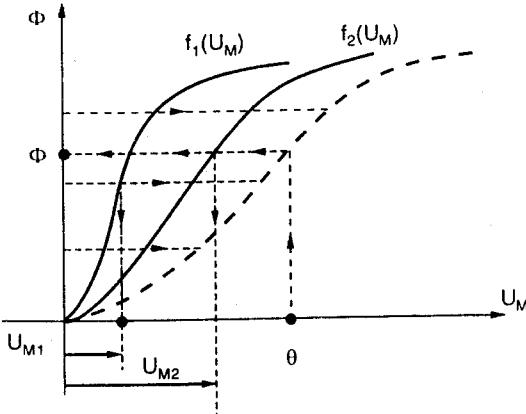
b)

Hình 9.90: Đặc tuyến $\Phi = f(u_M)$

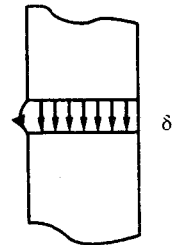
Tương tự với đoạn lõi có tiết diện S_2 và độ dài l_2 , ta xây dựng đặc tuyến $\Phi = f_2(u_M)$ (H.9.90b) dựa trên các biểu thức

$$\Phi = BS_2; U_M = Hl_2 \quad (9.163)$$

Các đặc tuyến ứng dụng được tạo ra trên đây mô tả các từ trở KTT R_{M1}, R_{M2} , của các phần lõi. Từ H.9.89 có thể thấy rằng, các từ trở này được mắc nối tiếp, do đó ta có thể tạo ra đặc tuyến tổng hợp của chúng. Tại các giá trị đã cho của θ , hãy xác định từ thông Φ của lõi và các từ áp U_{M1}, U_{M2} của các đoạn lõi l_1, l_2 .



Hình 9.91: Đặc tuyến tổng hợp của từ trở nối tiếp



Hình 9.92: Từ thông trong khe hở không khí

5- Xét mạch từ trên H.9.87, nhưng bị cắt bởi một khe không khí có độ rộng là δ . Khe hở không khí có đặc tuyến $B(H)$ là tuyến tính, vì $\mu = \mu_0 = const$. Bởi vì vật liệu sắt từ có độ từ thẩm $\mu_r > 1$, nên từ trở của nó sẽ nhỏ hơn từ trở của không khí rất nhiều lần (xem 9.152). Trong khe không khí sẽ xuất hiện sự “nở” ra của từ thông (H.9.92) và do đó tiết diện của dòng từ thông trong không khí S_k sẽ lớn hơn trong sắt từ.

Khi giả thiết độ rộng của khe hở không khí rất nhỏ so với các kích thước khác của nó, S_k được tính theo công thức

$$S_k \approx (b + \delta)(h + \delta) \quad (9.164)$$

Theo công thức thực nghiệm

$$S_k = 1,15S_s = 1,15bh \quad (9.165)$$

Xét trường hợp đơn giản nhất, khi $b_1 = b_2, S_1 = S_2$, hãy tìm dòng từ θ khi đã biết từ thông Φ . Độ dài đường sức từ trong sắt

$$l_s = l - \delta \approx l \quad (9.166)$$

độ dài đường sức từ trong không khí

$$l_k = \delta \quad (9.167)$$

từ cảm trong lõi sắt và trong khe hở không khí

$$B_s = \frac{\Phi}{S_s}; B_k = \frac{\Phi}{S_k} \quad (9.168)$$

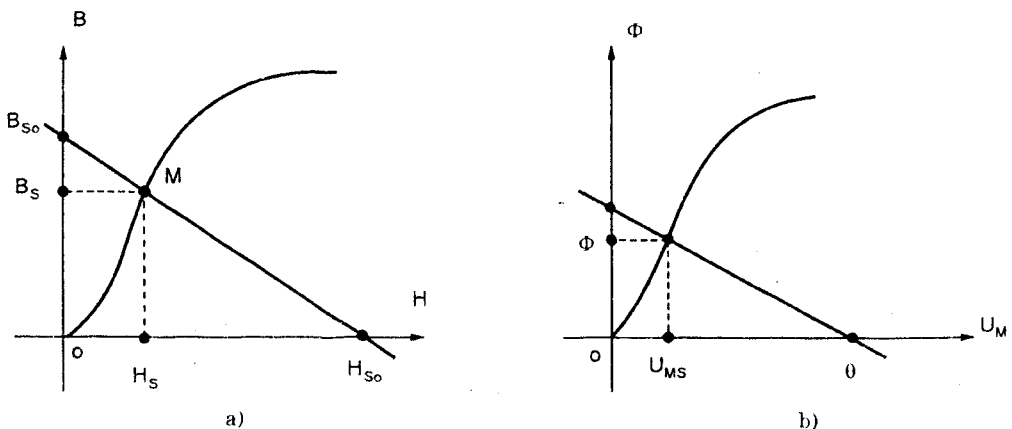
trong đó S_s và S_k được xác định theo (9.164), (9.165)

Cường độ từ trường trong khe hở không khí

$$H_k = \frac{B_k}{\mu_0} \quad (9.169)$$

Còn cường độ từ trường trong lõi sắt H_s được xác định từ đường cong $B(H)$. Dòng từ được xác định theo công thức

$$\theta = H_s l_s + H_k l_k \quad (9.170)$$



Hình 9.93

6- Với các giả thiết trong phần e, hãy tìm từ thông Φ khi đã biết dòng từ θ . Bài toán này có thể giải theo ba cách sau:

• Xây dựng đặc tuyến ứng dụng cho lõi sắt và khe hở không khí (xem H.9.93a.b)

$$\Phi = f_s(U_M); \quad \Phi = \frac{U_M}{R_{Mk}}$$

Dựa vào sơ đồ tương đương của mạch trên (H.9.94) ta có

$$\theta = U_M + \Phi R_{Mk} \tag{9.171}$$

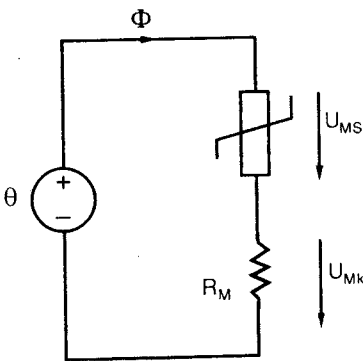
trong đó $R_{Mk} = \frac{\delta}{\mu_0 S_k}$ - là từ trở của khe hở không khí.

Phương trình (9.171) có thể viết lại dưới dạng khác

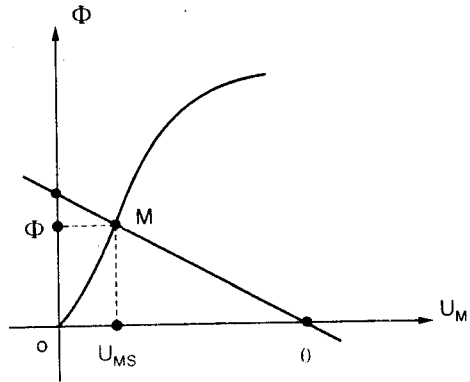
$$\Phi = \frac{\theta}{R_{Mk}} - \frac{U_M}{R_{Mk}} \tag{9.172}$$

hay

$$\frac{\theta}{R_{Mk}} - \frac{U_M}{R_{Mk}} = f_s(U_M) \tag{9.173}$$



Hình 9.94



Hình 9.95

Nghiệm của phương trình KTT (9.173) là giao điểm của đặc tuyến $f_s(U_M)$ và đường thẳng biểu diễn từ trở của khe không khí (H.9.95). Giao điểm có tọa độ $M(U_{MS}, \Phi)$. Từ áp trên khe hở không khí

$$U_{Mk} = \theta - U_{MS}$$

• Với mạch từ đang xét ta có phương trình

$$\theta = H_s l_s + H_k l_k \tag{9.174}$$

Bởi vì từ thông trong lõi sắt và trong khe hở không khí là như nhau nên:

$$B_s S_s = B_k S_k \tag{9.175}$$

Suy ra $B_k = B_s \frac{S_s}{S_k}$ và $H_k = \frac{B_s S_s}{\mu_0 S_k}$ (9.176)

