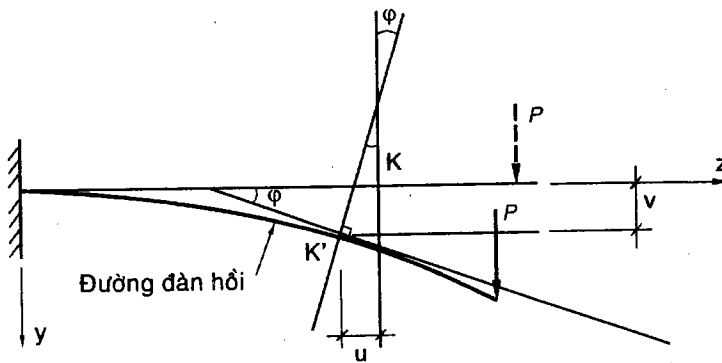


## CHUYỂN VỊ CỦA DẦM CHỊU UỐN

### 8.1 KHÁI NIỆM CHUNG

Khi tính một dầm chịu uốn ngang phẳng, ngoài điều kiện bền ta còn phải chú ý đến điều kiện cứng. Vì vậy, ta phải xét đến biến dạng của dầm. Dưới tác dụng của các nguyên nhân ngoài, trục dầm bị uốn cong, trục cong này được gọi là *đường đàn hồi* của dầm sau khi chịu lực (H.8.1).



Hình 8.1

Xét một điểm  $K$  nào đó trên trục dầm trước khi biến dạng. Sau khi dầm bị biến dạng, điểm  $K$  sẽ di chuyển đến vị trí mới  $K'$ . Khoảng cách  $KK'$  được gọi là *chuyển vị thẳng* của điểm  $K$ . Chuyển vị này có thể phân làm hai thành phần:

*Thành phần  $v$  vuông góc với trục dầm (song song với trục  $y$ ) gọi là chuyển vị đứng hay độ võng của điểm  $K$ .*

*Thành phần  $u$  song song với trục dầm (song song với trục  $z$ ) gọi là chuyển vị ngang của điểm  $K$ .*

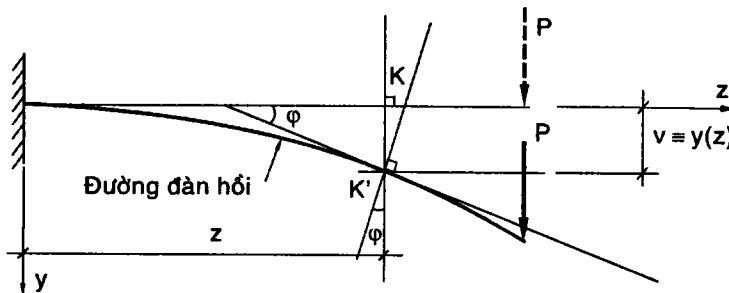
Ngoài ra ta còn thấy, sau khi trục dầm bị biến dạng, mặt cắt ngang ở  $K$  bị xoay đi một góc  $\varphi$ , được gọi là *chuyển vị góc* (hay là *góc xoay*) của mặt cắt ngang ở điểm  $K$ . Dễ dàng thấy rằng, góc xoay  $\varphi$  chính bằng góc giữa trục chưa biến dạng của dầm và tiếp tuyến ở điểm  $K$  của đường đàn hồi (H.8.1).

Ba đại lượng  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$  là ba thành phần chuyển vị của mặt cắt ngang ở điểm  $K$ . Chúng ta sẽ xác định các chuyển vị đó.

Trong điều kiện chuyển vị của dầm là bé thì thành phần chuyển vị ngang  $u$  là một đại lượng vô cùng bé bậc hai so với  $v$ , do đó ta có thể bỏ qua chuyển vị  $u$  và xem  $KK'$  là bằng  $v$ , nghĩa là vị trí  $K'$  sau khi biến dạng nằm trên đường vuông góc với trục dầm trước biến dạng (H.8.2).

Góc xoay  $\varphi$  có thể lấy gần đúng:

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{dv}{dz}$$



Hình 8.2

Nếu chọn trục dầm là  $z$ , trục  $y$  vuông góc với trục dầm như đã chọn ở những chương trước thì chuyển vị  $v$  chính là tung độ  $y$  của điểm  $K'$ . Tung độ  $y$  còn được gọi là *độ võng của điểm K*. Ta thấy rõ nếu  $K$  có hoành độ  $z$  so với gốc nào đó thì các chuyển vị  $y$ ,  $\varphi$  cũng là những hàm số của  $z$  và ta có phương trình đàn hồi là:

$$y(z) = v(z)$$

Phương trình của góc xoay sẽ là:  $\varphi(z) = \frac{dv}{dz} = \frac{dy}{dz} = y'(z)$

nghĩa là, phương trình của góc xoay là đạo hàm của phương trình đường đàn hồi.

*Quy ước dấu của chuyển vị:*

- Độ võng  $y$  dương nếu hướng xuống.
- Góc xoay  $\varphi$  dương nếu quay từ trục  $z$  đến tiếp tuyến của đường đàn hồi tại điểm khảo sát là thuận chiều kim đồng hồ.

*Điều kiện cứng:* Trong kỹ thuật, khi tính toán dầm chịu uốn, người ta thường khống chế độ võng lớn nhất của dầm không được vượt qua một giới hạn nhất định để đảm bảo yêu cầu về sự làm việc, mỹ quan của công trình... điều kiện này được gọi là điều kiện cứng. Nếu gọi  $f$  là độ võng lớn nhất của dầm thì điều kiện cứng thường chọn là:

$$\left[ \frac{f}{L} \right] = \frac{1}{300} \div \frac{1}{1000}$$

trong đó  $L$  là chiều dài nhịp dầm.

Tùy loại công trình mà người ta quy định cụ thể trị số của  $[f/L]$ .

## 8.2 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

Trong chương 7 (công thức 7.1) ta đã lập được mối liên hệ giữa độ cong của trục dầm sau khi biến dạng với mômen uốn nội lực là:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (a)$$

Mặt khác, vì đường đàn hồi được biểu diễn bởi phương trình hàm số  $y(z)$  trong hệ trục  $(yz)$  nên độ cong của đường biểu diễn của hàm số đó được tính theo công thức:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (b)$$

So sánh (a) và (b) ta được:

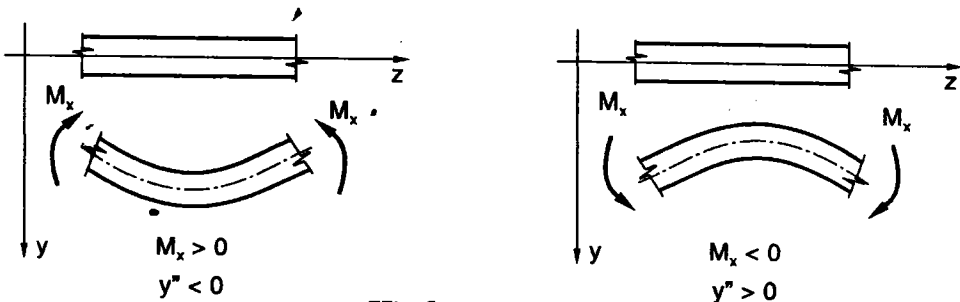
$$\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (c)$$

Đó là phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi, tuy nhiên ta phải chọn sao cho hai vế của phương trình trên đều thỏa mãn.

Khảo sát một đoạn dầm bị uốn cong trong hai trường hợp như hình 8.3. ta thấy mômen uốn  $M_x$  và đạo hàm bậc hai  $y''$  luôn luôn trái

dấu, cho nên phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_x}{EI_x}$$



Hình 8.3

Với giả thiết chuyển vị là bé (độ võng và góc xoay bé) ta có thể bỏ qua  $y'^2$  so với 1 và khi đó phương trình vi phân của phương của đường đàn hồi có dạng gần đúng như sau:

$$y'' = -\frac{M_x}{EI_x} \quad (8.1)$$

trong đó tích số  $EI_x$  là độ cứng của dầm khi uốn.

### 8.3 LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KHÔNG ĐỊNH HẠN

Ta nhận thấy vế phải của phương trình vi phân (8.1) chỉ là một hàm số của  $z$  nên (8.1) là phương trình vi phân thường.

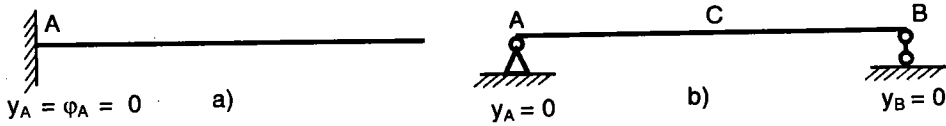
Lấy tích phân lần thứ nhất (8.1) ta được phương trình góc xoay:

$$\varphi = y' = \int -\frac{M_x}{EI_x} dz + C \quad (8.2)$$

tích phân lần thứ hai ta được phương trình đường đàn hồi:

$$y = \int \left( \int -\frac{M_x}{EI_x} dz + C \right) dz + D \quad (8.3)$$

Trong (8.2) và (8.3),  $C$  và  $D$  là hai hằng số tích phân sẽ được xác định từ các điều kiện biên. Các điều kiện này phụ thuộc vào liên kết của dầm và phụ thuộc vào sự thay đổi tải trọng trên dầm.



Hình 8.4

Đối với dầm đơn giản, ta có thể gặp các điều kiện như sau:

- Đầu ngàm của dầm console có góc xoay và độ võng bằng không (H.8.4a):  $y_A = \varphi_A = 0$

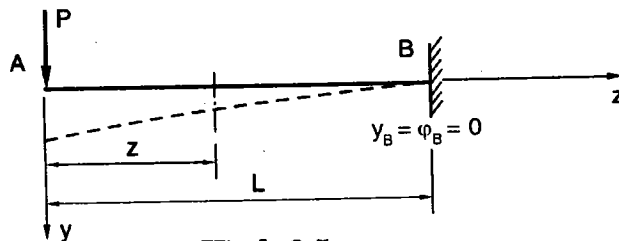
- Các đầu liên kết khớp độ võng bằng không (H.8.4b):

$$y_A = y_B = 0$$

- Tại nơi tiếp giáp giữa hai đoạn dầm có phương trình đường đàn hồi khác nhau, độ võng và góc xoay bên trái bằng với độ võng và góc xoay bên phải (H.8.4b):

$$y_C^{tr} = y_C^{ph}; \quad \varphi_C^{tr} = \varphi_C^{ph}$$

**Ví dụ 8.1** Viết phương trình đường đàn hồi và góc xoay cho dầm công son (console) như hình 8.5. Từ đó suy ra độ võng và góc xoay lớn nhất. Cho  $EI_x =$  hằng số.



Hình 8.5

**Giải** Phương trình mômen uốn tại mặt cắt có hoành độ  $z$  là:

$$M_x = -Pz \tag{a}$$

mang vào (8.1) ta được phương trình vi phân của đường đàn hồi như sau:

$$y'' = -\frac{M_x}{EI_x} = \frac{Pz}{EI_x} \tag{b}$$

Tích phân hai lần, ta lần lượt được:

$$\varphi = y' = \frac{Pz^2}{2EI_x} + C \quad (c)$$

$$y = \frac{Pz^3}{6EI_x} + Cz + D \quad (d)$$

$C$  và  $D$  được xác định từ các điều kiện biên về độ võng và góc xoay tại ngàm:

$$z = L; \quad \varphi = 0 \text{ và } y = 0$$

thay các điều kiện này vào (c) và (d) ta được:

$$C = -\frac{PL^2}{2EI_x}; \quad D = \frac{PL^3}{3EI_x}$$

Vậy phương trình đường đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{Pz^3}{6EI_x} - \frac{PL^2}{2EI_x}z + \frac{PL^3}{3EI_x}; \quad \varphi = \frac{Pz^2}{2EI_x} - \frac{PL^2}{2EI_x}$$

Độ võng và góc xoay lớn nhất ở đầu tự do A của dầm, ứng với  $z = 0$ , ta có:

$$y_{\max} = \frac{PL^3}{3EI_x}; \quad \varphi = -\frac{PL^2}{2EI_x}$$

Nếu:  $y_{\max} > 0$  chỉ rằng độ võng của điểm A hướng xuống

$\varphi < 0$  chỉ rằng góc xoay của mặt cắt ngang tại A ngược kim đồng hồ.

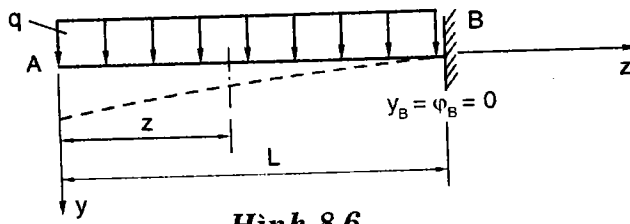
**Ví dụ 8.2** Tính độ võng và góc xoay lớn nhất của dầm (H.8.6). Cho  $EI_x = \text{const}$ .

**Giải** Phương trình mômen uốn tại mặt cắt có hoành độ  $z$  là:

$$M_x = -\frac{qz^2}{2} \quad (a)$$

thế vào (8.1), ta được:

$$y'' = \frac{qz^2}{2EI_x} \quad (b)$$



Hình 8.6

Tích phân hai lần, ta có:

$$\varphi = y' = \frac{qz^3}{6EI_x} + C \quad (c)$$

$$y = \frac{qz^4}{24EI_x} + C_z + D \quad (d)$$

Hai điều kiện biên ở đầu ngàm  $z = L$ ;  $\varphi = 0$  và  $y = 0$  cho ta:

$$C = -\frac{qL^3}{6EI_x}; \quad D = \frac{qL^4}{8EI_x}$$

Vậy phương trình đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{qz^4}{24EI_x} - \frac{qL^3}{6EI_x}z + \frac{qL^4}{8EI_x}$$

$$\varphi = \frac{qz^3}{6EI_x} - \frac{qL^3}{6EI_x}$$

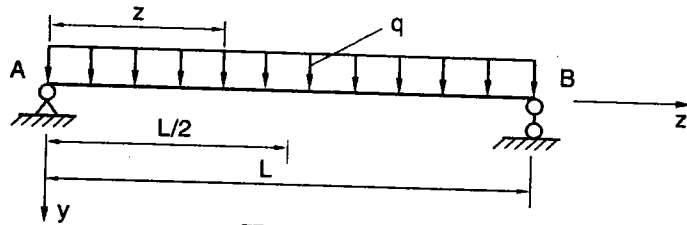
Độ võng và góc xoay lớn nhất ở điều kiện tự do A của dầm ứng với  $z = 0$ , ta có:

$$y_{\max} = \frac{qL^4}{8EI_x} \quad \text{và} \quad \varphi_A = -\frac{qL^3}{6EI_x}$$

**Ví dụ 8.3** Lập phương trình độ võng và góc xoay của dầm đơn giản đặt trên hai gối tựa và chịu tải trọng phân bố đều (H.8.7). Độ cứng  $EI_x$  của dầm không đổi.

**Giải** Phương trình mômen uốn tại mặt cắt ngang có hoành độ  $z$  là:

$$M_x = \frac{qL}{2}z - \frac{qz^2}{2} = \frac{q}{2}(Lz - z^2) \quad (a)$$



Hình 8.7

thay vào (8.1), ta được phương trình vi phân của đường đàn hồi như sau:

$$y'' = -\frac{q}{2EI_x} (Lz - z^2) \quad (b)$$

Tích phân hai lần, ta được:

$$\varphi = y' = -\frac{q}{2EI_x} \left( \frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) + C \quad (c)$$

$$y = -\frac{q}{2EI_x} \left( \frac{Lz^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right) + Cz + D \quad (d)$$

Theo các điều kiện biên ở các gối tựa trái và phải của dầm:

$$\begin{cases} khi : z = 0; y = 0 \\ khi : z = L; y = 0 \end{cases}$$

ta tính được các hằng số tích phân như sau:

$$D = 0; C = \frac{qL^3}{24EI_x}$$

Như vậy phương trình đường đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{qL^3}{24EI_x} z \left( 1 - 2 \frac{z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3} \right) \quad (e)$$

$$\varphi = y' = \frac{qL^3}{24EI_x} \left( 1 - 6 \frac{z^2}{L^2} + 4 \frac{z^3}{L^3} \right) \quad (g)$$

dễ dàng thấy được độ võng lớn nhất tại mặt cắt ngang giữa nhịp ứng với:



$$z = \frac{L}{2} \text{ (tại đây } y' = 0 \text{)}$$

thay  $z = L/2$  vào phương trình (e), ta được:

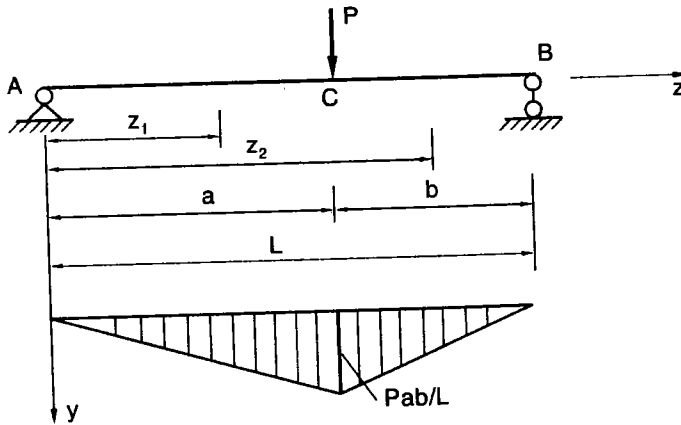
$$y_{\max} = y\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EI_x}$$

Góc xoay lớn nhất ( $y'_{\max}$ ) tại mặt cắt ngang có  $y'' = 0$  (hay  $M_x = 0$ ), tức ở các gối tựa trái và phải của dầm. Thay  $z = 0$  và  $z = L$  lần lượt vào (g) ta được:

$$\varphi_{\max} = y'_{\max} = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI_x}; \quad \varphi_{\min} = y'_{\min} = -\frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI_x}$$

Góc xoay của mặt cắt ở gối tựa trái thuận chiều kim đồng hồ, góc xoay của mặt cắt ở gối tựa phải ngược chiều kim đồng hồ.

**Ví dụ 8.4** Lập phương trình độ võng và góc xoay của dầm trên hai gối tựa chịu lực tập trung  $P$  như hình 8.8 cho biết  $EI_x =$  hằng số.



Hình 8.8

**Giải** Dầm có hai đoạn, biểu thức mômen uốn cong trong hai đoạn AC và CB khác nhau nên biểu thức góc xoay và độ võng trong hai đoạn cũng khác nhau. Ta viết cho từng đoạn các biểu thức  $M_x, y'', y', y$  như sau:

Mômen uốn  $M_x$  trong các đoạn sau:

$$\text{Đoạn AC } (0 \leq z_1 \leq a): \quad M_{x(1)} = \frac{Pb}{L} z_1 \quad (\text{a})$$

$$\text{Đoạn CB } (a \leq z_2 \leq L): \quad M_{x(2)} = \frac{Pb}{L} z_2 - P(z_2 - a) \quad (\text{b})$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi trong mỗi đoạn:

$$\text{Đoạn AC:} \quad y_1'' = -\frac{Pb}{LEI_x} z_1 \quad (\text{c})$$

$$\text{Đoạn CB:} \quad y_2'' = -\frac{Pb}{LEI_x} z_2 + \frac{P}{EI_x} (z_2 - a) \quad (\text{d})$$

Tích phân liên tiếp các phương trình trên ta được:

*Đoạn AC* ( $0 \leq z_1 \leq a$ ):

$$y_1' = -\frac{Pb}{2LEI_x} z_1^2 + C_1 \quad (\text{e})$$

$$y_1 = -\frac{Pb}{6LEI_x} z_1^3 + C_1 z_1 + D_1 \quad (\text{g})$$

*Đoạn CB* ( $a \leq z_2 \leq L$ ):

$$y_2' = -\frac{Pb}{2LEI_x} z_2^2 + \frac{P}{2EI_x} (z_2 - a)^2 + C_2 \quad (\text{h})$$

$$y_2 = -\frac{Pb}{6LEI_x} z_2^3 + \frac{P}{6EI_x} (z_2 - a)^3 + C_2 z_2 + D_2 \quad (\text{i})$$

Để xác định các hằng số tích phân  $C_1, D_1, C_2, D_2$  ta dựa vào các điều kiện biên sau:

- Ở gối tựa  $A, B$  độ võng bằng không
- Ở mặt cắt ngang  $C$  nối tiếp hai đoạn, độ võng và góc xoay của hai đoạn phải bằng nhau.

tức là khi:  $z_1 = 0; y_1 = 0$

$$z_2 = 0; y_2 = 0$$

$$z_1 = z_2 = a$$

$$y_1 = y_2; y_1' = y_2'$$

Từ bốn điều kiện này ta có:

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ -\frac{Pb}{6LEI_x} L^3 + \frac{P}{6EI_x} (L-a)^3 + C_2 L + D_2 = 0 \\ -\frac{Pb}{6LEI_x} a^3 + C_1 a + D_1 = -\frac{Pb}{6LEI_x} a^3 + C_2 a + D_2 \\ -\frac{Pb}{2LEI_x} a^2 + C_1 = -\frac{Pb}{2LEI_x} a^2 + C_2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$D_1 = D_2 = 0; \quad C_1 = C_2 = \frac{Pb}{6LEI_x} (L^2 - b^2)$$

Vậy phương trình góc xoay và độ võng trong từng đoạn là:

Đoạn AC ( $0 \leq z_1 \leq a$ ):

$$\begin{cases} \varphi_1 = y_1' = \frac{Pb}{LEI_x} \left( \frac{L^2 - b^2}{6} - \frac{z_1^2}{2} \right) \\ y_1 = \frac{Pb}{LEI_x} \left( \frac{L^2 - b^2}{6} z_1 - \frac{z_1^3}{6} \right) \end{cases}$$

Đoạn BC ( $a \leq z_2 \leq L$ ):

$$\begin{cases} \varphi_2 = y_2' = \frac{Pb}{LEI_x} \left( \frac{z_2^2}{2} - \frac{L(z_2 - a)^2}{2b} - \frac{L^2 - b^2}{6} \right) \\ y_2 = \frac{Pb}{LEI_x} \left( \frac{(z_2 - a)^3}{6b} L + \frac{L^2 - b^2}{6} z_2 - \frac{z_2^3}{6} \right) \end{cases}$$

Ta sẽ tính độ võng lớn nhất trong dầm bằng cách dựa vào điều kiện  $y' = 0$ , giả sử  $a > b$ . Trước hết ta sẽ xét độ võng lớn nhất trong đoạn nào ở gối tựa A ( $z_1 = 0$ ) góc xoay bằng:

$$\varphi_{1A} = \frac{PbL}{6EI_x} \left( 1 - \frac{b^2}{L^2} \right) > 0$$

$$\text{và ở } C (z_1 = a): \quad \varphi_{1C} = -\frac{PbL}{3EI_x}(a-b) < 0$$

Như vậy, giữa hai điểm A và C góc xoay  $\varphi_1$  đổi dấu, nghĩa là sẽ bị triệt tiêu một lần. Điều đó cho thấy độ võng có giá trị lớn nhất trong đoạn AC.

Để tìm hoành độ  $z_1(0)$  của mặt cắt ngang có độ võng lớn nhất, ta cho phương trình  $\varphi_1 = 0$ :

$$\varphi_1[z_1(0)] = \frac{Pb}{LEI_x} \left[ \frac{L-b^2}{6} - \frac{(z_1(0))^2}{2} \right] = 0$$

$$\text{rút ra:} \quad z_1(0) = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad (o)$$

Sau đó đưa vào biểu thức (l) của độ võng, ta được giá trị lớn nhất của độ võng như sau:

$$y_{\max} = y_{1(z_1(0))} = \frac{\sqrt{3}Pb(L^2 - b^2)}{27EI_x} \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{L^2}\right)} \quad (p)$$

*Các hệ quả:*

- Nếu tải trọng  $P$  đặt ở giữa nhịp dầm ( $b = L/2$ ) thì từ (0) và (p) ta được:

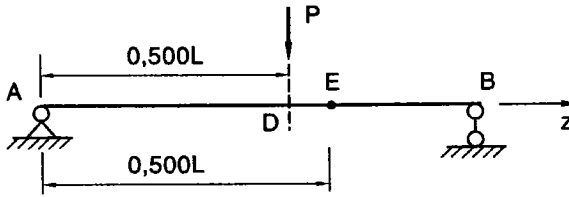
$$z_1(0) = \frac{L}{2} = 0,500L$$

$$y_{\max} = \frac{PL^3}{48EI_x}$$

- Khi tải trọng  $P$  ở gần gối B, tức  $b \rightarrow 0$  ta có:

$$z_1(0) = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,577L$$

Như vậy, nếu tải trọng di chuyển từ trung điểm D giữa nhịp dầm đến gối tựa B (H.8.9) thì hoành độ  $z_1(0)$  sẽ biến thiên từ  $0,5L$  đến  $0,577L$ , tức là từ điểm D đến điểm E. Trong thực tế người ta thường quy ước là khi tải trọng  $P$  tác dụng ở một vị trí nào đó thì vẫn có thể coi độ võng lớn nhất ở giữa nhịp dầm.



Hình 8.9

Ví dụ, nếu tải trọng  $P$  tác dụng ở vị trí như hình 8.8 thì độ võng ở giữa nhịp dầm sẽ bằng:

$$y(l/2) = \frac{Pb}{48EI_x} (3L^2 - 4b^2) = \frac{PL^3}{48EI_x} \left( \frac{3b}{L} - \frac{4b^3}{L^3} \right)$$

So sánh hai giá trị  $y_{\max}$  và  $y(l/2)$  thấy hai giá trị này khác nhau và rất ít.

**Nhận xét:** Nếu trên dầm có nhiều đoạn, ta phải lập phương trình vi phân đường đàn hồi cho nhiều đoạn tương ứng. Ở mỗi đoạn ta phải xác định hai hằng số tích phân, nếu dầm có  $n$  đoạn thì phải xác định  $2n$  hằng số. Do vậy bài toán trở nên phức tạp nếu số đoạn càng lớn, vì vậy phương pháp này ít dùng khi tải trọng phức tạp hay độ cứng dầm thay đổi.

### 8.4 XÁC ĐỊNH ĐỘ VÕNG VÀ GÓC XOAY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TẢI TRỌNG GIẢ TẠO (PHƯƠNG PHÁP ĐỒ TOÁN)

Phần trước, ta đã lập sự liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dz} = q \\ \frac{dM_x}{dz} = Q \\ \frac{d^2M_x}{dz^2} = q \end{cases} \quad a)$$

còn đối với việc khảo sát đường đàn hồi của dầm, ta có phương trình vi phân:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x} \quad (b)$$

Đối chiếu các phương trình (a) và (b), ta thấy có sự tương tự sau:

$$\begin{array}{c|c} y & M_x \\ \frac{dy}{dz} = y' & \frac{dM_x}{dz} = Q \\ \frac{d^2y}{dz^2} = y'' = -\frac{M_x}{EI_x} & \frac{d^2M_x}{dz^2} = q \end{array}$$

Ta nhận thấy muốn tính góc xoay  $y'$  và độ võng  $y$  thì phải tích phân liên tiếp hai lần hàm số  $\frac{M_x}{EI_x}$ , tương tự muốn có lực cắt  $Q$  và mômen uốn  $M$  thì phải tích phân liên tiếp hai lần hàm số tải trọng  $q$ .

Tuy nhiên ở phần trước chúng ta cũng biết cách tính lực cắt  $Q$  và mômen uốn  $M_x$ , thông qua việc vẽ biểu đồ nội lực, theo tải trọng  $q$  từ việc khảo sát các phương trình cân bằng. Như vậy, liệu chúng ta cũng có thể tìm cách tính góc xoay  $y'$  và độ võng  $y$  theo hàm  $\frac{M_x}{EI_x}$  mà không cần tích phân như (8.3) hay không? Đó cũng chính là phương pháp tải trọng giả tạo.

Nếu đặt: 
$$q_{gt} = -\frac{M_x}{EI_x}$$

thì ta sẽ có sự tương đương:

$$y'' = -\frac{M_x}{EI_x} = q_{gt}; \quad y' = Q_{gt}; \quad y = M_{gt}$$

trong đó:  $q_{gt}$  - tải trọng giả tạo;  $Q_{gt}$  - lực cắt giả tạo  
 $M_{gt}$  - mômen uốn giả tạo.

Như vậy, ta thấy rằng muốn tính góc xoay  $y'$  và độ võng  $y$  của một dầm thực (dầm đang khảo sát) thì chỉ cần tính lực cắt giả tạo  $Q_{gt}$  và mômen uốn  $M_{gt}$  do tải trọng phân bố giả tạo  $q_{gt}$  tác dụng trên một dầm giả tạo nào đó gây ra.

Điều kiện  $y' = Q_{gt}$  và  $y = M_{gt}$  phải được thỏa mãn ở mọi điểm trong cả hai dầm thực đang khảo sát và dầm giả tạo, hay suy rộng ra biểu đồ độ võng và góc xoay trong dầm thực phải hoàn toàn trùng với biểu đồ mômen uốn giả tạo và lực cắt giả tạo trong dầm giả tạo.

Ngoài ra có trường hợp tại điểm trung gian trên dầm phải khảo sát đến sự giống nhau của bước nhảy góc xoay  $\Delta y'$  và bước nhảy lực cắt  $\Delta Q_{gt}$ .

**Cách chọn dầm giả tạo**

Dầm giả tạo được suy từ dầm thực với điều kiện là nơi nào trên dầm thực không có độ võng và góc xoay thì điều kiện liên kết của dầm giả tạo ở những nơi đó sao cho  $q_{gt}$  không gây ra  $M_{gt}$  và  $Q_{gt}$ . Chiều dài của dầm thực và dầm giả tạo là như nhau.

Bảng 8.1 cho ta một số dầm giả tạo tương ứng với một số dầm thực thường gặp.


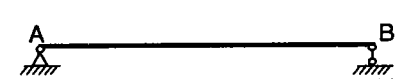


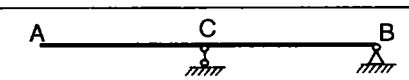
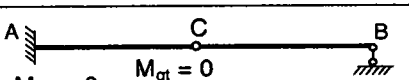
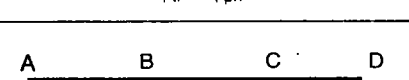
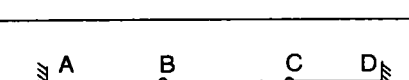
**Cách tìm tải trọng giả tạo  $q_{gt}$**

Vì  $q_{gt} = -\frac{M_x}{EI_x}$ , nên  $q_{gt}$  bao giờ cũng ngược dấu với mômen uốn  $M_x$ .

Do đó:

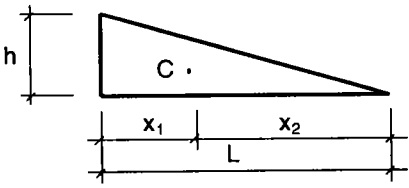
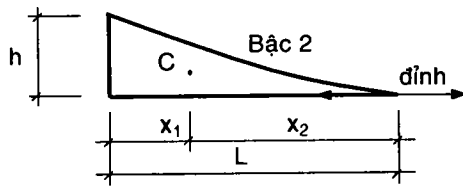
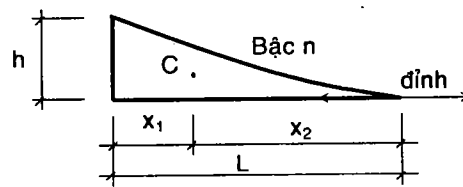
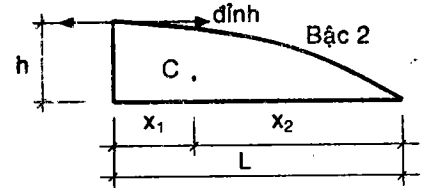
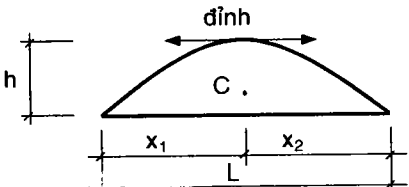
- Nếu:  $M_x > 0$  thì  $q_{gt} < 0$ , nghĩa là nếu biểu đồ  $M_x$  nằm phía dưới trục hoành (theo qui ước  $M_x > 0$  vẽ phía dưới trục thanh) thì  $q_{gt}$  hướng xuống
- Nếu:  $M_x < 0$  thì  $q_{gt}$  hướng lên.

**Bảng 8.1**

Dầm thực	Dầm giả tạo
 <p> <math>y = 0</math>                      <math>y = 0</math>  <math>\varphi \neq 0</math>                      <math>\varphi \neq 0</math> </p>	 <p> <math>M_{gt} = 0</math>                      <math>M_{gt} = 0</math>  <math>Q_{gt} \neq 0</math>                      <math>Q_{gt} \neq 0</math> </p>
 <p> <math>y = 0</math>                      <math>y \neq 0</math>  <math>\varphi = 0</math>                      <math>\varphi \neq 0</math> </p>	 <p> <math>M_{gt} = 0</math>                      <math>M_{gt} \neq 0</math>  <math>Q_{gt} = 0</math>                      <math>Q_{gt} \neq 0</math> </p>
 <p> <math>y \neq 0</math>                      <math>y = 0</math>                      <math>y = 0</math>  <math>\varphi \neq 0</math>                      <math>\varphi \neq 0</math>                      <math>\varphi \neq 0</math>  <math>\varphi_{tr} = \varphi_{ph}</math> </p>	 <p> <math>M_{gt} \neq 0</math>                      <math>M_{gt} = 0</math>                      <math>M_{gt} = 0</math>  <math>Q_{gt} \neq 0</math>                      <math>Q_{gt} \neq 0</math>                      <math>Q_{gt} \neq 0</math>  <math>Q_{tr} = Q_{ph}</math> </p>
 <p> <math>y \neq 0</math>                      <math>y = 0</math>                      <math>y = 0</math>                      <math>y \neq 0</math>  <math>\varphi \neq 0</math>                      <math>\varphi \neq 0</math>                      <math>\varphi \neq 0</math>                      <math>\varphi \neq 0</math> </p>	 <p> <math>M_{gt} \neq 0</math>                      <math>M_{gt} = 0</math>                      <math>M_{gt} = 0</math>                      <math>M_{gt} \neq 0</math>  <math>Q_{gt} \neq 0</math>                      <math>Q_{gt} \neq 0</math>                      <math>Q_{gt} \neq 0</math>                      <math>Q_{gt} \neq 0</math> </p>

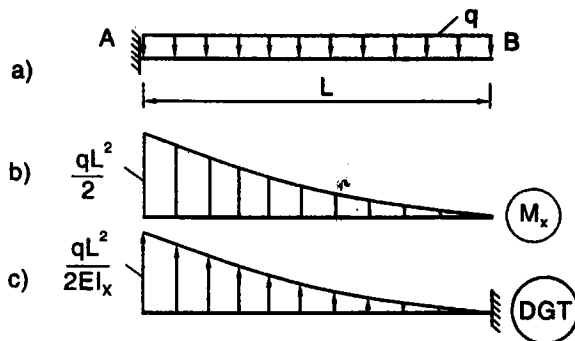
Ngoài ra trong quá trình tính các nội lực  $M_{gt}$ ,  $Q_{gt}$  của dầm giả tạo ta phải tính hợp lực của lực phân bố  $q_{gt}$  trên các chiều dài khác nhau. Do đó, để tiện lợi ta xác định vị trí trọng tâm và diện tích  $\Omega$  của những hình giới hạn bởi các đường cong như bảng 8.2 dưới đây.

Bảng 8.2

Hình vẽ	Diện tích ( $\Omega$ )	Vị trí trọng tâm	
		$x_1$	$x_2$
	$\frac{Lh}{2}$	$\frac{L}{3}$	$\frac{2L}{3}$
	$\frac{Lh}{3}$	$\frac{L}{4}$	$\frac{3L}{4}$
	$\frac{Lh}{n+1}$	$\frac{L}{n+2}$	$\frac{L(n+1)}{n+2}$
	$\frac{2Lh}{3}$	$\frac{3L}{8}$	$\frac{5L}{8}$
	$\frac{2Lh}{3}$	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{2}$



**Ví dụ 8.5** Tính độ võng và góc xoay ở đầu tự do B của dầm công xon chịu tải trọng phân bố đều  $q$  (H.8.10a). Độ cứng của dầm  $EI_x = \text{const}$ .



**Hình 8.10**

**Giải** Biểu đồ mômen uốn  $M_x$  của dầm thực có dạng đường cong bậc 2 được vẽ trên hình 8.10b. Dầm giả tạo tương ứng với lực phân bố  $q_{gt}$  như hình 8.10c.

Dùng mặt cắt ở sát B của dầm giả tạo, ta tính nội lực ở mặt cắt ngang này và được:

$$Q_{gt}^B = \frac{1}{3} \times \frac{qL^2}{2EI_x} \times L = \frac{qL^3}{6EI_x}$$

$$M_{gt}^B = \frac{1}{3} \times \frac{qL^2}{2EI_x} \times L \times \frac{3}{4}L = \frac{qL^4}{8EI_x}$$

Như trên đã nêu, độ võng và góc xoay tại B của dầm thực chính bằng mômen uốn và lực cắt tại B của dầm giả tạo, nên:

$$y_B = M_{gt}^B = \frac{qL^4}{8EI_x}; \quad \varphi_B = Q_{gt}^B = \frac{qL^3}{6EI_x}$$

**Ví dụ 8.6** Xác định độ võng và xoay tại của dầm cho trên hình 8.11a. Đoạn dầm AB có độ cứng  $2EI$ , đoạn dầm BC có độ cứng  $EI$ .

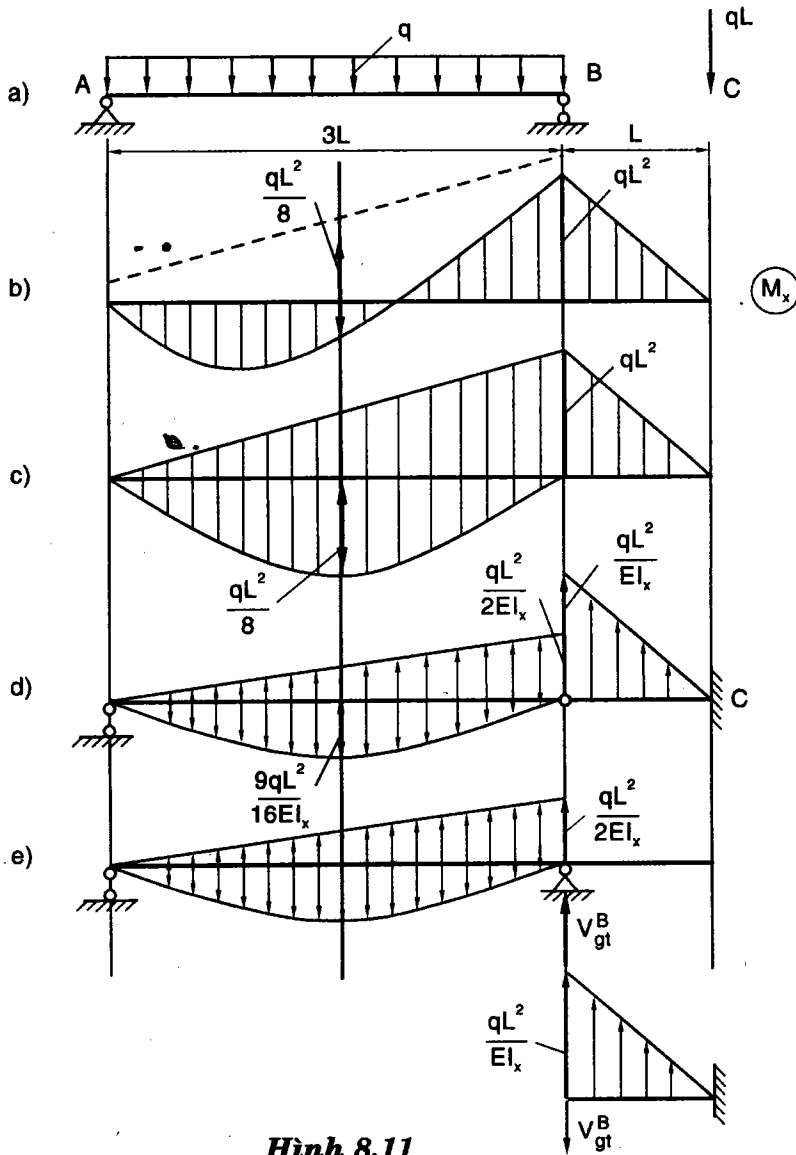
**Giải** Biểu đồ mômen uốn được vẽ trên hình 8.11b. Tuy nhiên, để dễ dàng trong việc tính toán ta có thể phân tích  $M_x$  thành tổng cộng của các biểu đồ mômen uốn có dạng đơn giản như hình 8.11c.

Dầm giả tạo với lực  $q_{gt}$  như hình 8.11d.

Chú ý là độ cứng trong AB và BC khác nhau. Ta cần tính nội lực ở C của dầm giả tạo.

Chia dầm giả tạo thành hai dầm đơn như hình 8.11e, phản lực ở

$$B \text{ của dầm giả tạo } AB \text{ là: } V_{gt}^B = \frac{1}{16} \frac{qL^3}{EI_x}$$



**Hình 8.11**

Phản lực này tác dụng lên dầm giả tạo BC và ta dễ dàng tính được:

$$Q_{gt}^C = -\frac{1}{16} \frac{qL^3}{EI_x} + \frac{1}{2} L \frac{qL^2}{EI_x} = +\frac{7}{16} \frac{qL^3}{EI_x}$$

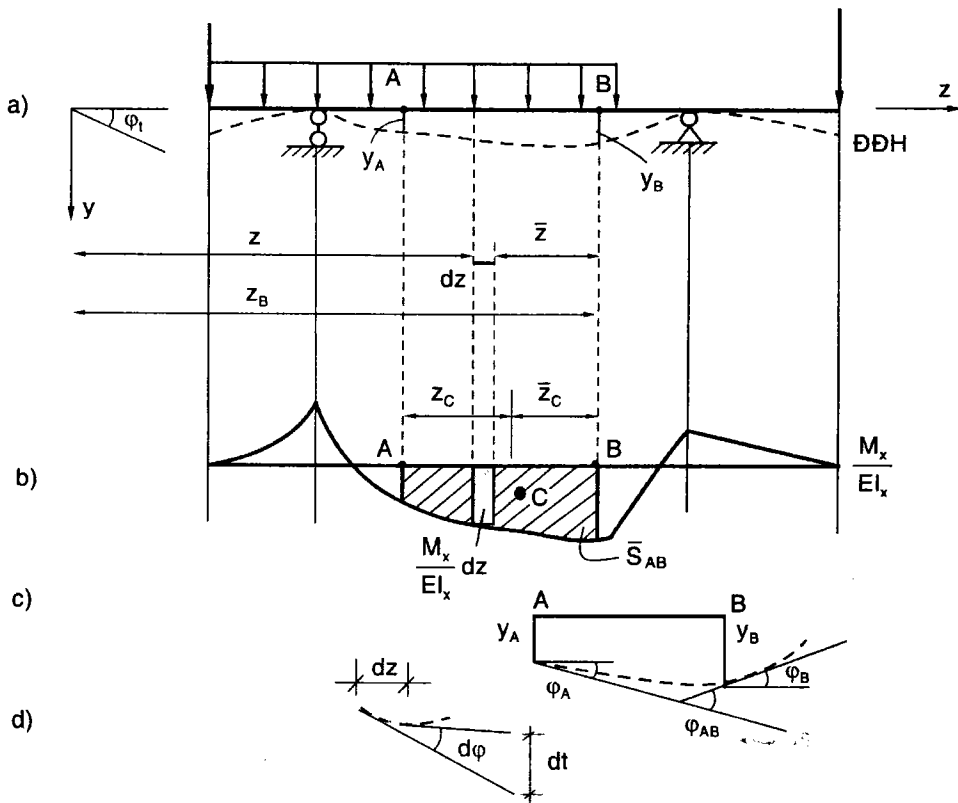
$$M_{gt}^C = -\frac{1}{16} \frac{qL^3}{EI_x} L + \frac{1}{2} L \frac{qL^2}{EI_x} \frac{2}{3} L = \frac{13}{48} \frac{qL^4}{EI_x}$$

Vậy độ võng và góc xoay tại  $C$  của dầm thực là độ võng hướng xuống:

$$y_C = M_{gt}^C = \frac{13}{48} \frac{qL^4}{EI_x}; \quad \varphi_C = Q_{gt}^C = \frac{7}{16} \frac{qL^3}{EI_x}$$

### 8.5 PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH MÔMEN

Xét dầm chịu uốn có biểu đồ  $\frac{M_x}{EI_x}$  như hình 8.12b, đường đàn hồi (nét đứt) như hình 8.12a.



Hình 8.12

Xét đoạn dầm  $AB$ , ta đã có:  $y'' = -\frac{M_x}{EI_x}$

hay:  $\frac{dy'}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{M_x}{EI_x}; \quad d\varphi = -\frac{M_x}{EI_x} dz$

Ta suy ra: 
$$\int_{z_A}^{z_B} d\varphi = - \int_{z_A}^{z_B} \frac{M_x}{EI_x} dz$$

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_{AB} = -\bar{S}_{AB}$$

với  $\bar{S}_{AB}$  là diện tích của biểu đồ  $\frac{M_x}{EI_x}$  gồm giữa hai mặt cắt A và B.

**Định lý 1** Độ thay đổi góc xoay giữa hai mặt cắt A và B của một dầm bằng diện tích của biểu đồ  $\frac{M_x}{EI_x}$  giữa hai mặt cắt ấy, nhưng ngược dấu.

Có thể viết công thức của định lý 1:

$$\varphi_B = \varphi_A - \bar{S}_{AB}$$

Ngoài ra từ hình 8.12c ta có thể viết:

$$dt = \bar{z}d\varphi = -\bar{z} \frac{M_x}{EI_x} dz$$

suy ra: 
$$t_{BA} = \int_{z_A}^{z_B} dt = - \int_{z_A}^{z_B} \bar{z} \frac{M_x}{EI_x} dz = -\bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

$\bar{z}_C$  là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích  $\bar{S}_{AB}$  đến B. Công thức trên được phát biểu thành định lý 2 dưới đây.

**Định lý 2** Độ sai lệch giữa tiếp tuyến ở một điểm B trên đường đàn hồi với một tiếp tuyến ở một điểm A khác (cũng trên đường đàn hồi) bằng mômen tĩnh của diện tích của biểu đồ  $\frac{M_x}{EI_x}$  đối với đường thẳng đứng đi qua B.

Từ hình 8.12d ta có:

$$\begin{aligned} y_B &= y_A + \varphi_A L_{AB} + t_{BA} = y_A + \varphi_A (z_B - z_A) + t_{BA} \\ &= y_A + \varphi_A (z_B - z_A) - \bar{z}_C \bar{S}_{AB} \end{aligned} \quad (8.5)$$

(8.5) chính là công thức dùng để xác định độ võng của điểm B nếu biết độ võng của một điểm A ( $z_B > z_A$ ) và biểu đồ  $\frac{M_x}{EI_x}$  giữa hai điểm này.