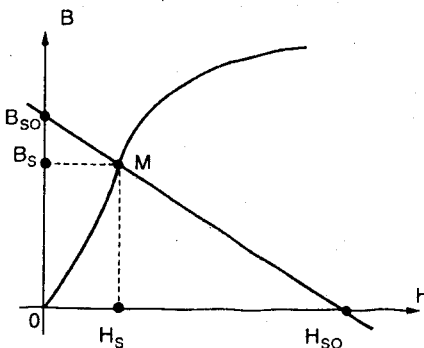
Khi thay H_k tính được từ (9.176) vào (9.174) ta được

$$\theta = H_s l_s + \frac{B_s S_s l_k}{\mu_o S_k} \quad (9.177)$$

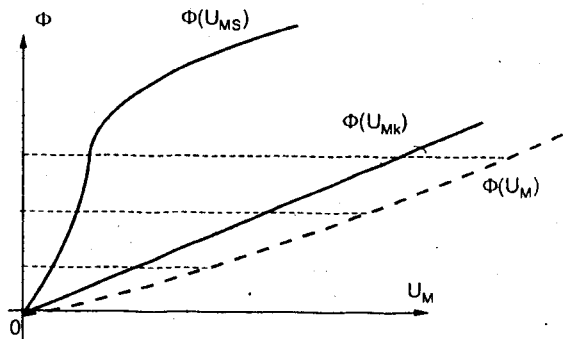
Phương trình (9.177) cùng với đường cong từ hóa $B(H)$ sẽ trở thành hệ phương trình *KTT*, chúng có thể giải bằng phương pháp đồ thị, khi vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ (B, H) . Giao điểm $M(B_s, H_s)$ là nghiệm của bài toán (H.9.96), bởi vì

$$\Phi = B_s S_s; B_{so} = \frac{S_k \mu_o}{S_s l_k} \cdot \theta; H_{so} = \frac{\theta}{l_s} \quad (9.178)$$

• Các đặc tuyến ứng dụng tìm được trong cách giải đầu tiên có thể vẽ trên cùng một trục tọa độ, dựa trên cơ sở sơ đồ nối tiếp (H.9.94) từ trở *KTT* và từ trở tuyến tính để tìm ra đặc tuyến tổng hợp trên H.9.97. Với giá trị đã cho của dòng θ , ta sẽ nhận được từ thông trong mạch và từ áp trong lõi sắt cũng như trong khe hở không khí. Từ H.9.97 có thể thấy rằng, từ trở tuyến tính của khe hở không khí lớn, sẽ làm tuyến tính hóa đặc tuyến tổng hợp của mạch từ. Như vậy có thể tuyến tính hóa mạch từ bằng cách tăng dòng từ θ cần thiết cho lõi, để có được cùng một giá trị từ thông như trong trường hợp lõi không có khe hở không khí.

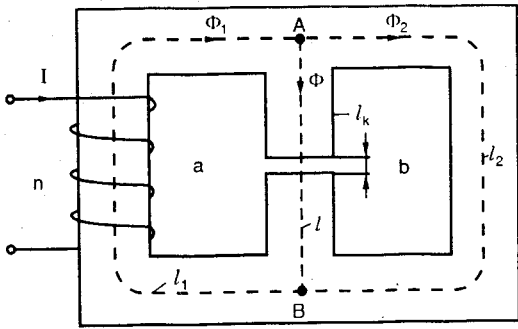


Hình 9.96: Giải hệ phương trình (9.177), (9.178) bằng phương pháp đồ thị

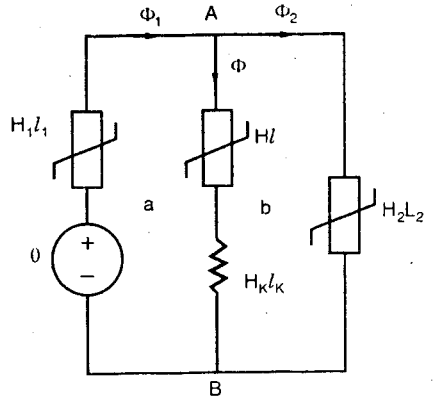


Hình 9.97: Đặc tuyến tổng hợp của mạch từ có khe hở không khí

Ví dụ 9.10. Bây giờ hãy xét mạch từ phân nhánh trên H.9.98. Cho biết trước đặc tuyến từ hóa $B(H)$ của sắt từ dùng làm lõi, tất cả các kích thước và tiết diện lõi S là như nhau đối với các đoạn lõi. Hãy xác định dòng từ θ để trong không khí có dòng từ thông Φ .



Hình 9.98: Mạch từ phân nhánh



Hình 9.99: Sơ đồ mạch tương đương của mạch từ trên hình 9.98

Giải. Mạch từ phân nhánh trên H.9.98 có sơ đồ tương đương như trên H.9.99. Khi đã biết từ thông Φ ta có thể xác định B_k và H_k của khe hở không khí theo các công thức sau

$$B_k = \frac{\Phi}{S_k} = \frac{\Phi}{1,15S}; H_k = \frac{B_k}{\mu_0}$$

Từ thông Φ trong đoạn lõi có độ dài l là như nhau, nên: $B_k S_k = BS$, từ đó ta có: $B = B_k S_k / S$.

Từ đặc tuyến $B(H)$ ta sẽ xác định được giá trị cường độ từ trường H tương ứng với từ cảm B . Từ áp giữa các điểm A, B là

$$U_{AB} = Hl + H_k l_k$$

trong mạch b ta có $U_{AB} = H_2 l_2$

Suy ra
$$H_2 = \frac{U_{AB}}{l_2}$$

Khi đã biết H_2 có thể xác định B_2 từ $B(H)$.

Từ thông trong đoạn lõi có độ dài l_2 : $\Phi_2 = B_2 S$

Từ thông trong đoạn lõi có độ dài l_1 : $\Phi_1 = \Phi + \Phi_2$

Từ cảm trong đoạn lõi có độ dài l_1 : $B_1 = \frac{\Phi_1}{S}$

Cường độ từ trường H_1 tương ứng với từ cảm B_1 xác định trên đặc tuyến $B(H)$

Trong mạch a ta có phương trình $\theta = H_1 l_1 + U_{AB}$

Đây chính là nghiệm cần tìm.

Trong trường hợp ngược lại, khi đã biết dòng từ θ và cần tìm từ thông Φ trong tất cả các đoạn từ, ta có thể xây dựng sơ đồ tương đương của mạch phân nhánh và có thể dùng phương pháp đồ thị để phân tích mạch *KTT* điện trở đã xét ở trên.

9.4.2 Mạch từ từ thông biến thiên

Trong mục trên ta đã xét mạch từ từ thông không đổi theo thời gian, nguồn sinh ra từ thông là dòng điện một chiều chảy trong cuộn dây quấn trên lõi sắt từ. Bây giờ ta sẽ xét mạch từ thông thay đổi theo thời gian, được tạo nên do dòng xoay chiều chảy qua cuộn dây có lõi. Hiện tượng vật lý xảy ra trong mạch tất nhiên sẽ khác và phức tạp hơn trong trường hợp trên. Từ thông biến thiên tuân theo định luật cảm ứng điện từ Faraday, sẽ cảm ứng lên cuộn dây và lõi sắt từ một sức từ động tỉ lệ với tốc độ biến đổi của từ thông theo thời gian (*STD*); *STD* cảm ứng lên cuộn dây là hiệu ứng có ích, còn *STD* cảm ứng lên lõi là nguồn dòng xoáy và tổn hao nhiệt không có ích, các tổn hao gây ra do dòng xoáy dẫn đến các tổn hao nhiệt là do hiện tượng từ trễ (sự quá từ của lõi).

Khi nói đến hệ phương trình Maxwell mô tả điện từ trường, là nói đến sự thay đổi của từ trường theo thời gian, sẽ đồng hành với điện trường được mô tả bởi phương trình

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.179)$$

Biểu thức (9.179) chính là biểu diễn toán học của định luật cảm ứng điện từ Faraday. Như đã biết từ vật lý, tích phân của vectơ \vec{E} dọc theo đường cong kín l giới hạn diện tích S , qua đó có từ thông biến thiên theo thời gian, sẽ bằng sức điện động cảm ứng dọc theo mạch này và được mô tả bằng phương trình

$$e = \oint_l \vec{E}_t \cdot d\vec{l} \quad (9.180)$$

trong đó \vec{E}_t - là thành phần tiếp tuyến của vectơ \vec{E} với đường l .