Từ (8.5) ta cũng có thể tính độ võng của điểm A khi biết độ võng của điểm B ( $z_B > z_A$ ). Thật vậy, theo phần trên ta có:

$$\varphi_A = \varphi_B + \bar{S}_{AB}$$

và: 
$$y_A = y_B - \varphi_A(z_B - z_A) + \bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

với: 
$$\bar{z}_C = L_{AB} - z_C$$

Ta viết lại: 
$$y_A = y_B - (\varphi_B + \bar{S}_{AB})L_{AB} + (L_{AB} - z_C)\bar{S}_{AB}$$

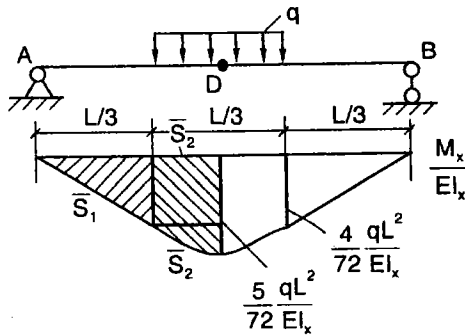
Khai triển và rút gọn, ta được:

$$y_A = y_B - \varphi_B L_{AB} - z_C \bar{S}_{AB} \quad (8.5')$$

trong đó  $z_C$  là khoảng cách từ trọng tâm  $C$  của  $\bar{S}_{AB}$  kể từ  $A$ .

Dùng phương pháp diện tích mômen, ta cần biết diện tích và trọng tâm của một số hình, ta có thể sử dụng bảng 8.2 để đáp ứng yêu cầu này.

**Ví dụ 8.7** Dùng phương pháp diện tích mômen xác định góc xoay ở đầu trái  $A$  và độ võng ở điểm  $D$  giữa dầm (H.8.13).  $EI_x =$  hằng số.



**Hình 8.13**

**Giải** Theo định lý 1, công thức (8.4), xét hai điểm  $A$  ( $z = 0$ ) và  $D$  ( $z = L/2$ ):

$$\varphi_D = \varphi_A - \bar{S}_{AD}$$

chú ý rằng  $\varphi_D = 0$  vì bài toán đối xứng và  $\bar{S}_{AD}$  có thể phân chia thành  $\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$  (H.8.13).

Ta suy ra:  $\varphi_A - (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3) = 0$

$$\varphi_A = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$$

$$= \frac{4}{72} \times \frac{qL^2}{EI_x} \times \frac{1}{2} \times \frac{L}{3} + \frac{4}{72} \times \frac{qL^2}{EI_x} \times \frac{L}{3} + \frac{2}{3} \frac{qL^2}{EI_x} \times \frac{L}{6}$$

$$= \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EI_x}$$

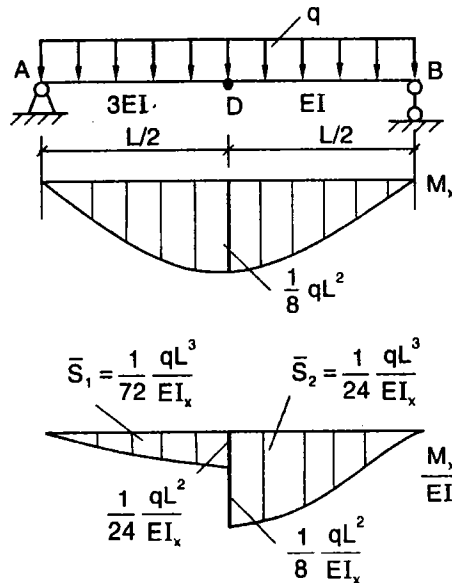
góc xoay của mặt cắt A thuận chiều kim đồng hồ.

Áp dụng công thức (8-5), ta viết

$$\begin{aligned}
 y_D &= y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{AD} \\
 &= 0 + \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EI_x} \times \frac{L}{2} - \left( \bar{z}_C^{(1)} \bar{S}_1 + \bar{z}_C^{(2)} \bar{S}_2 + \bar{z}_C^{(3)} \bar{S}_3 \right) \\
 &= \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EI_x} \times \frac{L}{2} - \left[ \left( \frac{L}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{L}{3} \right) \times \frac{1}{2} \times \frac{4qL^2}{72EI_x} \times \frac{L}{3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \times \frac{L}{6} \times \frac{L}{6} \times \frac{4qL^2}{72EI_x} + \frac{3}{8} \times \frac{L}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{qL^2}{72EI_x} \times \frac{L}{6} \right] \\
 &= \frac{77}{11664} \times \frac{qL^2}{EI_x}
 \end{aligned}$$

Độ võng mặt cắt D hướng xuống dưới.

**Ví dụ 8.8** Xác định góc xoay ở A, B và độ võng ở D của dầm cho như hình 8.14. Đoạn AD có độ cứng 3EI, đoạn BD có độ cứng EI.



Hình 8.14

**Giải** - Biểu đồ mômen uốn  $M_x$  và  $\frac{M_x}{EI}$  vẽ như hình 8.14

- Theo công thức 8.5, ta có:

$$\begin{aligned} y_B &= y_A + \varphi_A L - \bar{z}_C \times \bar{S}_{AB} \\ 0 &= 0 + \varphi_A L - \bar{z}_C^{(1)} \times \bar{S}_1 - \bar{z}_C^{(2)} \times \bar{S}_2 \\ \Rightarrow \varphi_A &= \frac{1}{L} (\bar{z}_C^{(1)} \times \bar{S}_1 + \bar{z}_C^{(2)} \times \bar{S}_2) \\ &= \frac{1}{L} \left[ \left( \frac{3L}{8} + \frac{L}{2} \right) \times \frac{qL^3}{72EI_x} + \frac{5L}{8} \times \frac{qL^3}{24EI_x} \right] = \frac{13}{576} \frac{qL^3}{EI_x} \end{aligned}$$

- Bây giờ áp dụng định lý 1, công thức (8.4)

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \varphi_A - \bar{S}_{AB} = \varphi_A - \bar{S}_1 - \bar{S}_2 \\ &= \frac{13}{576} \frac{qL^3}{EI_x} - \frac{qL^3}{72EI_x} - \frac{qL^3}{24EI_x} = -\frac{19}{576} \frac{qL^3}{EI_x} \end{aligned}$$

Góc xoay mặt cắt  $B$  ngược chiều kim đồng hồ.

Cuối cùng, xác định độ võng ở  $D$  bằng công thức 8.5 áp dụng cho hai điểm  $A$  và  $D$

$$\begin{aligned} y_D &= y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{AD} \\ &= 0 + \frac{13}{576} \times \frac{qL^3}{EI_x} \times \frac{L}{2} - \frac{3L}{8} \times \frac{qL^3}{72EI_x} = \frac{5}{576} \times \frac{qL^4}{EI_x} \end{aligned}$$

Ta có thể kiểm tra lại kết quả của  $y_D$  bằng cách khảo sát đoạn  $DB$ , áp dụng (8.5')

$$\begin{aligned} y_D &= y_B - \varphi_B \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{BD} \\ &= 0 - \left( -\frac{19}{576} \times \frac{qL^3}{EI_x} \right) \times \frac{L}{2} - \frac{3L}{8} \times \frac{qL^3}{24EI_x} \\ &= \frac{5}{576} \times \frac{qL^4}{EI_x} \end{aligned}$$

**Ví dụ 8.9** Xác định chuyển vị đứng  $\delta_1$ , chuyển vị ngang  $\delta_2$ , góc xoay của mặt cắt  $D$ , góc xoay của mặt cắt  $B$  của khung như hình 8.15a.

**Giải** Hình 8.15b cho ta biểu đồ mômen  $M_x$  (hay đơn giản hơn biểu đồ  $M$ ). Hình 8.15c cho biểu đồ  $\frac{M_x}{EI_x}$ . Ta quy ước chuyển vị thẳng được xem là dương khi hướng vào bên trong khung.

Bắt đầu từ thanh  $AB$  với  $y_A = y_B = 0$  (chú ý thanh  $AB$  đứng,  $y_A$  vuông góc trục  $AB$ ). Theo (8.4):

$$\varphi_B = \varphi_A - \bar{S}_{AB} = - \left( \frac{350}{3EI} - \frac{50}{EI} \right) = - \frac{200}{3EI}$$

(8.5) cho:  $y_{B \text{ ngang}} = \varphi_A - \varphi_A L_{AB} - \bar{z}_C \times \bar{S}_{AB}$

$$= 0 + 0.10 - \left( \frac{2}{3} \times 10 \times \frac{350}{3EI} - \frac{1}{3} \times 10 \times \frac{50}{EI} \right) = - \frac{5500}{9EI}$$

Chuyển vị thẳng điểm  $B \perp AB$  đi về phía trái.

Xét tiếp đoạn thanh  $BC$ , ta có:

$$\varphi_C = \varphi_B - \bar{S}_{BC} = - \frac{200}{3EI} - \left( - \frac{180}{EI} \right) = \frac{340}{3EI}$$

và:  $y_C = y_{B \text{ đứng}} + \varphi_B L_{BC} - \bar{z}_C \times \bar{S}_{BC}$

$$= 0 - \frac{200}{3EI} \times 6 - 3 \times \left( - \frac{180}{EI} \right) = \frac{140}{EI}$$

Chuyển vị đứng của mặt cắt  $C$  hướng vào trong khung (ở đây  $y_{B \text{ đứng}}$  là chuyển vị đứng của điểm  $B$ )

Cuối cùng, ta xét tiếp thanh  $CD$

dùng (8.5):  $y_{D \text{ ngang}} = y_{C \text{ ngang}} - \varphi_C L_{CD} - \bar{z}_C \times \bar{S}_{CD}$

vì:  $y_{C \text{ ngang}} = -y_{B \text{ ngang}} = \frac{5500}{9EI}$

nên:  $y_{D \text{ ngang}} = \frac{5500}{9EI} + \frac{340}{3EI} \times 3 - \left( \frac{2}{3} \times 3 \times \left( - \frac{45}{EI} \right) \right) = \frac{9370}{EI}$

Như vậy, các kết quả theo yêu cầu phải tính là:

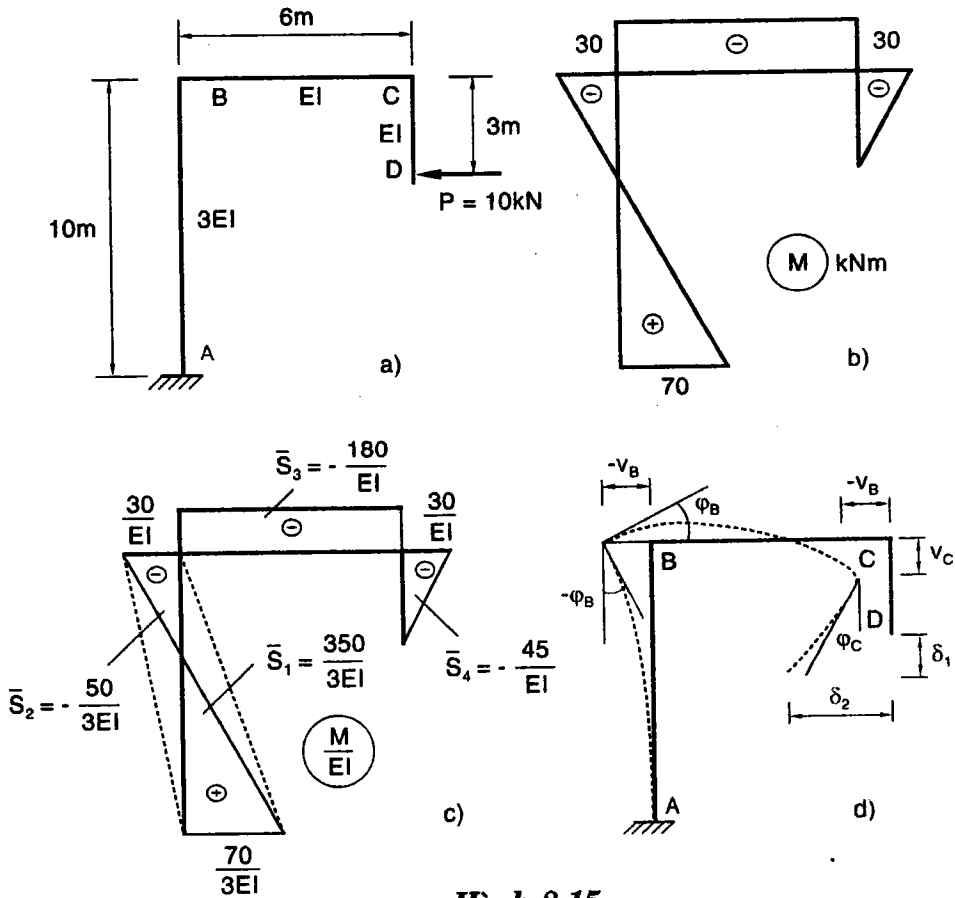
$$\delta_1 = y_D = y_C = \frac{140}{EI} \quad \text{hướng xuống}$$

$$\delta_2 = y_{D \text{ ngang}} = \frac{9370}{EI} \quad \text{sang trái}$$



$$\varphi_D = -\frac{200}{3EI} \quad \text{quay ngược kim đồng hồ}$$

Dạng đường đàn hồi của khung như hình 8.15.



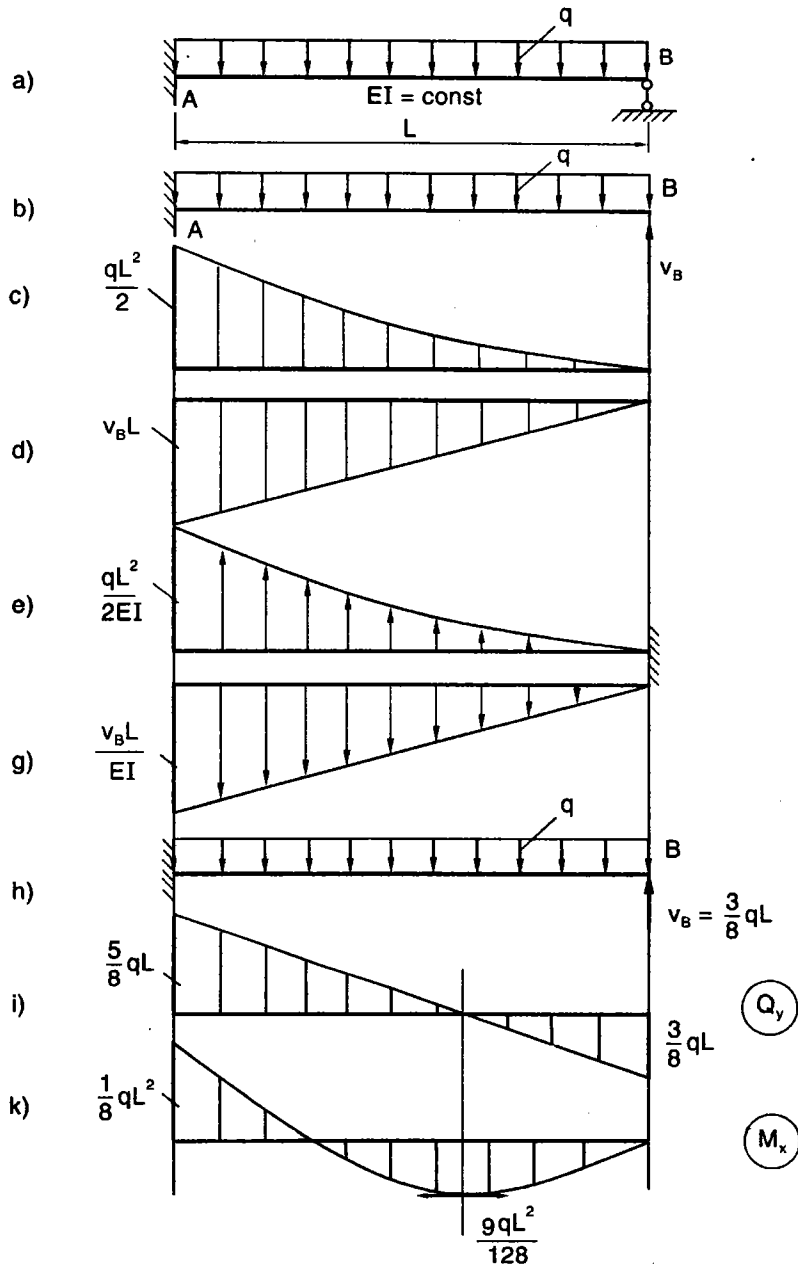
Hình 8.15

### 8.6 BÀI TOÁN SIÊU TÍNH

Tương tự các bài toán về thanh chịu kéo, nén đúng tâm, ta còn có các bài toán siêu tĩnh về uốn. Đó là các bài toán mà trong đó ta không thể xác định toàn bộ nội lực hoặc phản lực liên kết chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học, bởi vì số ẩn số phải tìm của bài toán lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học có được. Để giải được các bài toán siêu tĩnh ta, phải tìm thêm một số phương trình phụ dựa vào điều kiện biến dạng của dầm.

Ta hãy xét cụ thể các ví dụ sau:

**Ví dụ 8.10** Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm như hình 8.16a. Biết  $EI = \text{const}$ .



**Hình 8.16**

**Giải** Dầm đã cho có bốn phản lực cần tìm (ba ở ngàm A và một ở gối tựa B). Ta chỉ có ba phương trình cân bằng tĩnh học, nhưng muốn giải được bốn ẩn số phản lực, cần tìm thêm một phương trình phụ về biến dạng của dầm.

Tưởng tượng bỏ gối tựa ở đầu  $B$  và thay vào đó một phản lực  $V_B$  (H.8.16b), ta được một hệ mới. Hệ này chỉ có thể làm việc giống như hệ trên khi  $V_B$  phải có trị số và chiều thế nào để độ võng tại  $B$ , do tải trọng  $q$  và  $V_B$  sinh ra, phải bằng không.

Ta hãy tính độ võng tại  $B$  bằng phương pháp tải trọng giả tạo (hay một phương pháp khác).

Biểu đồ mômen uốn của dầm ở hình 8.16b do tải trọng  $q$  và phản lực  $V_B$  gây ra được như hình 8.16c,d, dầm giả tạo và  $q_{gt}$  như trên hình 8.16 e, g. Ta có:

Mômen giả tạo tại  $B$  cũng là độ võng tại  $B$  của hệ 8.b

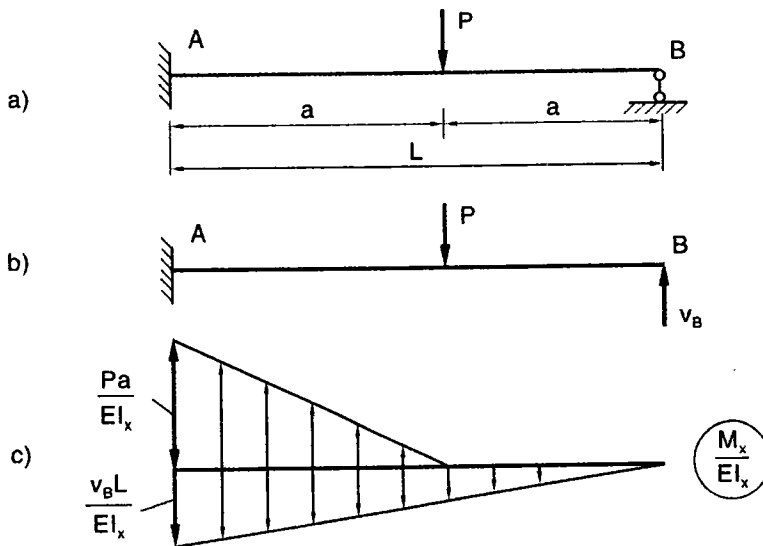
$$\psi_B = M_{gt}^B = \frac{1}{3} L \frac{qL^2}{2EI} \times \frac{3}{4} L - \frac{1}{2} L \frac{V_B L}{EI} \times \frac{2}{3} L$$

Như trên đã nêu, độ võng  $y_B = 0$ , ta được:

$$V_B = \frac{3}{8} qL$$

Sau khi tìm được  $V_B$ , ta dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực của dầm đã cho như hình 8.16 i, k.

**Ví dụ 8.11** Tính phản lực  $V_B$  của dầm siêu tĩnh như hình 8.17a cho biết  $EI_x =$  hằng số.



Hình 8.17

**Giải** Tương tự ví dụ trên, ta cũng có điều kiện  $y_B = 0$ .

Ta tính  $y_B$  bằng phương pháp diện tích mômen.

Biểu đồ do tải trọng  $P$  và phản lực  $V_B$  lược vẽ hình 8.17c.

Áp dụng công thức (8.5)', ta có:

$$y_A = y_B - \varphi_A L + \bar{z} \bar{S}_{AB}$$

$$0 = y_B - 0 \times L + \left[ -\left(L - \frac{a}{3}\right) \frac{1}{2} a \frac{Pa}{EI} + \frac{2}{3} L \frac{1}{2} L \frac{V_B L}{EI} \right]$$

$$y_A = -\frac{Pa^2}{2EI} \left( \frac{3L - a}{3} \right) + \frac{V_B L^3}{3EI}$$

Điều kiện  $y_B = 0$  cho ta:

$$0 = -\frac{Pa^2}{2EI} \left( \frac{3L - a}{3} \right) + \frac{V_B L^3}{3EI}$$

suy ra: 
$$V_B = \frac{Pa^2}{2L^3} (3L - a)$$

**Ví dụ 8.12** Vẽ biểu đồ nội lực cho khung cho trên hình 8.18a

**Giải** Tương tự các bài toán siêu tĩnh ở các ví dụ trước, ta sẽ tính toán trên khung như hình 8.17b, trong đó  $V$  là phản lực của gối tựa ở  $D$ , điều kiện tương thích biến dạng là chuyển vị đứng của điểm  $D$  phải bằng 0.

$$y_D = 0 \quad (a)$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, chuyển vị tại  $D$  sẽ do lực  $P$  gây ra cộng với phản lực  $V$  gây ra:

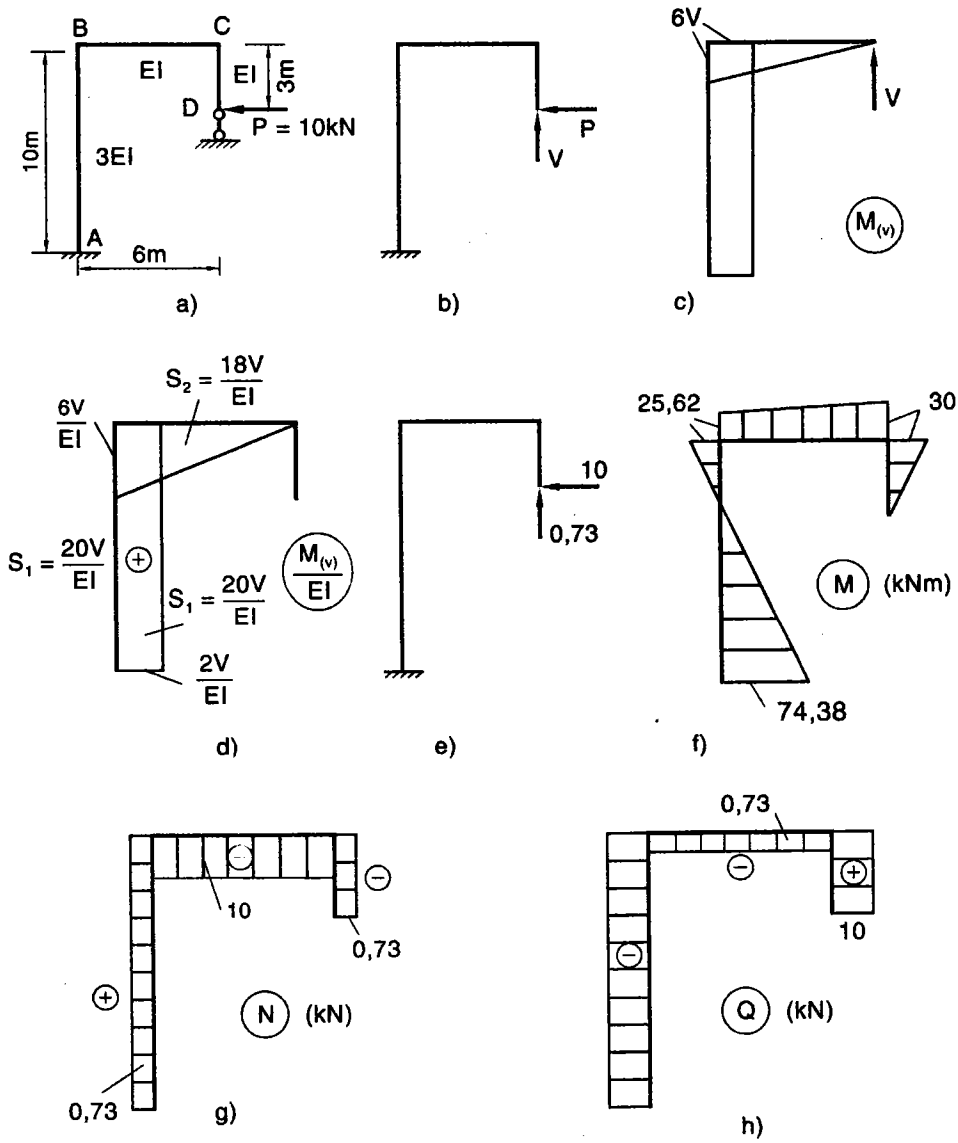
$$y_D = y_D^P + y_D^V \quad (b)$$

ta đã có: 
$$y_D^P = \frac{140}{EI} \quad (c)$$

theo ví dụ 8.9.

Bây giờ ta tính  $y_D^P$  bằng phương pháp diện tích mômen.

Biểu đồ mômen uốn của khung chỉ do riêng phản lực  $V$  gây ra vẽ trên hình 8.18b tương ứng là biểu đồ  $M/EI$  (H.8.18c).



Hình 8.18

Xét thanh AB

Công thức (8.4) cho ta:  $\varphi_B = \varphi_A - \bar{S}_{AB} = 0 - S_1 = -\frac{20V}{EI}$

(8.5) cho ta: 
$$y_{B\text{ngang}} = y_A + \varphi_A L_{AB} - \bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

$$= 0 - 0.10 - 3 \cdot \frac{20V}{EI} = -\frac{60V}{EI}$$

Xét thanh BC

$$\text{ta có: } \varphi_C = \varphi_B - \bar{S}_{BC} = -\frac{20V}{EI} - \frac{18V}{EI} = -\frac{38V}{EI}$$

$$\begin{aligned} y_C &= y_{B \text{ đứng}} + \varphi_B L_{BC} - \bar{z}_C \bar{S}_{BC} \\ &= 0 - 6 \cdot \frac{20V}{EI} - 4 \cdot \frac{18V}{EI} = -\frac{192V}{EI} \end{aligned}$$

Xét thanh CD

$$\text{ta dễ dàng nhận thấy: } y_D = y_C = -\frac{192V}{EI}$$

Vậy chuyển vị đứng điểm D do riêng lực V gây ra là:

$$y_D^V = -\frac{192V}{EI} \quad (\text{d})$$

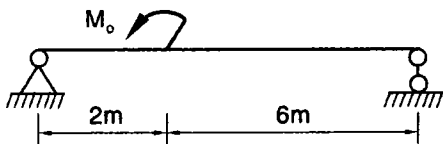
Đưa (c) và (d) vào điều kiện (a) và (b) ta được:

$$\frac{140}{EI} - \frac{192V}{EI} = 0 \quad \text{hay } V = \frac{140}{192} = 0,73 \text{ kN}$$

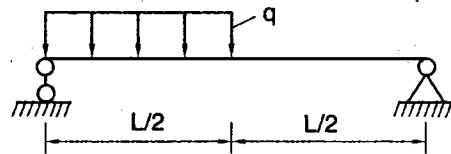
Sau khi đã tìm điều kiện V khung siêu tĩnh đã cho, sẽ vẽ được biểu đồ nội lực như là khung vẽ trên hình 8.18e. Ta dễ dàng vẽ được biểu đồ M, N, Q của khung này, kết quả cho trên hình 8.18f,g,h.

## 8.7 BÀI TẬP CHƯƠNG 8

8.1 Xác định đường đàn hồi dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn, biết  $M_o = 20 \text{ kNm}$ , EI không đổi. Hình 8.19.



Hình 8.19

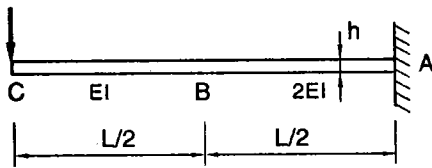


Hình 8.20

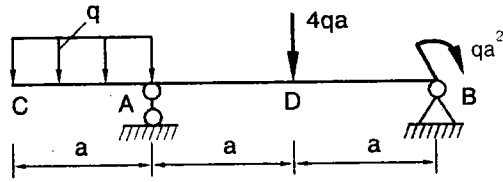
8.2 Xác định góc xoay ở hai đầu dầm và độ võng tại giữa dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn, EI không đổi. Hình 8.20.

8.3 Dầm mặt cắt ngang thay đổi và chịu lực như hình 8.21. Tính độ

võng tại dầm tự do và góc tại mặt cắt ngang giữa dầm.



Hình 8.21

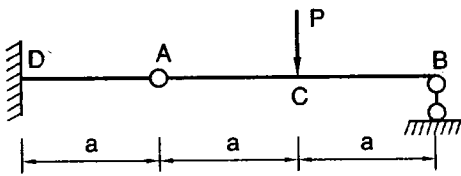


Hình 8.22

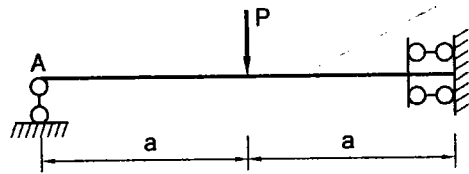
8.4 Dầm có độ cứng không đổi như hình 8.22. Xác định:

- a- Góc xoay tại A và B
- b- Độ võng tại mặt cắt D
- c- Độ võng và góc xoay tại C.

8.5 Tìm độ võng tại mặt cắt C, góc xoay bên trái và phải khớp A của dầm như hình 8.23, biết độ cứng EI là hằng số.



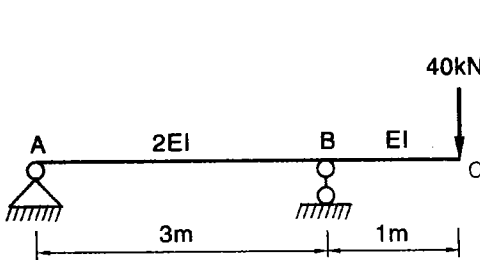
Hình 8.23



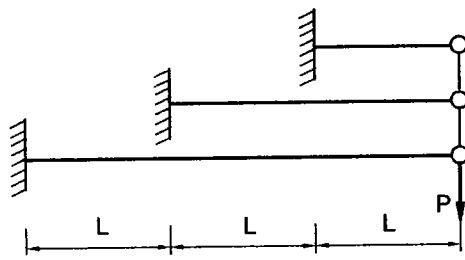
Hình 8.24

8.6 Tìm độ võng tại B, góc xoay tại A của dầm như hình 8.24, biết EI hằng số.

8.7 Xác định độ võng và góc xoay tại C hình 8.25.



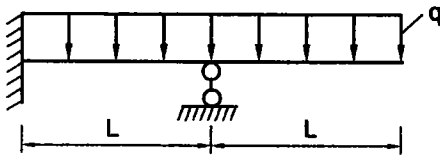
Hình 8.25



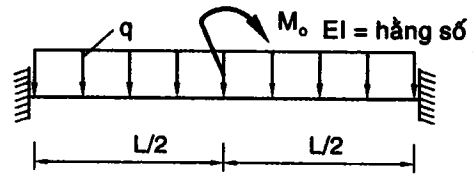
Hình 8.26

8.8 Một hệ thống gồm ba công xon, dầm tự do được liên kết với nhau bằng những giằng cứng như hình 8.26. Tính ứng suất cực đại ở mỗi dầm khi có lực treo ở dầm, biết độ cứng EI là hằng số.

8.9 Vẽ biểu đồ nội lực của dầm siêu tĩnh như hình 8.27. Viết phương trình đường đàn hồi, biết độ cứng  $EI$  là hằng số.



Hình 8.27



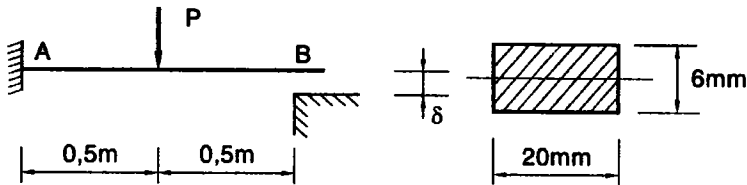
Hình 8.28

8.10 Xác định phản lực của dầm siêu tĩnh như hình 8.28,  $M = qL^2$ .

8.11 Thanh thép dài  $1m$ , mặt cắt chữ nhật  $20 \times 6mm$ , ngàm ở dầm A, chịu lực  $P = 30N$  đặt ở giữa nhịp. Kiểm tra độ bền của dầm.

Biết  $[\sigma] = 16kN/cm^2$ . Ở dầm B có khe hở  $\delta = 20mm$ .

Cho  $E = 2.10^5 MN/m^2$ .



Hình 8.29



## XOẮN THUẦN TÚY

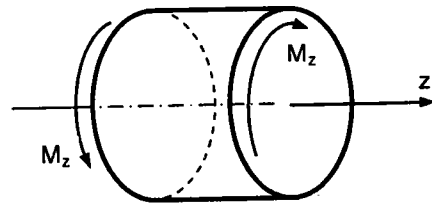
### 9.1 KHÁI NIỆM

Thanh chịu xoắn thuần túy khi trên mọi mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là mômen xoắn  $M_z$  (H.9.1).

$M_z$  được quy ước mang dấu dương khi nhìn vào mặt cắt thấy  $M_z$  quay thuận chiều kim đồng hồ, ví dụ chiều  $M_z$  trên hình 9.1 là dương.

Ngoại lực gây xoắn là các mômen tập trung hay phân bố tác dụng trong các mặt phẳng thẳng góc với trục thanh (H.9.2.a).

Trong thực tế có nhiều cấu kiện trong cơ khí, xây dựng chịu xoắn như các trục truyền chuyển động quay, kết cấu chịu lực không gian, dầm đỡ ô văng...



**Hình 9.1** Chiều dương của mômen xoắn nội lực  $M_z$

Biểu đồ nội lực của thanh chịu xoắn được vẽ bằng cách xác định nội lực theo phương pháp mặt cắt và điều kiện cân bằng  $\sum M/z = 0$ .

**Ví dụ 9.1** Vẽ biểu đồ  $M_z$  của một trục chịu xoắn như hình 9.2a.

Cho  $m = 5kNm/m$ ;  $M_1 = 10kNm$ ;  $M_2 = 5kNm$ .

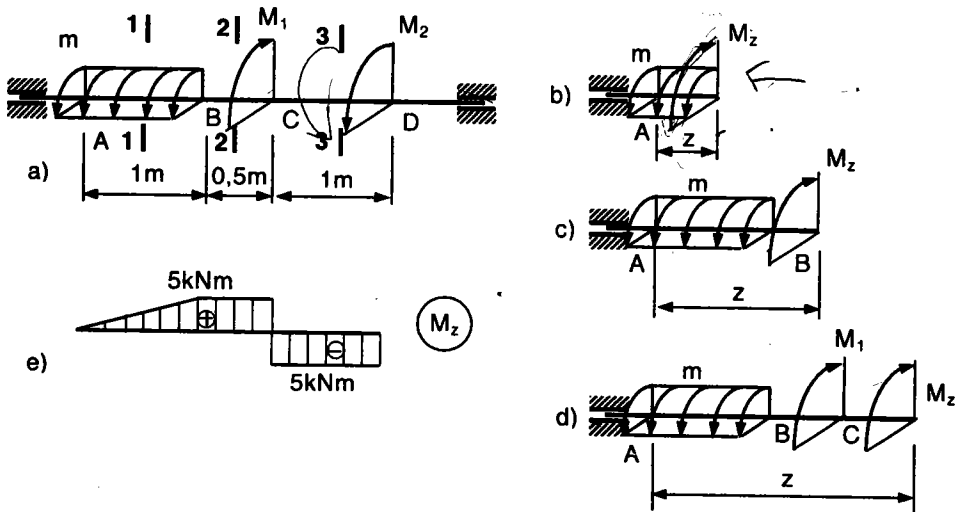
**Giải** Trong đoạn AB, ngoại lực là mômen phân bố đều, thực hiện mặt cắt (1-1) tại một vị trí cách A một đoạn  $z$ , xét điều kiện cân bằng phần trái (H.9.2.b), ta có:

$$\sum M/z = 0 \Rightarrow M_z = 5z$$

Trong đoạn BC và CD lần lượt dùng dùng mặt cắt (2-2) và (3-3) ta thu được đoạn BC:  $M_z = 5(1) = 5kNm$

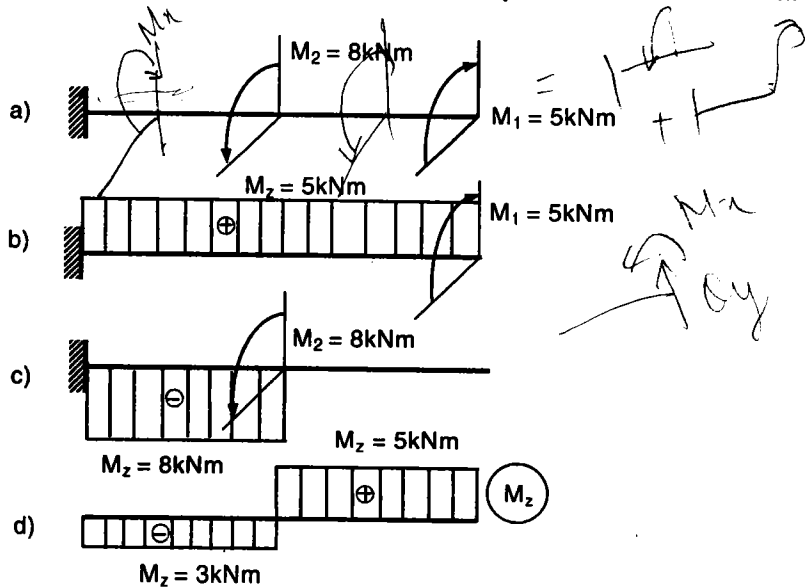
Đoạn CD:  $M_z = 5 - 10 = -5kNm$

Biểu đồ nội lực vẽ ở hình 9.2e.



**Hình 9.2** Vẽ biểu đồ nội lực bằng phương pháp mặt cắt

**Ví dụ 9.2** Vẽ biểu đồ  $M_z$  của một thanh console chịu xoắn như hình 9.3a.



**Hình 9.3** Vẽ biểu đồ nội lực (áp dụng nguyên lý cộng tác dụng)

**Giải** Trường hợp này ta có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, phân tích thành tổng của hai trường hợp tác dụng riêng lẻ như trên hình 9.3b và hình 9.3c. Trên mỗi trường hợp, ngoại lực là một ngẫu lực gây xoắn, do đó nội lực trong thanh cũng là mômen xoắn, giá trị của nội lực phải bằng giá trị của ngoại lực và ngược chiều.

Trong trường hợp chỉ có một mômen xoắn ngoại lực tác dụng, ta thấy dấu của nội lực  $M_z$  là dương khi nhìn vào đầu thanh thấy mômen xoắn ngoại lực quay thuận chiều kim đồng hồ và ngược lại. Biểu đồ nội lực của từng thanh vẽ ngay trên hình 9.3b,c. Biểu đồ kết quả (H.9.3d) là tổng đại số hai biểu đồ trên.

Khi tính toán các trục truyền động, thường ta chỉ biết công suất truyền của mô tơ tính bằng mã lực hay kilôwatt và tốc độ trục quay bằng vòng/phút, do đó cần chuyển đổi công suất truyền ra ngẫu lực xoắn tác dụng lên trục.

Giả sử có một ngẫu lực xoắn  $M_0$  (đơn vị là Nm) tác dụng làm trục quay một góc  $\alpha$  (radian) trong thời gian  $t$ , công sinh ra là:

$$A = M_0\alpha \quad (a)$$

Công suất là:

$$W = \frac{A}{t} = \frac{M_0\alpha}{t} = M_0 \frac{\alpha}{t} = M_0\omega \quad (b)$$

trong đó  $\omega$  là vận tốc góc (rad/s), đơn vị của công suất là Nm/s.

Gọi  $n$  là số vòng quay của trục trong một phút (vòng/phút), ta có:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad (c)$$

Từ (b) và (c), ta suy ra:

a) Nếu  $W$  tính bằng mã lực (CV, HP), 1 mã lực = 750Nm/s = 0,736kW:

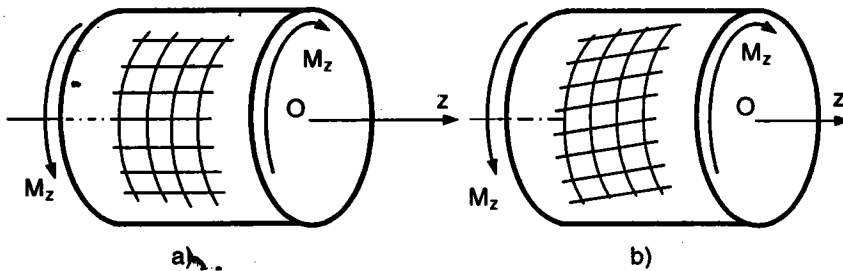
$$M_0 = \frac{30W}{\pi n} = \frac{30(750)W}{\pi n} = 7162 \frac{W}{n} \quad (Nm) \quad (9.1)$$

b) Nếu  $W$  tính bằng kilôwatt (kW), 1kW  $\approx$  1020Nm/s:

$$M_0 = \frac{30W}{\pi n} = \frac{30(1020)W}{\pi n} = 9740 \frac{W}{n} \quad (Nm) \quad (9.2)$$

## 9.2 XOẮN THANH THẲNG TIẾT DIỆN TRÒN

Lấy một thanh thẳng tiết diện tròn, trên mặt ngoài có vạch những đường song song và những đường tròn thẳng góc với trục, tạo thành lưới ô vuông (H.9.4a). Tác dụng lên hai đầu thanh hai ngẫu lực xoắn ngược chiều, ta thấy trục thanh vẫn thẳng, chiều dài thanh không đổi, những đường tròn thẳng góc với trục vẫn phẳng và thẳng góc với trục, những đường song song với trục thành những đường xoắn ốc, lưới ô vuông thành lưới bình hành (H.9.4b).



**Hình 9.4** Nhận xét biến dạng xoắn trên mặt ngoài

Từ các nhận xét trên, có thể đưa ra các giả thiết làm nền tảng cho việc thiết lập công thức tính toán như sau:

a) Trong quá trình biến dạng, mặt cắt ngang vẫn phẳng và thẳng góc với trục thanh.

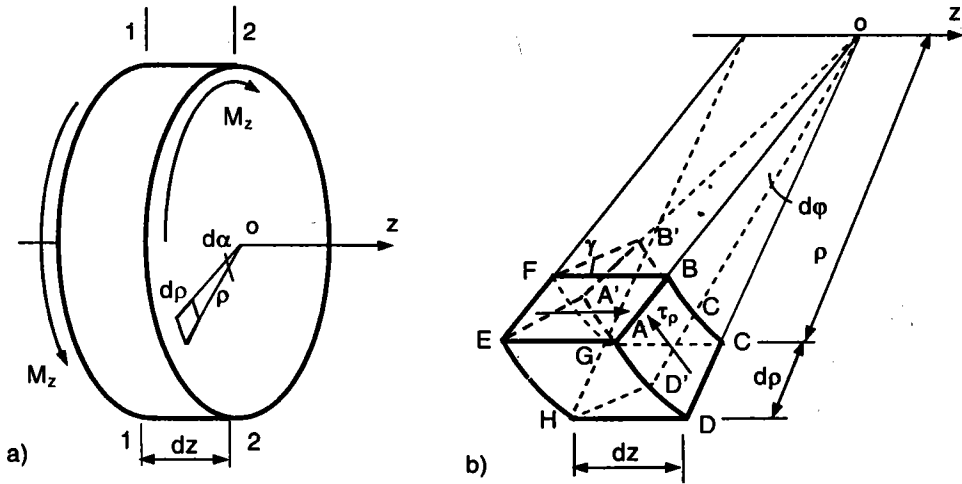
b) Trong quá trình biến dạng, các mặt cắt ngang không có chuyển vị theo phương trục thanh, mọi bán kính vẫn thẳng và chiều dài không đổi.

### 9.2.1 Công thức ứng suất tiếp

Có thể nhận thấy, theo các giả thiết trên đây biến dạng của thanh chịu xoắn thuần túy chỉ là sự xoay tương đối giữa các mặt cắt ngang quanh trục  $z$ .

Để xét biến dạng xoắn của một phân tố tại một điểm bất kỳ bán kính  $\rho$  trong thanh, ta tách phân tố (H.9.5a) bằng ba cặp mặt cắt như sau:

- Hai mặt cắt (1-1) và (2-2) thẳng góc với trục cách nhau đoạn  $dz$ .
- Hai mặt cắt chứa trục hợp với nhau một góc  $d\alpha$ .
- Hai mặt cắt trụ đồng trục  $z$  (trục thanh) bán kính  $\rho$  và  $\rho + d\rho$ .



**Hình 9.5** Nghiên cứu biến dạng của phân tử chịu xoắn

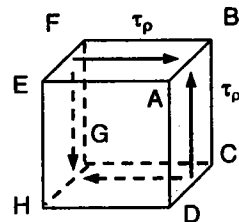
Theo các giả thiết, trong quá trình biến dạng, so với các điểm E, F, G, H thuộc mặt cắt (1-1), các điểm A, B, C, D của phân tử trên mặt cắt (2-2) dịch chuyển đến A', B', C', D' phải nằm trên cung tròn bán kính  $\rho$  và  $\rho + d\rho$ , đồng thời OA'B' và OC'D' phải thẳng hàng (H.9.5.b).

Gọi  $d\varphi$  là góc giữa hai đường thẳng OAB và OA'B', đó là góc xoay của mặt cắt (2-2) so với mặt cắt (1-1) quanh trục z, gọi là *góc xoắn tương đối giữa hai tiết diện lân cận cách nhau dz*.

Góc B'FB là biến dạng trượt (góc trượt)  $\gamma$  của phân tử, ta có:

$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{BB'}{FB} = \frac{\rho d\varphi}{dz} \quad (a)$$

Theo giả thiết b), rõ ràng không thể có ứng suất pháp tác dụng lên các mặt của phân tử. Theo giả thiết a) các góc vuông của mặt (CDHG) và mặt (BAEF) không thay đổi nên không có ứng suất tiếp hướng tâm trên mặt (ABCD). Do giả thiết b) mọi bán kính vẫn thẳng nên không có ứng suất tiếp hướng tâm trên mặt (ABEF).



**Hình 9.6** Phân tử trượt thuần túy

Như vậy, trên mặt cắt ngang của thanh chịu xoắn thuần túy chỉ tồn tại ứng suất tiếp theo phương vuông góc bán kính, gọi là  $\tau_\rho$  và phân tử đang xét ở trạng thái trượt thuần túy (H.9.6).