Theo định luật Stokes

$$\oint_B \vec{E}_t \cdot d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{E}_p \cdot d\vec{\sigma} \quad (9.181)$$

Khi chú ý đến (9.179)

$$e = - \iint_S \frac{\partial B_p}{\partial t} d\sigma = - \frac{d}{dt} \iint_S B_p d\sigma = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (9.182)$$

Nếu mạch được giới hạn bởi diện tích S , qua đó có từ thông, là một dây dẫn, thì sức điện động cảm ứng (SDD) theo (9.182) sẽ sinh ra dòng điện trong dây dẫn được xác định theo qui tắc Lenxơ. Nếu diện tích S là cuộn dây có n vòng quấn trên lõi thì sức điện động cảm ứng trong cuộn dây sẽ lớn hơn n lần, tức là

$$e = -n \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\psi}{dt} \quad (9.183)$$

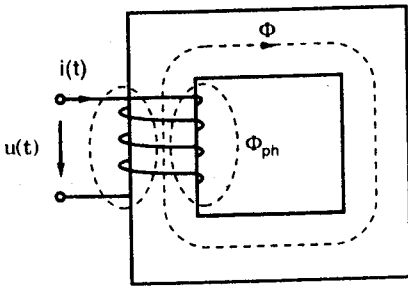
trong đó $\psi = n\Phi$ - là từ thông móc vòng.

Đồng thời với SDD cảm ứng đã xét trên dây, trong lõi cũng có hiện tượng tương tự xảy ra. Dưới ảnh hưởng của SDD cảm ứng, trong lõi sẽ có dòng xoáy, nó là nguồn gốc sinh ra tổn hao nhiệt. Tổn hao của dòng xoáy ở tần số thấp có thể tránh được khi lõi được làm bằng các vật liệu có điện trở suất lớn và được cách điện với nhau. Ở tần số cao người ta làm lõi bằng các vật liệu từ ferric có điện trở suất cao.

Sau đây ta sẽ xét một số mạch từ KTT -

1- Cuộn dây có lõi sắt từ (còn gọi là cuộn chặn, cuộn cản)

Hãy xét một mạch từ đơn giản, là cuộn dây n vòng được quấn trên lõi sắt từ, và trên nó có đặt điện áp thay đổi theo thời gian $u(t)$ với $t \in (-\infty, \infty)$ (H.9.100)



Hình 9.100: Cuộn chặn

Phương trình mô tả cuộn chặn

$$u = Ri + \frac{d\psi}{dt} \quad (9.184)$$

trong đó Ri - hạ áp trên điện trở dây quấn; $\frac{d\psi}{dt} = -e_i$ - là điện áp cảm ứng trong cuộn dây có biên độ bằng biên độ của SDD e_i nhưng có chiều ngược lại.

Từ thông móc vòng ψ bao gồm hai thành phần, từ thông móc vòng đóng kín trong lõi và từ thông phân bố đóng kín qua không khí, chúng được xác định theo biểu thức sau

$$\psi = n\Phi + n\Phi_{ph} \quad (9.185)$$

Từ thông phân bố trong không khí phụ thuộc tuyến tính vào dòng điện, do đó ta có thể viết

$$n\Phi_{ph} = L_{ph}i \quad (9.186)$$

trong đó L_{ph} - là điện cảm phân bố. Từ thông móc vòng toàn bộ

$$\psi = n\Phi + L_{ph}i \quad (9.187)$$

Khi lưu ý đến (9.187), thì phương trình của cuộn chặn (9.184) có thể viết lại dưới dạng

$$u = Ri + L_{ph} \frac{di}{dt} + n \frac{d\Phi}{dt} \quad (9.188)$$

trong đó $L_{ph} \frac{di}{dt}$ - hạ áp trên điện cảm phân bố; $n \frac{d\Phi}{dt} = u_L$ - hạ áp cảm ứng trong lõi do từ thông đóng kín qua lõi.

Phương trình của cuộn chặn (9.188) là phương trình vi phân *KTT*, nghiệm giải tích của nó dưới dạng tổng quát không thể tìm được. Khi chấp nhận một số giả thiết gần đúng với thực tế, ta có thể giải (9.188) một cách đơn giản hơn, và qua đó có thể giải thích được một số hiện tượng vật lý xảy ra trong cuộn chặn. Cụ thể là, ta có thể giả thiết điện áp trên điện trở dây quấn và trên điện cảm phân bố là rất nhỏ so với điện áp u_L .

$$R|i| \ll |u_L|; L_{ph} \left| \frac{di}{dt} \right| \ll |u_L| \quad (9.189)$$

và ở gần đúng bậc nhất ta có thể bỏ qua chúng. Giả thiết tiếp theo là điện áp đặt vào cuộn dây là điều hòa có dạng

$$u(t) = U_m \cos \omega t \quad (9.190)$$

Phương trình cuộn chặn khi chú ý đến các giả thiết trên sẽ là

$$U_m \cos \omega t = n \frac{d\Phi}{dt} \quad (9.191)$$

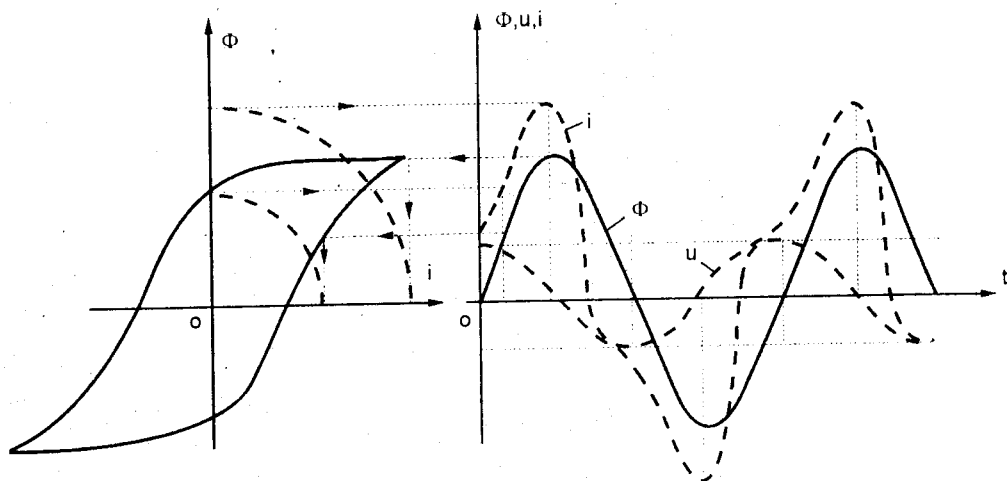
do đó

$$\Phi = \frac{U_m}{n\omega} \sin \omega t = \Phi_m \sin \omega t \quad (9.192)$$

$$\Phi_m = \frac{U_m}{2\pi fn} = \frac{U}{4,44fn} \quad (9.193)$$

Khi đã biết đường cong từ hóa động $B(H)$ của vật liệu sắt từ dùng làm lõi tương ứng với tần số f , ta có thể tạo ra đặc tuyến $\Phi(i)$, trong đó

$$\Phi = BS; \text{ và } i = \frac{Hl}{n} \quad (9.194)$$

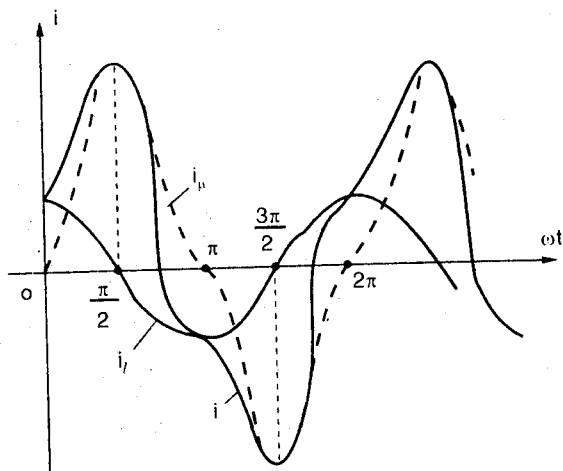


Hình 9.101: Xác định dòng điện trong cuộn chận bằng phương pháp đồ thị

Ta có thể xác định dòng điện trong cuộn chận bằng phương pháp đồ thị (xem H.9.101), khi chiếu từ thông biến thiên điều hòa theo (9.192) qua đặc tuyến $\Phi(i)$. Với từ thông biến thiên điều hòa, thì dòng điện $i(t)$ bị

méo dạng, các cực trị của dòng điện và từ thông xảy ra tại các thời điểm giống nhau, nhưng dòng đi qua giá trị zero sớm hơn từ thông. Điện áp nhanh pha so với từ thông một góc $\pi/2$, còn dòng thì trễ pha so với áp một góc $\pi/2$, điều đó chứng tỏ, bên cạnh năng lượng tích lũy trong cuộn dây còn có năng lượng tổn hao do dòng xoáy và hiện tượng từ trễ trong lõi.

Dòng điện bị méo dạng có



Hình 9.102: Các thành phần của dòng điện qua cuộn chận

thể được phân tích thành hai thành phần

1- Thành phần điều hòa i_l cùng pha với điện áp. Nó biểu thị tổn hao nhiệt toàn bộ trong lõi.