Áp dụng định luật Hooke về trượt, ta có:

$$\tau_\rho = G\gamma \quad (b)$$

Đưa (a) vào (b), ta được:

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (c)$$

Gọi  $dA$  là một diện tích vô cùng nhỏ bao quanh điểm đang xét, thì  $\tau_\rho dA$  là lực tiếp tuyến tác dụng trên diện tích đó và  $\tau_\rho dA\rho$  là mômen của lực  $\tau_\rho dA$  đối với tâm O. Tổng các mômen này phải bằng  $M_z$ , cho nên ta có thể viết:

$$M_z = \int_A \tau_\rho \rho dA \quad (d)$$

Thay (c) vào (d):

$$M_z = \int_A G\rho \frac{d\varphi}{dz} \rho dA \quad (e)$$

Vì  $Gd\varphi/dz$  là hằng số đối với mọi điểm thuộc mặt cắt A, nên ta có thể đưa ra ngoài dấu tích phân, khi đó tích phân  $\int_A \rho^2 dA$  chính là mômen quán tính cực  $I_\rho$  của mặt cắt ngang đối với tâm O, ta được:

$$M_z = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} I_\rho \quad (f)$$

Từ (f) ta có:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GI_\rho} \quad (g)$$

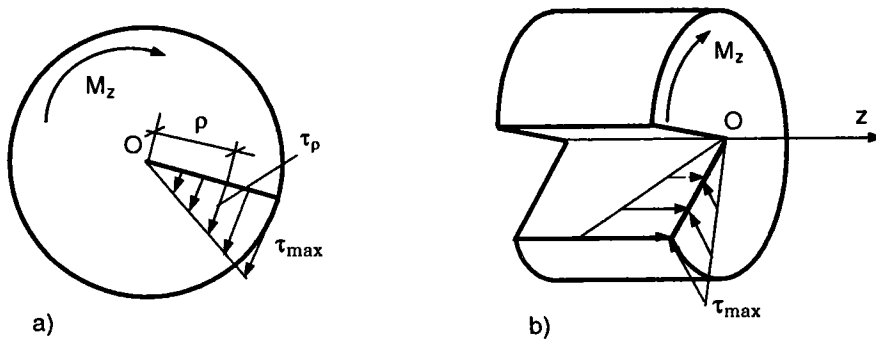
$d\varphi/dz$  chính là góc xoắn trên một đơn vị chiều dài gọi là *góc xoắn tỉ đối* (rad/m). Đặt  $\theta = d\varphi/dz$ , ta có:

$$\theta = \frac{M_z}{GI_\rho} \quad (9.3)$$

Thay (g) vào (c) ta được công thức tính ứng suất tiếp:

$$\tau_\rho = \frac{M_z}{I_\rho} \rho \quad (9.4)$$

Ứng suất tiếp thay đổi theo quy luật bậc nhất, có phương vuông góc bán kính, cùng chiều quay với  $M_z$ , bằng không tại tâm O và cực đại tại những điểm trên chu vi (H.9.7a). Trên H.9.7b, thể hiện ứng suất tiếp đối ứng trên các mặt chứa trục.



**Hình 9.7** Phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang và ứng suất tiếp đối ứng

Trong (9.4), thay  $\rho$  bằng bán kính R, ta được giá trị ứng suất tiếp cực đại:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_\rho} R = \frac{M_z}{W_\rho} \tag{9.5}$$

Với:  $W_\rho = \frac{I_\rho}{R}$

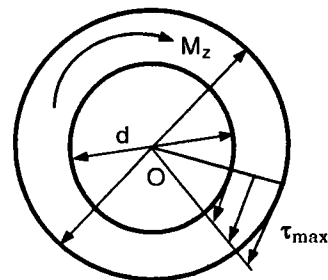
$W_\rho$  - mômen chống xoắn của mặt cắt ngang.

Tiết diện tròn đặc:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3$$

Tiết diện tròn rỗng:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{R} = \frac{\pi R^3}{2} (1 - \eta^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \eta^4) \approx 0,2D^3 (1 - \eta^4)$$



**Hình 9.8** Ứng suất tiếp trên tiết diện tròn rỗng

trong đó  $\eta = d/D$  với  $d$  là đường kính trong và  $D$  là đường kính ngoài của thanh.

### 9.2.2 Công thức tính biến dạng khi xoắn

Từ (g), ta có:

$$d\varphi = \frac{M_z}{GI_\rho} dz$$

$d\varphi$  - là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau  $dz$ , do đó góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách một đoạn bằng chiều dài  $L$  của thanh là:

$$\varphi = \int_0^L d\varphi = \int_0^L \frac{M_z}{GI_\rho} dz \quad (9.6)$$

Khi thanh gồm nhiều đoạn, mỗi đoạn có  $M_z/GI_\rho$  là hằng số, công thức (9.6) trở thành:

$$\varphi = \sum_i \left( \frac{M_z L}{GI_\rho} \right)_i \quad (9.7)$$

Góc xoắn  $\varphi$  được quy ước dương theo chiều dương của mômen nội lực và ngược lại.

### 9.2.3 Điều kiện bền - điều kiện cứng

Để thanh chịu xoắn không bị phá hoại do bền phải đảm bảo điều kiện bền:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (9.8)$$

$[\tau] = \tau_0 / n$  với:  $\tau_0$  - ứng suất tiếp nguy hiểm của vật liệu, xác định từ thí nghiệm;  $n$  - hệ số an toàn.

Thí nghiệm xác định  $\tau_0$  khó đạt yêu cầu chính xác, ta có thể dùng thuyết bền vì trạng thái trượt thuần túy là một trạng thái ứng suất phức tạp.

Theo thuyết bền ứng suất tiếp, điều kiện bền là:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Thay  $\sigma_1 = |\tau|$  và  $\sigma_3 = -|\tau|$ , ta được:

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (9.9)$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng, điều kiện bền là:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)} \leq [\sigma]$$



Thay  $\sigma_1 = |\tau|, \sigma_2 = 0$  và  $\sigma_3 = -|\tau|$ , ta được:

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (9.10)$$

Ngoài yêu cầu về bền, thanh chịu xoắn còn phải đảm bảo điều kiện cứng:

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad (9.11)$$

**Chú ý:**  $\theta = M_z / GI_p$  có đơn vị là *Radian/m*. Do đó, nếu  $[\theta]$  được cho bằng *độ/mét* ( $^\circ/m$ ) thì phải đổi ra *Radian/m* theo hệ thức:

$$\frac{\theta(\frac{Rad}{m})}{2\pi} = \frac{\theta(\frac{^\circ}{m})}{360} \quad (9.12)$$

Dựa trên điều kiện bền (9.9) hoặc (9.10) và điều kiện cứng (9.11), ta có thể tính toán thanh chịu xoắn theo ba bài toán cơ bản như sau:

- Kiểm tra bền, cứng (bài toán kiểm tra)
- Xác định tải trọng cho phép
- Xác định đường kính (bài toán thiết kế).

### 9.2.4 Thế năng biến dạng đàn hồi

Trong trường hợp tổng quát, thế năng riêng tích lũy trong một đơn vị thể tích là:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

Thay  $\sigma_1 = |\tau|, \sigma_2 = 0$  và  $\sigma_3 = -|\tau|$ , ta được:  $u = \frac{1 + \mu}{E} \tau_p^2$  (a)

với  $E = 2G(1 + \mu)$ , thay vào (a):  $u = \frac{1}{2} \frac{\tau_p^2}{G}$  (b)

Thế năng tích lũy trong một đoạn thanh  $dz$  là:

$$dU = \int_V u dV = \int_A u dAdz \quad (c)$$

Thay (b) vào (c), ta được:

$$dU = \int_A \frac{\tau_p^2}{2G} dAdz = \int_A \frac{M_z^2 \rho^2}{2I_p^2 G} dAdz = \frac{1}{2G} \frac{M_z^2}{I_p^2} dz \int_A \rho^2 dA$$

hay: 
$$dU = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{GI_p} dz \quad (d)$$

Vậy thế năng trên đoạn thanh có chiều dài  $L$  là:

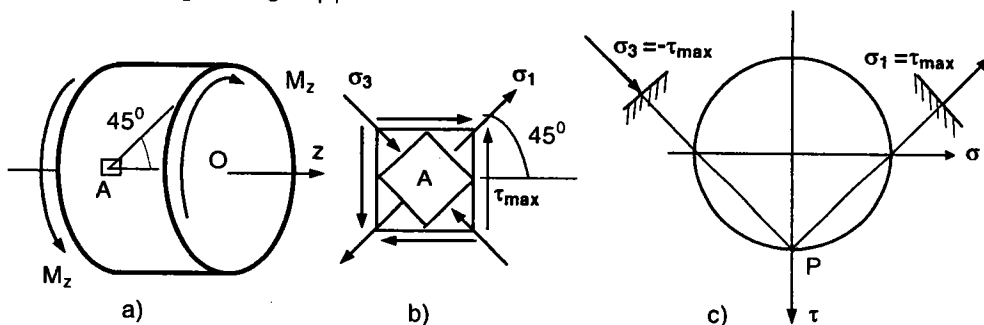
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2 dz}{GI_p} \quad (9.13)$$

Đối với một thanh gồm nhiều đoạn, mỗi đoạn có  $M_z/GI_p$  là hằng số, công thức (9.13) trở thành:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{M_z^2}{GI_p} \right)_i \quad (9.14)$$

### 9.2.5 Dạng nứt gãy khi xoắn

Nghiên cứu trạng thái ứng suất của trục tròn chịu xoắn, ta thấy tại một điểm A trên mặt ngoài (H.9a), phân tố ở trạng thái trượt thuần túy, ứng suất tiếp có trị số cực đại  $\tau_{\max}$ , ở trạng thái này, theo hai phương nghiêng  $45^\circ$  so với trục có ứng suất kéo chính và ứng suất nén chính  $\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|$  (H.9.9b,c).

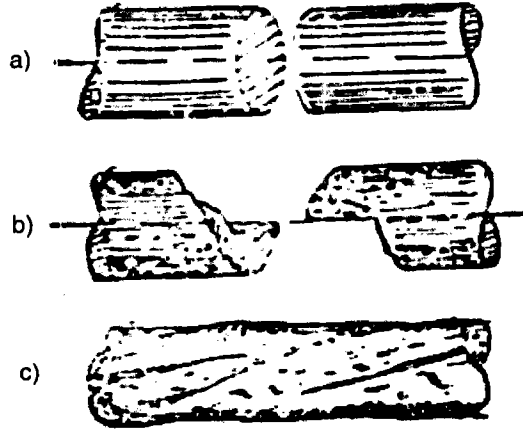


**Hình 9.9** Trạng thái ứng suất tại một điểm trên mặt ngoài của thanh chịu xoắn

Mặt khác, qua thí nghiệm, ta cũng biết rằng vật liệu dẻo (như thép) chịu kéo, chịu nén tốt như nhau, còn chịu cắt thì kém hơn, do đó, khi một trục thép bị xoắn sẽ bị gãy theo mặt cắt ngang, do ứng suất tiếp  $\tau_{\max}$  trên mặt cắt ngang (H.9.10.a).

Với vật liệu dòn như gang, chịu nén và chịu cắt rất tốt, còn chịu kéo rất kém nên khi xoắn sẽ bị gãy theo mặt nghiêng  $45^\circ$  so với trục do ứng suất kéo chính  $\sigma_1$  (H.9.10b).

Với vật liệu có cấu tạo thớ như gỗ, chịu cắt dọc thớ rất kém nên khi xoắn sẽ bị nứt dọc theo đường sinh do ứng suất ứng suất tiếp đối ứng với ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang (H.9.10c).



**Hình 9.10** Dạng phá hoại xoắn ứng với các loại vật liệu  
a) Thép; b) Gang; c) Gỗ

**Ví dụ 9.3** Một động cơ có công suất  $10kW$ , truyền một ngẫu lực xoắn lên một trục tròn đường kính  $D$  tại tiết diện  $A$ , vận tốc trục  $n = 1400$  *vg/phút*. Giả sử hiệu suất truyền là  $100\%$ . Khi đó tại tiết diện  $B, C$  nhận được công suất truyền lần lượt là  $3kW$  và  $7kW$  (H.9.11a). Xác định đường kính  $D$ , sau đó tính góc xoắn  $\varphi_{AC}$ .

Cho  $[\sigma] = 16kN/cm^2$ ;  $[\theta] = 0,25^0/m$ ;  $a = 0,5m$ ;  $G = 8.10^3kN/cm^2$ .

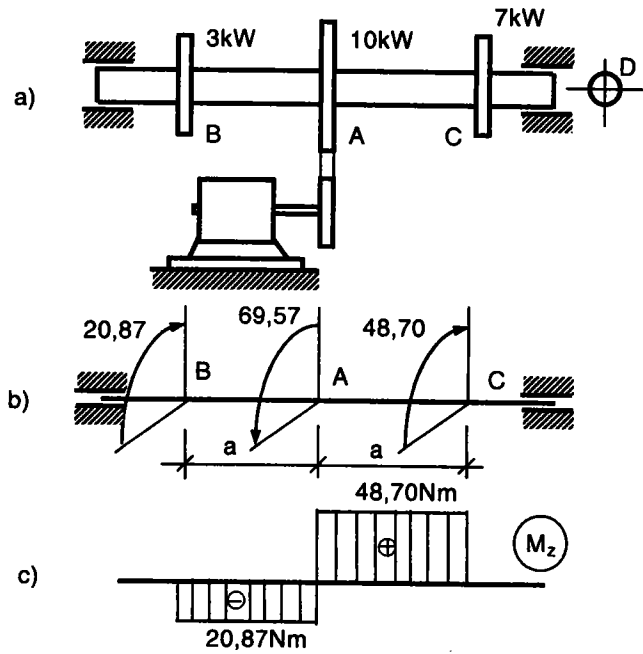
**Giải** Gọi ngẫu lực xoắn tác dụng tại  $A, B, C$  lần lượt là  $M_1, M_2, M_3$ . Áp dụng công thức chuyển đổi, ta được:

$$M_1 = \frac{9740(10)}{1400} = 69,57 Nm$$

$$M_2 = \frac{9740(3)}{1400} = 20,87 Nm$$

$$M_3 = \frac{9740(7)}{1400} = 48,7 Nm$$

Sơ đồ tính của trục ở (H.9.11b), biểu đồ mômen vẽ ở (H.9.11c).



**Hình 9.11** Chuyển công suất động cơ thành mômen xoắn và biểu đồ  $M_z$

Theo điều kiện bền:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0,2D^3} \leq [\tau] \Rightarrow D^3 \geq \frac{M_z}{0,2[\tau]} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2[\tau]}}$$

với:  $[\tau] = [\sigma] / 2 = 8 \text{ kN/cm}^2$ ;  $M_z = 48,7 \text{ Nm} = 4870 \text{ Ncm}$ ,

ta được:  $D \geq 14,49 \text{ cm}$

Theo điều kiện cứng:

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \Rightarrow \frac{M_z}{GI_p} = \frac{M_z}{G(0,1)D^4} \leq [\theta]$$

$$\Rightarrow D^4 \geq \frac{M_z}{G(0,1)[\theta]} \Rightarrow D \geq \sqrt[4]{\frac{M_z}{G(0,1)[\theta]}}$$

với:  $[\theta] = 0,25^\circ / \text{m} = 0,00436 \text{ Rad} / \text{m}$ ;  $M_z = 48,7 \text{ Nm} = 4870 \text{ Ncm}$

$$G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$$

ta được:  $D \geq 11,17 \text{ cm}$

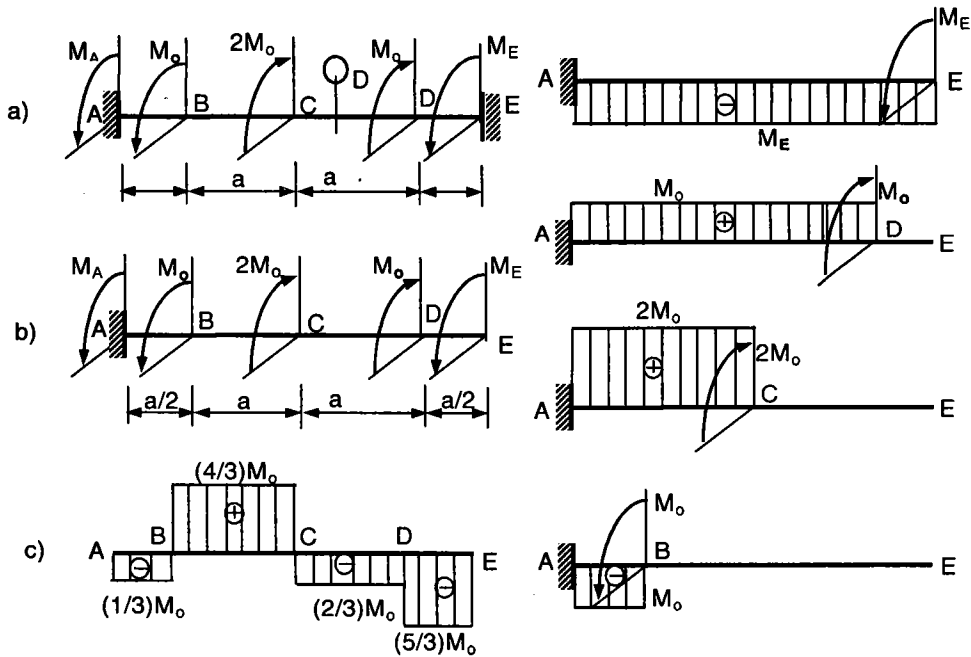
(b)

Để thỏa cả hai yêu cầu (a), (b), ta chọn  $D = 15\text{cm}$ .

Áp dụng công thức (9.6), ta được:

$$\varphi_{AC} = \sum_i \left( \frac{M_z L}{GI_p} \right)_i = \frac{4870 \times 50}{8 \times 10^3 \times 0,1 \times 15^4} = 0,006 \text{ Rad}$$

**Ví dụ 9.4** Một thanh tiết diện tròn đường kính  $D$  hai đầu ngàm chịu lực như hình 9.12. Vẽ biểu đồ  $M_z$  và xác định giá trị mômen  $M_0$  theo điều kiện bền và điều kiện cứng. Cho  $[\tau]$  và  $[\theta]$ .



**Hình 9.12** Bài toán siêu tĩnh xoắn

Ta thấy, ngoại lực là các mômen xoắn tác dụng trong mặt phẳng thẳng góc với trục thanh thì phản lực phát sinh tại các liên kết ngàm A và E phải là các mômen xoắn  $M_A, M_B$  trong các mặt phẳng thẳng góc với trục thanh, giả sử  $M_A, M_B$  có chiều như trên hình 9.12a.

Loại bài toán này ta chỉ có thể áp dụng một điều kiện cân bằng tĩnh học  $\Sigma M/z = 0$ , ta có:

$$M_A + M_B = 2M_0 \tag{a)}$$

Phương trình (a) chứa hai ẩn, để đủ điều kiện xác định phản lực (hay nội lực) của thanh, ta phải bổ sung một phương trình, gọi là phương trình biến dạng, thiết lập từ điều kiện biến dạng của bài toán. Ta gặp bài toán siêu tĩnh về xoắn.

Thông thường, ta làm như sau:

Bỏ ngàm  $E$ , thay bằng phản lực tương ứng  $M_E$  (H.9.12b).

Tại  $E$  là tiết diện ngàm, do đó góc xoay của tiết diện tại  $E$  phải bằng không,  $\varphi_E = 0$  chính là điều kiện biến dạng.

Áp dụng công thức (9.6) tính  $\varphi_E$  rồi dùng điều kiện  $\varphi_E = 0$  ta viết được phương trình biến dạng.

Trước tiên, vẽ biểu đồ mômen xoắn do từng trường hợp tải gây ra theo cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng (H.9.12c).

Tính  $\varphi_E$  theo (9.6) cho từng bài toán riêng lẻ trên hình 9.12c:

$$\varphi_E = \varphi_{EA} = \sum \left( \frac{M_z L}{GI_p} \right)_i$$

$$\varphi_E = -\frac{M_E 3a}{GI_p} + \frac{M_o 5a}{GI_p 2} + \frac{2M_o 3a}{GI_p 2} - \frac{M_o a}{GI_p 2} = 0$$

$$\Rightarrow M_E = \frac{5}{3} M_o$$

Kết quả dương,  $M_E$  đúng chiều chọn.

Xác định được  $M_E$ , ta vẽ được biểu đồ mômen  $M_z$  ở hình 9.12d.

Căn cứ biểu đồ nội lực, ta thấy:  $M_{zmax} = (5/3)M_o$

Từ điều kiện bền, ta có:

$$\tau_{max} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{M_z}{0,2D^3} \leq [\tau]$$

$$\Rightarrow \frac{5M_o}{3(0,2)D^3} \leq [\tau] \Rightarrow M_o \leq [\tau] \frac{3(0,2)D^3}{5} \quad (a)$$

Từ điều kiện cứng, ta có:

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \Rightarrow \frac{M_z}{G(0,1)D^4} \leq [\theta]$$

$$\Rightarrow \frac{5M_o}{3G(0,1)D^4} \leq [\theta] \Rightarrow M_o \leq [\theta] \frac{3G(0,1)D^4}{5} \quad (b)$$

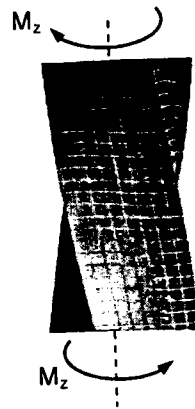
Từ (a) và (b) chọn  $M_o$  có giá trị bé làm tải trọng cho phép.

### 9.3 XOẮN THANH THẲNG TIẾT DIỆN CHỮ NHẬT

Thí nghiệm xoắn thanh tiết diện chữ nhật cho thấy những đường song song và thẳng góc với trục không còn song song và thẳng góc với trục, tiết diện bị vênh (H.9.13), giả thiết mặt cắt phẳng không thể áp dụng được.

Do đó, không thể dựa trên các giả thiết để đơn giản hóa bài toán được.

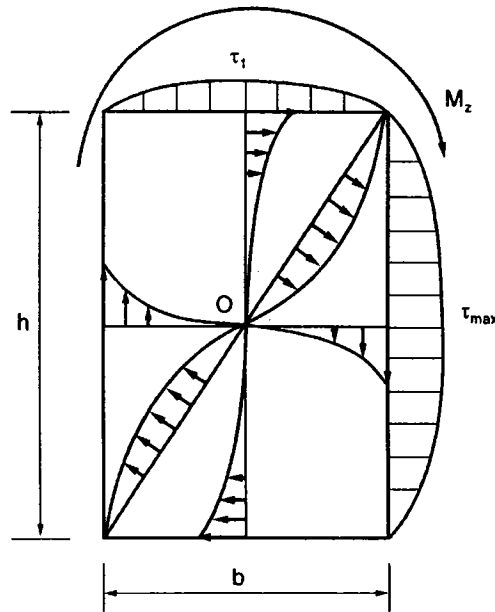
Nghiên cứu xoắn thanh tiết diện chữ nhật bằng lý thuyết đàn hồi, người ta thu được các kết quả như sau.



**Hình 9.13** Thanh tiết diện chữ nhật chịu xoắn

Trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất tiếp, tại tâm và các góc, ứng suất tiếp bằng không. Trên hai trục đối xứng của tiết diện, ứng suất thay đổi theo đường cong, bằng không tại tâm và đạt giá trị cực đại tại trung điểm của các cạnh. Tại trung điểm cạnh dài, ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất  $\tau_{\max}$ ; tại trung điểm cạnh ngắn, ứng suất nhỏ hơn  $\tau_{\max}$ , gọi là  $\tau_1$ .

Phân bố ứng suất tiếp tại các điểm trên các trục đối xứng, các cạnh tiết diện và các đường chéo được biểu diễn ở hình 9.14.



**Hình 9.14** Ứng suất tiếp do xoắn trên tiết diện chữ nhật

a) Ứng suất tiếp:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha h b^2}; \quad \tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (9.15)$$

b) Góc xoắn tương đối:

$$\theta = \frac{M_z}{\beta G h b^3} \quad (9.16)$$

trong đó  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  là các hệ số phụ thuộc tỷ số (cạnh dài/cạnh ngắn) được cho trong bảng 9.1.

**Bảng 9.1** Giá trị  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$

h/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3
$\alpha$	0,203	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263
$\gamma$	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753

h/b	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma$	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

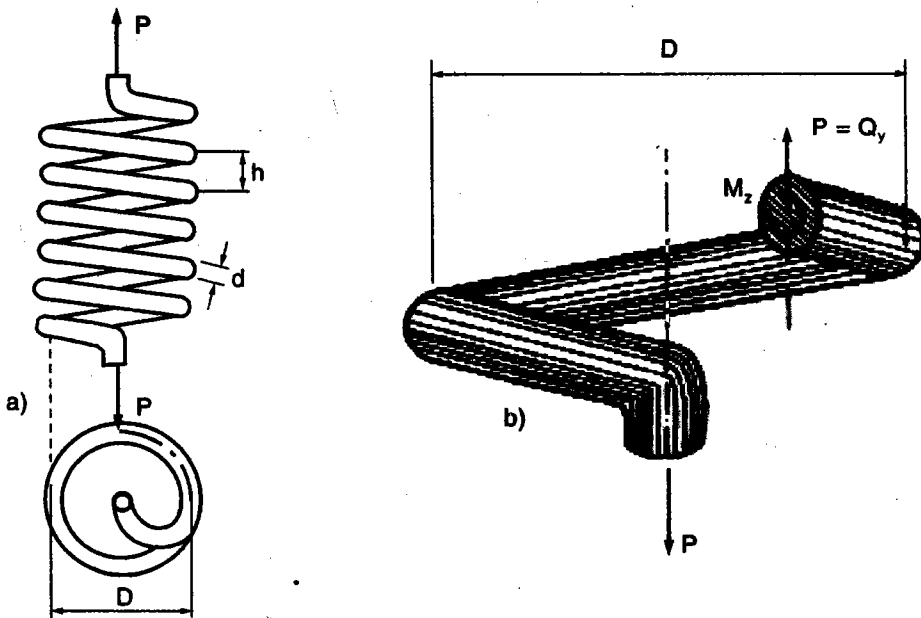


**9.4 TÍNH LÒ XO HÌNH TRỤ BƯỚC NGẮN**

Lò xo là một bộ phận được dùng rộng rãi trong ngành cơ khí chế tạo, được lắp đặt tại những chỗ cần giảm chấn do tải trọng động như đế móng thang máy, hệ thống nhún trong ô tô, để mô tơ công suất lớn...

Lò xo hình trụ được cấu tạo bằng cách quấn một sợi dây thép tiết diện vuông, chữ nhật hoặc tròn quanh một lõi hình trụ đường kính trung bình  $D$ , trong sử dụng, lò xo chỉ chịu lực theo phương trục của hình trụ này.

Trong phần này, chỉ xét lò xo có các vòng gần nhau gọi là lò xo hình trụ bước ngắn (H.9.15a).



**Hình 9.15** a) Lò xo hình trụ bước ngắn  
b) Nội lực trên tiết diện dây lò xo

Dùng một mặt cắt chứa trục trụ cắt qua một sợi dây lò xo, tách lò xo làm hai phần, xét điều kiện cân bằng của một phần lò xo như trên hình 9.15b, ta được:

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow Q_y = P$$

$$\Sigma M / o = 0 \Rightarrow M_z = P \frac{D}{2}$$

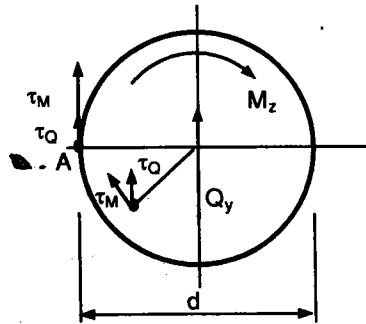
Như vậy trên mặt cắt đang xét có tác dụng của lực cắt  $Q_y$  và mômen xoắn  $M_z$ , chúng đều gây ứng suất tiếp:

$$\tau = \tau_M + \tau_Q$$

Tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang, các thành phần ứng suất được biểu diễn như hình 9.16. Bỏ qua độ nghiêng của dây lò xo, coi tiết diện đang xét là tròn, ngoại lực tác dụng lên lò xo P là lực kéo hay nén có thể thấy rằng, tại mép trong của mặt cắt dây lò xo, điểm A trên hình 9.16, ứng suất tiếp đạt giá trị cực đại.

Ứng suất tiếp tại điểm nguy hiểm có thể tính như sau:

$$\tau_{\max} = \tau_Q + \tau_M = \frac{Q_y}{A} + \frac{M_z}{W_p} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{P \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}}$$



**Hình 9.16** Nội lực và ứng suất trên mặt cắt dây lò xo

Thực chất ứng suất tiếp do lực cắt ( $\tau_Q$ ) không phân bố đều, còn ứng suất do mômen xoắn ( $\tau_M$ ) tính như trên không chính xác vì tiết diện dây lò xo không tròn do độ nghiêng của vòng dây lò xo cũng như sợi dây lò xo không là thanh thẳng, cho nên trong tính toán thực hành, kể đến kết quả do thực nghiệm, ta có thể lấy:

$$\tau_{\max} = k \frac{P \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}} = k \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (9.17)$$

với:

$$k = \frac{\frac{D}{d} + 0,25}{\frac{D}{d} - 1}$$

$$\text{Điều kiện bền lò xo: } \tau_{\max} \leq [\tau] \quad (9.18)$$

Khi chế tạo lò xo, một đặc trưng rất quan trọng là độ co, dãn của lò xo khi chịu lực trục trụ, ta cần tính đại lượng này.

Công của ngoại lực  $P$  trên độ co, dãn  $\lambda$  của lò xo là:

$$A = \frac{1}{2} P \lambda \quad (a)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong lò xo (bỏ qua thế năng do  $Q_y$ ):

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{M_z^2 L}{GI_p} \right)_i$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{P^2 D^2}{4} \frac{\pi D n}{G \pi d^4 / 32} = \frac{1}{2} \frac{8 P^2 D^3 n}{G d^4} \quad (b)$$

Áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng, công ngoại lực  $A$  hoàn toàn chuyển thành thế năng biến dạng đàn hồi  $U$ .

Cho  $A = U$ , ta được:

$$\lambda = \frac{8 P D^3 n}{G d^4} = \frac{P}{C} \quad (9.19)$$

với:  $C = \frac{G d^4}{8 D^3 n}$

trong đó:  $C$  - độ cứng của lò xo

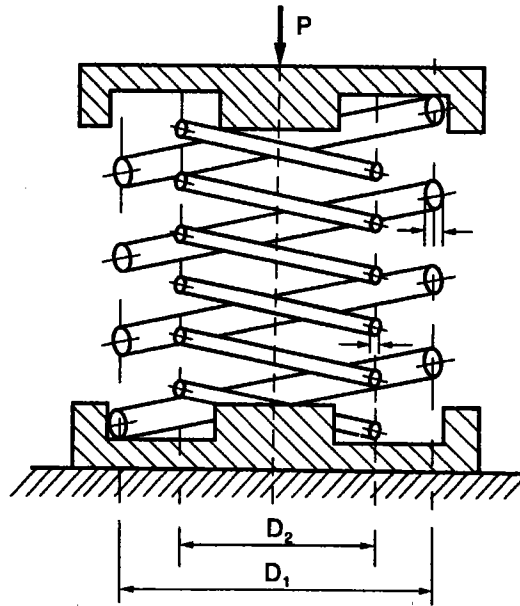
$n$  - số vòng chịu lực của lò xo

$d$  - đường kính sợi lò xo

$D$  - đường kính trung bình của trụ

$G$  - module đàn hồi trượt của vật liệu làm lò xo.

**Ví dụ 9.5** Hai lò xo có độ cứng  $C_1 = 8 \text{ kN/cm}$  và  $C_2 = 5 \text{ kN/cm}$  cùng chiều cao  $H$ , được ghép đồng trục trụ, cùng chịu một lực  $P = 50 \text{ kN}$  (H.9.17). Tính lực tác dụng trên từng lò xo, tính chuyển vị của điểm đặt lực.



**Hình 9.17** Hai lò xo ghép cùng trục trụ

**Giải** Tách lò xo, xét cân bằng phần trên, gọi phản lực của hai lò xo lần lượt là  $R_1, R_2$  (H.9.18), áp dụng điều kiện  $\Sigma Y = 0$ , ta được:

$$R_1 + R_2 = P \quad (a)$$

Đây là bài toán siêu tĩnh.

Điều kiện biến dạng là chuyển vị của lò xo 1 phải bằng lò xo 2:

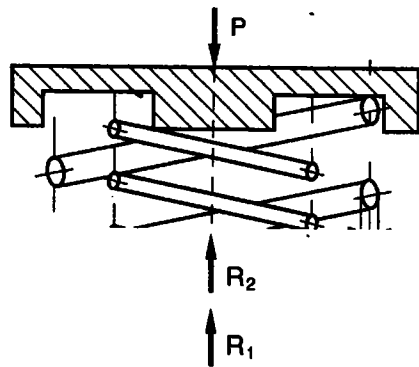
$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad (b)$$

Đưa (a) vào (b):

$$\Rightarrow \frac{R_1}{C_1} = \frac{R_2}{C_2} = \frac{R_1 + R_2}{C_1 + C_2} = \frac{P}{C_1 + C_2} \quad (c)$$

Từ (c) ta được:

$$R_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} P; \quad R_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} P$$



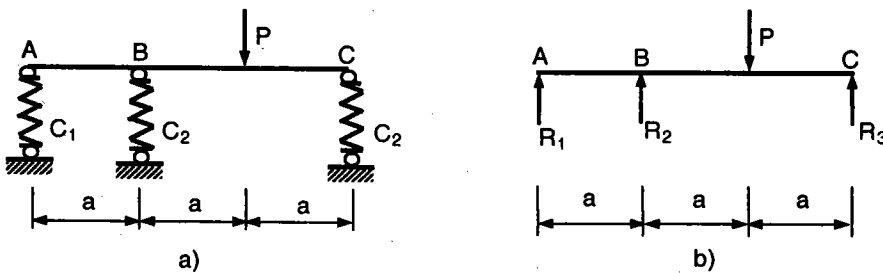
**Hình 9.18** Phản lực của hai lò xo theo trục trụ

Thay số:  $R_1 = 30,76kN$ ;  $R_2 = 19,23kN$

Chuyển vị của điểm đặt lực chính là độ co của lò xo 1 hoặc lò xo 2.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{R_1}{C_1} = \frac{30,76}{8} = 3,84 \text{ cm}$$

**Ví dụ 9.6** Một thanh tuyệt đối cứng được đặt trên ba lò xo có độ cứng lần lượt là  $C_1 = 5kN/cm$ ,  $C_3 = C_2 = 10kN/cm$  chịu tác dụng của lực  $P = 50kN$  như trên hình 9.19.a. Tìm lực tác dụng trên các lò xo, tính góc nghiêng của thanh ABC. Cho  $a = 0,5m$ .



**Hình 9.19** a) Thanh tuyệt đối cứng đặt trên ba lò xo  
b) Ngoại lực và các phản lực của các lò xo

**Giải** Gọi phản lực của các lò xo lần lượt là  $R_1, R_2, R_3$  (H.9.19b)

Điều kiện cân bằng:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 + R_3 = P \tag{a}$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow R_2a + R_33a = P2a$$

hay  $R_2 + 3R_3 = 2P \tag{b}$

Điều kiện biến dạng:

Giả sử, dưới tác dụng của ngoại lực, thanh ABC có vị trí mới A'B'C' như ở hình 9.20. Thanh ABC tuyệt đối cứng nên A'B'C' phải thẳng hàng, từ quan hệ hình học, ta thu được:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + (1/3)(\lambda_3 - \lambda_1)$$

$$\Rightarrow \frac{R_2}{C_2} = \frac{2R_1}{3C_1} + \frac{1}{3} \frac{R_3}{C_2} \tag{c}$$

Thay các giá trị  $C_1 = 5kN/cm$ ,  $C_3 = C_2 = 10kN/cm$  vào (c), rồi giải hệ (a), (b), (c), ta được phản lực của các lò xo:

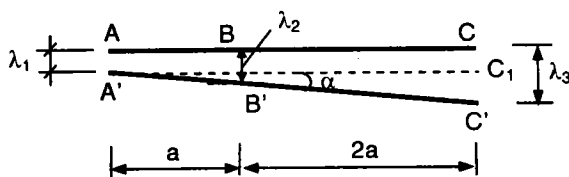
$$R_1 = P/9; R_2 = P/3; R_3 = 5P/9$$

Từ đó, ta tính được biến dạng của các lò xo:

$$\lambda_1 = 1,11cm; \lambda_2 = 1,66cm; \lambda_3 = 2,77cm$$

Góc nghiêng của thanh ABC là:

$$\tan \alpha \approx \alpha = (\lambda_3 - \lambda_1)/3a = 0,011 \text{ Rad}$$



**Hình 9.20** Sơ đồ chuyển vị của thanh ABC và biến dạng của các lò xo

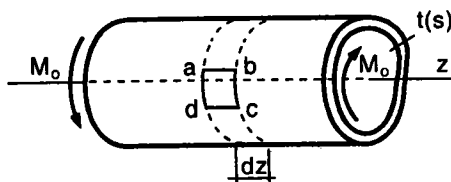
## 9.5 XOẮN THANH THÀNH MỎNG

Các kết quả nghiên cứu ở phần trên cho thấy:

- Đối với tiết diện tròn đặc hay tròn rỗng (bề dày thành không đổi) việc thiết lập công thức dễ dàng vì thanh có biến dạng đối xứng đối với trục thanh.
- Đối với thanh tiết diện chữ nhật, ellipse hay các tiết diện không có tính đối xứng với trục thanh, việc thiết lập công thức chính xác rất khó khăn và phức tạp.

Trong phần này chỉ thiết lập các công thức dựa trên phương pháp gần đúng, các công thức này phù hợp cho việc tính toán thực hành đồng thời không quá khác biệt với kết quả thực nghiệm.

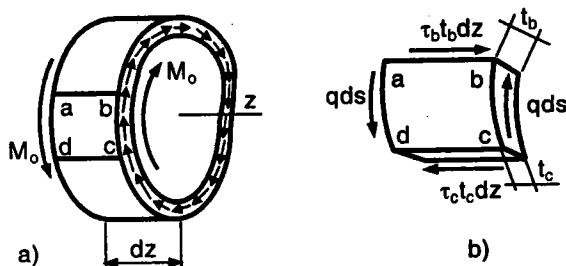
### 9.5.1 Thanh thành mỏng kín



**Hình 9.21** Ống thành mỏng chịu xoắn thuần túy

Xét một thanh thẳng dạng ống, bề dày thành bé (mỏng) và có thể thay đổi theo chu vi tiết diện nhưng là hằng số theo chiều dài thanh, chịu một cặp ngẫu lực xoắn đối đẳng  $M_o$  (H.9.21).

Giả sử mọi tiết diện làm việc như nhau, cùng chịu ứng suất và biến dạng giống nhau. Mặt khác do chiều dày nhỏ, có thể coi ứng suất là phân bố đều theo bề dày thành. Bây giờ, tách một đoạn thanh  $dz$ , luồng ứng suất tiếp trên tiết diện thể hiện ở hình 9.22.a, phương ứng suất tiếp trùng với tiếp tuyến của chu vi tiết diện tại điểm xét.



**Hình 9.22** a) Luồng ứng suất tiếp trên tiết diện  
b) Lực tác dụng lên các mặt phân tố

Trên đoạn  $dz$ , tách phân tố  $abcd$ , giả sử bề dày thành ống tại  $b$  là  $t_b$  và chịu ứng suất  $\tau_b$ , còn tại  $c$  là  $t_c$  và  $\tau_c$  (H.9.22b). Lực tác dụng lên hai mặt  $ab$  và  $cd$  của phân tố  $abcd$  lần lượt là  $\tau_b t_b dz$  và  $\tau_c t_c dz$ .

Điều kiện cân bằng hình chiếu theo phương  $z$  cho:

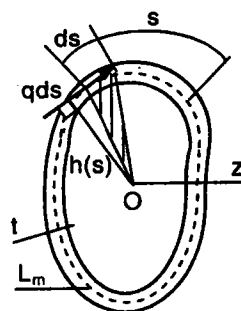
$$\tau_b t_b dz = \tau_c t_c dz$$

Suy ra:  $\tau_b t_b = \tau_c t_c$  (a)

Vì phân tố  $abcd$  lấy bất kỳ nên đẳng thức (a) chứng tỏ tích số ứng suất tiếp  $\tau$  và bề dày  $t$  tại một vị trí bất kỳ trên tiết diện là một hằng số.

$$q = \tau \cdot t = \text{hằng số} \quad (b)$$

Ta thấy  $q$  là lực tiếp tuyến tác dụng trên một đơn vị chiều dài theo chu vi tiết diện tính theo đường trung bình (đường đứt nét ở hình 9.23).



**Hình 9.23** Đường trung bình của tiết diện

Gọi  $h(s)$  là khoảng cách thẳng góc từ lực tiếp tuyến  $qds$  đến một điểm  $O$  bất kỳ trong phạm vi tiết diện (H.9.23), từ điều kiện cân bằng  $\Sigma M/z = 0$ , ta có:

$$M_0 = \oint qh(s)ds = q \oint h(s)ds \quad (c)$$

Vì  $h(s)ds$  là hai lần diện tích tam giác có đáy là  $ds$  và chiều cao  $h(s)$  nên ta có:

$$\oint h(s)ds = 2\Omega \quad (d)$$

trong đó  $\Omega$  là diện tích giới hạn bởi đường trung bình  $L_m$  của tiết diện (phần diện tích giới hạn bởi đường đứt nét trên hình 9.23).

Đưa (d) vào (c) ta được:

$$\begin{aligned} M_0 &= 2q\Omega \\ \Rightarrow q &= \frac{M_0}{2\Omega} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Ứng suất tiếp tác dụng trên tiết diện là:

$$q = \tau.t \Rightarrow \tau = \frac{q}{t} = \frac{M_0}{2t\Omega} \quad (9.21)$$

Để tính góc xoắn, ta áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng. Gọi  $\varphi$  là góc xoắn, công của ngoại lực là:

$$A = \frac{M_0\varphi}{2}$$

Thế năng riêng cho trường hợp xoắn thuần túy là:

$$u = \frac{\tau^2}{2G}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong một thể tích  $dV$  là:

$$dU = udV = \frac{\tau^2}{2G} tdsdz = \frac{\tau^2 t^2}{2G} \frac{ds}{t} dz = \frac{q^2}{2G} \frac{ds}{t} dz$$

$$\text{Do đó: } U = \int dU = \frac{q^2}{2G} \oint \int_0^L dz \frac{ds}{t} = \frac{q^2 L}{2G} \oint \frac{ds}{t}$$



Thay  $q$  trong công thức (9.20), ta được:

$$U = \frac{M_0^2 L}{8G\Omega^2} \oint \frac{ds}{t} \quad (9.22)$$

trong (9.22) tích phân đường được lấy theo chu vi kín của phần diện tích tiết diện giới hạn bởi đường trung bình  $L_m$  (H.9.23).

Đặt:

$$I = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (9.23)$$

$$\Rightarrow U = \frac{M_0^2 L}{2GI} \quad (9.24)$$

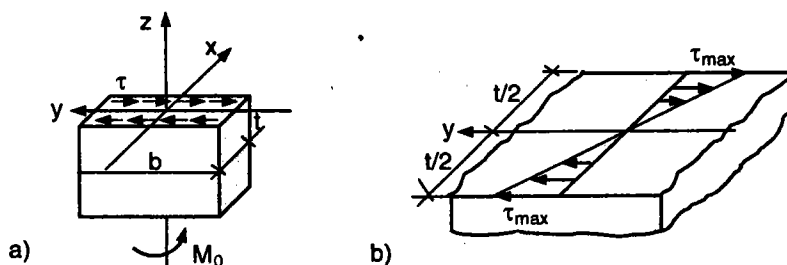
Bây giờ cho  $A = U$ , ta suy ra công thức tính góc xoắn:

$$\varphi = \frac{M_0 L}{G.I} \quad (9.25)$$

### 9.5.2 Thanh thành mỏng hở

Xét một thanh có tiết diện chữ nhật (b.t) với  $b \gg t$ , chịu xoắn thuần túy do  $M_0$  (H.9.24a).

Dựa trên các nghiên cứu lý thuyết, khi  $b \gg t$ , có thể giả thiết, trên mặt cắt ngang ứng suất tiếp phân bố bậc nhất theo bề dày  $t$ , cực đại tại biên và triệt tiêu ở đường trung tâm (H.9.24b).



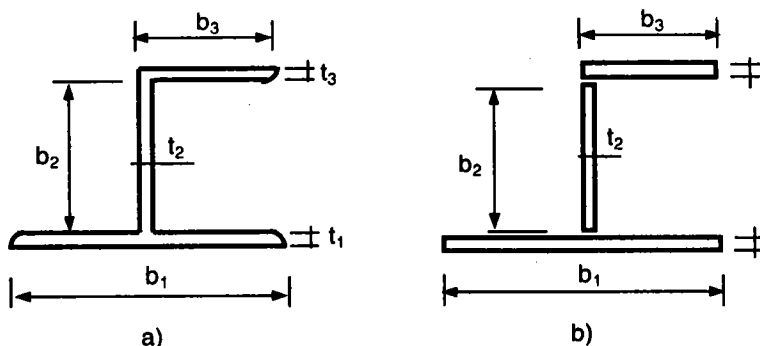
**Hình 9.24** a) Tiết diện chữ nhật mỏng chịu xoắn  
b) Phân bố ứng suất tiếp theo bề dày của thanh

Các công thức gần đúng tính ứng suất tiếp và biến dạng xoắn là:

$$\tau_{max} = \frac{M_0 t}{I}; \quad \varphi = \frac{M_0 L}{GI} \quad (9.26)$$

với: 
$$I = \frac{b.t^3}{3} \quad (9.27)$$

Công thức trên là công thức gần đúng, chỉ dùng được khi  $(b/t) \gg 1$ . Khi tỷ số  $(b/t)$  giảm thì sai số tăng.



**Hình 9.25** Tiết diện thành mỏng hở (a)  
là tổ hợp nhiều tiết diện chữ nhật mỏng (b)

Đối với thanh có tiết diện là tổ hợp của nhiều chữ nhật mỏng (H.9.25), ta giả sử rằng, khi thanh có biến dạng xoắn  $\varphi$  thì các phần tử chữ nhật cũng có cùng góc xoắn  $\varphi$ , mặt khác, các phần tử chữ nhật không có tác dụng lên nhau và có thể xem từng phần tử chịu một phần của mômen  $M_0$ .

Điều kiện cân bằng cho:

$$M_0 = M_1 + M_2 + \dots + M_n \quad (9.28)$$

Áp dụng công thức tính góc xoắn (9.26), ta được:

$$\varphi = \frac{M_0 L}{GI} = \frac{M_1 L}{GI_1} = \frac{M_2 L}{GI_2} = \dots = \frac{M_n L}{GI_n} \quad (9.29)$$

trong đó:  $I$  - mômen quán tính xoắn của cả thanh

$I_i$  - mômen quán tính xoắn của phần tử  $i$ .

Từ (9.29), suy ra mômen xoắn mà mỗi phần tử chịu là:

$$M_i = M_0 \frac{I_i}{I} \quad (9.30)$$

Như vậy, theo (9.28), ta có:

$$\sum_i M_i = M_0 = \frac{M_0 I_1}{I} + \frac{M_0 I_2}{I} + \dots + \frac{M_0 I_n}{I} = M_0 \frac{\sum_i I_i}{I}$$

Suy ra: 
$$I = \sum_i I_i = \frac{1}{3} \sum_i b_i t_i^3 \tag{9.31}$$

Áp dụng công thức (9.26) và (9.30), ứng suất tiếp lớn nhất được tính theo công thức:

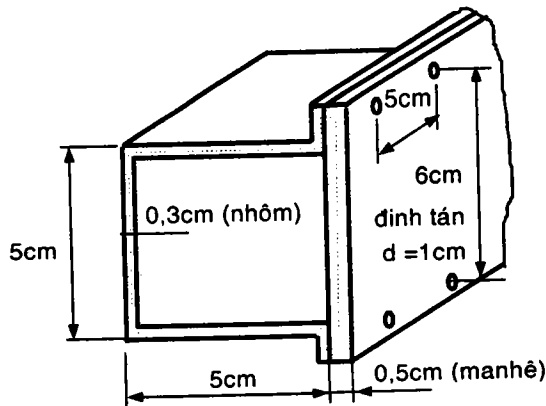
$$\tau_{\max} = \frac{M_i t_i}{I_i} = \frac{M_0 t_i}{I} \tag{9.32}$$

Góc xoắn được tính theo công thức:

$$\varphi = \frac{M_0 L}{G.I} = \frac{M_i L}{G I_i} \tag{9.33}$$

**Ví dụ 9.7** Một tiết diện thành mỏng gồm một tấm tole nhôm dạng chữ U dày 0,3cm và một tấm manhê dày 0,5cm được ghép bằng đinh tán đường kính 1cm cách khoảng 5cm (H.9.26). Tính mômen xoắn cho phép.