2- Thành phần từ hóa bị biến dạng i_μ tạo nên từ thông trong lõi cùng pha với nó (H.9.102).

$$\text{Do đó} \quad i = i_l + i_\mu \quad (9.195)$$

$$\text{trong đó} \quad i_l = I_{ml} \cos \omega t \quad (9.196)$$

$$i_\mu = I_{m\mu} \sin \omega t \quad (9.197)$$

$$\text{với} \quad I_{m\mu} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_{mk}^2} \quad (9.198)$$

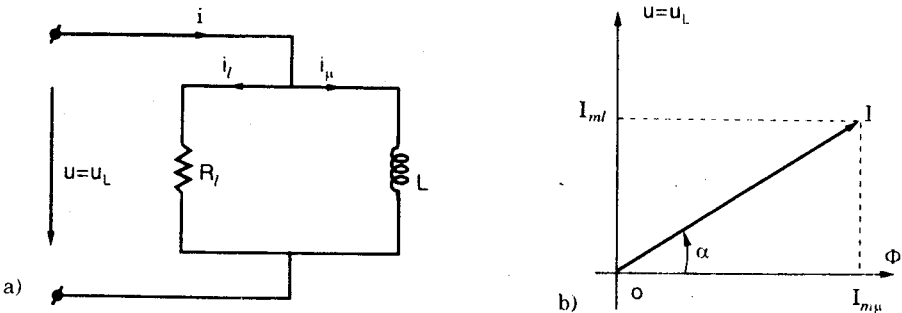
I_{mk} - là biên độ của hài thứ k trong khai triển Fourier của dòng i_μ .

Dòng điện tổng được gọi là dòng kích thích và ký hiệu là

$$i_\phi = i = i_l + i_\mu = I_{ml} \cos \omega t + I_{m\mu} \sin \omega t = I_{m\phi} \sin(\omega t + \alpha) \quad (9.199)$$

$$\text{trong đó} \quad I_{m\phi} = \sqrt{I_{ml}^2 + I_{m\mu}^2}; \quad \text{và: } \alpha = \arctg \frac{I_{ml}}{I_{m\mu}}$$

Với các giả thiết làm đơn giản hóa bài toán ở trên, ta có thể tạo ra sơ đồ tương đương cho cuộn chặn trên H.9.103a và đồ thị vectơ của các thành phần dòng điện trong nó trên H.9.103b.



Hình 9.103

Công suất tác dụng tổn hao do nhiệt trong lõi

$$P_l = p_l G = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI = R_l I^2 = \frac{U^2}{R_l}$$

trong đó p_l - công suất tổn hao đơn vị trong lõi (w/KG);

G - trọng lượng của lõi (KG); R_l - điện trở của lõi

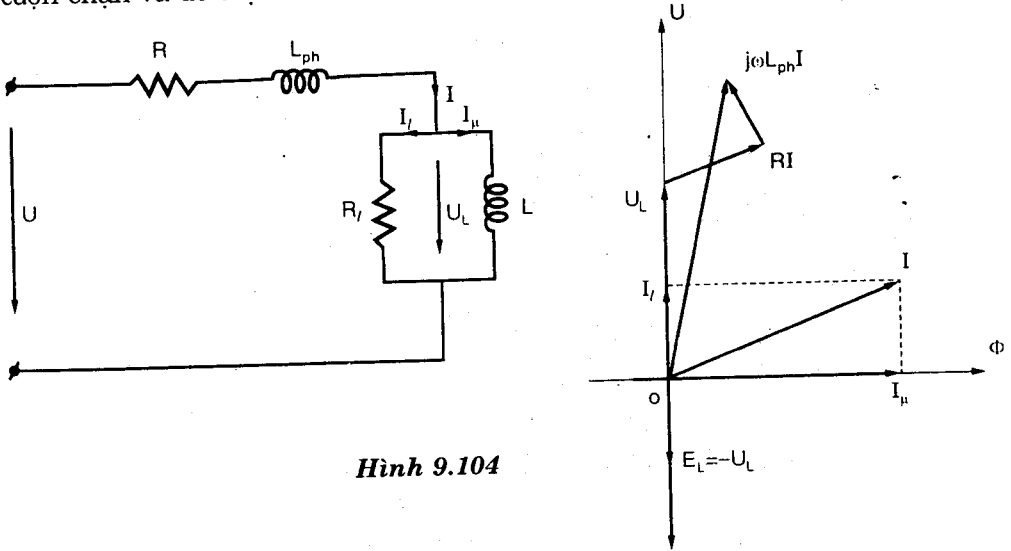
Kết quả nhận được với $R = 0$; $L_{ph} = 0$ có thể khái quát hóa ở mức độ

gần đúng nào đó với trường hợp cuộn chặn mô tả bởi (9.188). Khi sử dụng phương trình (9.194) có thể viết lại (9.188) dưới dạng phức

$$\dot{U} = R\dot{I} + j\omega L_{ph}\dot{I} + \dot{U}_L \tag{9.200}$$

với giả thiết $R|\dot{I}| \ll |\dot{U}_L|$; $\omega L_{ph}|\dot{I}| \ll |\dot{U}_L|$

Phương trình (9.200) với các kết quả nhận được khi không kể đến hiện tượng phân bố và tổn hao trong lõi, cho phép ta vẽ sơ đồ tương đương của cuộn chặn và đồ thị vectơ của các thành phần dòng điện trong nó (H.9.104).



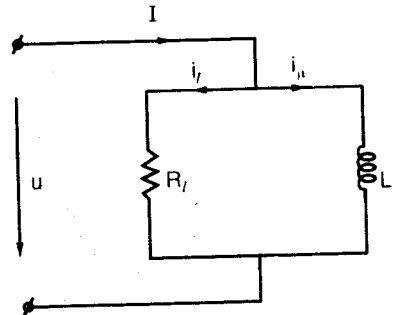
Hình 9.104

Giá trị hiệu dụng của dòng tổn hao và dòng từ hóa được tính theo các công thức sau

$$I_{lhd} = \sqrt{\frac{P_l}{R_l}} = \frac{P_l}{U_{hd}}; I_{\nu hd} = \frac{U_{Lhd}}{\omega L} \approx \frac{U_{hd}}{\omega L}; L \approx \frac{U}{\omega I_{\nu hd}} \tag{9.201}$$

Ví dụ 9.11. Cho cuộn chặn có sơ đồ tương đương trên H.9.105 và các thông số đặc trưng như sau

- Số vòng dây $n = 5000$;
- Tiết diện lõi $S = 4 \text{ [cm}^2\text{]}$;
- Công suất tổn hao trong lõi $P_l = 25 \text{ [W]}$;
- Điện cảm của cuộn chặn $L = 15 \text{ [H]}$;
- Điện trở của lõi $R_l = 1 \text{ [K}\Omega\text{]}$;
- Tần số làm việc $f = 400 \text{ Hz}$;



Hình 9.105

Hãy xác định bề rộng cần thiết của khe hở của lõi để điện cảm của lõi nhỏ đi 5 lần.

Giải. Cuộn chặn không có khe $P = U_{hd}^2 / R_l$

Suy ra $U_{hd} = \sqrt{P_l R_l} = 158 [V]$

Giá trị hiệu dụng của dòng từ hóa

$$I_{\mu hd1} = \frac{U_{hd}}{\omega L} = \frac{U_{hd}}{2\pi f L} = 4,2 [mA]$$

Giả thiết rằng dòng từ hóa là điều hòa, nên

$$\theta_1 = Hl = I_{\mu hd1} \cdot n = 21 [Av] (*)$$

Cuộn chặn có khe hở

$$I_{\mu hd2} = 5I_{\mu hd1} = 21 [mA]; \theta_2 = I_{\mu hd2} \cdot n = 105 [Av]$$

Theo định luật về dòng từ

$$\theta_2 = Hl + H_k l_k = 105 [Av] (**)$$

Trừ các vế của hai phương trình (*) và (**) ta được

$$\theta_2 - \theta_1 = H_k l_k = 84 [Av]$$

Suy ra

$$l_k = \frac{84 [Av]}{H_k}$$

Cường độ của từ trường trong khe hở H_k được xác định như sau

Giá trị hiệu dụng của từ thông trong lõi

$$\Phi_{hd} = \frac{U_{hd}}{\sqrt{2} \cdot 4,44 f n} = 12,6 \cdot 10^{-6} [wb]$$

Từ cảm trong lõi $B = \frac{\Phi_{hd}}{S} = \frac{12,6 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-4}} = 3,15 \cdot 10^{-2} [wb/m^2]$

Từ cảm trong khe hở không khí

$$B_k = \frac{B}{1,15} = 2,73 \cdot 10^{-2} [wb/m^2]$$

Cường độ từ trường trong không khí

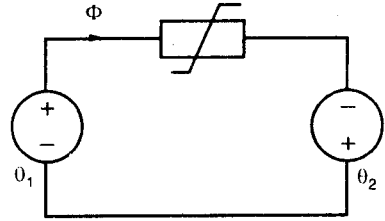
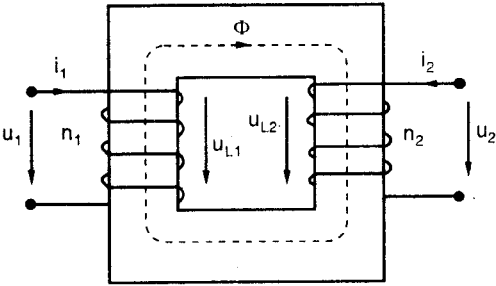
$$H_k = \frac{B_k}{\mu_0} = \frac{2,73 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 2,17 \cdot 10^4 [A/m]$$

$$l_k = \frac{\theta_2 - \theta_1}{H_k} = \frac{84}{2,17 \cdot 10^4} = 3,9 [mm]$$

2- Biến áp có lõi sắt từ

Nếu trên lõi sắt từ quấn hai cuộn dây, thì ta sẽ có một biến áp đơn giản (H.9.106). Giả thiết rằng các cuộn dây được quấn để sao cho từ thông

trong lõi do các dòng: $\theta_1 = i_1 n_1$ và $\theta_2 = i_2 n_2$ - là tổng của các thành phần (H.9.107).



Hình 9.106: Biến áp có lõi sắt

Hình 9.107: Sơ đồ tương đương của biến áp có lõi

Tương tự như đối với cuộn chẵn, phương trình của biến áp có thể viết

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \tag{9.202}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} \tag{9.203}$$

trong đó R_1, R_2 - là điện trở dây quấn, ψ_1, ψ_2 - là từ thông trong các cuộn dây.

Nếu xét cả từ thông phân tán trong không khí

$$\psi_1 = n_1 \Phi_{ph1} + n_1 \Phi = L_{ph1} \frac{di_1}{dt} + n_1 \Phi \tag{9.204}$$

$$\psi_2 = n_2 \Phi_{ph2} + n_2 \Phi = L_{ph2} \frac{di_2}{dt} + n_2 \Phi \tag{9.205}$$

Từ các phương trình (9.202) và (9.203) ta có

$$u_1 = R_1 i_1 + L_{ph1} \frac{di_1}{dt} + u_{L1} \tag{9.206}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_{ph2} \frac{di_2}{dt} + u_{L2} \tag{9.207}$$

trong đó
$$u_{L1} = n_1 \frac{d\Phi}{dt}; u_{L2} = n_2 \frac{d\Phi}{dt} \tag{9.208}$$

Các phương trình (9.206), (9.207) chỉ có thể giải gần đúng khi áp

dụng phương pháp giải tích như đối với cuộn chặn.

Giả thiết rằng trên các cực sơ cấp của biến áp có đặt nguồn áp điều hòa

$$u_1(t) = U_{m1} \cos \omega t$$

Nếu bỏ qua tổn hao và điện cảm phân bố của lõi phía sơ cấp thì phương trình phía sơ cấp sẽ là

$$u_1 = u_{L1} = n_1 \frac{d\Phi}{dt} = U_{m1} \cos \omega t \quad (9.209)$$

Nghiệm của phương trình (9.209)

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t \quad (9.210)$$

trong đó

$$\Phi_m = \frac{U_{1hd}}{4.44fn_1} \quad (9.211)$$

Như vậy nếu điện áp bên sơ cấp là điều hòa, thì từ thông trong lõi sẽ trễ pha so với áp một góc $\pi/2$ và không phụ thuộc phía thứ cấp của biến áp. Nếu bên thứ cấp hở mạch ($i_2 = 0$), thì biến áp sẽ trở thành cuộn chặn

$$i_1 = i_\varphi = i_l + i_\mu \quad (9.212)$$

Biên độ phức của chúng

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_\varphi = \dot{I}_l + \dot{I}_\mu \quad (9.213)$$

Tỉ số biến áp bên sơ cấp và thứ cấp theo định nghĩa

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_1}{n_2} = n; \quad \text{hay} \quad \frac{u_1}{u_2} = n \quad (9.214)$$

Trong đó n là tỉ số vòng dây của biến áp. Sức từ động đặt vào lõi

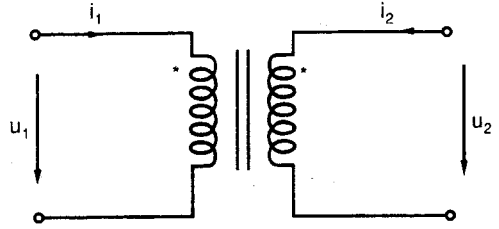
$$e_M = n_1 i_\varphi \quad (9.215)$$

Nếu bên thứ cấp có tải ($i_2 \neq 0$) và với giả thiết: $R_2 = 0, L_{ph2} = 0$, thì điện áp bên thứ cấp sẽ là

$$u_2 = u_{L2} = n_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (9.216)$$

Tỉ số điện áp bên sơ cấp và thứ cấp

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{n_1}{n_2} = n; \quad \text{hay} \quad \frac{u_1}{u_2} = n \quad (9.217)$$



Hình 9.108: Sơ đồ bốn cực của biến áp có lõi sắt

Như vậy khi biến áp có tải, tỉ số điện áp, từ thông trong lõi và sức từ động đặt vào lõi vẫn không đổi so với trường hợp biến áp không tải.

Sức từ động được xác định theo công thức (xem H.9.107)

$$e_M = i_1 n_1 + i_2 n_2 \quad (9.218)$$

Dựa vào các kết quả nhận được ở trên

$$i_1 n_1 + i_2 n_2 = i_\varphi n_1 \quad (9.219)$$

Như vậy sự có mặt của dòng thứ cấp sẽ làm cho dòng sơ cấp khác với i_φ , tức là do thành phần dòng tải i_l là hiệu của dòng sơ cấp có tải và không tải

$$i_1 = i_\varphi + i'_1 \quad (9.220)$$

khi thay (9.220) vào (9.219) ta có

$$i'_1 n_1 + i_2 n_2 = 0$$

hay là

$$\frac{i'_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1} = -\frac{1}{n} \quad (9.221)$$

tương tự có thể viết cho các biên độ phức

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_\varphi + \dot{I}'_1; \quad \frac{\dot{I}'_1}{\dot{I}_2} = -\frac{1}{n}$$

Các kết quả nhận được đối với trường hợp không kể đến điện cảm phân bố và tổn hao của dây quấn, có thể khái quát hóa cho trường hợp biến áp có điện trở dây quấn nhỏ và điện cảm phân bố nhỏ.

Tương tự như đối với cuộn chặn, có thể đưa ra các thành phần của dòng méo dạng của i_1, i_2 và phương trình vi phân của biến áp dưới dạng phức

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_{ph1} \dot{I}_1 + \dot{U}_{L1} \quad (9.222)$$

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_{ph2} \dot{I}_2 + \dot{U}_{L2} \quad (9.223)$$

Trong đó các thành phần điều hòa được biểu diễn bởi các vectơ \dot{I}_1, \dot{I}_2 với các giả thiết

$$R_1 = R_2 = 0; \quad L_{ph1} = L_{ph2} = 0$$

Phương trình mô tả biến áp sẽ đúng với biến áp thực tế nếu các điều kiện sau đây thỏa mãn

$$R_1 |\dot{I}_1| \ll |\dot{U}_{L1}|; \quad \omega L_{ph1} |\dot{I}_1| \ll |\dot{U}_{L1}|$$

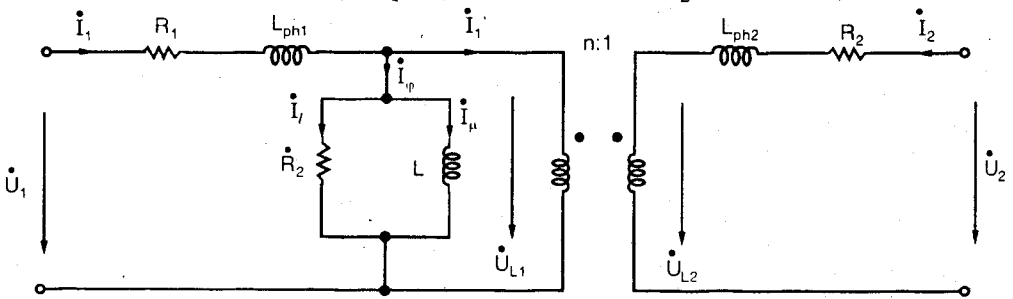
$$R_2 |\dot{I}_2| \ll |\dot{U}_{L2}|; \omega L_{ph2} |\dot{I}_2| \ll |\dot{U}_{L2}| \quad (9.224)$$

Có nghĩa là hạ áp trên điện trở dây quấn và điện cảm phân bố nhỏ so với hạ áp trên điện cảm.