Cho:  $G_{nh} = 1,75G_{manhê} = 2,8 \cdot 10^3 kN/cm^2$ ;  $[\tau]_{nhóm} = 12,50 kN/cm^2$   
 $[\tau]_{manhê} = 10 kN/cm^2$ ;  $[\tau]_{dt} = 15 kN/cm^2$



**Hình 9.26** Kết cấu thành mỏng bằng hai loại vật liệu ghép đinh tán

**Giải** Ứng suất tiếp:  $\tau = \frac{M_0}{2t\Omega}$

$$\Omega = 4,7 \times 5,1 + 2(0,4 \times 0,65) = 24,49 \text{ cm}^2$$

Điều kiện bền đối với nhôm:

$$\tau_{nh} = \frac{M_0}{2(0,3)24,49} \leq 12,50$$

$$\Rightarrow M_0 \leq 183,67 \text{ kNcm}$$

Điều kiện bền đối với magnê:

$$\tau_{mg} = \frac{M_0}{2(0,5)24,49} \leq 10$$

$$\Rightarrow M_0 \leq 244,90 \text{ kNcm}$$

Đỉnh tán chịu cắt do thành phần ứng suất tiếp đối ứng với ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang, lực tiếp tuyến trên một đơn vị dài là:

$$q = \tau.t = \frac{M_0}{2\Omega} = \frac{M_0}{2(24,49)}$$

Khoảng cách giữa hai đỉnh tán là 5cm, do đó lực cắt mà một đỉnh phải chịu là:

$$q(5) = \frac{M_0}{2(24,49)} 5$$

Điều kiện bền đối với đỉnh tán (xem ứng suất tiếp do lực cắt trên đỉnh là phân bố đều):

$$\tau_{dt} \leq [\tau]_{dt} \Rightarrow \frac{M_0}{2(24,49)} \frac{5}{3,14(1)^2 / 4} \leq 15$$

$$\Rightarrow M_0 \leq 115,35 \text{ kNcm}$$

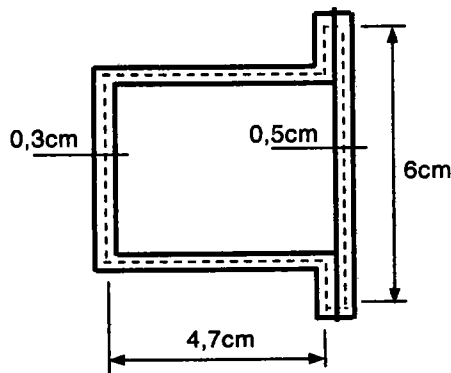
So sánh các kết quả ta chọn:

$$[M_0] = 115,35 \text{ kNcm} = 1,15 \text{ kNm}$$

*Tính góc xoắn*

Công thức góc xoắn đã được thiết lập ở phần trên, trong đó  $G$  phải đưa vào dưới dấu tích phân vì tiết diện có hai loại vật liệu, do đó công thức được viết lại như sau:

$$\varphi = \frac{M_0 L}{GI} = \frac{M_0 L}{4\Omega^2 G} \oint \frac{ds}{t} = \frac{M_0 L}{4\Omega^2} \oint \frac{ds}{Gt} = \frac{M_0 L}{4\Omega^2} \sum \frac{s}{Gt}$$



Hình 9.27 Minh họa tính  $\sum s / Gt$

Để tính  $s$ , xem hình 9.27.

$$\begin{aligned} \sum \frac{s}{G.t} &= \frac{6 + 2(4,7)}{2,8 \cdot 10^3 (0,3)} + \frac{6}{(2,8 / 1,75) 10^3 (0,5)} \\ &= 18,33(10)^{-3} + 7,5(10)^{-3} = 25,83(10)^{-3}. \end{aligned}$$

Góc xoắn của đoạn dài  $2m$  là:

$$\varphi = \frac{115,35(200)(25,83)10^{-3}}{4(24,49)^2} = 0,248 \text{ Rad}$$

**Ví dụ 9.8** Có hai tiết diện thành mỏng cùng trọng lượng, cùng vật liệu (H.9.28a,b). Nếu cùng chịu một mômen xoắn thì chọn tiết diện nào lợi hơn?

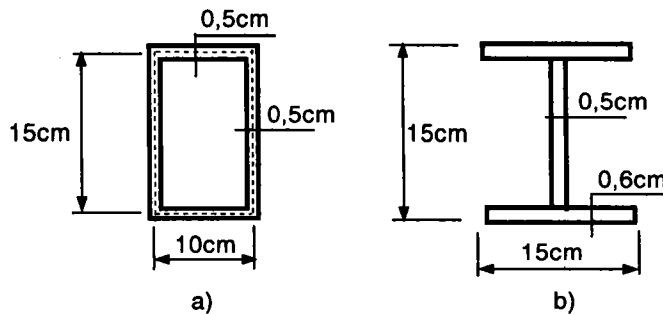
**Giải** Đối với tiết diện a), áp dụng công thức thanh thành mỏng kín, ta có:

$$A = 10(15) = 150 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{s}{t}} = \frac{4(150)^2}{2\left(\frac{15}{0,5} + \frac{10}{0,5}\right)} = 900 \text{ cm}^4$$

$$\tau = \frac{M_o}{2tA} = \frac{M_o}{2(0,5)150} = 6,67(10)^{-3} M_o$$

$$\varphi = \frac{M_o L}{GI} = \frac{M_o L}{G(900)} = 1,11(10)^{-3} \frac{M_o L}{G}$$



**Hình 9.28** a) Tiết diện thành mỏng kín  
b) Tiết diện thành mỏng hở

Đối với tiết diện b), áp dụng công thức thanh thành mỏng hở:

$$I = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 = \frac{1}{3} [2(15)0,6^3 + 14(0,5)^3] = 2,74 \text{ cm}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_o t_{\max}}{I} = \frac{M_o 0,6}{2,74} = 219(10)^{-3} M_o$$

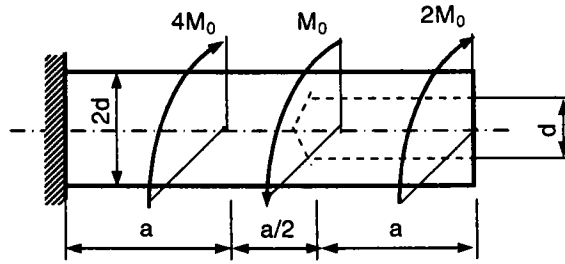
$$\varphi = \frac{M_o L}{GI} = \frac{M_o L}{2,74G} = 360(10)^{-3} \frac{M_o L}{G}$$

Ứng suất tiếp của tiết diện b) gấp 32,8 ứng suất của tiết diện a), biến dạng xoắn của tiết diện b) gấp 324 lần biến dạng của tiết diện a), do đó, phải chọn tiết diện a). Ví dụ này chứng tỏ rằng không nên sử dụng thanh thành mỏng hở chịu xoắn, rất lãng phí và nguy hiểm.

## 9.6 BÀI TẬP CHƯƠNG 9

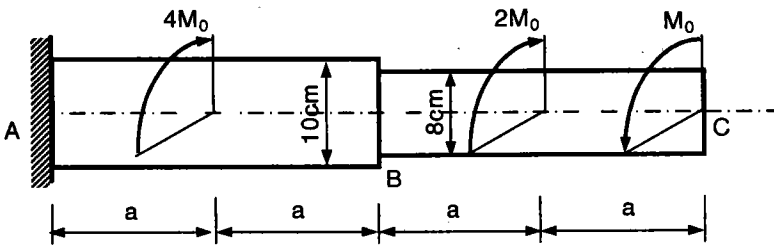
**9.1** Vẽ biểu đồ mômen xoắn, tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại đầu tự do của thanh.

Cho  $M_o = 360 \text{ Nm}$ ,  $a = 50 \text{ cm}$ ,  $d = 3 \text{ cm}$ ,  $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$  (H.9.29).



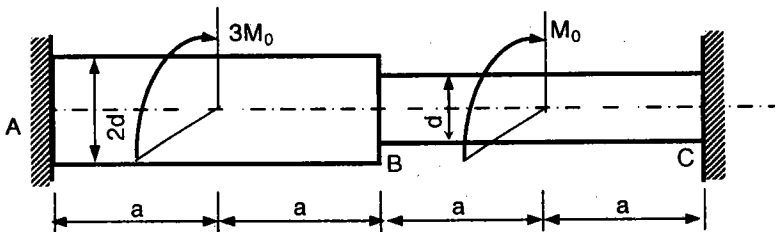
Hình 9.29

- 9.2 Vẽ biểu đồ nội lực, kiểm tra độ bền và độ cứng của trục tròn. Biết  $[\tau] = 3000N/cm^2$ ;  $[\theta] = 0,5^\circ/m$ ;  $G = 8.10^6N/cm^2$  (H.9.30);  $M_0 = 1kNm$ ;  $a = 40cm$ . Tính góc xoắn tại B và C.



Hình 9.30

- 9.3 Vẽ biểu đồ mômen xoắn và tính ứng suất tiếp lớn nhất của trục tròn như trên hình 9.31. Cho  $G = 8.10^3kN/cm^2$ ,  $M_0 = 5kNm$ ,  $a = 40cm$ ,  $d = 6cm$ . Tính góc xoắn tại B.

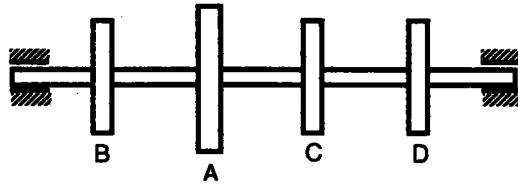


Hình 9.31

- 9.5 Một trục truyền động tiết diện tròn, đường kính D. Tại puli A, trục nhận được công suất truyền là  $15kW$ . Giả sử hiệu suất truyền là 1, khi đó tại các puli B, C và D trục truyền đi các công

suất lần lượt là  $4kW$ ,  $8kW$  và  $3kW$  (H.9.32). Tính đường kính  $D$  theo điều kiện bền và điều kiện cứng.

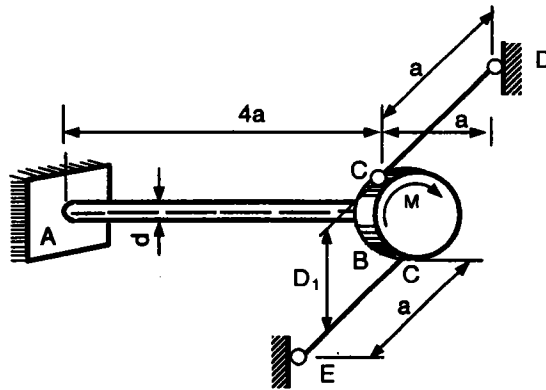
Cho  $[\tau] = 2kN/cm^2$ ;  $[\theta] = 0,4^\circ/m$ ;  $G = 8.10^3 kN/cm^2$ ; tốc độ mô-tơ truyền  $n = 150$  vòng/phút.



Hình 9.32

9.4 Một trục chịu xoắn như hình 9.33. Xác định ứng suất tiếp  $\tau_{max}$  của trục AB, góc xoắn  $\varphi_{AB}$ , nội lực trong hai thanh CD và CE.

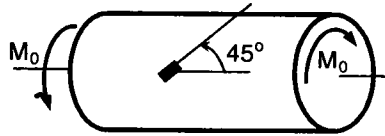
Cho  $E = 2.10^7 N/cm^2$ ;  $G = 8.10^6 N/cm^2$ ;  $M = 2kNm$ ;  $a = 2cm$ ;  $F = 4cm^2$ ;  $d = 6cm$ ;  $D = 80cm$ . Xem puli tại C là tuyệt đối cứng.



Hình 9.33

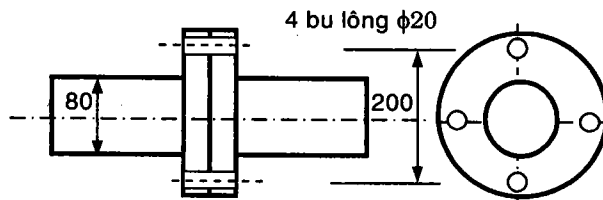
9.6 Trên mặt ngoài của một trục tròn chịu xoắn thuần túy (H.9.34), người ta dùng tấm điện trở và đo được biến dạng dài tương đối theo phương  $45^\circ$  so với trục là  $\varepsilon = 30.10^{-5}$ . Tính mômen xoắn  $M_0$  tác dụng lên trục. Cho  $E = 2.10^4 kN/cm^2$ ;  $\mu = 0,3$ .





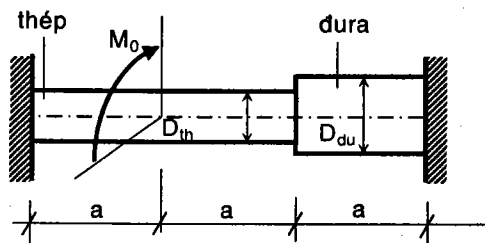
Hình 9.34

- 9.7 Người ta nối hai trục cùng đường kính  $D = 8\text{cm}$  bằng mặt bích và bốn bu lông  $\phi 20$  bố trí đối xứng trên cường tròn đường kính  $20\text{cm}$  (H.9.35). Tính mômen xoắn lớn nhất có thể tác dụng lên trục theo điều kiện bền của trục và bu lông. Cho  $[\tau]_{tr} = 4\text{kN/cm}^2$ ;  $[\tau]_{bl} = 2\text{kN/cm}^2$ .



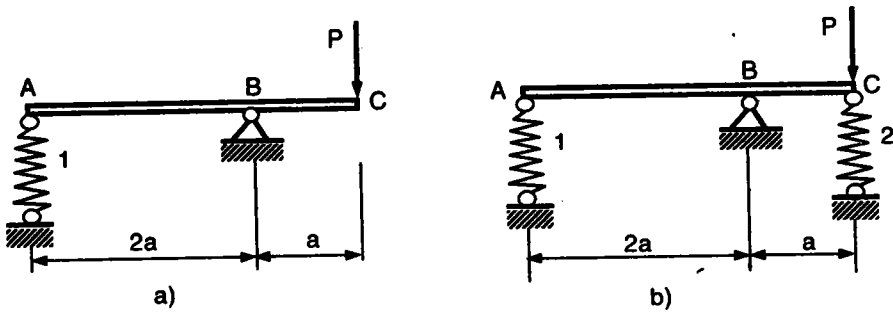
Hình 9.35

- 9.8 Hai trục tròn bằng thép và đura được nối với nhau chịu một mômen xoắn  $M_0$  như hình 9.36. Tính mômen xoắn nội lực tác dụng lên hai trục. Cho  $G_{th} = 2G_{đura}$ ;  $D_{đura} = 1,5D_{th}$ .



Hình 9.36

- 9.9 Hệ chịu lực như ở hình 9.37a,b  
 Tính ứng suất trong lò xo 1 và 2.  
 Tính chuyển vị đứng tại C, xem thanh ABC là tuyệt đối cứng.  
 Biết  $D_1 = 6\text{cm}$ ;  $d_1 = 1\text{cm}$ ;  $n_1 = 10$ ;  $D_2 = 5\text{cm}$ ;  $d_2 = 0,8\text{cm}$ ;  $n_2 = 8$ ;  
 $P = 1\text{kN}$ ;  $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^3 \text{kN/cm}^2$ .



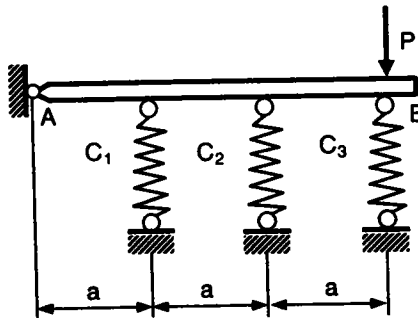
Hình 3.37

**9.10** Một thanh tuyệt đối cứng AB được đặt trên ba lò xo chịu một lực  $P$  đặt ở đầu B như trên hình 9.38.

Tính lực tác dụng lên các lò xo.

Tính chuyển vị đứng tại B.

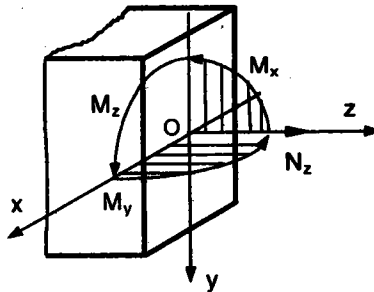
Cho  $C_3 = C_2 = 2C_1 = 2\text{kN/cm}$ ;  $P = 8\text{kN}$ ;  $a = 1\text{m}$ .



## THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

### 10.1 KHÁI NIỆM CHUNG

Thanh chịu lực phức tạp khi trên các mặt cắt ngang có tác dụng đồng thời của một tổ hợp các thành phần nội lực như lực dọc  $N_z$ , mômen uốn  $M_x, M_y$ , mômen xoắn  $M_z$  (H.10.1).



**Hình 10.1** Các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang của thanh chịu lực phức tạp

Khi một thanh chịu lực phức tạp, ảnh hưởng của lực cắt đến độ bền rất nhỏ so với các thành phần nội lực khác, nên trong tính toán không xét đến lực cắt.

Trong chương này chỉ xét những thanh chịu lực phức tạp mà trong quá trình chịu lực còn thỏa mãn điều kiện sử dụng được nguyên lý cộng tác dụng, đó là:

- Vật liệu phải đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Hooke.
- Chuyển vị và biến dạng phải bé để có thể tính trên sơ đồ không biến dạng (sơ đồ chưa có tác dụng của lực).

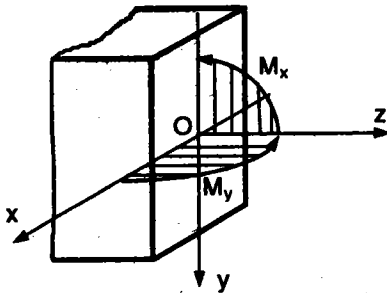
Nguyên lý cộng tác dụng được phát biểu như sau: “Một đại lượng do nhiều nguyên nhân tác dụng đồng thời gây ra thì bằng tổng đại lượng đó do từng nguyên nhân tác dụng riêng lẻ”.

Nhờ đó, chuyển vị hay ứng suất do nhiều thành phần nội lực tác dụng đồng thời được phân tích thành tổng chuyển vị hay ứng suất do từng thành phần nội lực tác dụng riêng lẻ. Mặt khác, có thể sử dụng các kết quả từ các bài toán chịu lực đơn giản như thanh chịu kéo hay nén đúng tâm, thanh chịu uốn phẳng và thanh chịu xoắn thuần túy.

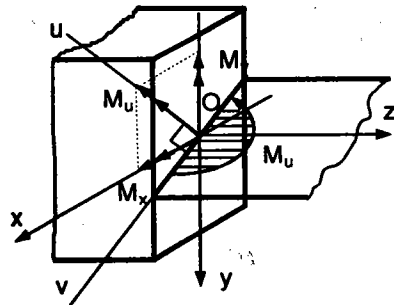
Để việc nghiên cứu được thuận lợi, các bài toán chịu lực phức tạp lần lượt được xét theo thứ tự từ đơn giản đến phức tạp là: uốn xiên, uốn cộng kéo (hay nén), kéo hay nén lệch tâm, uốn cộng xoắn và chịu lực tổng quát.

## 10:2 UỐN XIÊN

Thanh chịu uốn xiên khi trên mọi mặt cắt ngang chỉ có hai thành phần nội lực là mômen uốn  $M_x$  và mômen uốn  $M_y$  tác dụng trong các mặt phẳng đối xứng  $yOz$  và  $xOz$  (H.10.2).



**Hình 10.2** Các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang của thanh chịu uốn xiên



**Hình 10.3** Biểu diễn mômen tổng và mặt phẳng tác dụng của nó

Ta có thể biểu diễn mômen  $M_x$  và  $M_y$  bằng các vectơ thẳng góc với mặt phẳng tác dụng của chúng, đó là hai vectơ  $M_x$ ,  $M_y$  trên các trục  $x$  và  $y$  (H.10.3). Hợp hai mômen này là mômen tổng  $M_u$  biểu diễn bởi vectơ tổng hình học của hai vectơ  $M_x$ ,  $M_y$ . Có thể thấy  $M_u$  tác dụng trong mặt phẳng  $vOz$ , mặt phẳng này thẳng góc với trục  $u$  chứa vectơ  $M_u$  và chứa trục thanh.

Vậy có thể nói: thanh chịu uốn xiên khi trên các mặt cắt ngang chỉ có một mômen uốn  $M_u$  tác dụng trong mặt phẳng chứa trục mà không trùng với mặt phẳng đối xứng nào.

Như trên hình 10.3, ta có:  $|M_u| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$

Đặc biệt, đối với thanh tiết diện tròn, mọi đường kính đều là trục đối xứng, nên bất kỳ mặt phẳng chứa trục thanh nào cũng là mặt phẳng đối xứng, do đó, thanh tiết diện tròn luôn luôn chỉ chịu uốn phẳng.

### 10.2.1 Ứng suất pháp

Tại một điểm  $A(x,y)$  trên tiết diện, nếu chỉ có  $M_x$  tác dụng thì nó gây ra ứng suất pháp do uốn thuần túy trong mặt phẳng  $yOz$  là  $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$ , tương tự, nếu chỉ có  $M_y$  tác dụng thì ứng suất pháp do uốn

thuần túy trong mặt phẳng  $xOz$  là  $\sigma_z = \frac{M_y}{I_y} x$ .

Khi cả  $M_x, M_y$  cùng tác dụng, theo nguyên lý cộng tác dụng, ta có:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (10.1)$$

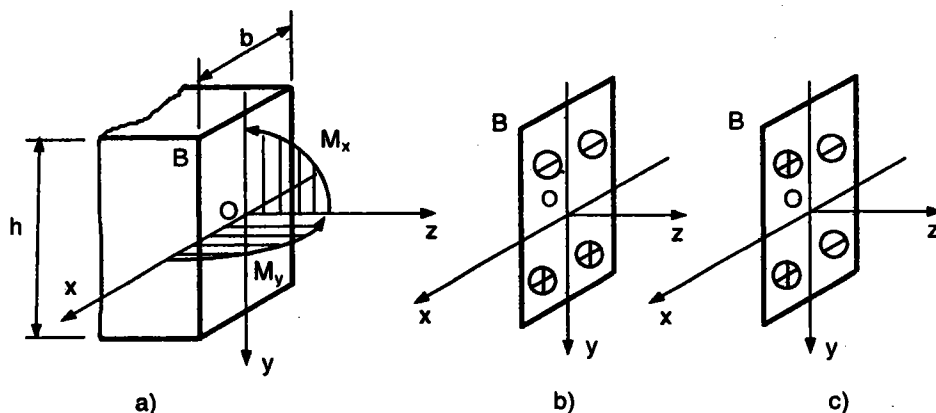
Các số hạng trong công thức (10.1) là số đại số, dấu của các mômen uốn  $M_x, M_y$  và tọa độ  $A(x,y)$  phải được quy ước sao cho nếu  $M_x$  hoặc  $M_y$  gây kéo tại điểm khảo sát thì ứng suất do chúng gây ra phải dương và ngược lại. Như vậy  $M_x, M_y$  lấy dấu dương khi chúng gây kéo những điểm có  $y, x$  dương. Để thuận lợi, ta có thể chọn chiều dương của trục  $y$  và trục  $x$  về phía gây kéo của  $M_x$  và  $M_y$ , khi đó số hạng  $M_x$  và  $M_y$  trong (10.1) lấy trị tuyệt đối.

Trong tính toán thực hành, thường dùng công thức kỹ thuật như sau:

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{I_y} |x| \quad (10.2)$$

Trong (10.2), lấy dấu cộng (+) khi đại lượng đó gây kéo và ngược lại, lấy dấu (-).

**Ví dụ 10.1** Xem tiết diện chữ nhật  $b \times h$  chịu uốn xiên như trên hình 10.4a, cho  $M_x = 8kNm$  và  $M_y = 5kNm$  và  $h = 2b = 40cm$ . Tính ứng suất pháp tại B ( $|x_B| = 10cm$ ,  $|y_B| = 20cm$ ).



**Hình 10.4** a) Tiết diện chịu uốn xiên  
b) Dấu ứng suất pháp do  $M_x$   
c) Dấu ứng suất pháp do  $M_y$

Áp dụng công thức (10.1) chọn chiều dương trục  $x$  và  $y$  về phía gây kéo của  $M_y$  và  $M_x$  (H.10.4.a), lúc này  $x_B = 10$ ,  $y_B = -20$ , ta có:

$$\sigma_B = \frac{800}{\frac{20(40)^3}{12}}(-20) + \frac{500}{\frac{40(20)^3}{12}}(10) \text{ kN/cm}^2$$

Để áp dụng công thức (10.2), ta nhận thấy nếu hai mômen có chiều như trên hình 10.4a, thì  $M_x$  gây kéo những điểm nằm dưới  $Ox$  và gây nén những điểm trên  $Ox$ ; tương tự,  $M_y$  gây kéo phía trái  $Oy$  và gây nén phía phải  $Oy$  (H.10.4b,c).

Biểu diễn vùng kéo bằng dấu (+) và vùng nén bằng dấu (-) trên tiết diện (H.10.4b,c), dễ dàng nhận thấy tại điểm B,  $M_x$  gây nén,  $M_y$  gây kéo.

Áp dụng công thức (10.2), ta được:

$$\sigma_B = -\frac{800}{\frac{20(40)^3}{12}}(20) + \frac{500}{\frac{40(20)^3}{12}}(10) \text{ kN/cm}^2$$

**10.2.2 Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất**

Biểu thức (10.1) là một hàm hai biến, nó có đồ thị là một mặt phẳng trong hệ trục Oxyz. Nếu biểu diễn giá trị ứng suất pháp  $\sigma_z$  cho ở (10.1) bằng các đoạn thẳng đại số theo trục z định hướng dương ra ngoài mặt cắt (H.10.4a), ta thu được một mặt phẳng chứa đầu mút các vectơ ứng suất pháp tại mọi điểm trên tiết diện, gọi là *mặt ứng suất* (H.10.5a).

Gọi giao tuyến của mặt ứng suất và mặt cắt ngang là đường trung hòa, ta thấy, *đường trung hòa là một đường thẳng và là quỹ tích của những điểm trên mặt cắt ngang có trị số ứng suất pháp bằng không*.

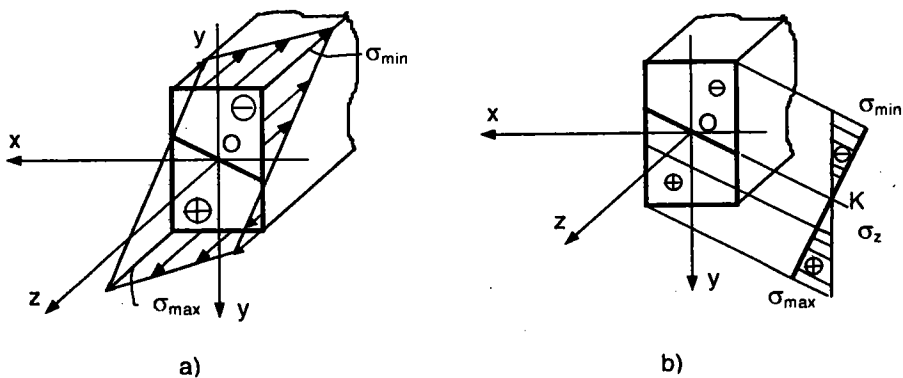
Từ (10.1), ta được phương trình đường trung hòa:

$$\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0 \Rightarrow y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x \tag{10.3}$$

Phương trình (10.3) có dạng  $y = ax$ , đường trung hòa là một đường thẳng qua gốc tọa độ.

Ta thấy:

- Đường trung hòa chia tiết diện làm hai miền, miền chịu kéo và miền chịu nén.
- Những điểm nằm trên những đường thẳng song song với đường trung hòa có cùng giá trị ứng suất.
- Càng xa đường trung hòa, trị số ứng suất của các điểm trên một đường thẳng vuông góc đường trung hòa tăng theo luật bậc nhất.



**Hình 10.5** a) Mặt ứng suất  
b) Biểu đồ ứng suất phẳng

Dựa trên các tính chất này, có thể biểu diễn sự phân bố bằng biểu đồ ứng suất phẳng như sau:

Kéo dài đường trung hòa, vẽ đường chuẩn vuông góc với đường trung hòa tại K, ứng suất tại mọi điểm trên đường chuẩn ( $\sigma_z = 0$ ) biểu diễn bằng điểm K trên đường chuẩn. Sử dụng phép chiếu thẳng góc, điểm nào có chân hình chiếu xa K nhất là những điểm chịu ứng suất pháp lớn nhất.

Điểm xa nhất thuộc miền kéo chịu ứng suất kéo lớn nhất, gọi là  $\sigma_{\max}$ .

Điểm xa nhất thuộc miền nén chịu ứng suất nén lớn nhất, gọi là  $\sigma_{\min}$ .

Tính  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  rồi biểu diễn bằng hai đoạn thẳng về hai phía của đường chuẩn rồi nối lại bằng đường thẳng, đó là biểu đồ ứng suất phẳng, trị số ứng suất tại mọi điểm của tiết diện trên đường thẳng song song với đường trung hòa chính là một tung độ trên biểu đồ ứng suất xác định như ở (H.10.5b).

### 10.2.3 Ứng suất pháp cực trị và điều kiện bền

Gọi  $A(x_A, y_A)$  và  $B(x_B, y_B)$  là hai điểm xa đường trung hòa nhất về phía chịu kéo và chịu nén, công thức (10.2) cho:

$$\begin{aligned}\sigma_A = \sigma_{\max} &= \frac{|M_x|}{I_x}|y_A| + \frac{|M_y|}{I_y}|x_A| \\ \sigma_B = \sigma_{\min} &= -\frac{|M_x|}{I_x}|y_B| - \frac{|M_y|}{I_y}|x_B|\end{aligned}\quad (10.4)$$

Đối với thanh có tiết diện chữ nhật (bh), điểm xa đường trung hòa nhất luôn luôn là các điểm góc của tiết diện, khi đó:

$$\begin{aligned}|x_A| &= |x_B| = b/2; \quad |y_A| = |y_B| = h/2 \\ \sigma_{\max} &= \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \\ \sigma_{\min} &= -\frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y}\end{aligned}\quad (10.5)$$



với: 
$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{hb^2}{6}$$

Đối với thanh có tiết diện tròn, khi tiết diện chịu tác dụng của hai mômen uốn  $M_x, M_y$  trong hai mặt phẳng vuông góc  $yOz, xOz$ , mômen tổng là  $M_u$  tác dụng trong mặt phẳng  $vOz$  cũng là mặt phẳng đối xứng, nghĩa là chỉ chịu uốn phẳng, do đó:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_u|}{W_u} \tag{10.6}$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}; \quad W_u = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \approx 0,1D^3$$

*Điều kiện bền:*

Tại mọi điểm trên mặt cắt ngang của thanh chịu uốn xiên chỉ có ứng suất pháp, không có ứng suất tiếp, đó là trạng thái ứng suất đơn, hai điểm nguy hiểm là hai điểm chịu  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ , tiết diện bền khi hai điểm này thỏa điều kiện bền:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n \tag{10.7}$$

Đối với vật liệu dẻo  $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$ , điều kiện bền được thỏa khi:

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma] \tag{10.8}$$

**Ví dụ 10.2** Một dầm tiết diện I20 chịu lực như trên hình 10.6a. Vẽ biểu đồ nội lực, xác định đường trung hòa tại tiết diện ngàm, tính ứng suất  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ . Cho  $q = 4kN/m, P = qL, L = 2m$ . Các đặc trưng của tiết diện chữ I20 được cho như sau:  $A = 26,8cm^2; I_x = 1840cm^4; I_y = 115cm^4; W_x = 184cm^3; W_y = 23,1cm^3$ .

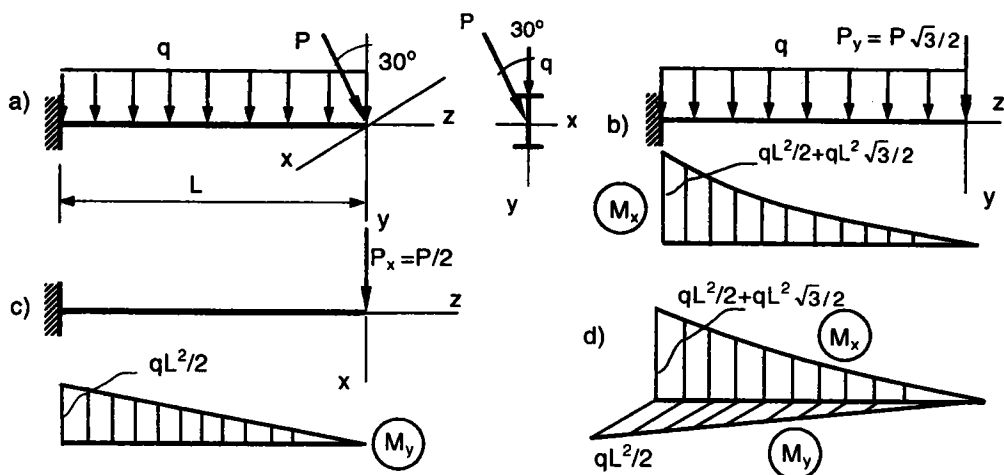
**Giải**

Chiếu lực P lên hai trục x và y, ta được:

$$P_y = P \cos 30^\circ = qL\sqrt{3}/2; \quad P_x = P \sin 30^\circ = qL/2$$

Xét thanh chịu lực trong từng mặt phẳng riêng lẻ.

Trong mặt phẳng ( $yOz$ ), hệ chịu lực phân bố và lực tập trung  $P_y$ , biểu đồ mômen  $M_x$  vẽ trên hình 10.6b. Tương tự, trong mặt phẳng ( $xOz$ ), hệ chịu lực tập trung  $P_x$ , biểu đồ mômen  $M_y$  vẽ trên hình 10.6c.



**Hình 10.6** a) Sơ đồ tải trọng tác dụng lên thanh  
 b) Xét thanh trong mặt phẳng  $yOz$ , vẽ biểu đồ  $M_x$   
 c) Xét thanh trong mặt phẳng  $xOz$ , vẽ biểu đồ  $M_y$   
 d) Biểu đồ nội lực không gian

Tại tiết diện ngàm:

$$M_x = qL^2(1 + \sqrt{3})/2 = 2185,6 \text{ kNcm}; \quad M_y = qL^2/2 = 800 \text{ kNcm}$$

Với tiết diện có hai trục đối xứng, ta áp dụng công thức (10.5):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{qL^2(1 + \sqrt{3})}{2W_x} + \frac{qL^2}{2W_y}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{2185,6}{184} + \frac{800}{23,1} = 46,50 \text{ kN/cm}^2$$

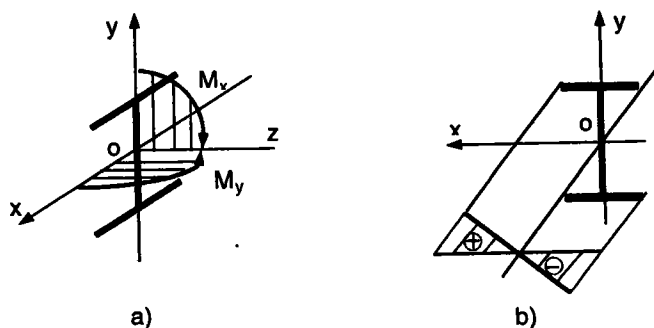
$$\sigma_{\min} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{qL^2(1 + \sqrt{3})}{2W_x} - \frac{qL^2}{2W_y} = -46,50 \text{ kN/cm}^2$$

Chọn chiều dương của trục  $x$  và  $y$  về phía gây kéo của  $M_y$  và  $M_x$  như trên hình 10.6a thì trong phương trình đường trung hòa (10.3) giá trị của các mômen uốn lấy trị tuyệt đối

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x \tag{a}$$

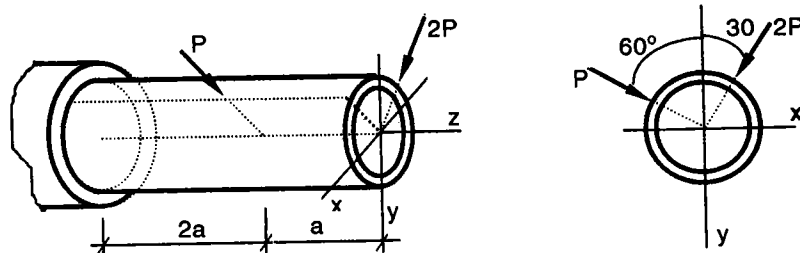
$$y = -\frac{800}{2185,6} \frac{1840}{115} x = -5,85x$$

Biểu diễn tiết diện bằng hình phẳng theo tỷ lệ, từ (b) có thể vẽ chính xác đường trung hòa, áp dụng cách vẽ biểu đồ ứng suất, ta cũng vẽ được biểu đồ ứng suất phẳng (H.10.7b).



**Hình 10.7** a) Chiều mômen tại tiết diện ngàm  
b) Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất phẳng

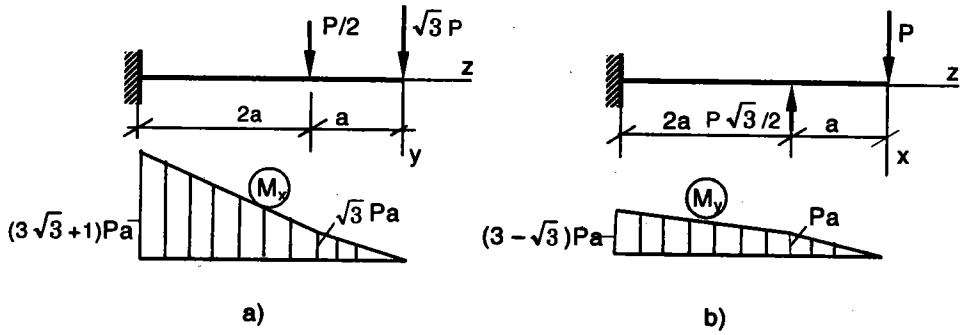
**Ví dụ 10.2** Một thanh tiết diện tròn rỗng chịu tác dụng của ngoại lực (H.10.8). Tính ứng suất pháp  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ , xác định đường trung hòa tại tiết diện ngàm. Cho  $D = 10\text{cm}$ ;  $d = 8\text{cm}$ ;  $P = 1\text{kN}$ ;  $a = 1\text{m}$ .



**Hình 10.8** Thanh tiết diện tròn rỗng chịu tải trọng trong hai mặt phẳng khác nhau

**Giải** Chiếu lực  $2P$  và lực  $P$  lên hai trục vuông góc  $x, y$ . Lần lượt xét sự làm việc của thanh trong từng mặt phẳng  $yOz$ ,  $xOz$ , ta vẽ được biểu đồ mômen  $M_x$ ,  $M_y$  tương ứng (H.10.9b).

Với thanh tiết diện tròn, khi có hai mômen uốn  $M_x$ ,  $M_y$  tác dụng trong hai mặt phẳng vuông góc  $yOz$ ,  $xOz$ , ta xem thanh chỉ chịu uốn phẳng do mômen tổng  $M_u$  tác dụng trong mặt phẳng đối xứng  $vOz$ .



**Hình 10.9** a) Biểu đồ mômen  $M_x$  ( $yOz$ )  
 b) Biểu đồ mômen  $M_y$  ( $xOz$ )

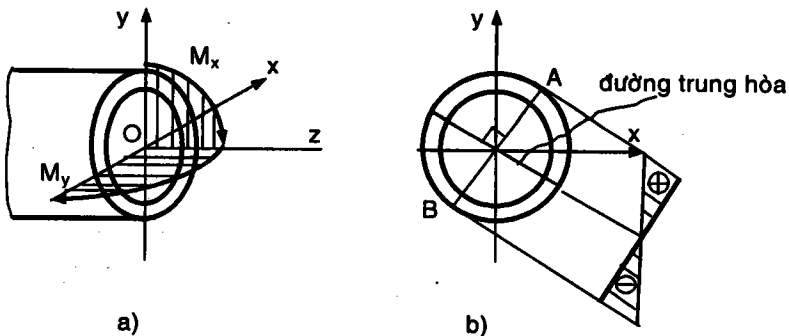
Tại ngàm, nội lực có giá trị lớn nhất:

$$M_x = (3\sqrt{3} + 1)Pa = 6,196 Pa; \quad M_y = (3 - \sqrt{3})Pa = 1,268 Pa$$

$$|M_u| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 6,324 Pa = 6,324 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_u|}{W_u} = \pm \frac{6,324 Pa}{\frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)} = \pm \frac{6324}{\frac{\pi 10^3}{32} \left(1 - \frac{8^4}{10^4}\right)} = \pm 10,91 \text{ kN/cm}^2$$

Tại ngàm, chọn chiều dương của trục  $x$  và  $y$  về phía gây kéo của  $M_y$  và  $M_x$  (H.10.10.a) thì trong (a), giá trị của các mômen uốn lấy trị tuyệt đối.



**Hình 10.10** a) Định hướng hệ trục  $x, y$  tại ngàm  
 b) Vẽ đường trung hòa trên hình phẳng

Phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x$$

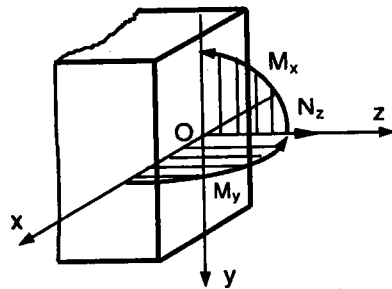
$$y = -\frac{1,268Pa}{9,39Pa} (1)x = -0,204x$$

Đường trung hòa được vẽ trên hình phẳng (H.10.10b), nếu vẽ một đường thẳng qua tâm O, thẳng góc với đường trung hòa, giao điểm của đường này với chu vi là hai điểm (A,B) chịu ứng suất kéo và nén lớn nhất.

### 10.3 UỐN CỘNG KÉO HAY NÉN

Thanh chịu uốn cộng kéo (hay nén) đồng thời khi trên các mặt cắt ngang có các thành phần nội lực là mômen uốn  $M_u$  và lực dọc  $N_z$ .

$M_u$  là mômen uốn tác dụng trong mặt phẳng chứa trục z, luôn luôn có thể phân tích thành hai mômen uốn  $M_x$  và  $M_y$  trong mặt phẳng đối xứng  $yOz$  và  $xOz$  (H.10.11).



Hình 10.11 Các thành phần nội lực

#### 10.3.1 Công thức ứng suất pháp

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta thấy bài toán đang xét là tổ hợp của thanh chịu uốn xiên và kéo (hay nén) đúng tâm. Do đó, tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có tọa độ (x,y) chịu tác dụng của ứng suất pháp tính theo công thức sau:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (10.9)$$

Ứng suất pháp gây kéo được quy ước dương.

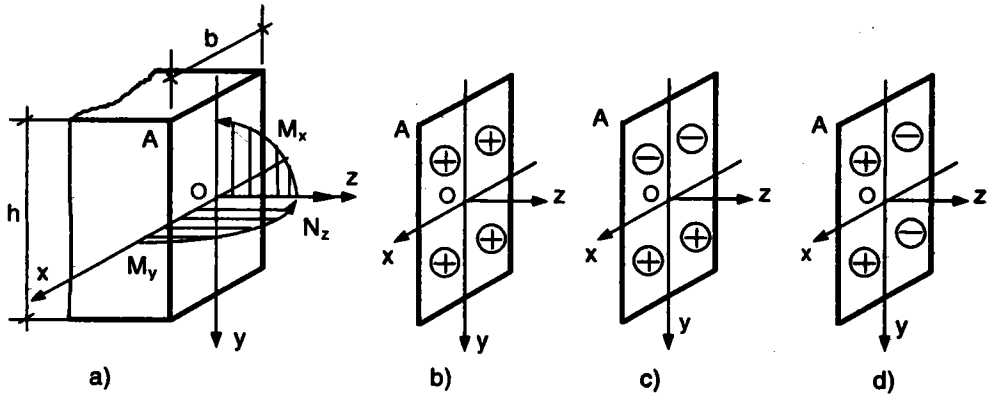
Các số hạng trong công thức (10.9) là số đại số, ứng suất do  $N_z$  lấy (+) khi lực dọc là kéo và ngược lại lực nén lấy dấu trừ; ứng suất do  $M_x, M_y$  lấy dấu như trong công thức (10.1) của uốn xiên, nếu định hướng trục y, x dương về phía gây kéo của  $M_x, M_y$  thì lấy theo dấu của y và x.

Khi tính toán thực hành, ta cũng có công thức kỹ thuật:

$$\sigma_z = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{I_y} |x| \quad (10.10)$$

Trong công thức (10.10), ứng với mỗi số hạng, ta lấy dấu (+) nếu đại lượng đó gây kéo và ngược lại.

**Ví dụ 10.3** Xét tiết diện trên hình 10.12a, cho  $M_x = 10kNm$ ,  $M_y = 5kNm$ ,  $N_z = 10kN$ ,  $h = 2b = 40cm$ , tính ứng suất tại A.



**Hình 10.12** a) Tiết diện chịu uốn + kéo  
b) Dấu ứng suất pháp do  $N_z$   
c) Dấu ứng suất pháp do  $M_x$   
d) Dấu ứng suất pháp do  $M_y$

Sử dụng công thức (10.9), chọn chiều dương trục  $x$ ,  $y$  như hình 10.12a,  $x_A = 10$ ,  $y_A = -20$ , ta được:

$$\sigma_A = \frac{10}{20(40)} + \frac{1000}{20(40)^3 / 12} (-20) + \frac{500}{40(20)^3 / 12} (10)$$

$$\sigma_A = 0,0125 - 0,1875 + 0,1875 = 0,0125 \text{ kN/cm}^2$$

Để áp dụng công thức (10.10), có thể biểu diễn tác dụng gây kéo, nén của các thành phần nội lực như ở hình 10.12b, với  $|x_A| = 10$ ,  $|y_A| = 20$ , ta được:

$$\sigma_A = \frac{10}{20(40)} - \frac{1000}{20(40)^3 / 12} (20) + \frac{500}{40(20)^3 / 12} (10)$$

$$\sigma_A = 0,0125 - 0,1875 + 0,1875 = 0,0125 \text{ kN/cm}^2$$

### 10.3.2 Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất pháp

Tương tự như trong uốn xiên, biểu thức (10.9) là một hàm hai biến, nếu biểu diễn trong hệ trục Oxyz, với O là tâm mặt cắt ngang và  $\sigma_z$  định hướng dương ra ngoài mặt cắt, thì hàm (10.9) biểu diễn một mặt phẳng, gọi là *mặt ứng suất*, giao tuyến của nó với mặt cắt ngang là *đường trung hòa*. Dễ thấy rằng, *đường trung hòa là một đường thẳng chứa tất cả những điểm trên mặt cắt ngang có ứng suất pháp bằng không*.

Cho biểu thức  $\sigma_z$  ở (10.9) bằng không, ta có phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x - \frac{N_z I_x}{A M_x} \quad (10.11)$$

Phương trình (10.11) có dạng  $y = ax + b$ , đó là một đường thẳng không qua gốc tọa độ, cắt trục y tại tung độ  $b = -\frac{N_z I_x}{A M_x}$ .

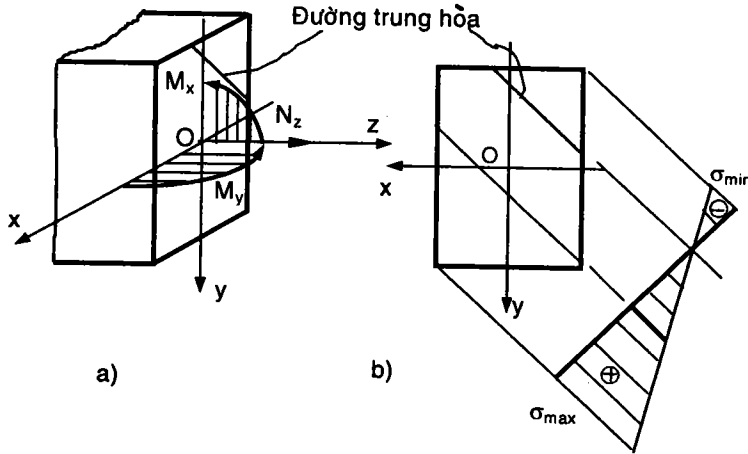
Để sử dụng (10.11) thuận lợi, ta nên định hướng trục x,y như khi sử dụng công thức (10.9), còn  $N_z$  vẫn lấy dấu theo quy ước của lực dọc.

Do tính chất mặt ứng suất, *những điểm nằm trên những đường song song đường trung hòa có cùng giá trị ứng suất, những điểm xa đường trung hòa nhất có giá trị ứng suất lớn nhất, ứng suất tại những điểm trên một đường vuông góc với đường trung hòa thay đổi theo quy luật bậc nhất*.

Rõ ràng đường trung hòa chia tiết diện thành hai miền, miền chịu ứng suất kéo và miền chịu ứng suất nén. Nhờ các tính chất này, có thể biểu diễn sự phân bố của ứng suất pháp trên mặt cắt ngang bằng *biểu đồ ứng suất phẳng* như sau.

Kéo dài đường trung hòa ra ngoài tiết diện, vẽ đường chuẩn vuông góc với đường kéo dài tại điểm O, đó cũng là điểm biểu diễn giá trị ứng suất pháp tại mọi điểm trên đường trung hòa. Sử dụng phép chiếu thẳng góc, chiếu mọi điểm trên những đường song song đường trung hòa lên đường chuẩn, điểm có chân hình chiếu xa O nhất chịu ứng suất pháp có trị số lớn nhất.

Điểm xa nhất về miền kéo chịu ứng suất kéo lớn nhất, gọi là  $\sigma_{\max}$ , điểm xa nhất về miền nén chịu ứng suất nén lớn nhất, gọi là  $\sigma_{\min}$ . Biểu diễn giá trị  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  bằng các tung độ về hai phía đường chuẩn rồi nối chúng lại bằng đường thẳng, ta được *biểu đồ ứng suất phẳng* (H.10.13b).



**Hình 10.13** a) Định hướng hệ trục  $x,y$   
b) Đường trung hòa, biểu đồ ứng suất

### 10.3.3 Ứng suất pháp cực trị - Điều kiện bền

Gọi  $A(x_A, y_A)$  và  $B(x_B, y_B)$  là hai điểm xa đường trung hòa nhất về miền kéo và về miền nén, áp dụng (10.10), ta có công thức tính ứng suất pháp cực trị.

$$\begin{aligned}\sigma_A = \sigma_{\max} &= \pm \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_x|}{I_x} |y_A| + \frac{|M_y|}{I_y} |x_A| \\ \sigma_B = \sigma_{\min} &= \pm \frac{|N_z|}{A} - \frac{|M_x|}{I_x} |y_B| - \frac{|M_y|}{I_y} |x_B|\end{aligned}\quad (10.12)$$

Theo (10.12), ta thấy, khi ứng suất do lực dọc trái dấu với ứng suất do  $M_x$ ,  $M_y$  và có trị số lớn hơn tổng trị số tuyệt đối các ứng suất do  $M_x$ ,  $M_y$  thì trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất một dấu (chỉ chịu kéo hoặc chỉ chịu nén).



- Với thanh có tiết diện chữ nhật, các điểm nguy hiểm A, B luôn luôn là các điểm góc của tiết diện:

$$|x_A| = |x_B| = b/2; \quad |y_A| = |y_B| = h/2$$

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = \pm \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \quad (10.13)$$

$$\sigma_B = \sigma_{\min} = \pm \frac{|N_z|}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y}$$

- Thanh có tiết diện tròn, mômen tổng của  $M_x$ ,  $M_y$  là  $M_u$  gây uốn thuần túy phẳng, khi đó ta có công thức tính ứng suất pháp cực trị:

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = \pm \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_u|}{W_u} \quad (10.14)$$

$$\sigma_B = \sigma_{\min} = \pm \frac{|N_z|}{A} - \frac{|M_u|}{W_u}$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

Thanh chịu uốn cộng kéo hay nén đồng thời chỉ gây ra ứng suất pháp trên mặt cắt ngang, tại điểm nguy hiểm, phân bố ở trạng thái ứng suất đơn, do đó điều kiện bền của thanh là:

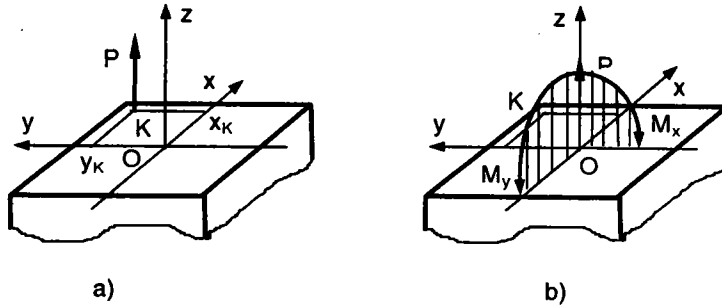
$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k$$

$$|\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n$$

### 10.3.4 Thanh chịu kéo hay nén lệch tâm

Thanh chịu kéo hay nén lệch tâm khi ngoại lực hay nội lực tác dụng trên mặt cắt ngang tương đương một lực  $P$  song song trục thanh mà không trùng với trục thanh. Nếu lực  $P$  này hướng vào mặt cắt, thanh chịu nén lệch tâm, ngược lại, nếu lực  $P$  hướng ra, thanh chịu kéo lệch tâm (H.10.14a).

Trong thực tế, bài toán nén lệch tâm rất thường gặp trong tính toán cột, móng nhà công nghiệp hay dân dụng, trong tính toán trụ, móng cầu tháp...



**Hình 10.14** a) Tiết diện bị kéo lệch tâm  
b) Dãi lực về tâm tiết diện

Áp dụng nguyên lý dời lực, đưa lực kéo hay nén lệch tâm về tâm tiết diện, ta có thể chứng minh hai trường hợp này thực chất là bài toán uốn cộng kéo hay nén đồng thời. Trên hình 10.14a, gọi  $K(x_K, y_K)$  là điểm đặt lực kéo lệch tâm  $P$ , dời về tâm  $O$ , ta có:

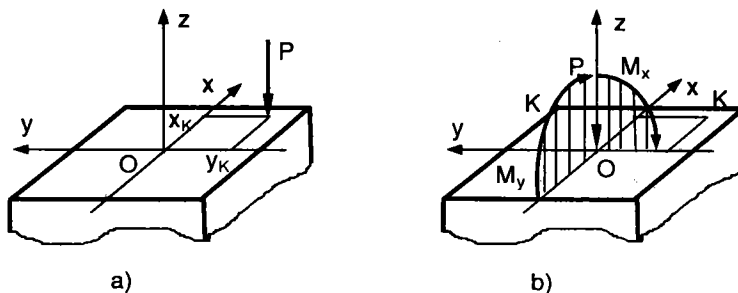
$N_z = \pm|P|$  lấy (+) khi  $P$  là lực kéo, ngược lại, lấy (-).

$$M_x = Py_K \quad (10.15)$$

$$M_y = Px_K$$

Chiều của mômen lấy theo nguyên lý dời lực. Tương tự, khi nén lệch tâm ta cũng dời về tâm như thể hiện ở H.10.15.

Do đó, tất cả công thức đã được thiết lập cho bài toán uốn cộng kéo hay nén đồng thời đều áp dụng được cho bài toán kéo hay nén lệch tâm.



**Hình 10.15** a) Tiết diện bị nén lệch tâm  
b) Dãi lực về tâm tiết diện

### 10.3.5 Lõi tiết diện

Đối với thanh chịu kéo hay nén lệch tâm, phương trình đường trung hòa có thể viết ở dạng khác. Cho biểu thức  $\sigma_z$  trong (10.9) bằng không, ta được phương trình đường trung hòa:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

Thay:  $M_x = N_z y_K; M_y = N_z x_K$

$$\frac{N_z}{A} + \frac{N_z y_K}{I_x} y + \frac{N_z x_K}{I_y} x = 0$$

$$\frac{N_z}{A} \left[ 1 + \frac{y_K A}{I_x} y + \frac{x_K A}{I_y} x \right] = 0$$

Đặt:  $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

$$1 + \frac{y_K y}{i_x^2} + \frac{x_K x}{i_y^2} = 0$$

Đặt:  $a = -\frac{i_y^2}{x_K}; b = -\frac{i_x^2}{y_K}$  (10.16)

Ta thu được phương trình đường trung hòa dưới dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (10.17)$$

Từ (10.16), (10.17), ta thấy đường trung hòa có các tính chất sau:

- Đường trung hòa cắt trục  $x$  tại  $a$  và trục tung tại  $b$ .
- Đường trung hòa không bao giờ qua phần tư chứa điểm đặt lực  $K$  vì  $a$  và  $b$  luôn trái dấu với  $x_K, y_K$ .
- Điểm đặt lực tiến gần tâm  $O$  của tiết diện thì đường trung hòa rời xa tâm vì  $x_K, y_K$  giảm thì  $a, b$  tăng.
- Khi đường trung hòa nằm ngoài tiết diện, trên tiết diện chỉ chịu ứng suất một dấu: kéo hoặc nén.

Gọi lõi tiết diện là khu vực bao quanh tâm sao cho khi lực lệch tâm đặt trong phạm vi đó thì đường trung hòa hoàn toàn nằm ngoài tiết diện.

Với một thanh chịu kéo hay nén lệch tâm, việc xác định lõi tiết diện có ý nghĩa thực tiễn. Trong thực tế, có nhiều loại vật liệu chỉ chịu nén tốt như gạch, đá, gang, bê tông không thép..., nếu chúng chịu nén lệch tâm mà lực nén đặt ngoài lõi tiết diện, ứng suất kéo phát sinh có thể lớn hơn khả năng chịu kéo của chúng, khi đó vật liệu sẽ bị phá hoại, để tận dụng tốt khả năng chịu lực của vật liệu cần thiết kể đặt lực nén trong lõi tiết diện.

Có thể xác định lõi tiết diện theo cách sau:

Giả sử đường trung hòa tiếp xúc một cạnh tiết diện, từ (10.17) ta viết được phương trình đường trung hòa, rồi từ (10.16) ta suy ra tọa độ điểm đặt lực  $K$  tương ứng với vị trí đường trung hòa. Áp dụng cách tương tự đối với tất cả các cạnh còn lại, nối vị trí các điểm đặt lực, ta được lõi tiết diện. Để ý rằng, dù tiết diện là đa giác lõm thì lõi tiết diện luôn là một đa giác lồi.

**Ví dụ 10.4** Xác định lõi tiết diện chữ nhật (H.10.16).

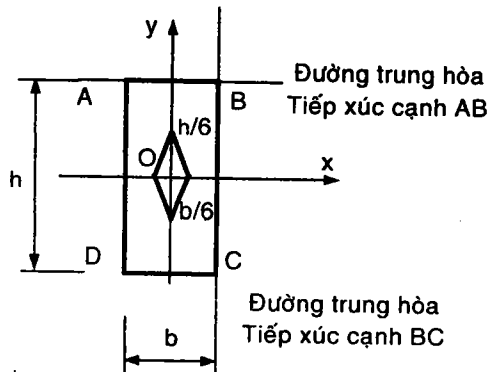
Khi đường trung hòa trùng cạnh AB:

$$\frac{x}{\infty} + \frac{y}{h/2} = 1$$

$$-\frac{i_y^2}{x_K} = \infty \Rightarrow x_K = 0$$

$$-\frac{i_x^2}{y_K} = \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow y_K = -\frac{h^2}{12 \frac{h}{2}} = -\frac{h}{6}$$



**Hình 10.16** Xác định lõi tiết diện

Khi đường trung hòa trùng cạnh BC:

$$\frac{x}{b/2} + \frac{y}{\infty} = 1$$

$$-\frac{i_y^2}{x_K} = \frac{b}{2} \Rightarrow x_K = -\frac{b^2}{12 \cdot b/2} = -\frac{b}{6}$$

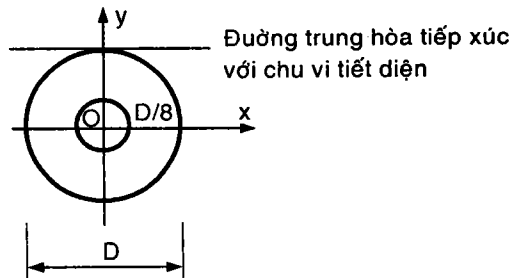
$$-\frac{i_x^2}{y_K} = \infty \Rightarrow y_K = 0$$

Do tính đối xứng của tiết diện, khi đường trung hòa trùng cạnh CD, AD, ta xác định hai điểm K tương ứng có tọa độ lần lượt là:

$$x_K = 0, y_K = h/6 \quad \text{và} \quad x_K = b/6, y_K = 0$$

Nối các điểm K, ta được lõi tiết diện của tiết diện chữ nhật là một hình thoi có đỉnh trên trục x, y (H.10.16).

**Ví dụ 10.5** Tiết diện tròn (H.10.17)



**Hình 10.17** Xác định lõi tiết diện

Khi đường trung hòa là một tiếp tuyến với đường tròn tại A:

$$\frac{x}{\infty} + \frac{y}{D/2} = 1$$

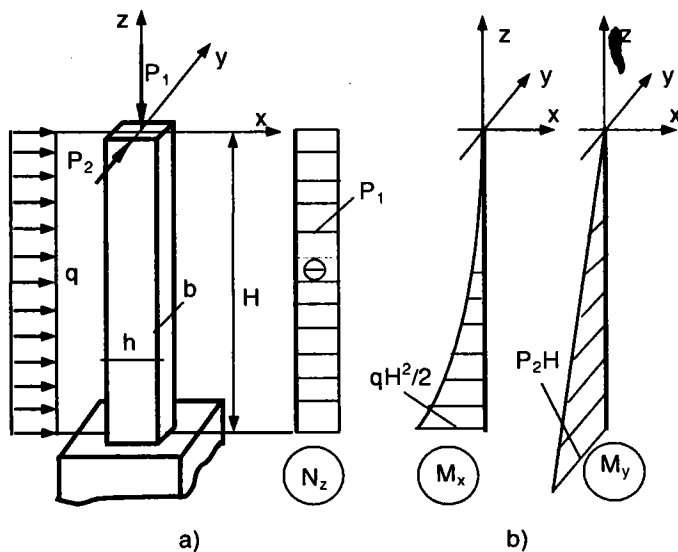
$$-\frac{i_y^2}{x_K} = \infty \Rightarrow x_K = 0; \quad -\frac{i_x^2}{y_K} = \frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow y_K = -\frac{\pi D^4}{64 \frac{\pi D^2}{4} \frac{D}{2}} = -\frac{D}{8}$$

Do tính đối xứng của tiết diện, ta thấy lõi tiết diện là một đường tròn đồng tâm đường kính D/8.

**Ví dụ 10.6** Một thanh tiết diện chữ nhật (b.h), chịu tác dụng của ngoại lực như hình 10.18a. Vẽ biểu đồ nội lực, tính  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ . Xác định đường trung hòa tại ngàm.

Cho  $q = 5\text{kN/m}$ ,  $P_1 = 100\text{kN}$ ,  $P_2 = 6\text{kN}$ ,  $H = 6\text{m}$ ,  $h = 2b = 40\text{cm}$ .



**Hình 10.18** a) Thanh chịu nén + uốn  
b) Biểu đồ nội lực

**Giải** Biểu đồ nội lực do từng nguyên nhân gây ra được vẽ trên hình 10.18b.

Tại ngàm, nội lực có giá trị lớn nhất:

$$N_z = -P_1 \text{ (nén)}; \quad M_x = \frac{qH^2}{2}; \quad M_y = P_2H$$

Áp dụng công thức (10.12):

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{P_1}{A} \pm \frac{qH^2/2}{W_x} \pm \frac{P_2H}{W_y}$$

Thay số, ta được:

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{100}{20(40)} \pm \frac{5(6)^2 100}{2 \frac{20(40)^2}{6}} \pm \frac{6(6)100}{\frac{40(20)^2}{6}}$$

$$\sigma_{\max, \min} = -0,125 \pm 1,687 \pm 1,350 = \pm \frac{2,912}{3,162}$$

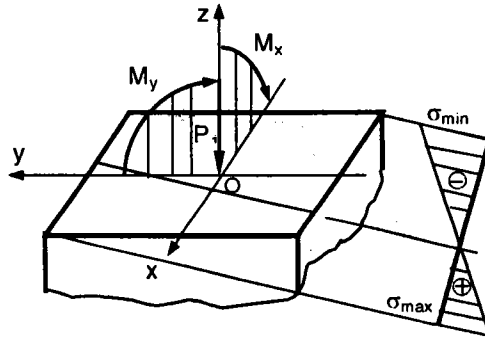
Phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x - \frac{N_z J_x}{A M_x} \quad (a)$$

Chọn hệ trục  $y, x$  dương về phía gẫy kéo của  $M_x$  và  $M_y$ , thay số vào (a) ta được:

$$y = -\frac{6(6)}{5(6)^2 / 2} \frac{20(40)^3 / 12}{(40)(20)^3 / 12} x - \frac{-100}{20(40)} \frac{20(40)^3 / 12}{5(6)^2(100) / 2} = -1,6x + 1,48$$

Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất được vẽ trên hình 10.19.



**Hình 10.19** Đường trung hòa của thanh chịu nén + uốn

**Ví dụ 10.7** Một cột chịu nén lệch tâm và lực đẩy của gió như hình 10.20a. Xem chân cột bị ngầm. Tính  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ . Nếu khối móng có kích thước

$1m \times 3m \times 0,5m$  được đặt như hình 10.20b, hãy tính phản lực của nền đất.

Cho:  $P_1 = 50kN$ ,  $q = 4kN/m$ ,  $H = 6m$ ,  $h = 2b = 40cm$ ,  $\gamma = 25kN/m^3$

Nội lực lớn nhất tại tiết diện ngầm:

$$N_z = -P_1 = -50 \text{ kN (nén)}$$

$$M_x = P_1 e + \frac{qH^2}{2} = 50 \times 20 + 4 \times 6^2 \times \frac{100}{2} = 8200 \text{ kNcm}$$

Áp dụng công thức (10.12), ứng suất pháp lớn nhất:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max, \min} &= -\frac{P_1}{F} \pm \frac{qH^2 / 2 + P_1 e}{W_x} = \\ &= -\frac{50}{20(40)} \pm \frac{8200}{20(40)^2 / 6} = -0,0625 \pm 1,537 = \pm \frac{1,47}{1,60} \frac{kN}{cm^2} \end{aligned}$$

Dời lực về đáy móng, kể thêm trọng lượng bản thân móng và mômen do lực cắt  $qH$ , ta được:

$$N_z = -50 - 25 \times 0,5 \times 3 \times 1 = -87,5 \text{ kN (nén)}$$

$$M_x = 9400 \text{ kNcm.}$$

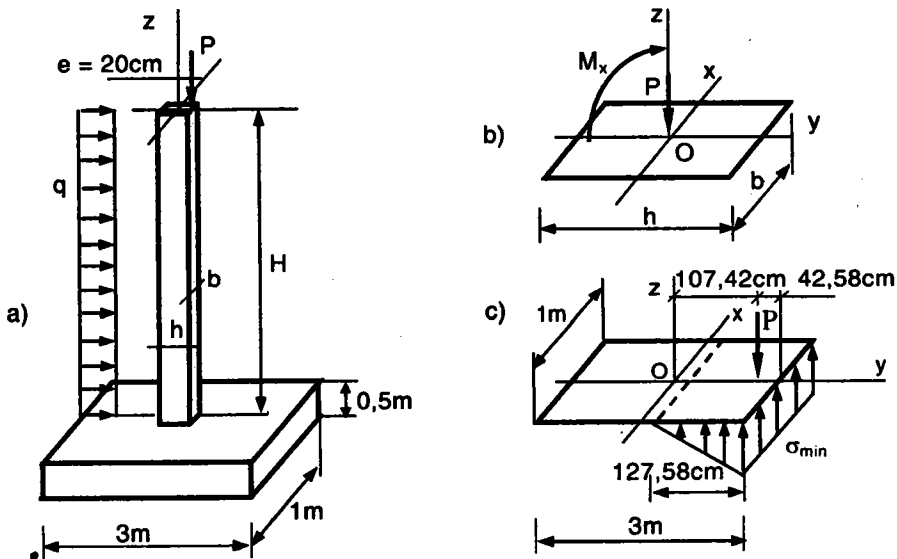
Tại đáy móng, nếu vật liệu vẫn liên tục, ta có phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{N_z I_x}{A M_x} = -\frac{-87,5}{100(300)} \frac{100(300)^3}{12(9400)} = 69,81 \text{ cm}$$

Theo (10.12), ta có ứng suất pháp lớn nhất:

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{87,5}{100(300)} \pm \frac{9400}{100(300)^2 / 6} = \frac{+0,0034}{-0,0092} \text{ kN/cm}^2$$

Thực tế, tại đáy móng, vật liệu là đất chỉ chịu nén, không thể chịu ứng suất kéo, do đó, để đảm bảo điều kiện cân bằng, hợp lực của phản lực nền phải cân bằng với ngoại lực tác dụng.



**Hình 10.20** a) *Cột chịu nén lệch tâm*  
 b) *Nội lực tại tiết diện chân cột*  
 c) *Phản lực nền đất tại đáy móng*



Ngoại lực tại mặt đáy móng gồm một lực nén  $87,5kN$  và một mômen  $M_x = 9400kNcm$  tương đương một lực nén  $87,5kN$  lệch tâm đặt trên trục  $y$  với độ lệch tâm là  $e = 9400/87,5 = 107,42cm$ , đặt cách mép chịu nén lớn nhất là  $150 - 107,42 = 42,58cm$ .

Để cân bằng với lực này, hợp lực của phản lực nền phải đối đẳng với lực nén  $87,5kN$ , giả sử phản lực nền phân bố theo quy luật bậc nhất, phản lực nền phải phân bố trên một diện tích mặt móng  $100 \times (3 \times 42,58) = 100 \times 127,74cm^2$  tính từ mép chịu nén lớn nhất (H.10.20c).

Điều kiện cân bằng cho:

$$\sigma_{\min} \frac{(100)(127,74)}{2} = 87,5 \Rightarrow \sigma_{\min} = 0,0137 \text{ kN/cm}^2$$

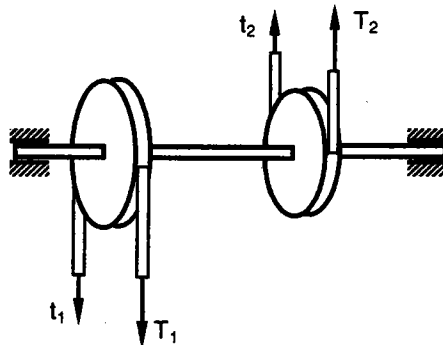
Kết quả này cho thấy, do mặt đế móng không được thiết kế sử dụng toàn bộ diện tích mặt móng nên ứng suất nén truyền lên nền tăng lên.

## 10.4 UỐN CỘNG XOẮN

Thanh chịu uốn cộng xoắn khi trên các mặt cắt ngang có tác dụng đồng thời của mômen uốn  $M_u$  và mômen xoắn  $M_x$ .

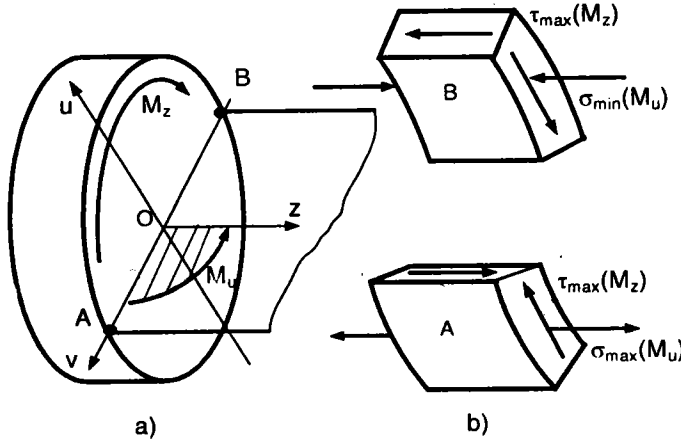
### 10.4.1 Thanh tiết diện tròn

Thanh tiết diện tròn chịu uốn xoắn đồng thời rất thường gặp khi thiết kế trục truyền động (H.10.21) vì quá trình truyền chuyển động quay qua các puli, trục bị xoắn và kèm theo tác dụng uốn do lực căng dây đai, do trọng lượng bản thân trục, puli...



Hình 10.21 Trục truyền động chịu uốn xoắn

Thanh tiết diện tròn không bao giờ bị uốn xiên vì vậy nếu có nhiều ngoại lực gây uốn tác dụng trong những mặt phẳng khác nhau, ta luôn luôn có thể phân tích chúng thành các thành phần tác dụng trong hai mặt phẳng vuông góc  $yOz$ ,  $xOz$ , từ đó xác định  $M_x$ ,  $M_y$ , sau đó xác định mômen tổng  $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ .



**Hình 10.22** a) Thanh tiết diện tròn chịu uốn xoắn  
b) Ứng suất tại hai điểm A và B

Xét một thanh tiết diện tròn chịu tác dụng của mômen uốn  $M_u$  và mômen xoắn  $M_z$  (H.10.22a). Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta thấy tại hai điểm A, B, mômen uốn  $M_u$  gây ra ứng suất pháp  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  và mômen xoắn  $M_z$  gây ra ứng suất tiếp  $\tau_{\max}$ , đó là hai điểm nguy hiểm nhất trên tiết diện. Trạng thái ứng suất phân tố tại A và B mô tả ở hình 10.22b.

$$\text{Ta có: } \sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_u|}{W_u}; \quad M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (10.18)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

trong đó:

$$\text{Thanh tiết diện tròn đặc thì } W_p = 2W_u = \pi D^3/16.$$

$$\text{Thanh tiết diện tròn rỗng thì } W_p = 2W_u = \pi D^3(1-\eta^4)/16.$$

Phân tố đang xét vừa chịu ứng suất pháp vừa chịu ứng suất tiếp, đó là phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng (trạng thái ứng suất phức tạp).

Do đó, điều kiện bền được lập từ các thuyết bền như sau:

Theo thuyết bền thứ ba

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Theo thuyết bền thứ tư

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

**Ví dụ 10.8** Một trục tròn đường kính  $d$ , mang puli chủ động đường kính  $D_1$  và puli bị động đường kính  $D_2$ . Mô tơ truyền lực kéo  $T_1$  lên một nhánh dây đai của puli  $D_1$  làm quay trục, kéo theo puli  $D_2$ . Coi hiệu suất truyền là 1, lực kéo trên một nhánh dây đai của puli  $D_2$  là  $T_2 = T_1 D_1 / D_2$ . Ngoài ra, giả sử lực căng ban đầu trên dây đai bằng nửa lực kéo tác dụng lên dây đai. Tính đường kính trục  $d$  (H.10.23a).

Cho trọng lượng puli  $G_1 = G_2 = 1 \text{ kN}$ ,  $D_1 = 50 \text{ cm}$ ,  $D_2 = 30 \text{ cm}$ ,  $T_1 = 5 \text{ kN}$ ,  $[\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2$ . Bỏ qua trọng lượng bản thân của trục.

**Giải** Lực căng ban đầu trên dây đai của puli  $D_1$  là:

$$\frac{T_1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ kN}$$

Lực kéo truyền lên dây đai  $D_2$  là:

$$T_2 = \frac{T_1 D_1}{D_2} = \frac{5 \times 50}{30} = 8,33 \text{ kN}$$

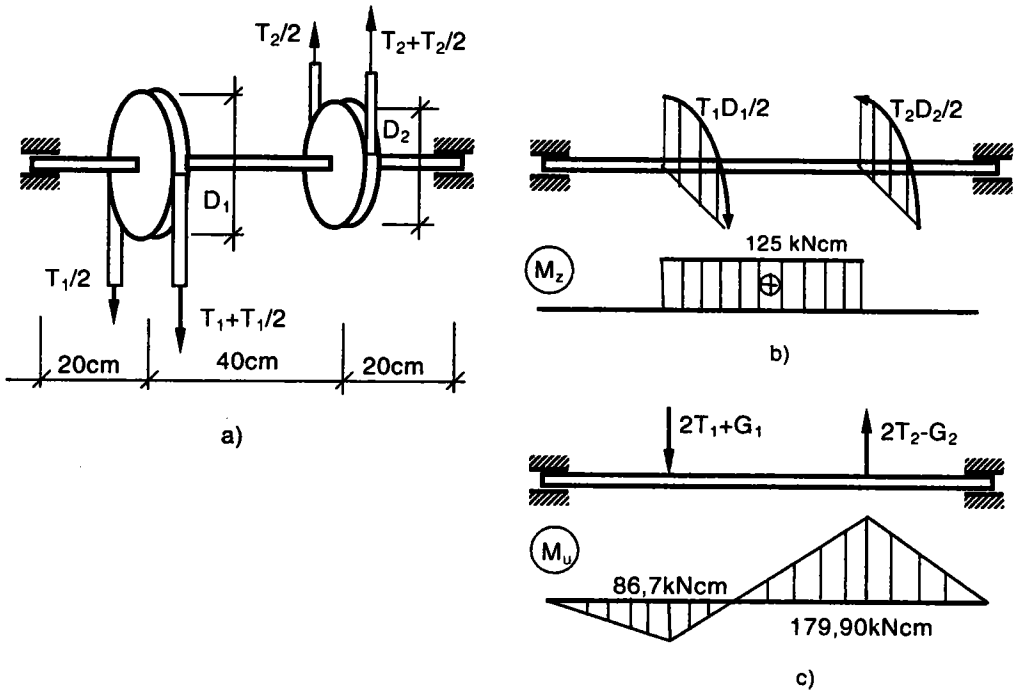
Lực căng ban đầu trên dây đai  $D_2$  là:

$$\frac{T_2}{2} = \frac{8,33}{2} = 4,17 \text{ kN}$$

Đời lực trên dây đai về tâm của trục, ta có thể đưa ra sơ đồ tính của trục như trên hình 10.23b,c. Biểu đồ mômen xoắn  $M_z$  và mômen uốn  $M_u$  vẽ tương ứng hình 10.23b,c.

Tại tiết diện đặt puli  $D_2$  chịu nội lực lớn nhất:

$$M_u = 179,9 \text{ kNcm}, \quad M_z = 125 \text{ kNcm}.$$



**Hình 10.23** a) Trục truyền động chịu uốn xoắn  
 b) Trục chịu xoắn và biểu đồ  $M_z$   
 c) Trục chịu uốn và biểu đồ  $M_u$

Mômen uốn gây ứng suất pháp lớn nhất là:

$$\sigma_z = \frac{M_u}{W_u} = \frac{179,9}{\pi D^3 / 32} = \frac{1833,4}{D^3}$$

Mômen xoắn  $M_z = 125 \text{ kNcm}$  gây ra ứng suất tiếp lớn nhất là:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{125}{\pi D^3 / 16} = \frac{636,9}{D^3}$$

Điều kiện bền theo thuyết bền thứ ba:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Ta có:

$$\sqrt{\frac{1833,4^2}{(D^3)^2} + 4 \frac{636,9^2}{(D^3)^2}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{2232,47}{D^3} \leq 12 \Rightarrow D \geq 5,7 \text{ cm}$$

Chọn đường kính trục là  $60 \text{ mm}$ .

**10.4.2 Thanh tiết diện chữ nhật**

Uốn xoắn thanh tiết diện chữ nhật thường gặp trong công trình dân dụng như lanh tô đỡ ôvăng, dầm chịu lực ngoài mặt phẳng đối xứng, thanh chịu uốn trong hệ không gian...

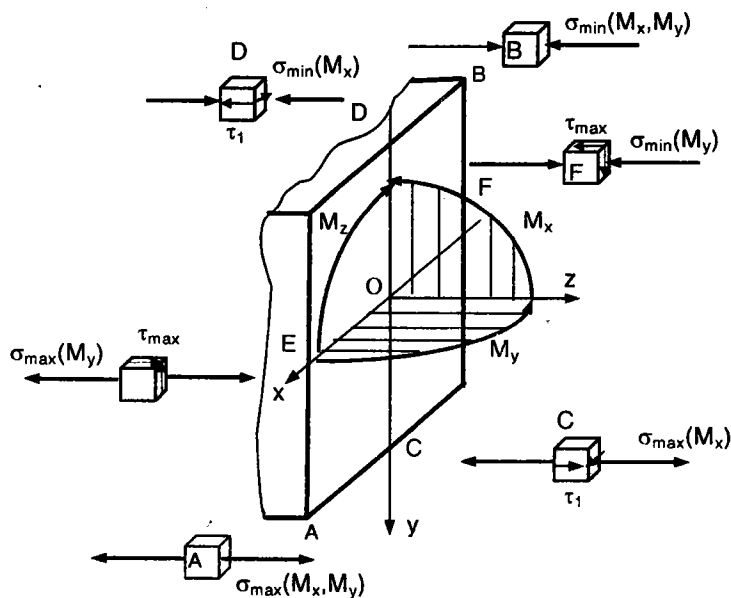
Xét một thanh tiết diện chữ nhật chịu uốn xoắn trong đó mômen uốn  $M_u$  đã được phân tích thành hai mômen uốn  $M_x, M_y$  trong các mặt phẳng đối xứng  $yOz, xOz$  (H.10.24).

Tại các điểm góc tiết diện (A,B), chỉ có ứng suất pháp lớn nhất do  $M_x, M_y$ , phân tố ở trạng thái ứng suất đơn:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \tag{10.19}$$

Điều kiện bền đối với A và B:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n$$



**Hình 10.24** Nội lực của thanh tiết diện chữ nhật chịu uốn + xoắn và ứng suất tại các điểm nguy hiểm

Tại điểm giữa cạnh ngắn (C,D), chịu ứng suất pháp lớn nhất do  $M_x$  và ứng suất tiếp  $\tau_1$  do  $M_z$ , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_x|}{W_x} \quad (10.20)$$

$$\tau_1 = \gamma \tau_{\max} = \gamma \frac{M_z}{\alpha h b^2}$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ ba  $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Theo thuyết bền thứ tư  $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

Tại điểm giữa cạnh dài (E,F), chịu ứng suất pháp lớn nhất do  $M_y$  và ứng suất tiếp  $\tau_{\max}$  do  $M_z$ , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{|M_y|}{W_y} \quad (10.21)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha h b^2}$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ ba  $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

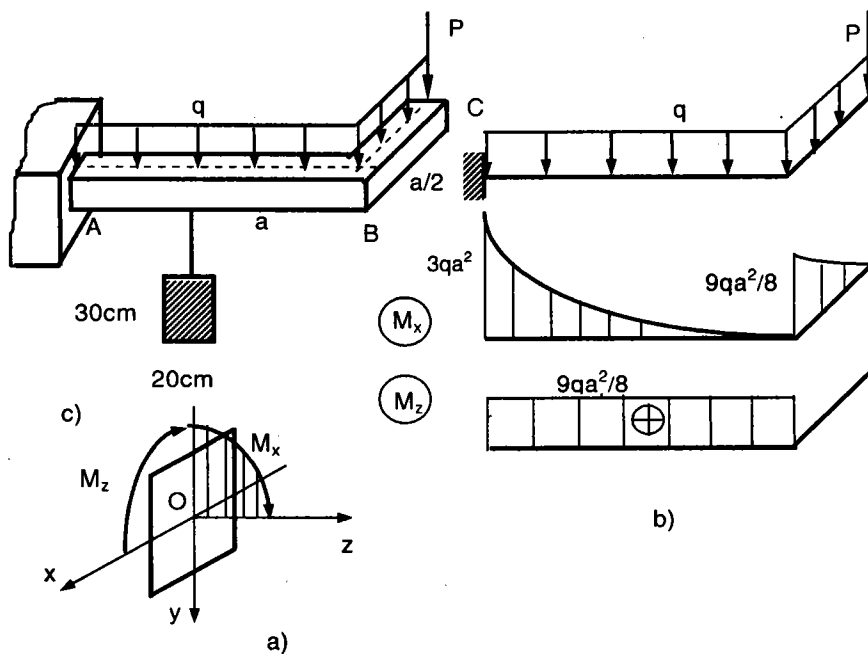
Theo thuyết bền thứ tư  $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

**Ví dụ 10.9** Một thanh gậy khúc ABC tiết diện chữ nhật ( $20\text{cm} \times 30\text{cm}$ ) chịu tác dụng của tải trọng như hình 10.25a. Vẽ biểu đồ nội lực, kiểm tra điều kiện bền bên tại tiết diện ngàm. Cho  $q = 4 \text{ kN/m}$ ;  $P = 2qa$ ;  $a = 1,2\text{m}$ ;  $[\sigma] = 1\text{kN/cm}^2$ .

**Giải** Biểu đồ nội lực được vẽ trên hình 10.25b, tại tiết diện ngàm chịu nội lực lớn nhất (H.10.25c):

$$M_x = 3qa^2 = 3(4)(1,2)^2 = 17,28 \text{ kNm} = 1728 \text{ kNcm}$$

$$M_z = \frac{9qa^2}{8} = \frac{9(4)(1,2)^2}{8} = 6,48 \text{ kNm} = 648 \text{ kNcm}$$



**Hình 10.25** a) Thanh chịu uốn + xoắn  
 b) Biểu đồ mômen uốn và mômen xoắn  
 c) Chiều nội lực tại tiết diện ngầm

Tại trung điểm cạnh ngắn, phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{1728}{20(30)^2/6} = 0,576 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_1 = \gamma \tau_{\max} = \gamma \frac{M_z}{\alpha h b^2} = 0,859 \frac{648}{0,231(30)20^2} = 0,23 \text{ kN/cm}^2$$

Điều kiện bền:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} &= \sqrt{0,576^2 + 4(0,23)^2} = \\ &= 0,74 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Tại trung điểm cạnh dài, phân tố ở trạng thái trượt thuần túy:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha h b^2} = \frac{648}{0,231(30)20^2} = 0,233 \text{ kN/cm}^2$$

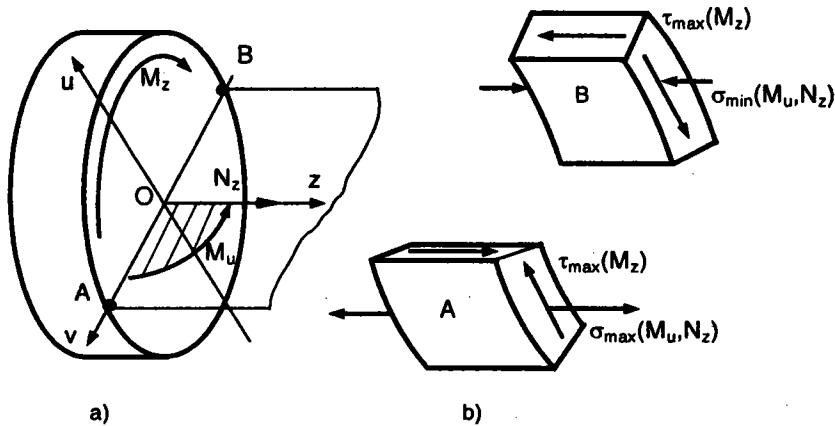
Điều kiện bền:

$$\tau_{\max} = 0,233 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]/2 = 0,5 \text{ kN/cm}^2$$

## 10.5 THANH CHỊU LỰC TỔNG QUÁT

Thanh chịu lực tổng quát khi trên các mặt cắt ngang có tác dụng của lực dọc  $N_z$ , mômen uốn  $M_u$  và mômen xoắn  $M_z$ .

Thanh chịu lực tổng quát thường gặp khi tính các thanh chịu lực theo sơ đồ không gian.



**Hình 10.26** a) Thanh tiết diện tròn chịu uốn xoắn  
b) Ứng suất tại hai điểm A và B

### 10.5.1 Thanh tiết diện tròn (H.10.26a,b)

Điểm nguy hiểm nằm trên chu vi, đó là hai điểm A, B. hai điểm này vừa chịu ứng suất pháp lớn nhất do mômen  $M_u$  và lực dọc  $N_z$ , vừa chịu ứng suất tiếp lớn nhất do  $M_z$ , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng.

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_u|}{W_u}; \quad |M|_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (10.22)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \quad (10.23)$$

**Điều kiện bền:**

Theo thuyết bền thứ ba:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$



Theo thuyết bền thứ tư:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

**Ví dụ 10.10** Có một thanh tiết diện tròn đường kính  $D$  chịu một hệ lực không gian như trên hình 10.27a. Vẽ biểu đồ nội lực. Xác định đường kính  $D$ .

Cho  $q = 4\text{kN/m}$ ,  $P = qa$ ,  $a = 4\text{m}$ ,  $[\sigma] = 16\text{kN/cm}^2$ .

**Giải** Biểu đồ nội lực được vẽ ở hình 10.27b.

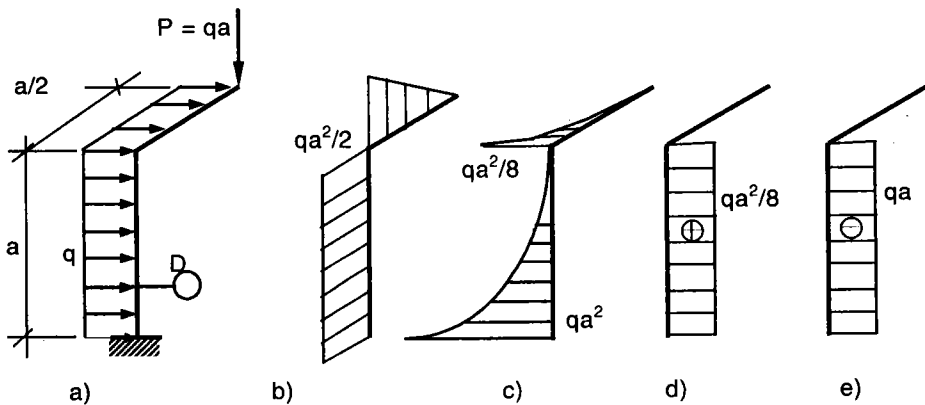
Tại ngàm tiết diện chịu nội lực lớn nhất:

$$N_z = qa = 4(4) = 16 \text{ kN (nén);}$$

$$M_x = qa^2 = 4(4)^2 \cdot 100 = 6400 \text{ kNcm}$$

$$M_y = \frac{qa^2}{2} = \frac{4(4)^2 \cdot 100}{2} = 3200 \text{ kNcm;}$$

$$M_z = \frac{qa^2}{8} = \frac{4(4)^2 \cdot 100}{8} = 800 \text{ kNcm}$$



**Hình 10.27** a) Thanh chịu lực không gian  
 b) Biểu đồ mômen do  $P$   
 c) Biểu đồ mômen do  $q$   
 d) Biểu đồ mômen xoắn  
 e) Biểu đồ lực dọc

Ứng suất pháp lớn nhất:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|N_z|}{F} + \frac{|M_u|}{W_u}$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{6400^2 + 3200^2} = 7155,41 \text{ kNcm}$$

$$|\sigma|_{\max} = \frac{16}{\pi D^2 / 4} + \frac{7155,4}{\pi D^3 / 32}$$

Ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{800}{\pi D^3 / 16}$$

Theo thuyết bền thứ ba:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{16}{\pi D^2 / 4} + \frac{7155,4}{\pi D^3 / 32}\right)^2 + 4\left(\frac{800}{\pi D^3 / 16}\right)^2} \leq 16$$

Trong tính toán thực hành, để thuận lợi cho việc giải bất phương trình trên, ban đầu chọn  $D$  theo *uốn xoắn*, bỏ qua ứng suất do lực dọc, sau đó kiểm tra lại, ta có:

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{7155,4}{\pi D^3 / 32}\right)^2 + 4\left(\frac{800}{\pi D^3 / 16}\right)^2} \leq 16 \Rightarrow D \geq 16,6 \text{ cm}$$

Ban đầu, chọn  $D = 168 \text{ mm}$ .

Kiểm tra điều kiện  $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

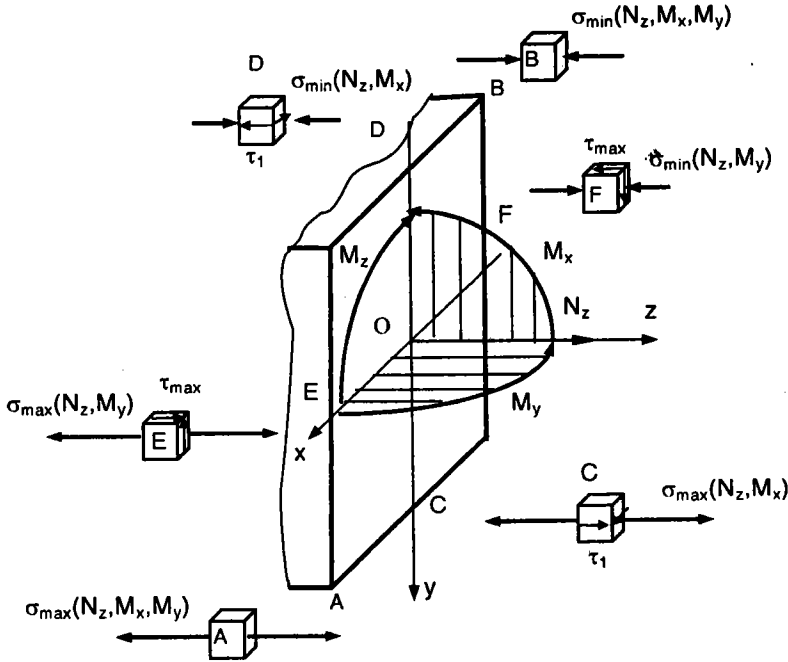
$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{16}{\pi 16,8^2 / 4} + \frac{7155,4}{\pi 16,8^3 / 32}\right)^2 + 4\left(\frac{800}{\pi 16,8^3 / 16}\right)^2}$$

$$\sqrt{(0,072 + 15,38)^2 + 4(0,86)^2} = 15,54 \text{ kN/cm}^2 < 16 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy chọn  $D = 168 \text{ mm}$ .