Khi có các phương trình (9.222), (9.223) và các biểu thức về quan hệ giữa điện áp và dòng điện sơ cấp và thứ cấp

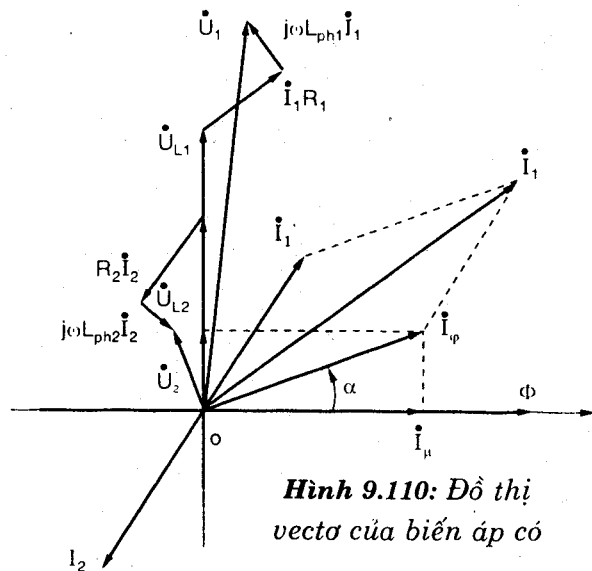
$$\frac{\dot{U}_{L1}}{\dot{U}_{L2}} = n; \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\frac{1}{n}; \quad \dot{U}_1 \approx \dot{U}_{L1}; \quad \dot{U}_2 \approx \dot{U}_{L2} \quad (9.225)$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_\varphi + \dot{I}'_1; \quad \dot{I}_\varphi = \dot{I}_l + \dot{I}_\mu; \quad \dot{U}_2 = -Z_2 \dot{I}_2$$



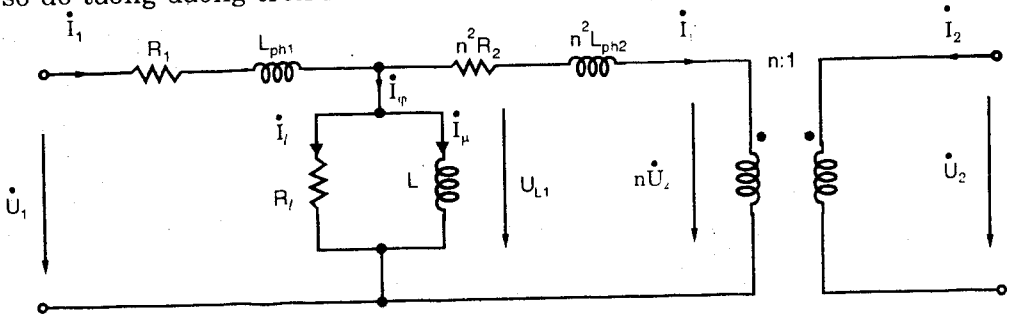
Hình 9.109

trong đó Z_2 - là trở kháng phía thứ cấp, ta có thể tạo nên sơ đồ tương đương đầy đủ của biến áp (H.9.109) và đồ thị vectơ trên H.9.110.



Hình 9.110: Đồ thị vectơ của biến áp có

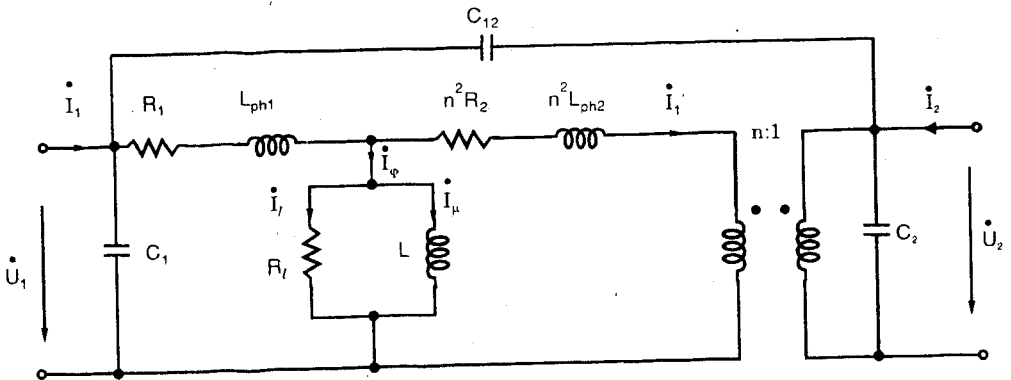
Khi áp dụng lý thuyết bốn cực về các tính chất của biến áp lý tưởng, sơ đồ tương đương trên H.9.109 có thể đưa về dạng trên H.9.111.



Hình 9.111: Sơ đồ tương đương của biến áp qui về sơ cấp

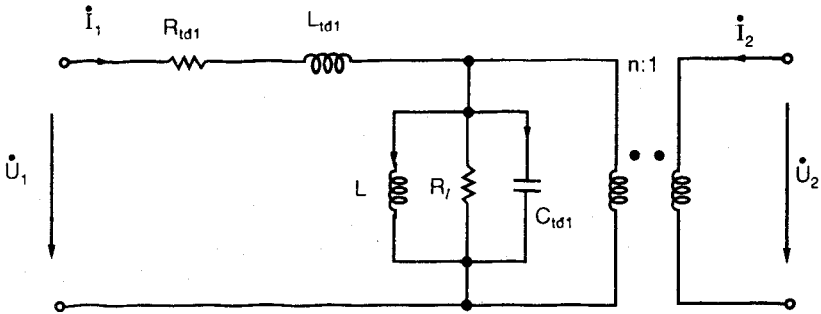
Trong quá trình xét biến áp trên đây, ta đã bỏ qua điện dung ký sinh của biến áp. Đó là điện dung giữa các vòng dây quấn và giữa hai cuộn dây.

Ảnh hưởng của chúng sẽ trở nên đáng kể ở phạm vi tần số cao. Sơ đồ tương đương của biến áp khi kể đến các điện dung ký sinh giữa các vòng dây C_1 , C_2 và điện dung giữa các cuộn dây C_{12} được biểu diễn trên H.9.112.



Hình 9.112: Sơ đồ tương đương của biến áp khi kể đến các điện dung ký sinh

Trong thực tế, người ta thường dùng sơ đồ tương đương đơn giản hơn, với giả thiết dòng I_ϕ được bỏ qua so với dòng thành phần I_1 của I_1 khi biến áp có tải, và chỉ sử dụng một điện dung tương đương C_{td1} (H.9.113).



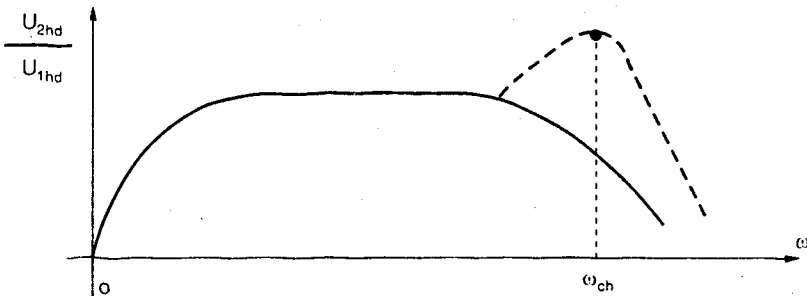
Hình 9.113: Sơ đồ tương đương đơn giản của biến áp

Các phần tử của sơ đồ tương đương trên H.9.113 được xác định theo các công thức sau

$$R_{td1} = R_1 + n^2 R_2; \quad L_{td1} = L_{ph1} + n^2 L_{ph2} \quad (9.226)$$

$$C_{td1} = C_1 + \frac{C_2^2}{n^2} + \frac{C_{12}}{n^2} (1+n)^2$$

Ảnh hưởng không mong muốn của các điện dung ký sinh được biểu diễn qua tụ C_{td1} , nó có thể được xác định khi đo tỉ số giữa các trị hiệu dụng của điện áp sơ cấp và thứ cấp của biến áp ở các tần số khác nhau của điện áp sin đặt bên sơ cấp.