**10.5.2 Thanh có tiết diện chữ nhật**

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng và lý thuyết về kéo (nén), về uốn, và về xoắn, ta được các kết quả như sau (H.10.28):



**Hình 10.28** Nội lực của thanh tiết diện chữ nhật chịu lực tổng quát và ứng suất tại các điểm nguy hiểm

Tại các góc tiết diện (các điểm A,B), chỉ có ứng suất pháp do  $N_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ , phân tố ở trạng thái ứng suất đơn, ta có:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \tag{10.24}$$

Điều kiện bền:  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k$   
 $|\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n$

Đối với vật liệu dẻo:  $|\sigma|_{\max} \leq [\sigma]$

Tại điểm giữa cạnh dài (C,D), phân tố vừa chịu ứng suất pháp lớn nhất do  $M_y$  và lực dọc  $N_z$ , vừa chịu ứng suất tiếp lớn nhất do  $M_z$ , đó là phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \quad (10.25)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha hb^2}$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ ba  $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Theo thuyết bền thứ tư  $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

Tại điểm giữa cạnh ngắn (các điểm E,F), phân tố vừa chịu ứng suất pháp lớn nhất do  $M_x$  và lực dọc  $N_z$ , vừa chịu ứng suất tiếp do  $M_z$ , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_x|}{W_x} \quad (10.26)$$

$$\tau_1 = \gamma \tau_{\max}$$

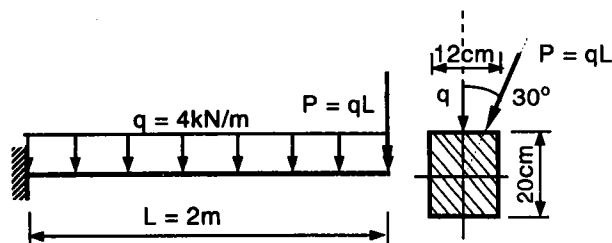
Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ ba  $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Theo thuyết bền thứ tư  $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

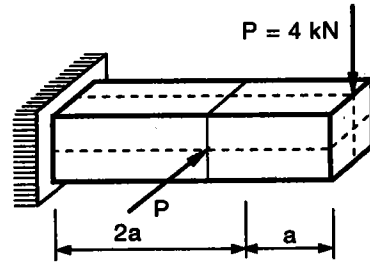
## 10.6 BÀI TẬP CHƯƠNG 10

10.1 Một thanh console tiết diện chữ nhật chịu tác dụng của tải trọng như hình 10.29. Vẽ biểu đồ nội lực, tính ứng suất pháp lớn nhất, xác định vị trí đường trung hoà tại mặt cắt ngàm.



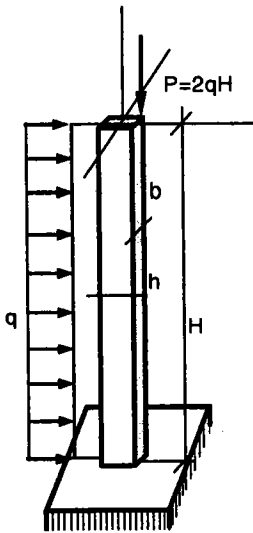
Hình 10.29

- 10.2 Dầm có tiết diện vuông  $20 \times 20 \text{ cm}^2$ , xác định giá trị tuyệt đối lớn nhất của ứng suất pháp, vị trí đường trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm của dầm (H.10.30),  $a = 1 \text{ m}$ .

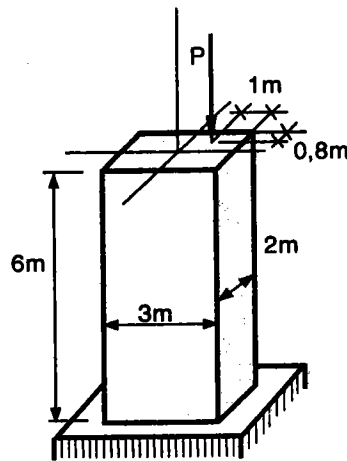


Hình 10.30

- 10.3 Xác định  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  và vị trí đường trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm của cột hình 10.31. Lực  $P$  đặt tại góc của tiết diện. Cho  $h = 2b = 40 \text{ cm}$ ,  $H = 4 \text{ m}$ ,  $q = 3 \text{ kN/m}$ .



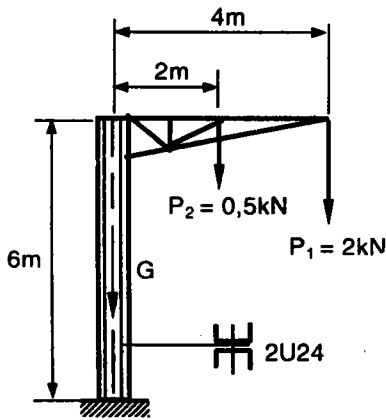
Hình 10.31



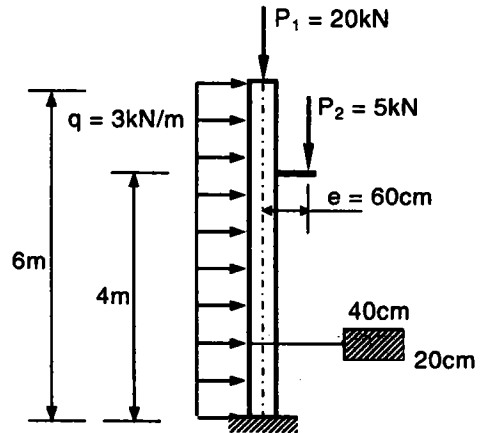
Hình 10.32

- 10.4 Một cột chịu tải trọng như hình 10.32. Kể đến trọng lượng riêng của cột, xác định ứng suất nén lớn nhất và nhỏ nhất tại mặt cắt chân cột. Cho  $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$ ,  $P = 1000 \text{ kN}$ .

- 10.5 a) Một trụ đỡ gồm hai thép số hiệu U24 chịu tải trọng như hình 10.33. Xác định ứng suất kéo và nén lớn nhất tại mặt cắt chân cột có xét cả trọng lượng của cột.  
 b) Một cột chịu tải trọng như hình 10.34. Tính ứng suất ứng suất kéo và nén lớn nhất.

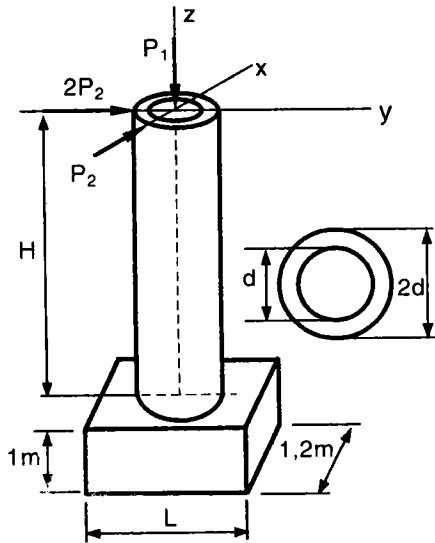


Hình 10.33

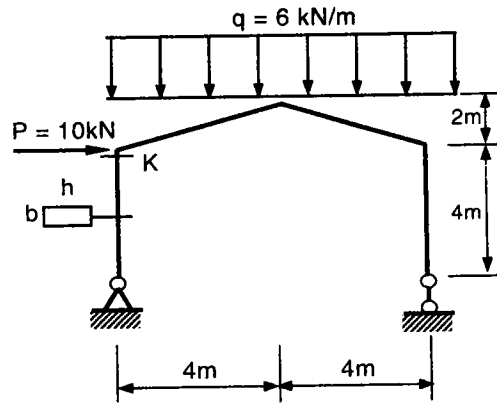


Hình 10.34

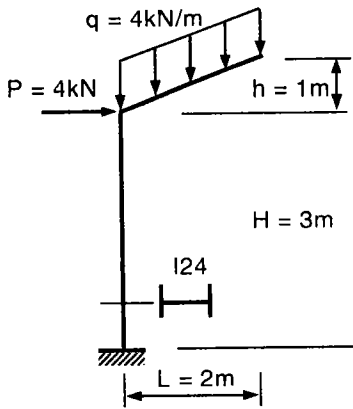
- 10.6** Một cột tròn rỗng chịu tác dụng của tải trọng như hình 10.35.
- a) Tính ứng suất pháp  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  tại tiết diện chân cột, xác định vị trí và biểu diễn đường trung hòa tại tiết diện này. Cho  $H = 4m$ ,  $d = 20cm$ ,  $P_1 = 100kN$ ,  $P_2 = 10kN$  (xem cột ngầm tại chân cột).
- b) Giả sử trục cột được bố trí đi qua tâm móng và móng cột có kích thước  $1m \times 1,2m \times L$  đặt trực tiếp lên nền đất, trọng lượng riêng  $\gamma = 25kN/m^3$ . Tính kích thước  $L$  sao cho ở đáy móng không phát sinh ứng suất kéo.
- 10.7** Một khung tiết diện chữ nhật đều, chịu tác dụng của tải trọng như hình 10.36. Vẽ biểu đồ nội lực của khung và nội lực kéo trong thanh AB. Xác định ứng suất  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  và vị trí đường trung hòa tại mặt cắt ngang K.
- 10.8** Một khung tiết diện chữ I24, chịu tác dụng của tải trọng như hình 10.37. Xác định nội lực tại tiết diện chân cột. Kiểm tra bền. Cho  $[\sigma] = 16kN/cm^2$ .
- 10.9** Một thanh gãy khúc tiết diện tròn đường kính  $d$  chịu lực như hình 10.38. Vẽ biểu đồ nội lực, xác định đường kính  $d$  theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Cho  $[\sigma] = 16kN/cm^2$ .
- 10.10** Một trục truyền động tiết diện tròn đường kính  $d$  có sơ đồ tính như hình 10.39. Vẽ biểu đồ nội lực, xác định đường kính  $d$  theo thuyết bền thứ ba. Cho  $[\sigma] = 10kN/cm^2$ .



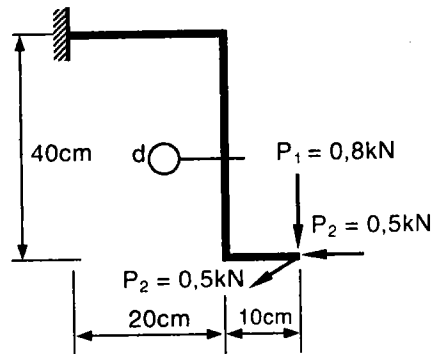
Hình 10.35



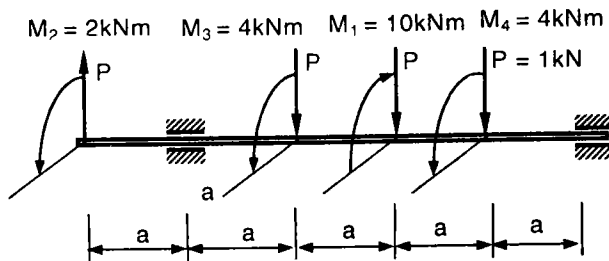
Hình 10.36



Hình 10.37



Hình 10.38



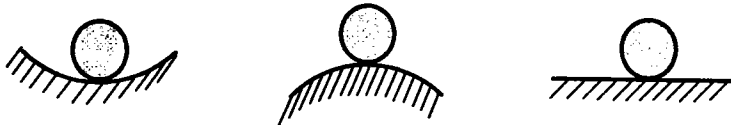
Hình 3.9

## ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU NÉN

### 11.1 KHÁI NIỆM VỀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA TRẠNG THÁI CÂN BẰNG

Để đáp ứng yêu cầu chịu lực bình thường, một thanh phải thỏa mãn điều kiện bền và cứng, như đã được trình bày trong các chương trước đây. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, thanh còn phải thỏa mãn thêm điều kiện *ổn định*. Đó là khả năng duy trì hình thức biến dạng ban đầu nếu bị nhiễu. Trong thực tế, nhiễu có thể là các yếu tố sai lệch so với sơ đồ tính như độ cong ban đầu, sự nghiêng hoặc lệch tâm của lực tác dụng...

Khái niệm ổn định có thể minh họa bằng cách xét sự cân bằng của quả cầu trên các mặt lõm, lồi và phẳng trên hình 11.1.



**Hình 11.1** Sự cân bằng về vị trí của quả cầu

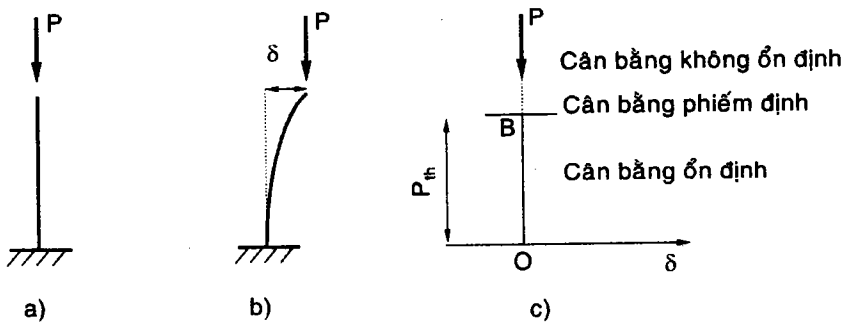
Nếu cho quả cầu một chuyển dịch nhỏ (gọi là *nhiều*) từ vị trí ban đầu sang vị trí lân cận rồi bỏ nhiễu đi thì:

- Trên mặt lõm, quả cầu quay về vị trí ban đầu: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là ổn định.
- Trên mặt lồi, quả cầu chuyển động ra xa hơn vị trí ban đầu: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là không ổn định.
- Trên mặt phẳng, quả cầu giữ nguyên vị trí mới: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là phiếm định.



Hiện tượng tương tự cũng có thể xảy ra đối với sự cân bằng về trạng thái biến dạng của hệ đàn hồi. Chẳng hạn với thanh chịu nén trên hình 11.2. Trong điều kiện lý tưởng (thanh thẳng tuyệt đối, lực  $P$  hoàn toàn đúng tâm...) thì thanh sẽ giữ hình dạng thẳng, chỉ co ngắn do chịu nén đúng tâm. Nếu cho điểm đặt của lực  $P$  một chuyển vị bé  $\delta$  do một lực ngang nào đó gây ra, sau đó bỏ lực này đi thì sẽ xảy ra các trường hợp biến dạng như sau.

Nếu lực  $P$  nhỏ hơn một giá trị  $P_{th}$  nào đó, gọi là lực tới hạn, tức là  $P < P_{th}$ , thì thanh sẽ phục hồi lại trạng thái biến dạng thẳng. Sự cân bằng của trạng thái biến dạng thẳng ban đầu được gọi là ổn định.

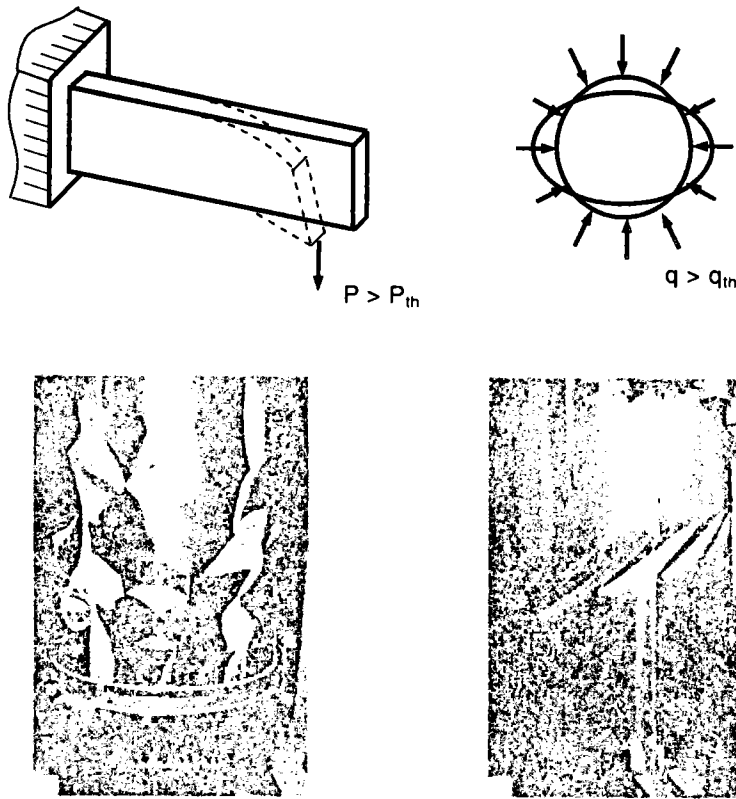


**Hình 11.2** Sự cân bằng của trạng thái biến dạng

- Nếu  $P > P_{th}$  thì chuyển vị  $\delta$  sẽ tăng và thanh bị cong thêm. Sự cân bằng của trạng thái thẳng là không ổn định.
- Ứng với  $P = P_{th}$  thì thanh vẫn giữ nguyên chuyển vị  $\delta$  và trạng thái biến dạng cong. Sự cân bằng của trạng thái thẳng là phiếm định.

Đồ thị quan hệ giữa lực nén  $P$  và chuyển vị  $\delta$  được thể hiện trên hình 11.2c. Điểm B được gọi là điểm phân nhánh. Khi  $P > P_{th}$  thì dạng cân bằng thẳng ( $\delta = 0$ ) là không ổn định; trong thực tế thanh sẽ chuyển vị  $\delta$  và chuyển sang hình thức biến dạng mới bị uốn cong, khác trước về tính chất, bất lợi về điều kiện chịu lực.

Các kết cấu khác nhau đều có thể bị mất ổn định như thanh chịu nén, dầm chịu uốn, tấm chịu nén, vỏ chịu nén hoặc xoắn... như minh họa trên hình 11.3.



**Hình 11.3** Các dạng mất ổn định

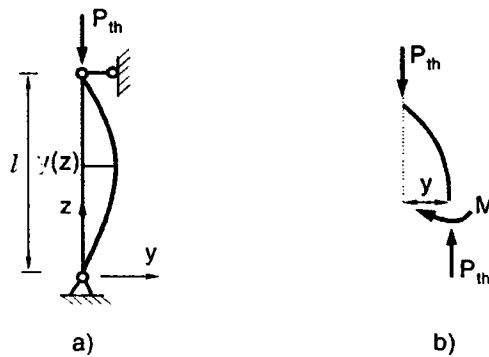
Việc nghiên cứu hiện tượng ổn định của trạng thái biến dạng có ý nghĩa thực tiễn quan trọng. Khi xảy ra mất ổn định dù chỉ của một thanh cũng dẫn tới sự sụp đổ của toàn bộ kết cấu. Tính chất phá hoại do mất ổn định là đột ngột và nguy hiểm. Trong lịch sử ngành xây dựng đã từng xảy ra những thảm họa sập cầu chỉ vì sự mất ổn định của một thanh dàn chịu nén như cầu Mekhelstein ở Thụy Sĩ (1891), cầu Lavrentia ở Mỹ (1907)... Vì vậy khi thiết kế cần phải đảm bảo cả điều kiện ổn định, ngoài điều kiện bền và điều kiện cứng đã nêu trước đây.

Vấn đề ổn định kết cấu có nội dung rộng, trong chương này chủ yếu giới thiệu bài toán ổn định của thanh thẳng chịu nén.

## 11.2 LỰC TỐI HẠN CỦA THANH THẲNG CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM

### 11.2.1 Thanh liên kết khớp hai đầu

Xét thanh thẳng liên kết khớp hai đầu, chịu nén bởi lực tới hạn  $P_{th}$ . Khi bị nhiễu, thanh sẽ bị uốn cong trong mặt phẳng có độ cứng uốn nhỏ nhất, và cân bằng ở hình dạng mới như trên hình 11.4a.



**Hình 11.4** Bài toán Euler

Gọi độ cứng chống uốn trong mặt phẳng uốn cong là  $EI$ . Với giả thiết vật liệu đàn hồi tuyến tính và chuyển vị bé, ta có phương trình vi phân đường đàn hồi:

$$y'' = -\frac{M}{EI} \quad (11.1)$$

trong đó mô men uốn được xác định từ điều kiện cân bằng trên hình 11.4b:

$$M = P_{th}y \quad (11.2)$$

Thế (11.2) vào (11.1) ta có:

$$y'' = -\frac{P_{th}y}{EI}$$

hay: 
$$y'' + \frac{P_{th}}{EI}y = 0$$

Đặt:  $\alpha^2 = \frac{P_{th}}{EI}$  ta thu được:

$$y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (11.3)$$

Nghiệm tổng quát của (11.3) là:

$$y = C_1 \cos \alpha z + C_2 \sin \alpha z \quad (11.4)$$

Các hằng số được xác định từ điều kiện biên  $y(0) = 0$  và  $y(l) = 0$ .

Với:  $y(0) = 0$  suy ra  $C_1 = 0$

$$y(l) = 0 \text{ suy ra } C_2 \sin \alpha l = 0$$

$$y(z) \neq 0 \text{ nên } C_2 \neq 0, \text{ do đó: } \sin \alpha l = 0$$

phương trình này có nghiệm  $\alpha l = n\pi$ , với  $n = 1, 2, 3, \dots$ , hay:

$$P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (11.5)$$

Trong thực tế, khi lực nén đạt đến giá trị tới hạn nhỏ nhất theo (11.5) ứng với  $n = 1$  thì thanh đã bị cong. Vì vậy, các giá trị ứng với  $n > 1$  không có ý nghĩa. Do đó, công thức tính lực tới hạn của thanh thẳng hai đầu liên kết khớp là:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (11.6)$$

Đường đàn hồi tương ứng có dạng một nửa sóng hình sine:

$$y = C_2 \sin \frac{\pi z}{l} \quad (11.7)$$

với  $C_2$  là một hằng số bé, thể hiện độ võng giữa nhịp.

### 11.2.2 Thanh có các liên kết khác

Khi áp dụng phương pháp trên cho thanh có các liên kết khác nhau ở hai đầu, người ta thu được công thức tính lực tới hạn có dạng chung:

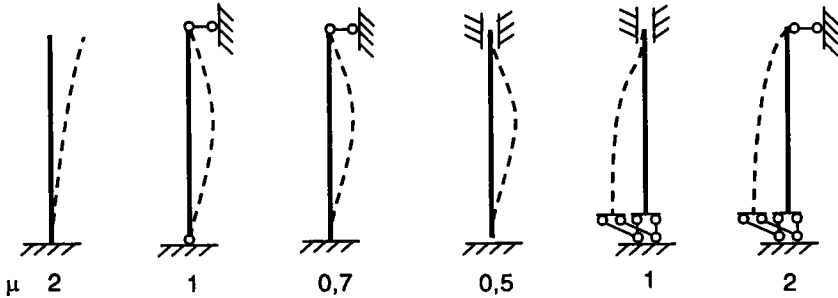
$$P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (11.8)$$

với  $n$  là số nửa sóng hình sine của đường đàn hồi khi mất ổn định.

Nếu đặt  $\mu = \frac{l}{n}$ , gọi là hệ số quy đổi, thì (11.8) được viết lại như dưới đây và được gọi chung là công thức Euler:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (11.9)$$

Trị số  $\mu l$  gọi là *chiều dài quy đổi* của thanh (ra sơ đồ liên kết khớp ở hai đầu). Dạng mất ổn định và hệ số  $\mu$  của thanh có liên kết hai đầu khác nhau thể hiện trên hình 11.5.



Hình 11.5 Dạng mất ổn định và hệ số  $\mu$

### 11.2.3 Ứng suất tới hạn

Ứng suất trong thanh thẳng chịu nén đúng tâm bởi lực  $P_{th}$  gọi là ứng suất tới hạn và được xác định theo công thức:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E r^2}{(\mu l)^2}$$

hay: 
$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{r}\right)^2} \quad (11.10)$$

trong đó  $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$  là bán kính quán tính của tiết diện trong mặt phẳng uốn.

Đặt  $\lambda = \frac{\mu l}{r}$  gọi là độ mảnh của thanh, thì công thức (11.10) trở thành:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (11.11)$$

Độ mảnh  $\lambda$  không có thứ nguyên, phụ thuộc vào chiều dài thanh, điều kiện liên kết và đặc trưng hình học của tiết diện; thanh có độ mảnh càng lớn thì càng dễ mất ổn định.

### 11.2.4 Giới hạn dùng của công thức Euler

Công thức Euler được xây dựng trên cơ sở phương trình vi phân đường đàn hồi, vì vậy chỉ áp dụng được khi vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi, tức là ứng suất trong thanh nhỏ hơn giới hạn tỷ lệ:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_u$$

hay: 
$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_u}} \quad (11.12)$$

Nếu đặt: 
$$\lambda_o = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_u}} \quad (11.13)$$

thì điều kiện áp dụng của công thức Euler là:

$$\lambda \geq \lambda_o \quad (11.14)$$

trong đó  $\lambda_o$  được gọi là *độ mảnh giới hạn* và là một hằng số đối với mỗi loại vật liệu.

Chẳng hạn: với thép xây dựng thông thường  $\lambda_o = 100$ ;  
với gỗ  $\lambda_o = 75$ ; với gang  $\lambda_o = 80$ .

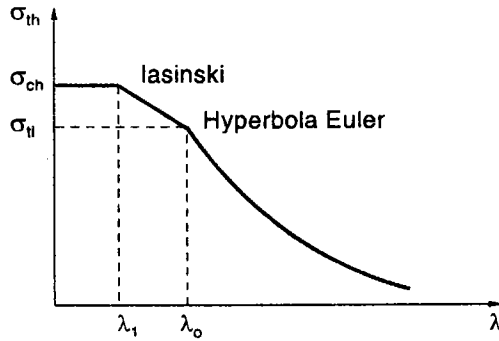
Nếu  $\lambda \geq \lambda_o$  thì gọi là độ mảnh lớn. Như vậy, công thức Euler chỉ áp dụng được cho thanh có độ mảnh lớn.

## 11.3 ỔN ĐỊNH NGOÀI MIỀN ĐÀN HỒI

### 11.3.1 Ý nghĩa

Công thức Euler chỉ áp dụng được khi vật liệu đàn hồi. Đồ thị của phương trình (11.11) là một *hyperbola* như trên hình 11.6, chỉ đúng khi  $\sigma_{th} \leq \sigma_u$ .

Khi ứng suất tới hạn trong thanh lớn hơn giới hạn tỷ lệ  $\sigma_u$  thì cần thiết phải có công thức khác để tính lực tới hạn. Phần này sẽ giới thiệu một số công thức tính lực tới hạn ngoài miền đàn hồi bằng thực nghiệm và lý thuyết.



Hình 11.6 Ứng suất tới hạn

**11.3.2 Công thức thực nghiệm Iasinski**

Công thức Iasinski được đề xuất dựa trên nhiều số liệu thực nghiệm, phụ thuộc vào độ mảnh của thanh.

- Thanh có độ mảnh vừa  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0$ , áp dụng công thức sau:

$$\sigma_{th} = a - \lambda b \tag{11.15}$$

với  $a$  và  $b$  là các hằng số phụ thuộc vật liệu, được xác định bằng thực nghiệm:

- Thép xây dựng:  $a = 33,6 \text{ kN/cm}^2$ ;  $b = 0,147 \text{ kN/cm}^2$
- Gỗ:  $a = 2,93 \text{ kN/cm}^2$ ;  $b = 0,0194 \text{ kN/cm}^2$

độ mảnh  $\lambda_1$  được xác định từ công thức:

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{II}}{b} \tag{11.16}$$

thực nghiệm cho thấy phạm vi giá trị  $\lambda_1 = 30 \div 40$

- Thanh có độ mảnh bé  $\lambda \leq \lambda_1$ : Khi này thanh không mất ổn định mà đạt đến trạng thái phá hoại của vật liệu. Vì vậy, ta coi:

$$\begin{aligned} \sigma_{th} &= \sigma_b \text{ đối với vật liệu giòn} \\ \sigma_{th} &= \sigma_{ch} \text{ đối với vật liệu dẻo} \end{aligned}$$

**Ví dụ 11.1** Tính lực tới hạn và ứng suất tới hạn của một cột làm bằng thép số 3 có mặt cắt ngang hình chữ I số 22a. Cột có liên kết khớp hai đầu. Xét hai trường hợp:

a) Chiều cao của cột 3,0m

b) Chiều cao của cột 2,25m

Biết  $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\sigma_{tl} = 21 \text{ kN/cm}^2$

**Giải** Từ bảng thép định hình (phụ lục I) ta có các số liệu của thép I N°22a:  $r_{\min} = r_y = 2,5 \text{ cm}$ ;  $A = 32,4 \text{ cm}^2$ ; theo liên kết của thanh thì ta có  $\mu = 1$ .

- Trường hợp a

Độ mảnh  $\lambda$  của cột bằng:

$$\lambda = \frac{\mu l}{r_{\min}} = \frac{1 \cdot 3}{0,025} = 120 > \lambda_0 \approx 100$$

Thanh có độ mảnh lớn, áp dụng công thức Euler

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4}{120^2} = 14,3 \text{ kN/cm}^2$$

Do đó lực tới hạn bằng:

$$N_{th} = \sigma_{th} A = 14,3 \cdot 32,4 = 463,32 \text{ kN}$$

- Trường hợp b

Độ mảnh  $\lambda$  của cột bằng:

$$\lambda = \frac{\mu l}{r_{\min}} = \frac{1 \cdot 2,25}{0,025} = 90 < \lambda_0$$

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{tl}}{b} = \frac{33,6 - 21}{0,147} = 85,7 \Rightarrow \lambda_1 < \lambda < \lambda_0$$

Thanh có độ mảnh vừa, áp dụng công thức Iasinski:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda = 33,6 - 0,147 \cdot 90 = 20,37 \text{ kN/cm}^2$$

$$N_{th} = \sigma_{th} A = 20,37 \cdot 32,4 = 660 \text{ kN}.$$

**Chú ý:**

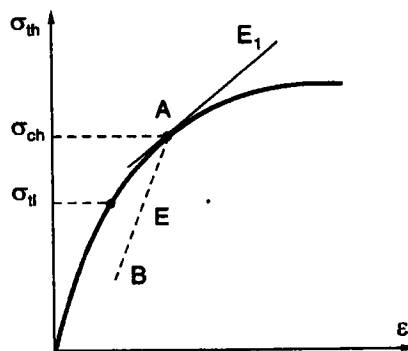
- Nếu liên kết của thanh trong hai mặt phẳng quán tính giống nhau thì các đại lượng  $I$  và  $r$  trong các công thức sẽ thay tương ứng bằng  $I_{\min}$  và  $r_{\min}$ .



- Nếu liên kết của thanh trong hai mặt phẳng quán tính khác nhau thì khi mất ổn định thanh sẽ cong trong mặt phẳng có độ mảnh lớn và các đại lượng  $I$ ,  $r$  sẽ lấy trong mặt phẳng này.

### 11.3.3 Công thức lý thuyết môđun tiếp tuyến

Công thức tính lực tới hạn cho thanh có độ mảnh vừa khi vật liệu làm việc ngoài miền đàn hồi có thể thiết lập bằng lý thuyết. Dưới đây giới thiệu công thức lý thuyết môđun tiếp tuyến, được dùng khá phổ biến vì đơn giản và cho kết quả phù hợp tương đối tốt với thực nghiệm. Đường cong quan hệ  $\sigma - \epsilon$  được minh họa trên hình 11.7.



**Hình 11.7** Quan hệ ứng suất biến dạng và môđun đàn hồi tiếp tuyến

Môđun đàn hồi tiếp tuyến được định nghĩa là độ dốc của tiếp tuyến của đường cong quan hệ  $\sigma - \epsilon$ :

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \quad (11.18)$$

Chú ý rằng, ở ngoài giới hạn đàn hồi môđun tiếp tuyến là một đại lượng phụ thuộc ứng suất  $E_t = E_t(\sigma)$ ; quy luật này được xác định trước bằng thực nghiệm cho từng loại vật liệu.

Bằng cách lập luận giống như mục 11.2.1, nhưng chú ý sự biến thiên của ứng suất khi mất ổn định tương ứng với môđun đàn hồi tiếp tuyến, Engesser đã đi đến công thức tương tự như công thức Euler nhưng môđun đàn hồi  $E$  được thay bằng  $E_t$ :

$$P_{th} = \frac{\pi^2 E_t I}{(\mu l)^2} \quad (11.19)$$

Ứng suất tới hạn tương ứng xác định bởi công thức:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} \quad (11.20)$$

**Ví dụ 11.2** Một cột bằng thép có giới hạn tỷ lệ  $\sigma_{tl} = 29 \text{ kN/cm}^2$ , giới hạn chảy  $\sigma_{ch} = 36 \text{ kN/cm}^2$ , môđun đàn hồi  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$  và môđun đàn hồi tiếp tuyến ngoài miền đàn hồi cho bởi phương trình:

$$E_t = E \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{th} - 29}{7} \right)^2 \right]$$

Xác định độ mảnh  $\lambda_0$  và độ mảnh  $\lambda$  ứng với  $\sigma_{th} = 35 \text{ kN/cm}^2$ .

**Giải**

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{tl}}} = \pi \sqrt{\frac{2.10^4}{29}} = 82,4$$

Ứng với ứng suất tới hạn  $\sigma_{th} = 35 \text{ kN/cm}^2$  ta tính được môđun tiếp tuyến:

$$E_t = 2.10^4 \left[ 1 - \left( \frac{35 - 29}{7} \right)^2 \right] = 0,53.10^4 \text{ kN/cm}^2$$

Độ mảnh tương ứng là:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_{th}}} = \pi \sqrt{\frac{0,53.10^4}{35}} = 38,7.$$

Nếu cột cho trước chiều dài và điều kiện biên thì ta tính được bán kính quán tính của tiết diện theo công thức:  $r = \frac{\mu l}{\lambda}$ ; từ đó chọn được tiết diện cột.

### 11.4 PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH TÍNH ỔN ĐỊNH THANH CHỊU NÉN

#### 11.4.1 Phương pháp tính

Một thanh chịu nén cần phải thỏa mãn:

- Điều kiện bền:

$$\sigma = \frac{P}{A_g} \leq [\sigma]_n; \quad \text{với: } [\sigma]_n = \frac{\sigma_o}{n}$$

trong đó:  $n$  - hệ số an toàn về bền

$A_g$  - diện tích tiết diện giảm yếu (bị khoét lỗ); nếu không khoét lỗ thì  $A_g = A$  là tiết diện nguyên

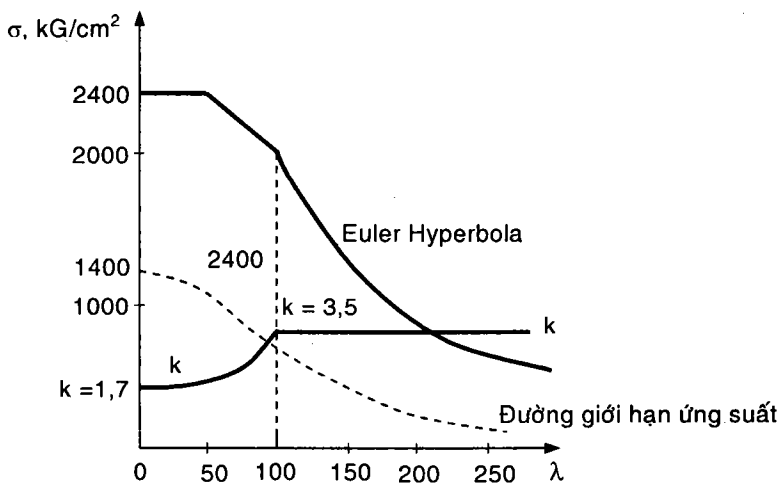
- Điều kiện ổn định:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq [\sigma]_{\text{ổđ}}; \quad \text{với: } [\sigma]_{\text{ổđ}} = \frac{\sigma_{th}}{k}$$

$k$  - hệ số an toàn về ổn định;  $A$  - diện tích tiết diện nguyên.

Vì sự giảm yếu cục bộ tại một số tiết diện có ảnh hưởng không đáng kể đến sự ổn định chung của thanh.

Do tính chất nguy hiểm của hiện tượng mất ổn định và xét đến những yếu tố không tránh được như độ cong ban đầu, độ lệch tâm của lực nén... nên chọn  $k > n$ , và  $k$  thay đổi phụ thuộc vào độ mảnh. Thép xây dựng có  $k = 1,8 \div 3,5$  như minh họa trên hình 11.8; gang  $k = 5 \div 5,5$ ; gỗ  $k = 2,8 \div 3,2$ .



Hình 11.8 Hệ số an toàn  $k$  cho thép

Để thuận tiện cho tính toán thực hành, người ta đưa vào khái niệm hệ số uốn dọc hoặc hệ số giảm ứng suất cho phép  $\varphi$  được định nghĩa như sau:

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{\delta d}}{[\sigma]_n} = \frac{\sigma_{th} n}{\sigma_o k}$$

$\varphi < 1$ , vì cả hai tỉ số:  $\frac{\sigma_{th}}{\sigma_o} < 1$  và  $\frac{n}{k} < 1$

từ đó:  $[\sigma]_{\delta d} = \varphi[\sigma]$  và điều kiện ổn định trở thành:  $\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi[\sigma]_n$

hay:  $\frac{P}{\varphi A} \leq [\sigma]_n$

Hệ số  $\varphi = \varphi [E, \lambda, k]$  được cho ở bảng 11.1

**Bảng 11.1** Hệ số  $\varphi$

Độ mảnh $\lambda$	Trị số $\varphi$ đối với				
	Thép số 2,3,4	Thép số 5	Thép CΠK	Gang	Gỗ
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,54	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35		0,25
120	0,45	0,36	0,30		0,22
130	0,40	0,33	0,26		0,18
140	0,36	0,29	0,23		0,16
150	0,32	0,26	0,21		0,14
160	0,29	0,24	0,19		0,12
170	0,26	0,21	0,171		0,11
180	0,23	0,19	0,15		0,10
190	0,21	0,17	0,14		0,09
200	0,19	0,16	0,13		0,08

Vì  $\varphi < 1$  nên thường chỉ cần kiểm tra điều kiện ổn định là đủ. Tuy nhiên, nếu thanh có giảm yếu cục bộ do liên kết bu lông, đinh tán... thì cần kiểm tra cả hai điều kiện bền và ổn định.

- Điều kiện bền:

$$\sigma = \frac{P}{A_g} \leq [\sigma]_n \quad (11.23)$$

- Điều kiện ổn định

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi [\sigma]_n \quad (11.24)$$

trong thực tế, nếu thỏa (11.24) thì thường cũng thỏa (11.23).

Đối với bài toán ổn định cũng có ba bài toán:

1) Kiểm tra ổn định:

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \varphi [\sigma]_n \quad (11.25)$$

2) Xác định tải trọng cho phép:

$$[P] \leq \varphi A [\sigma]_n \quad (11.26)$$

Trong hai bài toán trên, vì tiết diện thanh đã biết nên có thể suy ra hệ số  $\varphi$  theo trình tự:  $A, I \rightarrow \lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{I/A}} \rightarrow \varphi$  (tra bảng 11.1)

3) Chọn tiết diện:

$$A \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]_n} \quad (11.27)$$

việc tìm A phải làm đúng dần, vì trong (11.27) chứa hai biến: A và  $\varphi$  (A). Trình tự như sau:

- Giả thiết:  $\varphi_0 = 0,5$ ; tính được:

$$A_0 = \frac{P}{\varphi_0 [\sigma]_n} \Rightarrow \lambda_0$$

- Từ  $\lambda_0$  tra bảng ta được  $\varphi'_0$ . Nếu  $\varphi'_0 \neq \varphi_0$  thì lấy:

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0 + \varphi'_0}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]_n} \Rightarrow \lambda_1 \Rightarrow \varphi'_1$$

thường lặp lại quá trình tính khoảng 2 ÷ 3 lần thì sai số tương đối giữa hai lần tính đủ nhỏ ( $\leq 5\%$ ).

**Ví dụ 11.3** Chọn số liệu thép chữ **I** cho thanh dài  $2,0m$ , liên kết khớp tại hai đầu và chịu một lực nén  $P = 230kN$ . Biết vật liệu là thép số 2 có  $[\sigma]_n = 140 MN/m^2$ .

**Giải** a) *Lần chọn thứ nhất*

Ta giả thiết  $\varphi = 0,5$ , ta có diện tích  $A$  là:

$$A \geq \frac{P}{[\sigma]_n \varphi} = \frac{230 \cdot 10^{-3}}{140 \cdot 0,5} = 32,8 \cdot 10^{-4} m^2$$

tra bảng thép định hình ta chọn thép chữ **I** số 22a có  $A = 32,4cm^2$ ,  $i_y = i_{min} = 2,5cm$  ta có độ mảnh:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 2}{2,5 \cdot 10^{-2}} = 80$$

Tra bảng quan hệ giữa  $\lambda$  và  $\varphi$  ta được  $\varphi = 0,75$ . Hệ số này khác với giả thiết ban đầu nên ta phải chọn lại.

b) *Lần chọn thứ hai*

Ta giả thiết:

$$\varphi = \frac{0,5 + 0,75}{2} = 0,625$$

từ đó ta tìm được:

$$A \geq \frac{230 \cdot 10^{-3}}{0,625 \cdot 140} = 26,2 \cdot 10^{-4} m^2$$

Tra bảng thép định hình ta tìm được thép chữ **I** số 20 với  $A = 26,4cm^2$ ,  $i_{min} = 2,06cm$ . Độ mảnh lúc đó bằng:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 2}{2,06 \cdot 10^{-2}} = 97$$

tra bảng ta tìm được  $\varphi = 0,627$  gần đúng giá trị  $0,625$  theo giả thiết. Do đó, ta kiểm tra lại điều kiện ổn định:

$$\frac{P}{\varphi A} \leq [\sigma]_n;$$

$$\frac{230 \cdot 10^3}{0,627 \cdot 26,4 \cdot 10^{-4}} = 139 \cdot 10^6 N/m^2 < [\sigma] = 140 \cdot 10^6 N/m^2$$

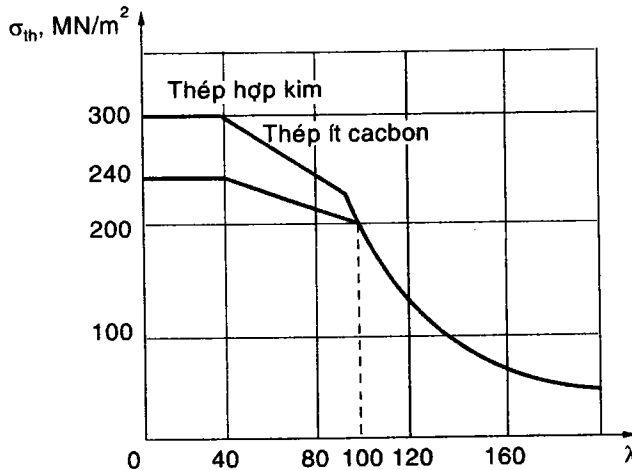
Vậy ta chọn thép chữ **I** số 20.

**11.4.2 Chọn mặt cắt ngang và vật liệu hợp lý**

Khi thiết kế thanh chịu nén, người ta cố gắng làm cho khả năng chịu lực của thanh càng lớn càng tốt. Theo công thức (11.9) và (11.19) ta có lực tới hạn:

- Trong miền đàn hồi:  $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

- Ngoài miền đàn hồi:  $P_{th} = \frac{\pi^2 E_t I}{(\mu l)^2}$



**Hình 11.9** Lựa chọn vật liệu

Thường thì chiều dài và liên kết hai đầu thanh được cho trước. Vì vậy, để tăng  $P_{th}$  có hai cách:

1) Chọn vật liệu có môđun đàn hồi lớn, Ví dụ dùng thép thay cho bê tông. Tuy nhiên, chỉ dùng thép cường độ cao thay cho thép cường độ thấp khi thanh làm việc ngoài miền đàn hồi; còn trong miền đàn hồi thép có môđun đàn hồi giống nhau nên việc thay thế không có lợi về mặt chịu lực như đồ thị trên hình 11.9 thể hiện.

2) Nếu hệ số liên kết  $\mu$  giống nhau theo hai phương thì cấu tạo tiết diện có  $I_x = I_y$ , và thường làm tiết diện rộng để tăng mômen quán tính của mặt cắt nhưng phải có cấu tạo để không mất ổn định cục bộ. Tiết diện hợp lý của cột chịu nén trong thực tế thường có dạng như trên hình 11.10.



**Hình 11.10** Dạng tiết diện hợp lý

Nếu liên kết hai phương khác nhau thì nên cấu tạo tiết diện sao cho có

$$\lambda_{\max} = \lambda_{\min}$$

hay:

$$\frac{I_x}{\mu_x^2} = \frac{I_y}{\mu_y^2} \quad (11.28)$$

## 11.5 XÁC ĐỊNH LỰC TỐI HẠN BẰNG PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

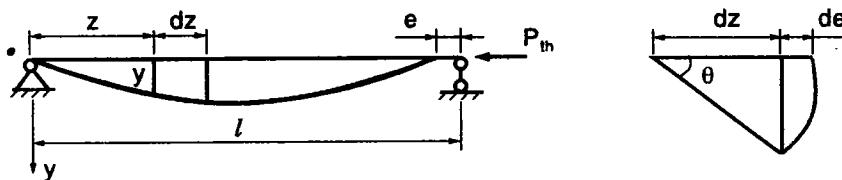
### 11.5.1 Khái niệm

Việc tìm lực tới hạn của thanh có độ mảnh lớn theo phương pháp tĩnh do Euler thực hiện là chính xác. Tuy nhiên, trong thực tế có những bài toán phức tạp hơn như thanh có độ cứng EI thay đổi, lực phân bố dọc theo trục thanh... thì việc thiết lập và giải phương trình vi phân để tìm lực tới hạn trở nên phức tạp.

Trong trường hợp đó, người ta có thể dựa trên nguyên lý bảo toàn năng lượng để tìm nghiệm gần đúng.

### 11.5.2 Phương pháp năng lượng xác định lực tới hạn

Giả sử thanh chịu nén đúng tâm bởi lực  $P_{th}$ , như được minh họa trên hình 11.11.



**Hình 11.11** Xác định lực tới hạn



Dưới tác động của nhiều, thanh bị uốn cong với phương trình  $y(z)$ , điểm đặt của lực  $P_{th}$  dịch chuyển một đoạn  $e$ . Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, công  $A$  của lực  $P_{th}$  bằng thế năng biến dạng uốn  $U$  của thanh:

$$A = U \quad (11.29)$$

trong đó:  $A = P_{th}e \quad (11.30)$

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dz = \frac{1}{2} \int_0^l EI y''^2 dz \quad (11.31)$$

Để xác định độ co ngắn  $e$  của thanh do sự uốn cong gây ra, ta xét phân tố thanh  $dz$  trên hình 11.11. Ta có:

$$de = dz - dz \cos \theta = dz(1 - \cos \theta) = dz \left( 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = dz 2 \left( \frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{\theta^2}{2} dz$$

hay:  $de = \frac{y'^2}{2} dz \quad (11.32)$

Chú ý rằng, vì góc xoay  $\theta$  là bé nên ở trên ta đã coi:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}; \quad \theta = \operatorname{tg} \theta = y'$$

Tích phân (11.32) ta thu được:

$$e = \int_0^l \frac{y'^2}{2} dz = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dz \quad (11.33)$$

Do đó:  $W = \frac{P_{th}}{2} \int_0^l y'^2 dz$

Thế (11.34) và (11.31) vào (11.29) ta có:

$$\frac{P_{th}}{2} \int_0^l y'^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^l EI y''^2 dz$$

hay:  $P_{th} = \frac{\int_0^l EI y''^2 dz}{\int_0^l y'^2 dz} \quad (11.35)$

Khi tìm lực  $P_{th}$  theo phương pháp năng lượng, ta chọn  $y(z)$  thỏa điều kiện biên và thế vào (11.35). Vì thường  $y(z)$  là gần đúng nên lực  $P_{th}$  cũng gần đúng. Sự sai lệch của đường đàn hồi  $y(z)$  có ý nghĩa như là thanh được đặt thêm một hệ liên kết đàn hồi nào đó phân bố dọc theo trục thanh và làm cho thanh trở nên cứng hơn. Vì vậy, lực  $P_{th}$  tìm theo phương pháp năng lượng luôn lớn hơn giá trị thật (chỉ bằng giá trị thật khi đường đàn hồi được chọn chính xác).

**Ví dụ 11.4** Tìm lực  $P_{th}$  cho thanh trên hình 11.12, với  $EI =$  hằng số

**Giải** Giả sử đường đàn hồi được chọn gần đúng theo dạng do lực phân bố đều gây ra như sau:

$$y = \alpha z(z^3 - 2lz^2 + l^3)$$

với  $\alpha$  là một hằng số bé.

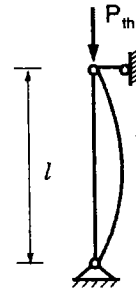
Ta có: 
$$y' = \alpha(4z^3 - 6lz^2 + l^3)$$

$$y'' = 12\alpha(z^2 - lz)$$

thế vào (11.35) ta tìm được: 
$$P_{th} = \frac{9,882EI}{l^2}$$

So với nghiệm chính xác  $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9,8696EI}{l^2}$  thì kết quả tính lớn hơn 0,25%.

Nếu đường đàn hồi chọn là một nửa sóng hình *sine*, tức là trùng với đường đàn hồi chính xác của bài toán Euler, thì  $P_{th}$  tìm theo phương pháp năng lượng cũng cho kết quả chính xác.

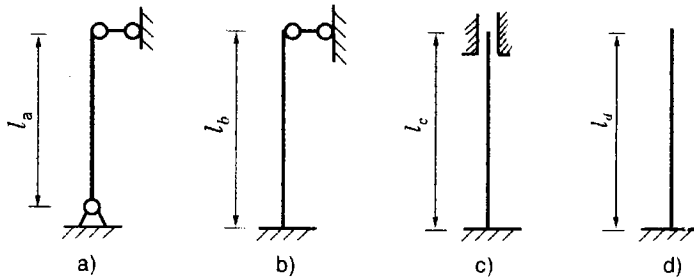


**Hình 11.12** Tìm  $P_{th}$  bằng phương pháp năng lượng

## 11.6 BÀI TẬP CHƯƠNG 11

**11.1** Cho bốn thanh có mặt cắt ngang như nhau làm bằng cùng một loại vật liệu và có liên kết như trên hình 11.13.

Nếu muốn chịu được cùng một lực nén đúng tâm thì chiều dài của mỗi thanh phải bằng bao nhiêu  $l_a$ . Giả thiết vật liệu mất ổn định trong miền đàn hồi và  $EI =$  hằng số.

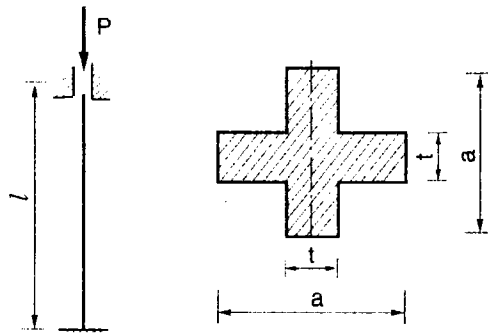


Hình 11.13

**11.2** Thanh có chiều dài  $l = 3m$ , một đầu ngàm, một đầu khớp. Hãy xác định lực tới hạn của thanh trong ba trường hợp sau đây:

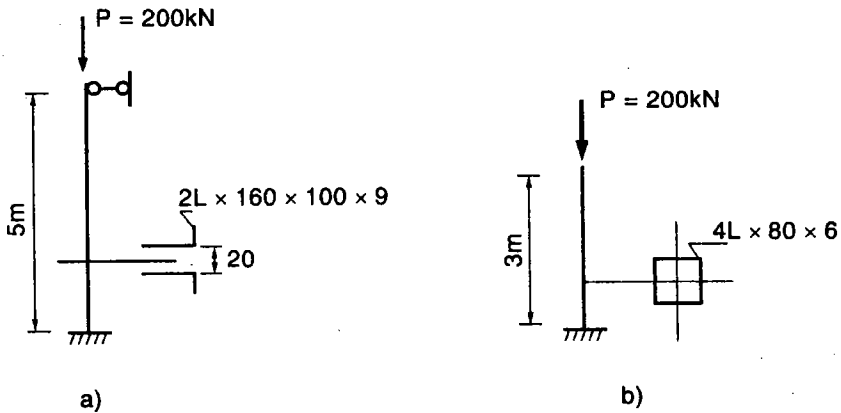
- a) Mặt cắt hình tròn bán kính  $R = 4cm$ , vật liệu là gang xám có:  $\sigma_{tl} = 17,8kN/cm^2$ ;  $E = 1,15 \cdot 10^4 kN/cm^2$ .
- b) Mặt cắt hình tròn rỗng bán kính ngoài  $R = 3cm$  và bán kính trong  $r = 2cm$ , vật liệu là đura có  $\sigma_{tl} = 18kN/cm^2$ ;  $E = 0,71 \cdot 10^4 kN/cm^2$ .
- c) Mặt cắt hình vuông cạnh  $15cm \times 15cm$ , vật liệu bằng gỗ có:  $\sigma_{tl} = 1,7kN/cm^2$ ;  $E = 0,1 \cdot 10^4 kN/cm^2$ . Biết hai hệ số trong công thức Iasinski là  $a = 2,93kN/cm^2$  và  $b = 0,0194kN/cm^2$ .

**11.3** Cho thanh bằng gang có  $l = 1,6m$ ;  $a = 6cm$ ;  $t = 1cm$  như hình 11.14. Xác định lực tới hạn và ứng suất tới hạn. Cho  $\lambda_o = 80$ ;  $a = 77,6kN/cm^2$ ;  $b = 1,2kN/cm^2$ . Muốn thanh mất ổn định khi vật liệu còn làm việc trong giới hạn đàn hồi thì chiều dài của thanh phải bao nhiêu?



Hình 11.14

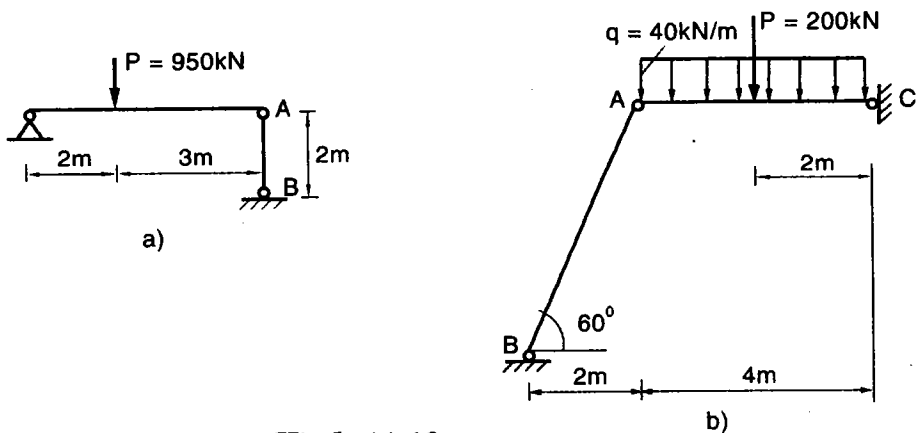
- 11.4 Kiểm tra ổn định của các thanh cho trên hình 11.15, nếu  $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$ . Lực nén cho phép lớn nhất là bao nhiêu? Vật liệu của thanh thép là thép số 3.



Hình 11.15

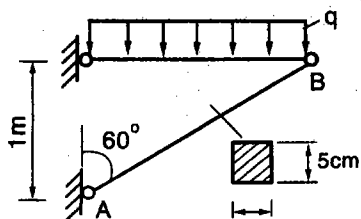
- 11.5 Cho hai hệ thanh chịu lực như trên hình 11.16. Xác định số hiệu mặt cắt chữ I của thanh chống AB, biết  $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$ . Vật liệu là thép số 3.

Xác định hệ số an toàn về ổn định của các thanh đó.



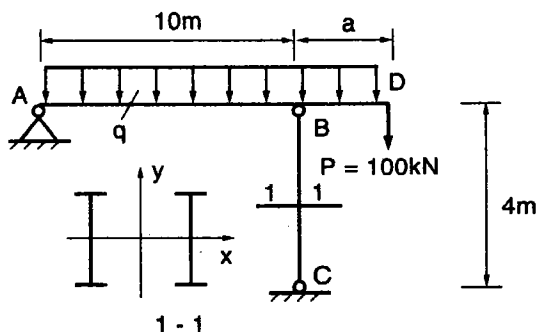
Hình 11.16

- 11.6 Một giá đỡ chịu tải trọng phân bố đều như trên hình 11.17. Xác định trị số cho phép của cường độ tải trọng phân bố tác dụng lên giá. Thanh AB có mặt cắt hình vuông cạnh  $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$  làm bằng gỗ có  $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình 11.1

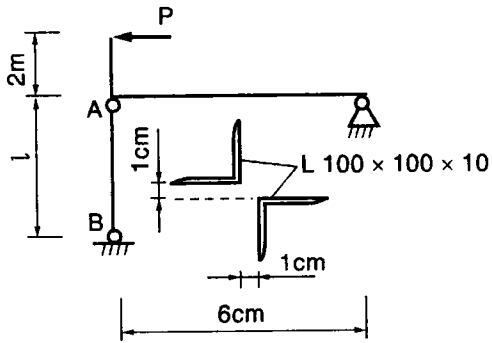
11.7 Một dầm cầu trục AD chịu lực như hình 11.18. Cột BC làm bằng hai thép chữ I số 14 ghép lại sao cho mô men quán tính đối với hai trục bằng nhau. Xác định chiều dài tối đa của nút thừa a, biết rằng cột làm việc bất lợi nhất khi xe cầu trục mang một trọng lượng 100kN đặt ở đầu nút thừa. Tải trọng phân bố  $q = 4kN/m$ .



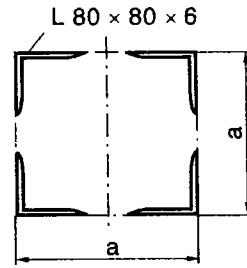
Hình 11.18

11.8 Hệ thanh chịu lực như hình 11.19. Xác định chiều dài  $l$  của thanh chống AB làm bằng thép có  $[\sigma] = 14kN/cm^2$ . Cho biết tải trọng  $P = 300kN$ .

11.9 Một thanh chịu nén đúng tâm được làm bằng bốn thép góc đều cạnh loại  $80 \times 80 \times 6$  (H.11.20). Xác định kích thước  $a$  của mặt cắt. Biết thanh dài  $l = 6m$  hai đầu liên kết khớp và chịu lực nén ở đầu cột  $P = 200kN$ . Vật liệu có  $[\sigma] = 20kN/cm^2$ .

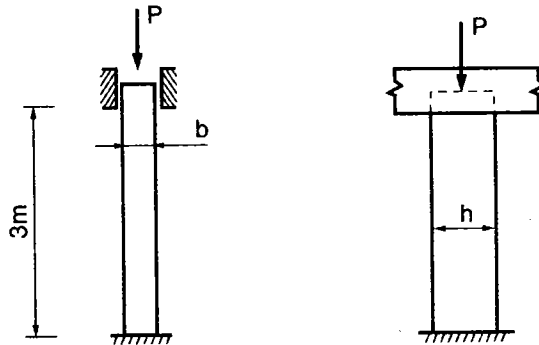


Hình 11.9



Hình 11.20

- 11.10** Một cột gỗ dài  $l = 3m$ , mặt cắt hình chữ nhật  $b \times h$ . Đầu dưới của cột được chôn vào nền bê tông, đầu trên có thể trượt theo một khe nhỏ song song với phương chiều dài  $h$  của mặt cắt (H.11.21). Xác định kích thước của mặt cắt  $b \times h$  sao cho mặt cắt là hợp lý nhất. Cho biết lực nén  $P = 100N$ ,  $[\sigma] = 1kN/cm^2$ .



Hình 11.21

# Chương 12

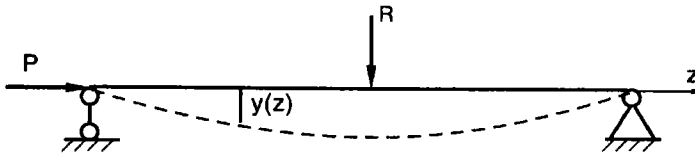
## UỐN NGANG VÀ UỐN DỌC ĐỒNG THỜI

### 12.1 ĐẶC ĐIỂM BÀI TOÁN

Xét một thanh chịu uốn bởi tác động đồng thời của lực ngang  $R$  và lực nén dọc  $P$  như trên hình 12.1. Nếu chuyển vị là đáng kể thì cần phải xét cân bằng của thanh trên sơ đồ biến dạng và mômen nội lực sẽ bao gồm ảnh hưởng của lực  $R$  và  $P$ :

$$M(z) = M_R + M_P = M_R + Py(z) \quad (12.1)$$

trong đó:  $M_R$  - mômen uốn do riêng tải trọng ngang gây ra  
 $Py(z)$  - mômen uốn do lực dọc gây ra.



**Hình 12.1** Uốn ngang và uốn dọc đồng thời

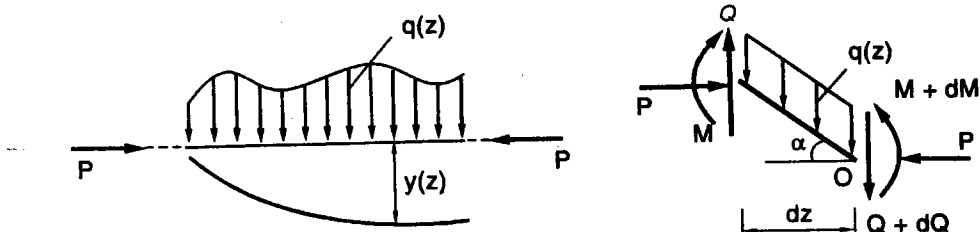
Bài toán như vậy được gọi là uốn ngang và uốn dọc đồng thời.

*Đặc điểm của bài toán:*

- Mômen  $M(z)$  phụ thuộc vào độ võng  $y(z)$
- Mômen  $M(z)$  phụ thuộc phi tuyến vào lực  $P$  vì độ võng  $y(z)$  cũng phụ thuộc vào  $P$ . Vì vậy, nguyên lý cộng tác dụng không áp dụng được cho loại bài toán này.

## 12.2 PHƯƠNG PHÁP CHÍNH XÁC

Để tìm được mômen uốn, trước hết cần thiết lập phương trình vi phân đường đàn hồi của dầm chịu lực nén  $P$  và tải trọng ngang.



**Hình 12.2** Thanh chịu uốn nén

Xét cân bằng trên sơ đồ biến dạng của phần tử thanh  $dz$  như trên hình 12.2

$$\sum M_o = 0: \quad M + dM - M - Qdz - Pdz \operatorname{tg} \alpha = 0$$

chú ý rằng:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dz}$

ta có: 
$$\frac{dM}{dz} - P \frac{dy}{dz} = Q \quad (12.2)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (12.2), chú ý rằng  $\frac{dQ}{dz} = -q(z)$ , ta có

phương trình: 
$$\frac{d^2 M}{dz^2} - P \frac{d^2 y}{dz^2} = -q(z) \quad (12.3)$$

thế  $M = -EIy''$  (\*) vào (12.3) ta thu được:

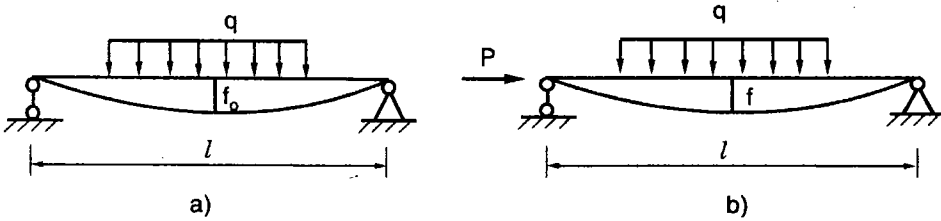
$$EIy^{IV} + Py'' = q(z) \quad (12.4)$$

Đây là phương trình vi phân đường đàn hồi của dầm chịu uốn nén. Nếu biết tải trọng tác dụng và các điều kiện biên thì có thể giải (12.4) để tìm đường đàn hồi, từ đó suy ra mômen uốn theo phương trình (\*). Trong thực tế, thường có nhiều quy luật tải trọng khác nhau trên chiều dài thanh nên việc giải phương trình (12.4) rất phức tạp. Vì vậy, người ta thường áp dụng phương pháp gần đúng dưới đây.



**12.3 PHƯƠNG PHÁP GẮN ĐÚNG**

Xét dầm đơn giản chịu tải trọng đối xứng như hình 12.3.



**Hình 12.3** Đường đàn hồi đối xứng

Sơ đồ (a) chỉ chịu tải trọng ngang, với độ võng giữa nhịp  $f_0$ .

Sơ đồ (b) chịu đồng thời tải trọng ngang và tải trọng dọc, có độ võng giữa nhịp  $f$ .

Giả thiết đường đàn hồi có dạng hình sine (giống dạng mất ổn định), ta có phương trình đường đàn hồi trong hai trường hợp như sau:

$$y_0 = f_0 \sin \frac{\pi z}{l}; \quad y = f \sin \frac{\pi z}{l}$$

Dạng phương trình này thỏa điều kiện biên  $y = y'' = 0$  tại hai khớp. Mômen uốn nội lực tương ứng như sau:

$$M_0 = -EIy_0'' = EI \frac{\pi^2}{l^2} f_0 \sin \frac{\pi z}{l} = EI \frac{\pi^2}{l^2} y_0$$

$$M = -EIy'' = EI \frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi z}{l} = EI \frac{\pi^2}{l^2} y$$

Thế các kết quả này vào phương trình (12.1) ta có:

$$EI \frac{\pi^2}{l^2} y = EI \frac{\pi^2}{l^2} y_0 + Py \tag{12.5}$$

từ đó suy ra: 
$$y(z) = \frac{y_0(z)}{1 - P / \frac{\pi^2 EI}{l^2}}$$

hay: 
$$y(z) = \frac{y_0(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.6)$$

với:  $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$  là lực tới hạn của thanh khi mất ổn định trong mặt phẳng uốn.

Đạo hàm hai vế của (12.6) và nhân với  $-EI$  ta có:

$$-EIy''(z) = \frac{-EIy_0''(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}}$$

hay: 
$$M(z) = \frac{M_0}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.7)$$

**Chú ý:** - Nếu tải không đối xứng nhưng cùng hướng về một phía thì các công thức trên kém chính xác hơn nhưng vẫn dùng được.

- Nếu thanh có liên kết hai đầu khác thì vẫn dùng được các công thức (12.6), (12.7) nhưng cần xét tới hệ số liên kết  $\mu$  trong công thức  $P_{th}$ :

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (12.8)$$

## 12.4 ỨNG SUẤT VÀ KIỂM TRA BỀN

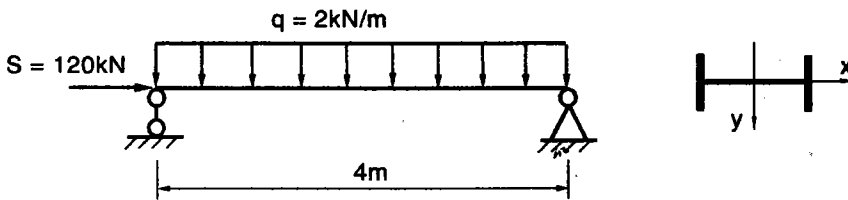
Ứng suất lớn nhất được tính theo công thức:

$$\max \sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P}{A} + \frac{M_0}{W(1 - \frac{P}{P_{th}})} \quad (12.9)$$

Vì ứng suất phụ thuộc phi tuyến vào tải trọng nên kiểm tra bền theo ứng suất cho phép không đảm bảo an toàn theo hệ số  $n$  dự kiến. Trong trường hợp này, người ta dùng điều kiện an toàn theo tải trọng như sau:

$$\frac{nP}{A} + \frac{nM_0}{W(1 - \frac{nP}{P_{th}})} \leq \sigma_0 \quad (12.10)$$

**Ví dụ 12.1** Tìm mômen uốn và độ võng lớn nhất của dầm thép chữ IN<sup>o</sup>36 chịu lực như trên hình 12.4.



**Hình 12.4**

**Giải** Sử dụng bảng tra thép định hình, tương ứng với số hiệu IN<sup>o</sup>36 và các ký hiệu trên hình trên, ta có:

$$A = 61,9\text{cm}^2; I_x = 516\text{cm}^4;$$

$$I_y = 13380\text{cm}^4; E = 2,1 \cdot 10^4 \text{kN/cm}^2$$

Trị số lớn nhất của mômen uốn, độ võng do tải trọng ngang gây ra tại giữa nhịp:

$$M_o = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 4^2}{8} = 4 \text{ kNm}$$

$$y_o = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 400^4}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 516} = 0,615 \text{ cm}$$

Trị số lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 516}{(1 \cdot 400)^2} = 668 \text{ kN}$$

Độ võng của dầm, theo công thức gần đúng:

$$y = \frac{y_o}{1 - \frac{S}{P_{th}}} = \frac{0,615}{1 - \frac{120}{668}} = 0,75 \text{ cm}, \text{ tăng } 22\% \text{ so với } y_o$$

Mômen uốn lớn nhất, theo công thức gần đúng thứ nhất:

$$M = M_o + S \nu = 4 + 120 \cdot 0,075 = 4,9 \text{ kNm}$$

Mômen uốn lớn nhất, theo công thức gần đúng thứ hai:

$$M = \frac{M_o}{1 - \frac{S}{P_{th}}} = \frac{4}{1 - \frac{120}{668}} = 4,87 \text{ kNm} \text{ sai số } 0,5\% \text{ so với công thức}$$

gần đúng thứ nhất.

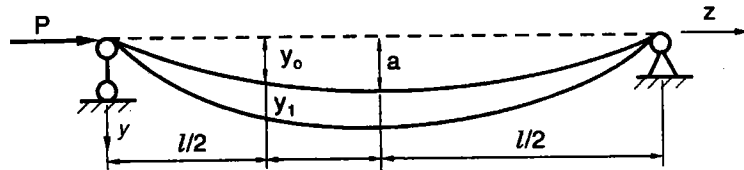
Giá trị mômen trong trường hợp uốn ngang và dọc tăng 22,5% so với mômen chỉ do lực ngang gây ra, tức là thiên về an toàn hơn.

## 12.5 THANH CÓ ĐỘ CONG BAN ĐẦU

### 12.5.1 Ảnh hưởng của độ cong ban đầu

Xét thanh có độ cong ban đầu, chịu lực nén  $P$  như trên H.12.5. Giả sử đường cong ban đầu có dạng:

$$y_0 = a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.11)$$



Hình 12.5 Thanh có độ cong ban đầu

Do tác dụng của lực  $P$ , thanh bị võng thêm có phương trình  $y_1(z)$ .  
Độ võng toàn phần:  $y = y_0 + y_1$

Mômen uốn do lực  $P$  gây ra:

$$M = Py = P(y_0 + y_1) \quad (12.13)$$

Phương trình vi phân độ võng thêm:

$$EIy_1'' = -M = -P(y_0 + y_1) \quad (12.14)$$

thế (12.11) vào (12.14) và đặt:  $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$  ta có:

$$y_1'' + \alpha^2 y_1 = -\alpha^2 a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.15)$$

Nghiệm của phương trình này có dạng:

$$y_1 = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z + \frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.16)$$

Các điều kiện biên:

$$y_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$y_1(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

Do đó:

$$y_1 = \frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} a \sin \frac{\pi z}{l} = \frac{1}{\frac{P}{EI} l^2 - 1} a \sin \frac{\pi z}{l}$$

hay:

$$y_1 = \frac{k}{1 - k} a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.17)$$

với:

$$k = \frac{P}{P_{th}} = \frac{P}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}} \quad (12.18)$$

Độ võng toàn phần:

$$y = y_o + y_1 = \left(a + \frac{k}{1 - k} a\right) \sin \frac{\pi z}{l} = \frac{a}{1 - k} \sin \frac{\pi z}{l}$$

hay:

$$y = \frac{y_o}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.19)$$

Mômen lớn nhất giữa nhịp:

$$M_{\max} = P y_{\max} = \frac{Pa}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.20)$$

Nếu đường cong ban đầu có dạng bất kỳ thì có thể phân tích thành chuỗi *Fourier* như sau:

$$y_o = a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + \dots \quad (12.21)$$

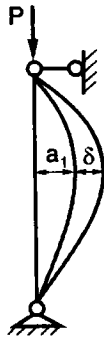
Thế (12.13) vào (12.21) và giải ra  $y_1$  ta có:

$$y_1 = k \left( \frac{a_1}{1-k} \sin \frac{\pi z}{l} + \frac{a_2}{2^2-k} \sin \frac{2\pi z}{l} + \dots \right) \quad (12.22)$$

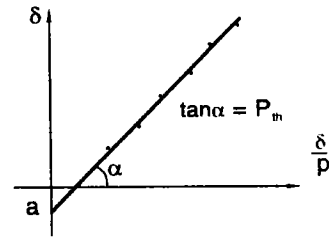
vì  $k = \frac{P}{P_{th}} < 1$  nên khi  $P$  đủ lớn thì số hạng đầu trội hẳn và chỉ cần xét số hạng này.

### 12.5.2 Xác định lực tới hạn bằng thực nghiệm thanh liên kết khớp hai đầu

Xét thanh chịu nén như trên hình 12.6, trong thực tế thanh luôn có độ cong ban đầu.



**Hình 12.6** Thanh có độ cong ban đầu chịu nén



**Hình 12.7** Cách xác định lực tới hạn

Khi lực  $P$  đủ lớn thì dù thanh bị cong ban đầu thế nào, ta vẫn có quan hệ giữa  $\delta$  và  $a_1$  theo (12.17):

$$\delta = \frac{k}{1-k} a_1 = \frac{a_1}{\frac{P_{th}}{P} - 1}$$

hay:  $\delta = P_{th} \left( \frac{\delta}{P} \right) - a_1$

Đây là phương trình bậc nhất của hai biến  $\delta$  và  $\delta/P$  nên có đồ thị là một đường thẳng như trên hình 12.7.

Khi thí nghiệm, ứng với mỗi giá trị lực nén  $P_i$ , ta đo được chuyển vị  $\delta_i$  và tính được  $\delta_i/P_i$ , từ đó lập bảng kết quả thí nghiệm có dạng:

P	$P_1$	$P_2$	.....	$P_n$
$\delta$	$\delta_1$	$\delta_2$	.....	$\delta_n$
$\delta/P$	$\delta_1/P_1$	$\delta_2/P_2$	.....	$\delta_n/P_n$

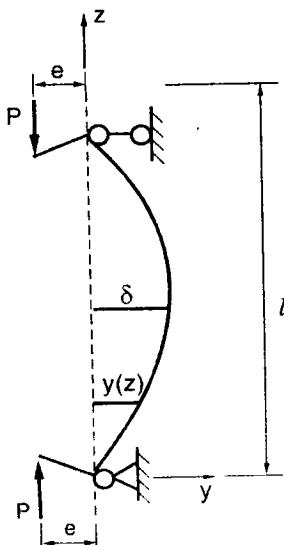
Từ đó xác định các điểm trên hệ trục  $\delta/P - \delta$  và vẽ được đồ thị như trên hình 12.7. Ta thường dùng phương pháp bình phương cực tiểu để xác định  $P_{th}$  và độ võng ban đầu lớn nhất  $a_1$ .

### 12.6 CỘT CHỊU NÉN LỆCH TÂM

Xét cột mảnh chịu nén lệch tâm bởi lực  $P$  như trên hình 12.8.

$$y_0 = a \sin \frac{\pi z}{l} \tag{12.11}$$

Do tác dụng của lực  $P$ , cột bị cong và có phương trình  $y(z)$ .



Hình 12.8 Cột có độ cong ban đầu

Mômen uốn tại một tiết diện do lực  $P$  gây ra:

$$M = P\{e + y(z)\} = Pe + Py(z) \quad (12.23)$$

trong đó:  $e$  - độ lệch tâm ban đầu;  $y$  - độ võng của trục cột.

Phương trình vi phân đường đàn hồi như sau:

$$y''(z) = -\frac{M}{EI} \quad (12.24)$$

Thế (12.23) vào (12.24) và đặt  $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$  ta được:

$$y'' + \alpha^2 y = -\alpha^2 e \quad (12.25)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là tổng của nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng:

$$y = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z - e \quad (12.26)$$

trong đó:  $A$  và  $B$  - các hằng số của nghiệm thuần nhất  
 $e$  - nghiệm riêng.

Các điều kiện biên:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = e$$

$$y(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{e(1 - \cos \alpha l)}{\sin \alpha l} = e \tan \frac{\alpha l}{2}$$

Phương trình đường đàn hồi trở thành:

$$y = e\left(\tan \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha z + \cos \alpha z - 1\right) \quad (12.27)$$

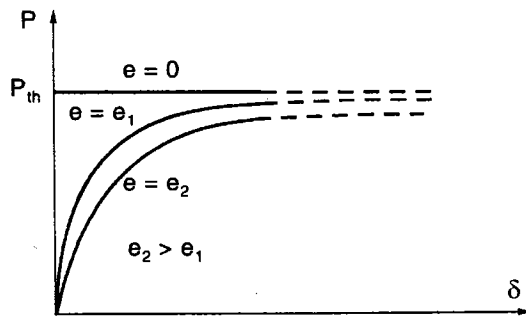
Độ võng lớn nhất tại giữa nhịp, tức  $z = \frac{l}{2}$  là:

$$\delta = y_{\max} = e\left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1\right) \quad (12.29)$$

Nếu  $e = 0$  hoặc  $P = 0$  thì  $\delta = 0$ .

Đồ thị quan hệ giữa  $P$  -  $\delta$  được cho trong hình 12.9. Đồ thị này chỉ có ý nghĩa khi vật liệu còn đàn hồi, tức là  $\delta$  còn nhỏ và  $P < P_{th}$ .



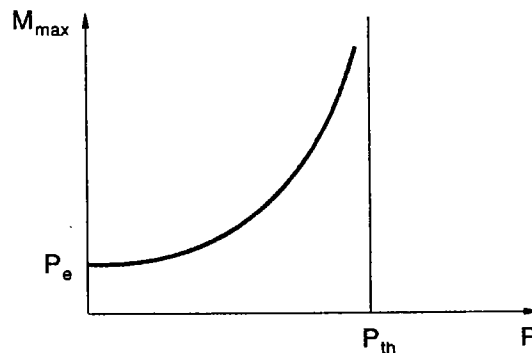


**Hình 12.9** Đồ thị quan hệ giữa  $P - \delta$

Mômen uốn lớn nhất tại giữa nhịp được tính:

$$M_{\max} = P(e + y_{\max}) = Pe \frac{1}{\cos \sqrt{\frac{P l}{EI} \frac{l}{2}}} \quad (12.30)$$

Quan hệ  $M_{\max} - P$  cho bởi hình 12.10. Khi  $P$  nhỏ thì  $M_{\max} \approx Pe$ , nhưng khi  $P$  lớn thì  $M_{\max}$  tăng rất nhanh.



**Hình 12.10** Quan hệ giữa  $M_{\max} - P$

Từ các đồ thị này ta thấy quan hệ  $P - \delta$  và  $M_{\max} - P$  phi tuyến.

Trong thực tế, tính cột mảnh chịu nén lệch tâm cần thiết phải xét đặc điểm phi tuyến này để đảm bảo an toàn.

Ứng suất cực đại trong thanh:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}c}{I} = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{r^2} \frac{1}{\cos \sqrt{\frac{Pl}{EI}}} \right] \quad (12.31)$$

với:  $A$  - diện tích tiết diện thanh

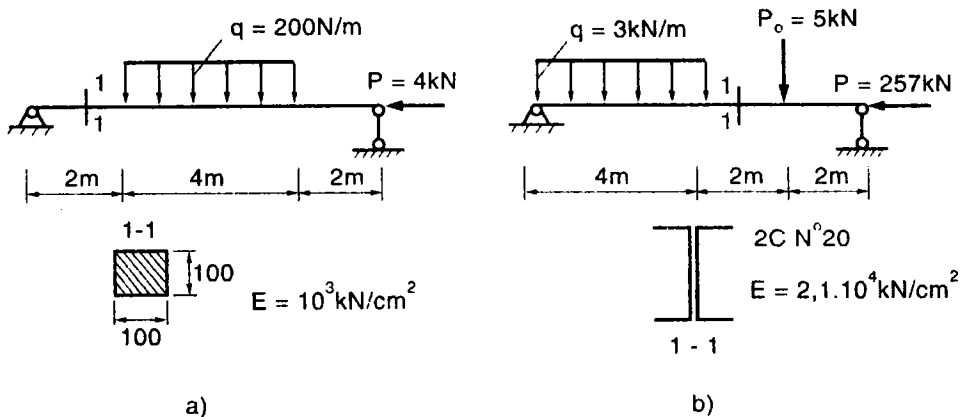
$r$  - bán kính quán tính

$c$  - khoảng cách từ trục trung tâm đến mép xa nhất của tiết diện.

Vì ứng suất phụ thuộc phi tuyến vào tải trọng nên kiểm tra bền theo ứng suất cho phép không đảm bảo an toàn theo hệ số  $n$  dự kiến. Trong trường hợp này, người ta dùng điều kiện an toàn theo tải trọng như phương trình (12.10).

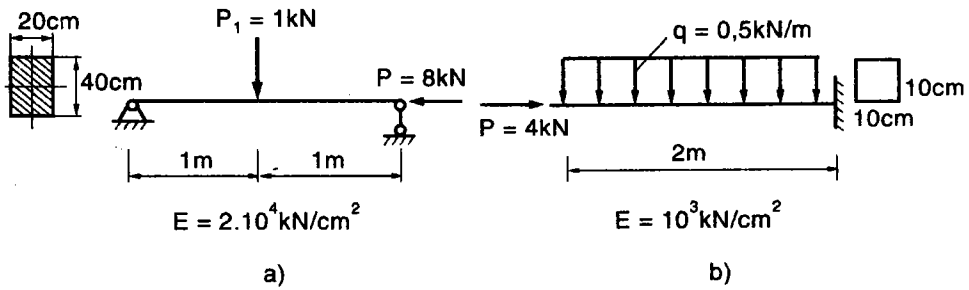
## 12.7 BÀI TẬP CHƯƠNG 12

12.1 Tính ứng suất nén lớn nhất theo phương pháp gần đúng của dầm chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời cho trên hình 12.11.



Hình 12.11

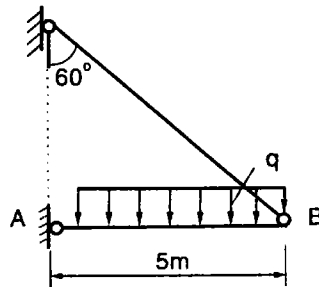
12.2 Cho dầm chịu lực như trên hình 12.12. Hãy tính ứng suất pháp lớn nhất và hệ số an toàn  $n$  nếu  $[\sigma] = 24\text{kN/cm}^2$ . Tính độ võng lớn nhất.



Hình 12.12

**12.3** Tính cường độ tải trọng cho phép tác dụng lên dầm AB như trên hình 12.10, biết hệ số an toàn về độ bền  $n = 1,6$ . Dầm AB bằng thép số 3 có mặt cắt hình ống với đường kính trong  $d = 6\text{cm}$  và đường kính ngoài  $D = 10\text{cm}$ , vật liệu có  $[\sigma] = 24\text{kN/cm}^2$ , khi tính bỏ qua trọng lượng của dầm.

Kiểm tra ổn định của dầm nếu lấy  $k_{od} = 2$ . Cho  $E = 2.10^4\text{kN/cm}^2$ .



Hình 12.13

## TẢI TRỌNG ĐỘNG

### 13.1 KHÁI NIỆM CHUNG

Trong các chương trước, khi khảo sát một vật thể chịu tác dụng của ngoại lực, ta coi ngoại lực tác dụng là *tĩnh*, tức là những tải trọng gây ra gia tốc chuyển động bé, vì vậy khi xét cân bằng có thể bỏ qua được ảnh hưởng của lực quán tính.

Tuy nhiên, cũng có những trường hợp mà tải trọng tác dụng không thể coi là tĩnh vì gây ra gia tốc lớn, ví dụ như sự va chạm giữa các vật, vật quay quanh trục, dao động... Lúc này, phải xem tác dụng của *tải trọng là động*, và phải xét đến lực quán tính khi giải quyết bài toán.

Khi khảo sát cân bằng của vật thể chịu tác dụng của tải trọng động, người ta thường áp dụng nguyên lý d'Alembert. Tuy nhiên, trong trường hợp vật chuyển động với vận tốc thay đổi đột ngột như bài toán va chạm thì nguyên lý bảo toàn năng lượng được sử dụng.

Để thuận tiện cho việc tính hệ chịu tải trọng động, các công thức thiết lập cho vật chịu tác dụng của tải trọng động thường đưa về dạng tương tự như bài toán tĩnh nhân với một hệ số điều chỉnh nhằm kể đến ảnh hưởng của tác dụng động, gọi là *hệ số động*.

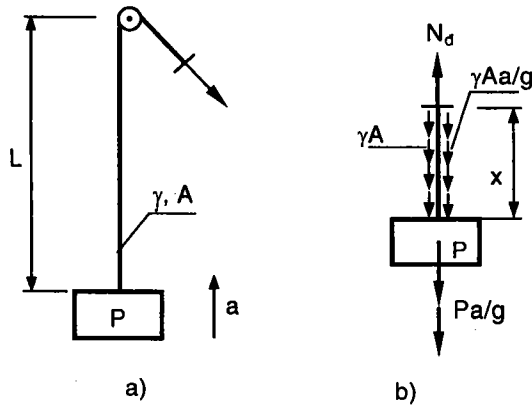
Trong chương này chỉ xét các bài toán tương đối đơn giản, thường gặp, có tính chất cơ bản nhằm mở đầu cho việc nghiên cứu tính toán động lực học chuyên sâu sau này.

### 13.2 THANH CHUYỂN ĐỘNG VỚI GIA TỐC LÀ HẰNG SỐ

Một vật nặng  $P$  được kéo lên với gia tốc không đổi  $a$  như hình 13.1a. Gọi  $L$ ,  $\gamma$ ,  $A$  lần lượt là chiều dài, trọng lượng riêng và diện tích tiết diện của dây cáp.

Xét nội lực tại mặt cắt ngang của dây cáp cách đầu dây một đoạn  $x$ . (H.13.1b), lực tác dụng gồm có:

- Trọng lượng vật nặng  $P$
- Trọng lượng dây cáp  $\gamma Ax$
- Lực quán tính tác dụng trên vật  $P$  là  $Pa/g$
- Lực quán tính của dây là  $\gamma Ax a/g$
- Nội lực động  $N_d$  tại mặt cắt đang xét.



**Hình 13.1** a) Vật chuyển động lên với gia tốc  $a$   
 b) Nội lực và ngoại lực tác dụng lên phần thanh đang xét

Theo nguyên lý d'Alembert, tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên dây theo phương đứng kể cả lực quán tính phải bằng không, ta được:

$$N_d - \gamma Ax - P - P \frac{a}{g} - \gamma Ax \frac{a}{g} = 0$$

$$N_d = \gamma Ax + P + P \frac{a}{g} + \gamma Ax \frac{a}{g}$$

$$N_d = (\gamma Ax + P) \left( 1 + \frac{a}{g} \right)$$

Đại lượng  $(\gamma Ax + P)$  là nội lực trong dây tại mặt cắt đang xét khi không chuyển động, gọi là nội lực tĩnh  $N_t$ .

Như vậy: 
$$N_d = N_t \left( 1 + \frac{a}{g} \right) \tag{13.1}$$

Ứng suất trong dây:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{N_t}{A} \left( 1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_t \left( 1 + \frac{a}{g} \right) \quad (13.2)$$

Có thể đặt:  $K_d = 1 + \frac{a}{g}$  (13.3)

Khi đó:  $\sigma_d = \sigma_t K_d$  (13.4)

Ứng suất lớn nhất tại mặt cắt trên cùng của dây:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max} K_d$$

với  $\sigma_t = \frac{(\gamma AL + P)}{A}$

Điều kiện bền trong trường hợp này là:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k \quad (13.5)$$

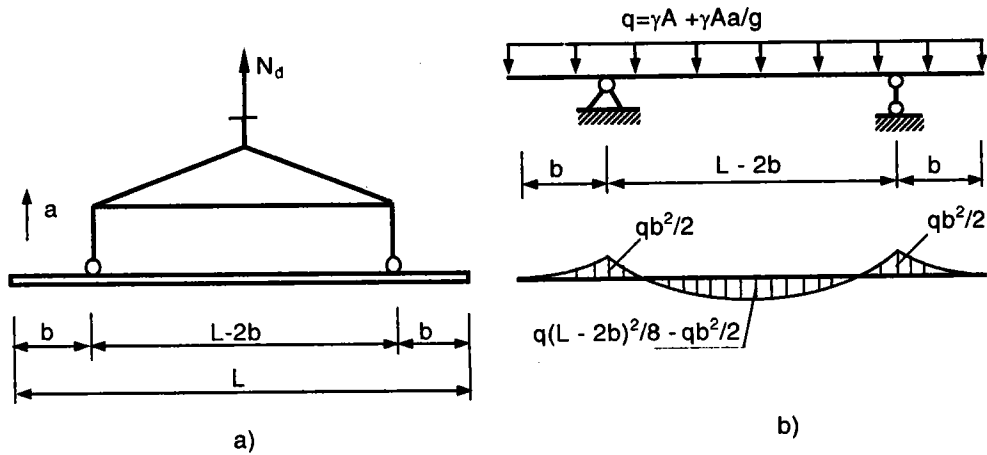
Ta thấy có hai trường hợp:

- Khi chuyển động lên nhanh dần đều (gia tốc  $a$  cùng chiều chuyển động) và chuyển động xuống chậm dần đều (gia tốc  $a$  ngược chiều chuyển động) hệ số động  $K_d > 1$ , nội lực động lớn hơn nội lực tĩnh.
- Ngược lại, khi chuyển động lên chậm dần đều và chuyển động xuống nhanh dần đều thì  $K_d < 1$ , nội lực động nhỏ hơn nội lực tĩnh.

Dù vậy, khi một vật thể chuyển động như bài toán trên đây, phải tính toán thiết kế với  $K_d > 1$ .

**Ví dụ 13.1** Một thanh dài  $10m$  có tiết diện vuông  $30cm \times 30cm$  và trọng lượng riêng  $\gamma = 25kN/m^3$ , được kéo lên với gia tốc  $a = 5m/s^2$  (H.13.2). Xác định đoạn mút thừa  $b$  để mômen âm tại gối tựa bằng mômen dương tại giữa nhịp. Vẽ biểu đồ mômen, tính ứng suất pháp lớn nhất. Gia tốc trọng trường  $g = 10m/s^2$ .

Khi thanh được kéo lên với gia tốc  $a$ , thanh chịu tác dụng của trọng lượng bản thân và lực quán tính, khi đó tải trọng tác dụng lên hệ là tải trọng phân bố đều, gồm có:



**Hình 13.2** a) Thanh được kéo lên với gia tốc  $a$   
 b) Sơ đồ tính và biểu đồ mô men

$$q = \gamma A(1) + \frac{\gamma A(1)a}{g}$$

$$= 25(0,3)(0,3) + \frac{25(0,3)(0,3)5}{10} = 3,375 \text{ kN/m}$$

Sơ đồ tính của thanh và biểu đồ mômen cho ở hình 13.2b.

Để mômen tại gối bằng mômen giữa nhịp, ta có:

$$\frac{qb^2}{2} = \frac{q(L - 2b)^2}{8} - \frac{qb^2}{2} \Rightarrow b = 0,206L$$

Với  $b = 0,206L$  thì mômen lớn nhất là:

$$M_{x,\max} = \frac{qb^2}{2} = \frac{q(0,206L)^2}{2}$$

$$= \frac{3,375(0,206)^2(10)^2}{2} = 7,16 \text{ kNm}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{7,16(100)6}{30(30)^2} = 0,159 \text{ kN/cm}^2$$

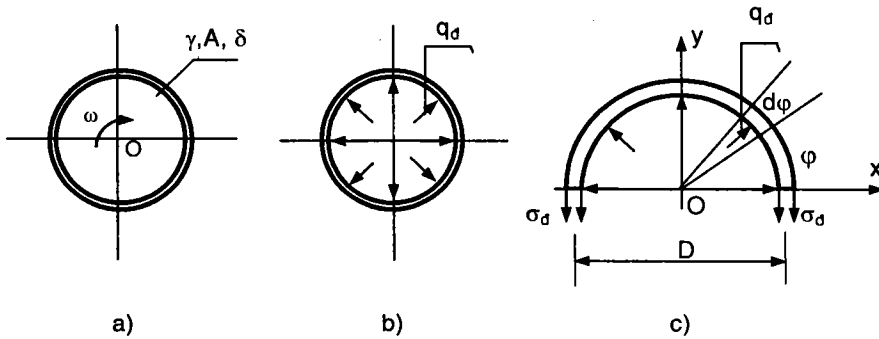
### 13.3 VÔ LĂNG QUAY ĐỀU

Một vô lăng có bề dày  $\delta$ , đường kính trung bình  $D$ , tiết diện  $A$ , trọng lượng riêng  $\gamma$ , quay quanh trục qua tâm  $O$  với vận tốc góc không đổi  $\omega$  (H.13.3a).

Với chuyển động quay đều, gia tốc góc  $\dot{\omega} = 0$ , gia tốc tiếp tuyến  $a_t = \dot{\omega} \frac{D}{2} = 0$  và gia tốc pháp tuyến hướng tâm là  $a_n = \omega^2 \frac{D}{2}$ .

Nhằm đơn giản tính toán, ta bỏ qua ảnh hưởng của các nan hoa nối trục quay với vô lăng và trọng lượng bản thân của vô lăng. Khi đó, trên vô lăng chỉ có lực quán tính phân bố đều tác dụng theo hướng ly tâm là (H.13.3b):

$$q_d = \frac{\gamma A}{g} a_n = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 \frac{D}{2} = \frac{\gamma A D \omega^2}{2g}$$



**Hình 13.3** a) Vô lăng quay đều  
b) Lực tác dụng trên vô lăng  
c) Tách vô lăng theo mặt cắt xuyên tâm

Tách vô lăng theo mặt cắt xuyên tâm, xét cân bằng của một phần (H.13.3c), do đối xứng, trên mặt cắt vô lăng không thể có ứng suất tiếp, chỉ có ứng suất pháp  $\sigma_d$ .