Hình 9.114: Sự thay đổi của tỉ số điện áp thứ cấp và sơ cấp theo tần số

Đồ thị của tỉ số này được cho trên H.9.114 như có thể thấy là hàm của $\omega(0, \infty)$. Ảnh hưởng của tụ điện C_{td1} sẽ đặc biệt quan trọng ở vùng tần số cao, khi mà trở kháng

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C_{td1}} \quad (9.227)$$

trở nên rất nhỏ và bắt đầu ngắn mạch phía sơ cấp của biến áp - ở lân cận tần số

$$\omega_{ch} = \frac{1}{\sqrt{C_{td1}L_{td1}}} \quad (9.228)$$

Còn có thể xảy ra cộng hưởng nối tiếp trên biến áp.

Ví dụ 9.12. Xét biến áp có tỉ số vòng dây quấn $n = 10$. Dựa vào kết quả đo các biên độ điện áp, dòng điện, và công suất tác động phía sơ cấp, hãy xác định các thông số của sơ đồ tương đương của biến áp trên

H.9.111. Cho biết $|\dot{U}_{1h}| = 100 [V]$; $|\dot{I}_{1h}| = 0,1 [A]$; $P_{1h} = 0,5 [W]$

$$|\dot{U}_{1n}| = 50 [V]; |\dot{I}_{1n}| = 0,8 [A]; P_{1n} = 1 [W]$$

Với giả thiết

- Ở trạng thái hở mạch của thứ cấp, bỏ qua hạ áp trên R_1 và L_{ph1}
- Ở trạng thái ngắn mạch phía thứ cấp, bỏ qua dòng kích thích I_ϕ
- $R_1 = n^2 R_2$; $L_{ph1} = n^2 L_{ph2}$; $f = 50 [Hz]$

Giải. Ở trạng thái hở mạch thứ cấp, khi chú ý đến giả thiết đầu tiên, có thể viết

$$P_{1h} = \frac{1}{2} \frac{|\dot{U}_{1h}|^2}{R_l}$$

Suy ra
$$R_l = \frac{|\dot{U}_{1h}|^2}{2P_{1h}} = 10 [K\Omega]$$

Biên độ dòng điện trên điện trở của lõi R_l

$$|\dot{I}_l| = \frac{|\dot{U}_{1h}|}{R_l} = 10 [mA]$$

Bởi vì ở trạng thái hở mạch thứ cấp $I'_1 = 0$, nên $I_\phi = I_{1h}$

Biên độ dòng từ hóa

$$|\dot{I}_\mu|^2 = |\dot{I}_{1h}|^2 - |\dot{I}_l|^2 = 10^{-2} - 10^{-4} \approx 10^{-2}$$

Một cách gần đúng ta được

$$|\dot{I}_\mu| = |\dot{I}_{1h}| = 0,1 [A]$$

Bởi vì $\omega L |\dot{I}_\mu| = |\dot{U}_{1h}|$

nên
$$L = \frac{|\dot{U}_{1h}|}{\omega |\dot{I}_\mu|} = 3,2 \text{ [H]}$$

Ở trạng thái ngắn mạch thứ cấp, dựa vào giả thiết thứ hai và ba ta có

$$P_{1n} = \frac{1}{2} |\dot{I}_{1n}|^2 (R_1 + n^2 R_2) = |\dot{I}_{1n}|^2 R_1$$

Suy ra
$$R_1 = \frac{P_{1n}}{|\dot{I}_{1n}|^2} = 1,6 \text{ [\Omega]}; R_2 = \frac{R_1}{n^2} = 0,016 \text{ [\Omega]}$$

Bởi vì ở trạng thái ngắn mạch thứ cấp: $\dot{I}_\phi = 0$, tức là: $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1n}$
Còn tổng các hạ áp trên các điện trở lõi và điện cảm phân bố là

$$\dot{U}_{1n} = \dot{I}_{1n} [(R_1 + n^2 R_2) + j\omega(L_{ph1} + n^2 L_{ph2})]$$

nên dựa vào giả thiết ba ta có

$$|\dot{U}_{1n}|^2 = |\dot{I}_{1n}|^2 [(2R_1)^2 + \omega^2 (2L_{ph1})^2]$$

suy ra
$$L_{ph1}^2 = \frac{|\dot{U}_{1n}|^2 - 4|\dot{I}_{1n}|^2 R_1^2}{4\omega^2 |\dot{I}_{1n}|^2} = 0,00987$$

và
$$L_{ph1} = 0,1 \text{ H} = 100 \text{ [mH]}; L_{ph2} = \frac{L_{ph1}}{n^2} = 1 \text{ [mH]}$$

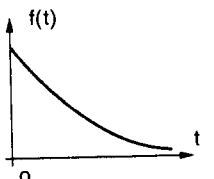
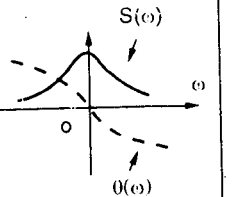
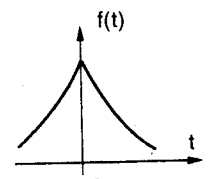
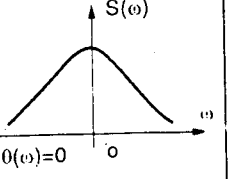
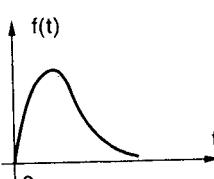
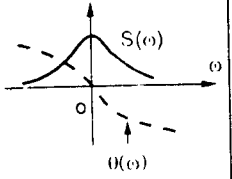
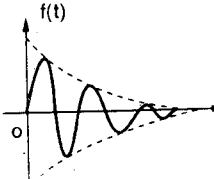
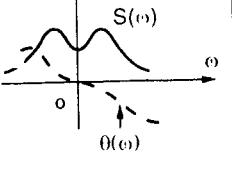
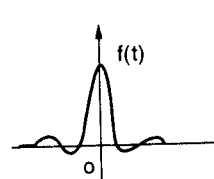
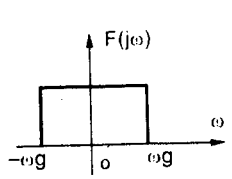
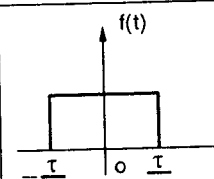
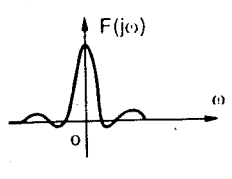
Phụ lục 1: BIẾN ĐỔI LAPLACE CỦA MỘT SỐ HÀM

	Hàm $f(t)$	Biến đổi Laplace của $f(t)$
1	1	$1/s$
2	t	$1/s^2$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	e^{-at}	$1/(s+a)$
5	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
6	$\frac{1}{a_2 - a_1}(e^{-a_1 t} - e^{-a_2 t})$	$\frac{1}{(s+a_1)(s+a_2)}$
7	$\frac{1}{a_1 - a_2}(a_1 e^{-a_1 t} - a_2 e^{-a_2 t})$	$\frac{s}{(s+a_1)(s+a_2)}$
8	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}; n=0, 1, 2, \dots$
9	$\frac{1}{a^2}(e^{-t} + at - 1)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
10	$\frac{1}{a^2}[1 - (1+at)e^{-at}]$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
11	$(1-at)e^{-at}$	$s/(s+a)^2$
12	$\sin \omega t$	$\omega/(s^2 + \omega^2)$
13	$\cos \omega t$	$s/(s^2 + \omega^2)$
14	$e^{-at} \sin \omega t$	$\omega/(s+a)^2 + \omega^2$

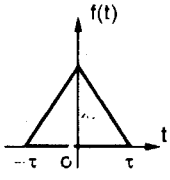
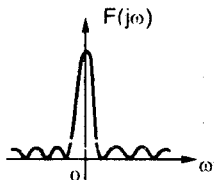
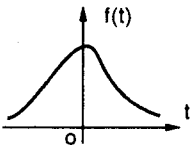
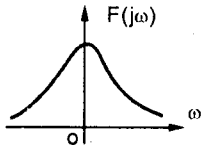
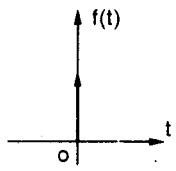
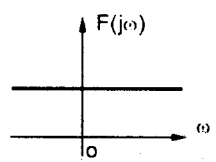
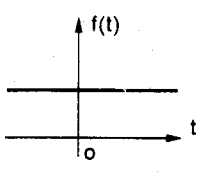
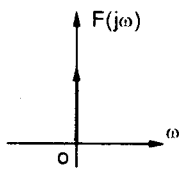
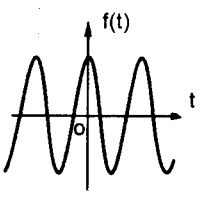
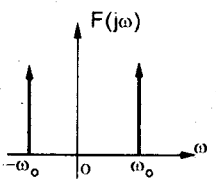
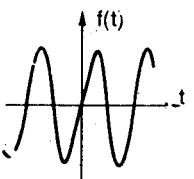
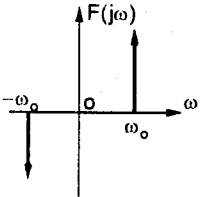
(tiếp theo) Phụ lục 1

	Hàm $f(t)$	Biến đổi Laplace của $f(t)$
15	$e^{-at} \cos \omega t$	$(s+a)/[(s+a)^2 + \omega^2]$
16	$\frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$	$\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$
17	$t \sin \omega t$	$2\omega s / (s^2 + \omega^2)^2$
18	$t \cos \omega t$	$(s^2 - \omega^2) / (s^2 + \omega^2)^2$
19	$\frac{\omega_1 \sin \omega_2 t - \omega_2 \sin \omega_1 t}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$	$\frac{\omega_1 \omega_2}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
20	$\frac{\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
21	$\frac{\omega_1 \sin \omega_1 t - \omega_2 \sin \omega_2 t}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
22	$\frac{\omega_1^2 \cos \omega_1 t - \omega_2^2 \cos \omega_2 t}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$	$\frac{s^3}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
23	$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\arctg \frac{\omega}{s}$
24	$Si(\omega t) = \int_0^t \frac{\sin \omega \tau}{\tau} d\tau$	$\frac{1}{s} \arctg \frac{\omega}{s}$
25	e^{-at^2}	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{s^2}{4a}} \operatorname{Erf} \left(\frac{s}{\sqrt{2\sqrt{a}}} \right)$ với $\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$

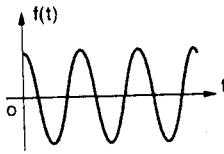
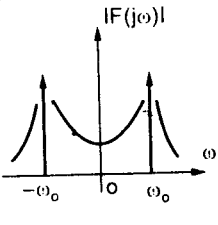
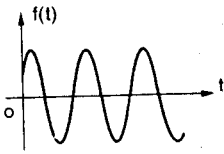
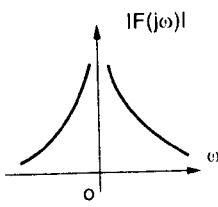
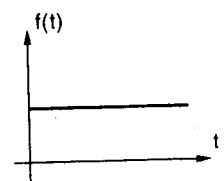
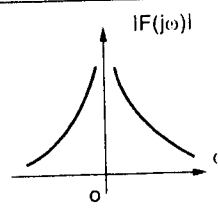
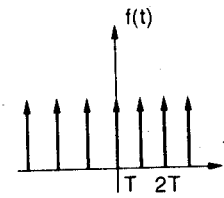
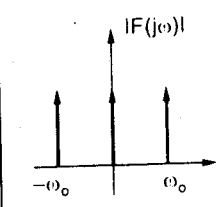
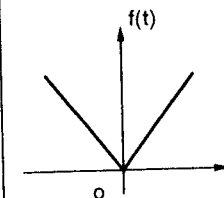
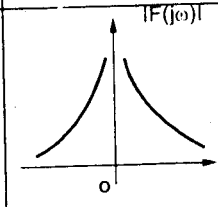
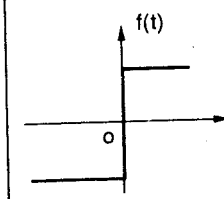
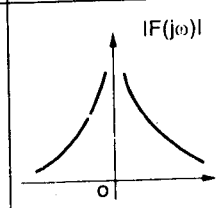
Phụ lục 2: PHỔ CỦA MỘT SỐ HÀM

TT	TÍN HIỆU $f(t)$		PHỔ $F[f(t)] = F(j\omega)$	
1	$I(t)e^{-\alpha t}$		$\frac{I}{j\omega + \alpha}$	
2	$e^{-\alpha t }$		$\frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$	
3	$I(t)te^{-\alpha t}$		$\frac{I}{(j\omega + \alpha)^2}$	
4	$I(t)e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$		$\frac{\omega_0 I}{(j\omega + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	
5	$\frac{\sin \omega_g \frac{t}{2}}{\omega_g \frac{t}{2}}$		$\frac{\pi}{\omega_g}$; với: $ \omega < \omega_g$ 0; với: $ \omega > \omega_g$	
6	1 với $ t < \frac{\tau}{2}$ 0 với $ t > \frac{\tau}{2}$		$\tau \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}$	

(tiếp theo) **Phụ lục 2**

TT	TÍN HIỆU $f(t)$	PHỔ $F(j\omega) = F(j\omega)$	
7	$1 - \frac{ t }{\tau}; \text{ với } t < \frac{\tau}{2}$ $0; \text{ với } t > \frac{\tau}{2}$ 	$\tau \left[\frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}} \right]^2$ 	
8	$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ 	$\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}$ 	
9	$\delta(t)$ 	1 	
10	1 	$2\pi\delta(\omega)$ 	
11	$\cos \omega_0 t$ 	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ 	
12	$\sin \omega_0 t$ 	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ 	

(tiếp theo) **Phụ lục 2**

TT	TÍN HIỆU $f(t)$	PHỔ $F[f(t)] = F(j\omega)$	
13	$I(t) \cos \omega_0 t$		$\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ 
14	$I(t) \sin \omega_0 t$		$\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ 
15	$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{với } t > 0 \\ 0 & \text{với } t < 0 \end{cases}$		$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ 
16	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$		$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0)$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 
17	$ t $		$-\frac{2}{\omega^2}$ 
18	$sign(t)$		$\frac{2}{j\omega}$ 

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. David E. Johnson - Johnny R. Johnson - John L. Hilburn, *Electric Circuit Analysis*, Nhà xuất bản Prentice - Hall, 1989.
2. J. David Irwin, *Basic Engineering Circuit Analysis*, Nhà xuất bản Prentice - Hall, 1996.
3. Joseph A. Edminister, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Electric Circuit*. Nhà xuất bản McGraw - Hill: 1965.
4. K.F. Sander, *Electric Circuit Analysis*, Nhà xuất bản Addison - Wesley, 1992.
5. Leon O.Chua - Pen - Min Lin, *Computer - Aided Analysis of Electronic Circuits*. Nhà xuất bản Prentice - Hall, 1975.
6. Leon O.Chua - Charles A. Desoer - Ernest S. Kuh, *Linear and Nonlinear Circuits*, Nhà xuất bản McGraw Hill; 1987.
7. Nannapaneni Narayana Rao, *Elements of Engineering Electromagnetics*, Nhà xuất bản Prentice - Hall, 1987.
8. Nguyễn Bình Thành - Nguyễn Trần Quân - Phạm Khắc Chương, *Cơ sở lý thuyết mạch*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1992.
9. Nguyễn Quân, *Lý thuyết mạch*, Trường Đại học Bách Khoa - ĐHQG TP.HCM, 1994.
10. Phương Xuân Nhân - Hồ Anh Túy, *Lý thuyết mạch*, Nhà xuất bản Khoa học Kỹ thuật, 1993.

MẠCH ĐIỆN II

Phạm Thị Cư (Chủ biên)

Lê Minh Cường, Trương Trọng Tuấn Mỹ

NHÀ XUẤT BẢN

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH

KP 6, P. Linh Trung, Q. Thủ Đức, TPHCM

Số 3 Công trường Quốc tế, Q.3, TPHCM

ĐT: 38239172, 38239170

Fax: 38239172; Email: vnuhp@vnuhcm.edu.vn

☆☆☆

Chịu trách nhiệm xuất bản

TS HUỖNH BÁ LÂN

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm về tác quyền

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA – ĐHQG TPHCM

Biên tập

TRẦN VĂN THẮNG

NGUYỄN HUỖNH

Sửa bản in

NGUYỄN TIẾN NAM

Trình bày bìa

TRƯƠNG NGỌC TUẤN

In tái bản 3.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm

Số đăng ký KHXB: 211-2009/CXB/226-12/ĐHQG-TPHCM

Quyết định xuất bản số: 481/QĐ-ĐHQG-TPHCM/TB

ngày 27/10/2009 của Nhà Xuất bản ĐHQG TPHCM

In tại Xưởng in Đại học Bách khoa - ĐHQG TP.HCM

Nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2009.