Vì bề dày  $\delta$  bé, có thể xem  $\sigma_d$  là phân đều, lực ly tâm tác dụng trên chiều dài  $ds$  của vô lăng là  $q_d ds$ , phần tử  $ds$  định vị bởi góc  $\varphi$ , lấy tổng hình chiếu theo phương  $y$ , ta có:

$$2\sigma_d A = \int_0^\pi q_d ds \sin \varphi$$

Thay  $q_d = \frac{\gamma A D \omega^2}{2g}$  và  $ds = \frac{D d\varphi}{2}$  vào, ta được:

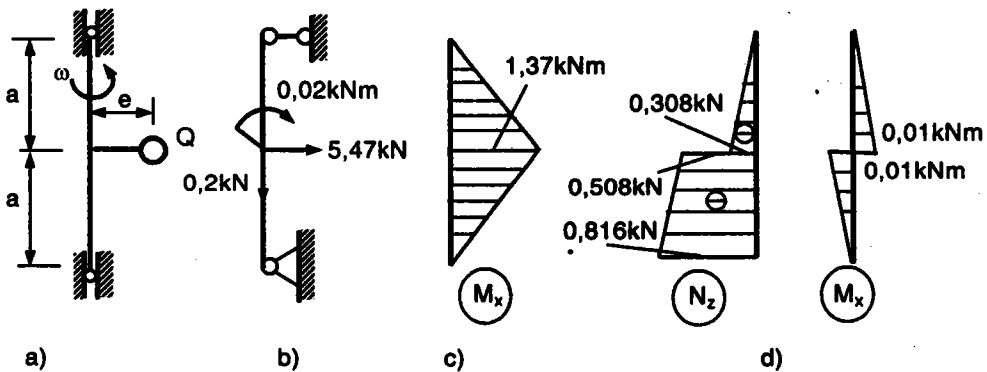
$$\sigma_d = \frac{\gamma D^2 \omega^2}{4g} \quad (13.6)$$



Vì ứng suất trong vô lăng là ứng suất kéo, nên điều kiện bền vô lăng:

$$\sigma_{d,\max} \leq [\sigma]_k \tag{13.7}$$

**Ví dụ 13.2** Một trục đường kính  $D = 10\text{cm}$ , trọng lượng riêng  $\gamma = 78,5\text{kN/m}^3$ , mang một khối lượng lệch tâm  $Q = 0,2\text{kN}$  (H.13.4a), trục quay với vận tốc  $n = 500$  vòng/phút. Kiểm tra bền trục, tính chuyển vị tại điểm đặt khối lượng. Cho  $[\sigma] = 16\text{kN/cm}^2$ ,  $E = 2.10^4\text{kN/cm}^2$ ,  $a = 0,5\text{m}$ ,  $e = 10\text{cm}$ ,  $g = 10\text{m/s}^2$ .



**Hình 13.4** a) Trục quay với vận tốc góc  $\omega$   
 b) Sơ đồ tính trục; c) Biểu đồ mômen do lực ly tâm  
 d) Biểu đồ lực dọc và biểu đồ mômen do tải trọng tĩnh

**Giải** Vận tốc góc:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2(3,14)500}{60} = 52,33 \text{ rad/s}$$

Lực quán tính ly tâm  $Q_{lt}$  do trọng lượng  $Q$  là:

$$Q_{lt} = \frac{Q}{g} \omega^2 e = \frac{0,2}{10} 52,33^2 (0,1) = 5,47 \text{ kN}$$

Bỏ qua ảnh hưởng do tác dụng tĩnh của trọng lượng  $Q$  và trọng lượng bản thân của trục. Ta có mômen do lực ly tâm gây ra là (H.13.4c):

$$M_{x,\max} = \frac{Q_{lt}L}{4} = \frac{5,47(1)}{4} = 1,37 \text{ kNm}$$

Ứng suất lớn nhất của trục:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x,\max}}{W_x} = \frac{1,37(100)}{3,14(10)^3 / 32} = 1,396 \text{ kN/cm}^2$$

Nếu kể đến trọng lượng bản thân trục và tác dụng tĩnh của  $Q$ , tại tiết diện giữa trục chịu tác dụng của các nội lực như sau (H.13.4b):

$$N_z = 0,308 \text{ kN}; \quad M_x = 1,38 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{N_z}{A} + \frac{M_{x,\max}}{W_x} = \frac{0,308}{3,14(10)^2 / 4} + \frac{1,38(100)}{3,14(10)^3 / 32} \\ &= 0,0039 + 1,4063 \text{ kN/cm}^2 = 1,410 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Chuyển vị do tác dụng của lực  $Q_{lt}$  có thể tính theo công thức sau:

$$\delta = \frac{Q_{lt} L^3}{48EI_x} = \frac{5,47(100)^3}{48(2)10^4(3,14)10^4 / 64} = 0,0116 \text{ cm}$$

## 13.4 DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

### 13.4.1 Khái niệm

Một hệ chuyển động qua lại một vị trí cân bằng nào đó, ví dụ quả lắc đồng hồ, gọi là hệ dao động. Khi hệ chuyển từ vị trí cân bằng này sang vị trí cân bằng kế tiếp sau khi đã qua mọi vị trí xác định bởi quy luật dao động, ta nói rằng hệ đã thực hiện một dao động. Thời gian hệ thực hiện một dao động gọi là chu kỳ, ký hiệu là  $T$ , tính bằng giây (s). Tần số là số dao động trong một giây, ký hiệu là  $f$ , chính là nghịch đảo của chu kỳ  $T$  tính bằng 1/s hay héc (Hertz):

$$f = \frac{1}{T}$$

Số dao động trong  $2\pi$  giây gọi là tần số góc, ký hiệu là  $\omega$ :

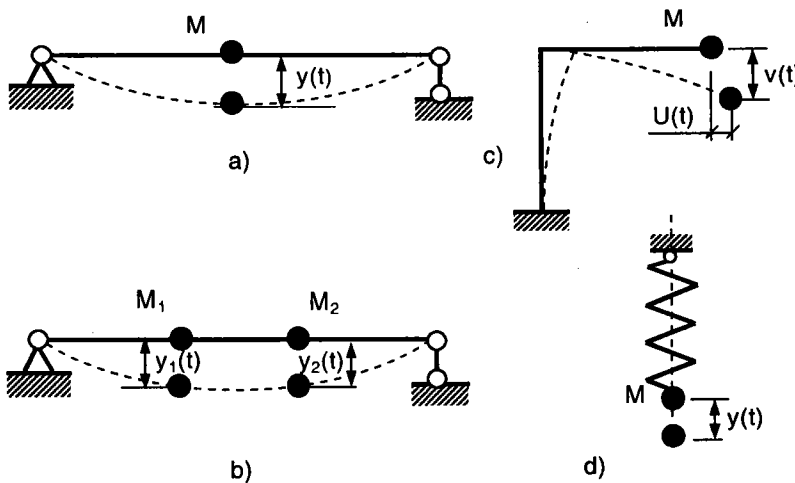
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Bậc tự do là số thông số độc lập xác định vị trí của hệ. Khi tính một hệ dao động, ta cần chọn sơ đồ tính. Xác định sơ đồ tính của một hệ dựa trên điều kiện phải phù hợp với hệ thực trong mức độ gần đúng cho phép.

Ví dụ với dầm mang một vật khối lượng  $M$  cho trên hình 13.5a, nếu khối lượng dầm không đáng kể, có thể xem dầm như một liên kết đàn hồi không khối lượng, vị trí của hệ quyết định do vị trí của khối lượng  $M$ , hệ có một bậc tự do, vì chỉ cần biết tung độ  $y(t)$  của vật nặng là xác định được vị trí của hệ tại mọi thời điểm  $(t)$ .

Với dầm mang hai khối lượng  $M_1$  và  $M_2$  như ở hình 13.5b, nếu bỏ qua khối lượng dầm thì bậc tự do là hai, vì cần phải biết  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ . Đối với thanh ở hình 13.5c, bậc tự do cũng là hai, vì cần phải biết tọa độ  $(x, y)$  của khối lượng  $M$  trong mặt phẳng. Với lò xo ở hình 13.5d nếu chỉ xét dao động dọc trục trụ và bỏ qua khối lượng lò xo thì bậc tự do là một, đó là tung độ  $y(t)$  của khối lượng  $M$  theo phương trục lò xo.

Khi kể đến khối lượng của dầm trên H.13.5.a, bậc tự do của hệ trở thành vô hạn, vì phải biết vô số tung độ  $y(t)$  tại vô số điểm khối lượng suốt chiều dài dầm.



**Hình 13.5** a), d) Hệ một bậc tự do  
b), c) Hệ hai bậc tự do

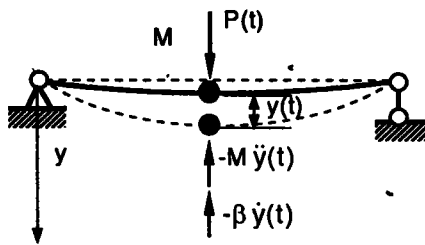
Một hệ đàn hồi có thể dao động tự do hay dao động cưỡng bức.

*Dao động cưỡng bức* là dao động của hệ khi chịu một tác động biến đổi theo thời gian, gọi là lực kích thích, tồn tại trong suốt quá trình hệ dao động như dao động của dầm mang một mô-tơ điện khi nó hoạt động, khối lượng lệch tâm của rô-tô gây ra lực kích thích.

*Dao động tự do* là dao động do bản chất tự nhiên của hệ khi chịu một tác động tức thời, tác động này không tồn tại trong quá trình hệ dao động, ví dụ dao động của dây đàn.

### 13.4.2 Phương trình vi phân dao động cưỡng bức hệ một bậc tự do

Xét hệ một bậc tự do chịu tác dụng một lực kích thích thay đổi theo thời gian  $P(t)$  đặt tại khối lượng  $M$  (H.13.6), tại thời điểm  $t$ , độ võng của khối lượng  $M$  là  $y(t)$ . Giả thiết lực cản môi trường tỷ lệ bậc nhất với vận tốc chuyển động, hệ số tỷ lệ  $\beta$ .



**Hình 13.6** Hệ một bậc tự do chịu dao động cưỡng bức

Gọi  $\delta$  là chuyển vị tại khối lượng  $M$  do lực đơn vị đặt tại đó gây ra.

*Chuyển vị  $y(t)$  là kết quả của các tác động:*

- Lực kích thích  $P(t)$  gây ra chuyển vị  $P(t)\delta$
- Lực quán tính  $-M\ddot{y}(t)$  gây ra chuyển vị  $-M\ddot{y}(t)\delta$
- Lực cản môi trường  $-\beta\dot{y}(t)$  gây ra chuyển vị  $-\beta\dot{y}(t)\delta$

Ta được:

$$y(t) = P(t)\delta - M\ddot{y}(t)\delta - \beta\dot{y}(t)\delta \quad (a)$$

hay:  $M\ddot{y}(t)\delta + \beta\dot{y}(t)\delta + y(t) = P(t)\delta \quad (b)$

Chia hai vế cho  $M\delta$  và đặt:

$$\frac{\beta}{M} = 2\alpha \quad (c)$$

$$\frac{1}{M\delta} = \omega^2 \quad (d)$$

Ta thu được phương trình vi phân dao động cưỡng bức hệ một bậc tự do:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = P(t)\delta\omega^2 \quad (13.8)$$

### 13.4.3 Dao động tự do

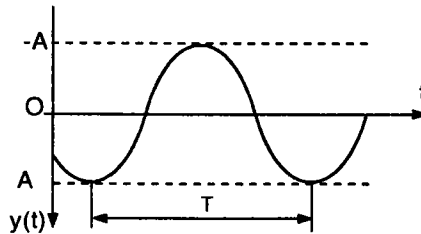
Khi không có lực kích thích và lực cản bằng không, hệ dao động tự do, phương trình (13.8) trở thành phương trình vi phân của dao động tự do:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (13.9)$$

Nghiệm tổng quát của (13.9) là một hàm sin:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Ta thấy dao động tự do có tính tuần hoàn, điều hòa (H.13.7). Biên độ dao động là  $A$ , tần số góc  $\omega$ , độ lệch pha  $\varphi$ .



**Hình 13.7** Đồ thị dao động tự do

Tần số góc của dao động tự do  $\omega$  còn gọi là *tần số riêng* được tính theo công thức:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta}} \quad (13.10)$$

Gọi  $P$  là trọng lượng của khối lượng  $M$  và  $g$  là gia tốc trọng trường, ta có  $M = P/g$ , thay vào (13.10), ta được:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}}$$

Tích số  $P\delta$  chính là *giá trị chuyển vị tại điểm đặt khối lượng  $M$  do trọng lượng  $P$  của khối lượng dao động  $M$  tác dụng tĩnh gây ra*, gọi là  $\Delta_t$ .

Công thức tính tần số riêng của hệ trở thành:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_t}} \quad (13.11)$$

Chu kỳ của dao động tự do:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/\Delta_t}} \quad (13.12)$$

#### 13.4.4 Dao động tự do có cản

Trong (13.8), cho lực kích thích  $P(t) = 0$ , ta được phương trình vi phân của dao động tự do có cản, hệ một bậc tự do:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (13.13)$$

Nghiệm của (13.13) tùy thuộc vào nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$K^2 + 2\alpha K + \omega^2 = 0$$

Khi  $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 \geq 0$ , nghĩa là hệ số cản lớn hơn tần số riêng, nghiệm tổng quát của (13.13) có dạng:

$$y(t) = C_1 e^{K_1 t} + C_2 e^{K_2 t}$$

Đây là một hàm mũ không tuần hoàn, hệ không có dao động.

Khi  $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 < 0$ , đặt  $\omega_1^2 = \omega^2 - \alpha^2$ , phương trình đặc trưng có nghiệm ảo:

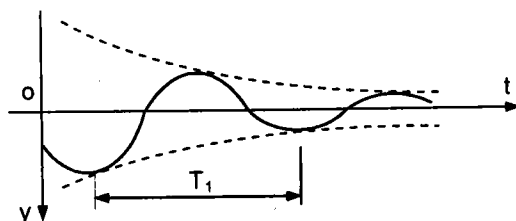
$$K_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_1$$

Nghiệm tổng quát của (13.13) có dạng sin:

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

biểu diễn một dao động với tần số góc  $\omega_1$ , độ lệch pha  $\varphi_1$ , biên độ dao động là một hàm mũ âm  $A_1 e^{-\alpha t}$ , tắt rất nhanh theo thời gian (H.13.8).

Tần số dao động  $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$  và chu kỳ  $T_1 = 2\pi / \omega_1$ . Ta thấy  $\omega_1 < \omega$  do đó chu kỳ  $T_1$  lớn hơn chu kỳ  $T$  của dao động tự do.



Hình 13.8 Đồ thị dao động tự do có cản

### 13.4.5 Dao động cưỡng bức có cản

Trong các bài toán kỹ thuật thường gặp lực kích thích có tính tuần hoàn, do đó có thể lấy  $P(t) = P_0 \sin rt$ , khi đó phương trình vi phân (13.8) trở thành:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \delta\omega^2 P_0 \sin rt \quad (13.14)$$

Nghiệm tổng quát của (13.14) có dạng:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

trong đó  $y_1(t)$  là một nghiệm tổng quát của phương trình (13.14) không vế hai, chính là nghiệm của dao động tự do không cản:

$$y_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

và  $y_2(t)$  là một nghiệm riêng của phương trình (13.14) có vế hai, vì vế phải là một hàm sin, do đó có thể lấy  $y_2(t)$  dạng sin:

$$y_2(t) = C_1 \sin rt + C_2 \cos rt \quad (e)$$

với  $C_1$  và  $C_2$  là các hằng số tích phân, xác định bằng cách thay  $y_2(t)$  và các đạo hàm của nó vào phương trình (13.14), rồi đồng nhất hai vế. Sử dụng giản đồ vectơ quay biểu diễn (e) dưới dạng:

$$y_2(t) = V \sin(rt + \theta)$$

Như vậy, phương trình dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do là:

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + V \sin(rt + \theta) \quad (f)$$

Số hạng thứ nhất của vế phải trong (f) là một hàm có biên độ  $A_1 e^{-\alpha t}$  giảm rất nhanh theo quy luật hàm mũ âm, sau một thời gian ngắn, hệ dao động theo quy luật:

$$y(t) = V \sin(rt + \theta) \quad (13.15)$$

Đó là một hàm sin biểu diễn một dao động điều hòa. Tần số góc của dao động bằng tần số lực kích thích  $r$ , độ lệch pha  $\theta$ , biên độ dao động  $V$ .

Biên độ dao động chính là độ võng cực đại của dầm  $y_{\max}$ , ta có:

$$V = y_{\max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad (g)$$

Tính các giá trị của  $C_1$  và  $C_2$  thay vào (g), ta được độ võng cực đại của dầm:

$$y_{\max} = \frac{P_0 \delta}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}}$$

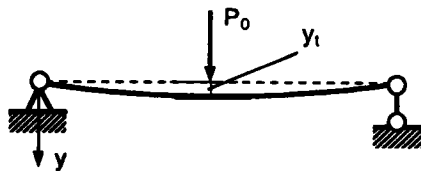
Tích số  $P_0 \delta$  chính là giá trị của chuyển vị tại điểm đặt khối lượng  $M$  do lực có giá trị  $P_0$  (biên độ lực kích thích) tác dụng tĩnh tại đó gây ra (H.13.9), đặt là  $y_t$ , ta có:

$$y_{\max} = y_t \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (13.16)$$

Có thể viết là:  $y_{\max} = y_t K_d$

với: 
$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (13.17)$$

$K_d$  là một hệ số kể đến ảnh hưởng của dao động so với tác dụng tĩnh, gọi là *hệ số động*.

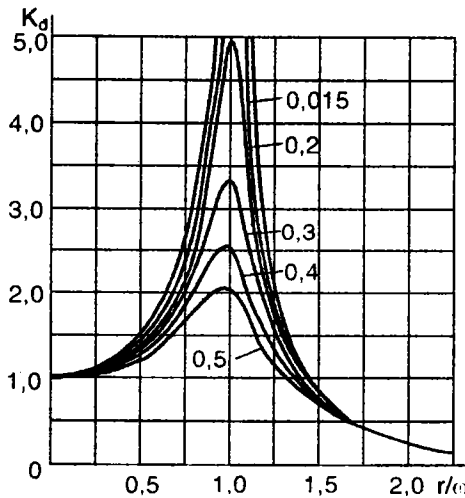


**Hình 13.9** Sơ đồ tĩnh  $y_t$



**13.4.6 Hiện tượng cộng hưởng**

Khảo sát sự biến thiên của hệ số động  $K_d$  ở công thức (13.17) bằng cách coi  $K_d$  là một hàm hai biến  $K_d = f(r/\omega, 2\alpha/\omega)$ . Ứng với một giá trị xác định  $2\alpha/\omega$ , ta vẽ được đồ thị biểu diễn quan hệ ( $K_d, r/\omega$ ) có dạng hình chuông mà đỉnh của nó tại hoành độ  $r/\omega = 1$ , lần lượt cho  $2\alpha/\omega$  nhiều giá trị khác nhau ứng với hệ số cản  $\alpha$  giảm dần, ta thấy đỉnh của đồ thị ( $K_d$ ) tăng nhanh, với  $\alpha = 0$ , giá trị của  $K_d$  tiến đến vô cực (H.13.10), nghĩa là độ võng dầm lớn vô cùng.



**Hình 13.10** Đồ thị hàm số  $K_d = f(r/\omega; 2\alpha/\omega)$  với  $2\alpha/\omega$  là các hằng số cho trước

Hiện tượng biên độ dao động tăng đột ngột khi tần số lực kích thích bằng tần số riêng của hệ đàn hồi gọi là hiện tượng cộng hưởng. Trên đồ thị còn cho thấy khi hai tần số này xấp xỉ nhau ( $r/\omega \in [0,75 \div 1,25]$ ), biên độ tăng rõ rệt, người ta gọi là miền cộng hưởng. Hiện tượng cộng hưởng rõ ràng rất nguy hiểm cho chi tiết máy hay công trình làm việc trong miền cộng hưởng, do đó trong thiết kế, ta phải tính toán sao cho hệ dao động nằm ngoài miền cộng hưởng.

Đồ thị cho thấy nên chọn tỷ số  $r/\omega$  lớn hơn 2, khi đó  $K_d < 1$ , bài toán động ít nguy hiểm hơn bài toán tĩnh. Để có  $r/\omega$  lớn, thường phải giảm  $\omega$ , nghĩa là chuyển vị  $\Delta_t$  phải lớn, muốn vậy phải giảm độ cứng của thanh đàn hồi, điều này nhiều lúc mâu thuẫn với yêu cầu độ bền

của công trình, để tránh giảm độ cứng công trình có thể đặt lò xo hay loại vật liệu có khả năng phát tán năng lượng đệm giữa khối lượng dao động và thanh đàn hồi.

Có trường hợp khi khởi động mô tơ, tốc độ mô tơ tăng dần đến tốc độ ổn định, một thời gian ngắn ban đầu công trình có thể ở trong miền cộng hưởng, cần phải dùng loại động cơ tăng tốc nhanh để hiện tượng cộng hưởng nếu có xảy ra cũng chỉ trong thời gian rất ngắn.

Nếu khi hoạt động, công trình dao động với  $K_d$  lớn, cần tính toán kỹ để sử dụng các bộ giảm chấn làm tiêu hao năng lượng dao động hay tăng hệ số cản.

Ta thấy, khi một hệ dao động, ta cần tìm hệ số động  $K_d$  theo công thức (13.17), sau đó có thể tính các đại lượng khác trong hệ tương tự như độ võng, nghĩa là:

$$S_d = S_{t,P_0} K_d + S_{t,P} \quad (13.18)$$

$S_{t,P_0}$  - đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do biên độ lực kích thích  $P_0$  tác dụng tĩnh tại điểm khối lượng dao động gây ra (H.13.9).

$S_{t,P}$  - đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do các tải trọng có sẵn trên hệ tác dụng tĩnh gây ra mà khi không có dao động vẫn có các tác dụng này (như trọng lượng của mô tơ).

Điều kiện bền đối với thanh dao động vẫn không khác gì so với thanh chịu tải tĩnh, ví dụ thanh bằng vật liệu dẻo chịu dao động uốn là:

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma] \quad (13.19)$$

#### 13.4.7 Phương pháp thu gọn khối lượng

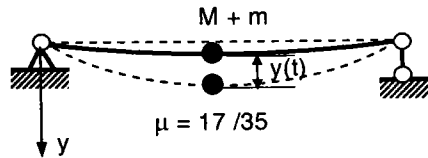
Khi phải kể đến khối lượng dầm (các liên kết đàn hồi) ảnh hưởng quá trình dao động, nếu khối lượng dầm không quá lớn và không đòi hỏi độ chính xác cao, có thể *tính gần đúng như hệ một bậc tự do theo phương pháp thu gọn khối lượng*.

Giả sử có một dầm mang một khối lượng  $M$  ở giữa nhịp và dầm có khối lượng đủ nhỏ để đường đàn hồi có dạng như khi chỉ có một khối lượng  $M$  dao động (H.13.11). Người ta đã chứng minh rằng, khi dao động, động năng của toàn dầm tương đương động năng của một

khối lượng  $m = (17/35)(qL/g)$  đặt tại giữa dầm. Như vậy, có thể xem hệ là một bậc tự do với khối lượng dao động tại giữa dầm là:

$$M_1 = M + m = M + \frac{17 qL}{35 g} \quad (13.20)$$

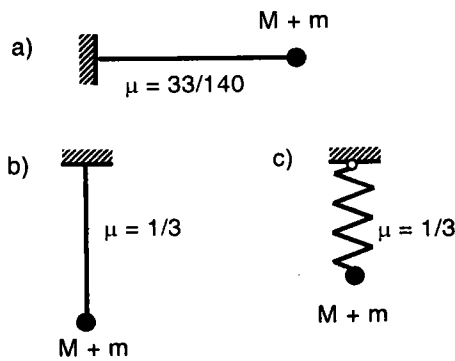
trong đó  $qL/g$  chính là khối lượng của toàn bộ dầm.



**Hình 13.11** Thu gọn khối lượng dầm thành hệ một bậc tự do

Gọi  $\mu$  là hệ số thu gọn khối lượng. Ta có:

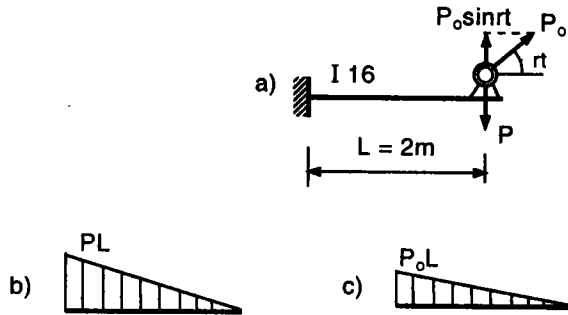
- Đối với dầm đơn (H.13.11), khối lượng thu gọn tại giữa nhịp,  $\mu = 17/35$ .
- Đối với dầm console (H.13.12a), khối lượng thu gọn tại đầu tự do,  $\mu = 33/140$ .
- Đối với lò xo dao động dọc, thanh thẳng dao động dọc (H.13.12.b,c), khối lượng thu gọn tại đầu tự do,  $\mu = 1/3$ .



**Hình 13.12** Hệ số thu gọn khối lượng

- a) Dầm console:  $\mu = 33/140$
- b) Thanh dao động dọc trực:  $\mu = 1/3$
- c) Lò xo dao động dọc trực:  $\mu = 1/3$

**Ví dụ 13.3** Một dầm console tiết diện I-16 mang một mô-tơ trọng lượng  $P = 2,5kN$ , vận tốc  $n = 600$  vòng/phút, khi hoạt động mô-tơ sinh ra lực ly tâm  $P_0 = 0,5kN$  (H.13.13). Bỏ qua trọng lượng dầm, tính ứng suất lớn nhất, độ võng tại đầu tự do. Nếu kể đến trọng lượng dầm  $q$ , tính lại ứng suất và độ võng. Cho:  $E = 2.10^4 kN/cm^2$ , hệ số cản  $\alpha = 2(1/s)$ , thép I16 có:  $I_x = 945cm^4$ ,  $W_x = 118cm^3$ ,  $q = 0,169kN/m$ .



**Hình 13.13** a) Dầm mang một mô-tơ  
b), c) Biểu đồ mô-men do trọng lượng mô-tơ  $P$  và lực ly tâm  $P_0$

**Giải** Khi mô-tơ hoạt động thì dầm chịu tác dụng một lực kích thích  $P(t) = P_0 \sin rt$ , với  $P_0 = 0,5kN$  và tần số góc  $r$ .

Từ vận tốc  $n = 600$  vòng/phút, ta có:

$$r = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 600}{60} = 62,8 \text{ rad/s}$$

a) Không kể đến trọng lượng dầm

Ứng suất động:  $\sigma_d = \sigma_{t,P_0} K_d + \sigma_{t,P}$

Hệ số động:

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}}$$

Tần số riêng:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_t}}$$

với:  $g = 10m/s^2 = 1000cm/s^2$ .

$$\Delta_t = \frac{PL^3}{3EI_x} = \frac{2,5(200)^3}{3(2)10^4 945} = 0,35 \text{ cm}$$

Ta được:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_t}} = \sqrt{\frac{1000}{0,35}} = 53,45$$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{62,8^2}{53,45^2}\right)^2 + \frac{4(2)^2 62,8^2}{53,45^4}}} = 2,56$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng  $P$  (H.13.13b), ta thấy tại ngàm có mômen lớn nhất, do đó ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm là:

$$\sigma_{t,P,\max} = \frac{M_{x,\max,P}}{W_x} = \frac{PL}{W_x} = \frac{2,5(2)100}{118} = 4,24 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do  $P_o$  tác dụng tĩnh được tính tương tự (H.13.13c):

$$\sigma_{t,P_o,\max} = \frac{P_o L}{W_x} = \frac{0,5(2)100}{118} = 0,85 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 0,85(2,56) + 4,24 = 6,42 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại đầu tự do là:

$$y_{t,P} = \Delta_t = 0,35 \text{ cm}$$

suy ra chuyển vị do  $P_o$  tác dụng tĩnh tại đầu tự do là:

$$y_{t,P_o} = \frac{0,5}{2,5} 0,35 = 0,07 \text{ cm}$$

Chuyển vị động lớn nhất tại đầu tự do, ta có:

$$y_d = 0,07(2,56) + 0,35 = 0,53 \text{ cm}$$

**b) Kể đến trọng lượng dầm**

Để đưa hệ về một bậc tự do, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng. Coi dầm không trọng lượng và ở đầu tự do có đặt một khối lượng:

$$m = \frac{33 qL}{140 g}$$

nghĩa là tại đó có thêm một trọng lượng bằng:

$$\frac{33}{140} qL = \frac{33}{140} 0,169(2) = 0,079 \text{ kN}$$

Chuyển vị tĩnh do khối lượng dao động là:

$$\Delta_t = \frac{(P + 0,079)L^3}{3EI_x} = \frac{(2,5 + 0,079)(200)^3}{3(2)10^4 945} = 0,364 \text{ cm}$$

Tần số riêng:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_t}} = \sqrt{\frac{1000}{0,364}} = 52,41$$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{62,8^2}{52,41^2}\right)^2 + \frac{4(2)^2 62,8^2}{52,41^4}}} = 2,245$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng  $P$  (H.13.13b), ta thấy tại ngàm có ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm có kể thêm trọng lượng bản thân là:

$$\sigma_{t,P,\max} = \frac{M_{x,\max,P}}{W_x} = \frac{(PL + qL^2/2)}{W_x}$$

$$\sigma_{t,P,\max} = \frac{(2,5(2) + 0,169(2)^2/2)100}{118} = 4,52 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do  $P_0$  tác dụng tĩnh không khác phân trên là  $0,85 \text{ kN/cm}^2$ .

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 0,85(2,245) + 4,52 = 6,43 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị tại đầu tự do gây bởi trọng lượng đặt sẵn của trường hợp này cần tính ngoài trọng lượng mô tơ còn phải kể thêm chuyển vị do trọng lượng bản thân (tải phân bố đều  $q$ ) là:

$$y_{t,P} = \frac{PL^3}{3EI_x} + \frac{qL^3}{8EI_x} = 0,35 + 0,018 = 0,368 \text{ cm}$$

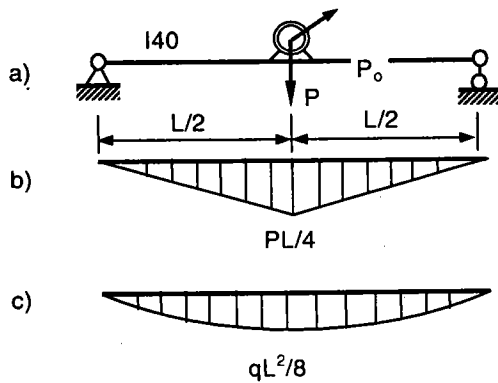
còn chuyển vị do  $P_0$  tác dụng tĩnh tại đầu tự do vẫn là  $0,07 \text{ cm}$ .

Chuyển vị động lớn nhất tại đầu tự do, ta có:

$$\sigma_d = 0,07(2,245) + 0,368 = 0,525 \text{ cm}$$

**Ví dụ 13.4** Một dầm thép hình I40, dài  $L = 6m$ , mang một mô-tơ trọng lượng  $P = 2,5kN$ , vận tốc 600 vòng/phút, khi hoạt động mô-tơ sinh ra lực ly tâm  $P_0 = 0,5kN$  (H.13.14a). Kể đến trọng lượng dầm, tính ứng suất lớn nhất, độ võng của dầm.

Cho:  $E = 2.10^4 kN/cm^2$ ; hệ số cản  $\alpha = 2(1/s)$ ; thép I40 có  $J_x = 19840cm^4$ ,  $W_x = 947cm^3$ , trọng lượng dầm I40 là  $q = 0,56kN/m$ .



**Hình 13.14** a) Dầm đơn I40 mang một mô-tơ  
b) và c) Biểu đồ mômen do trọng lượng mô-tơ  $P$  và trọng lượng bản thân của dầm

**Giải** Tương tự ví dụ 13.3, khi mô-tơ hoạt động thì dầm chịu tác dụng một lực kích thích

$$P(t) = P_0 \sin rt \text{ với } P_0 = 0,5 \text{ kN}$$

và tần số góc 
$$r = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi 600}{60} = 62,8 \text{ rad/s}$$

Ứng suất động: 
$$\sigma_d = \sigma_{t,P_0} K_d + \sigma_{t,P}$$

Hệ số động: 
$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}}$$

Tần số riêng:  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_t}}$

với  $g = 10m/s^2 = 1000cm/s^2$  và độ võng tại giữa dầm do lực tập trung  $P$  là:

$$\Delta_t = \frac{PL^3}{48EI_x}$$

Kể đến trọng lượng dầm, phải đưa dầm về một bậc tự do, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng. Coi dầm không trọng lượng và ở giữa dầm có đặt một khối lượng:

$$m = \frac{17 qL}{35 g}$$

nghĩa là tại đó có thêm một trọng lượng bằng:

$$\frac{17}{35} qL = \frac{17}{35} 0,56(6) = 1,632kN$$

khi đó chuyển vị tĩnh do khối lượng dao động là:

$$\Delta_t = \frac{(2,5 + 1,632)L^3}{48EI_x} = \frac{(4,132)(600)^3}{48(2)10^4 18930} = 0,049 \text{ cm}$$

Ta được:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_t}} = \sqrt{\frac{1000}{0,049}} = 142,69$$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{62,8^2}{142,69^2}\right)^2 + \frac{4(2)^2 62,8^2}{142,69^4}}} = 1,24$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng  $P$  và do trọng lượng bản thân  $q$  (H.13.14b,c), ta thấy tại giữa nhịp mômen lớn nhất, ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm có kể thêm trọng lượng bản thân là:

$$\sigma_{t,P,\max} = \frac{M_{x,\max,P}}{W_x} = \frac{(PL/4 + qL^2/8)}{W_x}$$

$$\sigma_{t,P,\max} = \frac{(2,5 \cdot 6 / 4 + 0,56 \cdot 6^2 / 8) 100}{947} = 0,66 \text{ kN/cm}^2$$



Ứng suất do  $P_0$  tác dụng tĩnh là:

$$\sigma_{t,P_0} = \frac{P_0 L}{4W_x} = \frac{0,5(6)100}{4(947)} = 0,079 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 0,079(1,24) + 0,66 = 0,75 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại giữa nhịp gồm trọng lượng mô tơ và phải kể thêm do trọng lượng bản thân là:

$$y_{t,p} = \frac{PL^3}{48EI_x} + \frac{5ql^4}{384EI_x} = 0,03 + 0,025 = 0,055 \text{ cm}$$

còn chuyển vị do  $P_0$  tác dụng tĩnh tại giữa nhịp là:

$$0,03 \frac{0,5}{2,5} = 0,006 \text{ cm}$$

Chuyển vị động lớn nhất tại giữa nhịp, ta có:

$$y_d = 0,006(1,24) + 0,055 = 0,062 \text{ cm}$$

### 13.5 TỐC ĐỘ TỚI HẠN CỦA TRỤC

Một trục quay mang một puli khối lượng  $M$ , quay đều với vận tốc góc  $\Omega$ , gọi chuyển vị của trục tại vị trí puli là  $y$ , giả sử tâm của khối lượng puli không trùng với tâm của trục quay, độ lệch tâm là  $e$  (H.13.15).

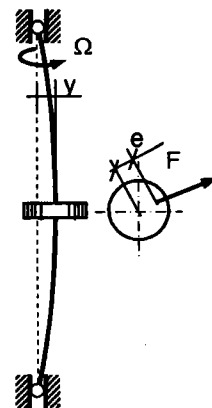
Lực ly tâm tác dụng lên trục:

$$F = M\Omega^2(e + y)$$

Gọi  $\delta$  là chuyển vị tại vị trí puli do lực đơn vị gây ra theo phương vuông góc với trục, chuyển vị gây ra bởi lực ly tâm  $F$  là:

$$y = F\delta = M\delta\Omega^2(e + y)$$

$$\Rightarrow y = \frac{e\Omega^2}{\frac{1}{M\delta} - \Omega^2} \quad (13.21)$$



Hình 13.15

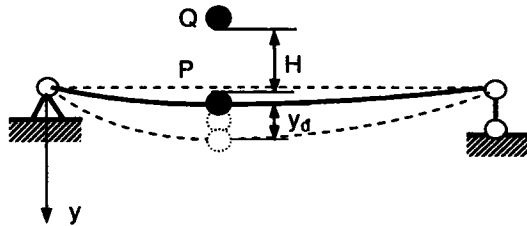
Ta thấy, chuyển vị  $y$  của trục cực đại khi  $\Omega^2 = 1/M\delta$ , nghĩa là tốc độ của trục  $\Omega$  bằng tần số riêng  $\omega = \sqrt{1/M\delta}$  khi trục dao động tự do, trị số  $\Omega = \sqrt{1/M\delta}$  gọi là tốc độ tới hạn của trục quay. Khi trục làm việc ở tốc độ gần tốc độ tới hạn, độ võng lớn, chi tiết máy có tiếng ồn, nên trong thiết kế phải tính toán sao cho tốc độ khác xa tốc độ tới hạn.

Nhận xét rằng, nếu tốc độ trục  $\Omega$  lớn hơn nhiều so với tần số riêng  $\omega$ , độ võng  $y \approx -e$ , tâm của puli nằm trên trục quay, trục ở trạng thái làm việc tốt nhất.

## 13.6 VA CHẠM

### 13.6.1 Va chạm đứng

Một dầm mang một trọng lượng  $P$  chịu va chạm bởi một trọng lượng  $Q$  rơi theo phương đứng từ độ cao  $H$  đập vào trọng lượng  $P$  gây ra độ võng  $y_d$  (H.13.16). Bỏ qua khối lượng dầm.



**Hình 13.16** Hệ một bậc tự do chịu va chạm đứng

Gọi  $V_0$  là vận tốc của  $Q$  ngay trước lúc va chạm,  $V$  là vận tốc của  $(P + Q)$  ngay khi va chạm. Theo định luật bảo toàn động lượng:

$$\frac{QV_0}{g} = \frac{(P + Q)}{g} V$$

$$\text{Ta được: } V = \frac{Q}{P + Q} V_0 \quad (\text{a})$$

Gọi trạng thái 1 là trạng thái lúc  $Q$  chạm  $P$  làm cho cả hai cùng chuyển động với vận tốc  $V$  và trạng thái 2 ứng với thời điểm  $(P + Q)$  đạt độ võng lớn nhất  $y_d$ , lúc này vận tốc của hệ bằng không.

Động năng của trọng lượng  $(P + Q)$  ở trạng thái 1 là:

$$T = \frac{1}{2} \frac{P + Q}{g} V^2 = \frac{1}{2} \frac{P + Q}{g} \left( \frac{Q}{P + Q} V_0 \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2 V_0^2}{g(P + Q)}$$

còn động năng của  $(P + Q)$  ở trạng thái 2 bằng không, do đó động năng biến thiên một lượng là:

$$\Delta T = \frac{Q^2 V_0^2}{2g(P + Q)} \quad (b)$$

Từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 thế năng của trọng lượng  $(P + Q)$  cũng biến thiên một giá trị là:

$$\Delta \pi = (P + Q)y_d \quad (c)$$

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, khi hệ từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 thì độ thay đổi cơ năng do va chạm chuyển hóa thành thế năng biến dạng đàn hồi  $\Delta U$  tích lũy trong dầm:

$$\Delta U = \Delta T + \Delta \pi \quad (d)$$

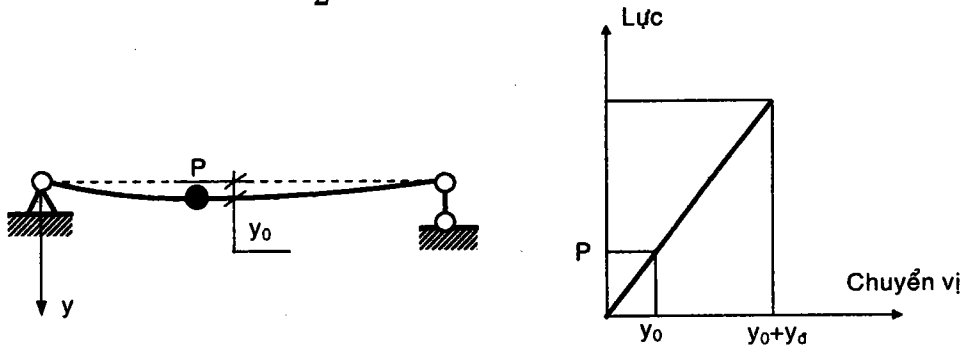
với  $\Delta U$  được tính như sau:

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

trong đó  $U_1, U_2$  lần lượt là thế năng biến dạng đàn hồi của dầm ở trạng thái 1 và 2.

Ở trạng thái 1, dầm chỉ có chuyển vị  $y_0$  do trọng lượng của vật nặng  $P$  gây ra (H.13.17),  $U_1$  được tính như sau:

$$U_1 = \frac{1}{2} P y_0$$



**Hình 13.17** Trọng lượng  $P$  gây ra độ võng  $y_0$  và đồ thị tính thế năng biến dạng đàn hồi trong dầm

Đặt:  $\delta$  - chuyển vị của dầm tại điểm va chạm theo phương va chạm do lực đơn vị gây ra. Ta có thể viết:

$$y_0 = P\delta \Rightarrow P = \frac{y_0}{\delta}$$

đưa  $P$  vào biểu thức  $U_1$  ta được:

$$U_1 = \frac{1}{2} \frac{y_0^2}{\delta}$$

tương tự cách tính  $U_1$ , ta có:

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{(y_d + y_0)^2}{\delta}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong dầm khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 là:

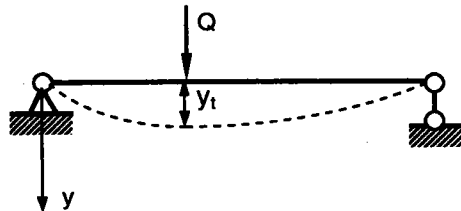
$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2\delta} [(y_d + y_0)^2 - y_0^2] = \frac{1}{2\delta} (y_d^2 + 2y_d y_0) \quad (e)$$

Thay các biểu thức (b), (c) và (e) vào (d), ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\delta} (y_d^2 + 2y_d y_0) &= \frac{Q^2 V_0^2}{2g(P+Q)} + (P+Q)y_d \\ \Rightarrow y_d^2 + 2y_d y_0 - \frac{\delta Q V_0^2}{g(1 + \frac{P}{Q})} - 2\delta(P+Q)y_d &= 0 \end{aligned} \quad (f)$$

Gọi  $y_t$  là độ võng của dầm tại điểm va chạm theo phương va chạm do trọng lượng  $Q$  tác dụng tĩnh gây ra (H.13.18), ta thấy  $y_t = Q\delta$  và  $2\delta P y_d = 2y_d y_0$ , đưa vào (f), thu gọn:

$$y_d^2 - 2y_t y_d - \frac{y_t V_0^2}{g \left(1 + \frac{P}{Q}\right)} = 0 \quad (g)$$



Hình 13.18 Sơ đồ tĩnh chuyển vị  $y_t$

Nghiệm của phương trình bậc hai (g) là:

$$y_d = y_t \pm \sqrt{y_t + \frac{y_t V_0^2}{g(1 + \frac{P}{Q})}} \quad (h)$$

Vì  $y_d > 0$  nên chỉ chọn nghiệm dương của (h), tức là:

$$y_d = y_t + \sqrt{y_t + \frac{y_t V_0^2}{g(1 + \frac{P}{Q})}} = y_t \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{gy_t(1 + \frac{P}{Q})}} \right] = y_t K_d \quad (13.22)$$

với  $K_d$  là hệ số động, tính theo công thức:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{gy_t(1 + \frac{P}{Q})}} \quad (13.23)$$

Khi vật  $Q$  rơi tự do từ độ cao  $H$ , tức là  $V_0 = \sqrt{2gH}$ , thay vào (13.23):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} \quad (13.24)$$

Khi tại điểm va chạm không có trọng lượng đặt sẵn ( $P = 0$ ), hệ số động tăng lên:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t}} \quad (13.25)$$

Khi  $H = 0$ , nghĩa là trọng lượng  $Q$  đặt đột ngột lên dầm:

$$K_d = 2 \quad (13.26)$$

Theo (13.25), khi  $y_t$  càng lớn, nghĩa là độ cứng của thanh càng nhỏ, thì  $K_d$  càng nhỏ, do đó sự va chạm càng ít nguy hiểm.

Để đảm bảo điều kiện bền, người ta có thể làm tăng  $y_t$  bằng cách đặt tại điểm chịu va chạm những mềm như lò xo hay các tấm đệm cao su.

Khi đã tính được  $K_d$  có thể tính các đại lượng khác trong hệ tương tự như chuyển vị, nghĩa là:

$$S_d = S_{t,Q}K_d + S_{t,P} \quad (13.27)$$

$S_{t,Q}$  - đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do  $Q$  coi như đặt tĩnh tại điểm va chạm gây ra (H.13.18).

$S_{t,P}$  - đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do các tải trọng hoàn toàn tĩnh tác dụng lên hệ gây ra.

Điều kiện bền:

$$\sigma_{d,\max} \leq [\sigma]$$

**Chú ý:**

Nếu chọn mốc thế năng bằng không ở vị trí ban đầu (dầm võng một lượng  $y_0$ ), thì cơ năng ban đầu của hệ chính là thế năng như sau:

$$\pi = QH$$

Ngay sau khi va chạm,  $P$  và  $Q$  cùng chuyển động xuống dưới với vận tốc  $V$  thì cơ năng của hệ chính là động năng như sau:

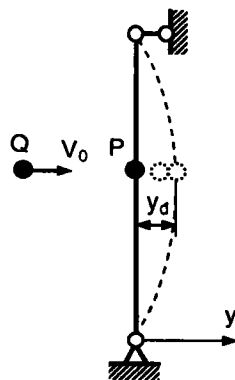
$$T = \frac{1}{2} \frac{P+Q}{g} V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_0^2 = \frac{Q}{(P+Q)} QH < \pi$$

Như vậy đã có sự mất mát năng lượng tương ứng với giả thiết va chạm mềm tuyệt đối của hai vật thể; năng lượng này làm cho hai vật thể biến dạng hoàn toàn dẻo, áp sát vào nhau và chuyển động cùng vận tốc về phía dưới.

### 13.6.2 Va chạm ngang

Xét một thanh mang một vật nặng  $P$  chịu va chạm bởi một trọng lượng  $Q$  chuyển động ngang với vận tốc  $V_0$  đập vào  $P$ , hệ  $(P+Q)$  cùng chuyển động ngang và đạt chuyển vị lớn nhất  $y_d$  (H.13.19). Bỏ qua trọng lượng bản thân của thanh.

Lập luận như trường hợp va chạm đứng, ta có:



**Hình 13.19** Thanh chịu va chạm ngang

Vận tốc  $(P + Q)$  cùng chuyển động ngay sau khi va chạm là:

$$V = \frac{Q}{P + Q} V_0$$

Biến thiên động năng của trọng lượng  $(P + Q)$  là:

$$\Delta T = \frac{Q^2 V_0^2}{2g(P + Q)} = \frac{Q V_0^2}{2g \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}$$

Vì hệ  $(P + Q)$  chuyển động ngang nên thế năng của trọng lượng  $(P + Q)$  không thay đổi, tức là biến thiên thế năng  $\Delta \pi = 0$ .

Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong dầm khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 là:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{y_d^2}{2\delta}$$

trong đó  $\delta$  là chuyển vị của dầm tại điểm va chạm, theo phương va chạm do lực đơn vị gây ra và thế năng biến dạng của dầm ở trạng thái 1 là  $U_1 = 0$  vì trọng lượng  $P$  không gây chuyển vị theo phương va chạm.

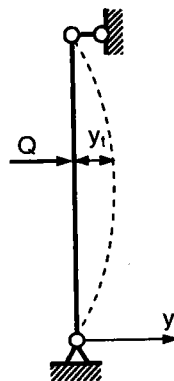
Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng,  $\Delta T + \Delta \pi = \Delta U$ , ta được phương trình sau:

$$\frac{Q V_0^2}{2g \left(1 + \frac{P}{Q}\right)} = \frac{y_d^2}{2\delta}$$

lấy nghiệm dương của phương trình trên đây, ta được:

$$y_d = \sqrt{\frac{\delta Q V_0^2}{g \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}}$$

Ta thấy  $\delta Q$  là chuyển vị theo phương ngang do lực  $Q$  tác dụng tĩnh nằm ngang tại điểm va chạm gây ra (H.13.20). Đặt  $y_t = \delta Q$ , ta có:



**Hình 13.20** Tải trọng  $Q$  tác dụng tĩnh gây ra chuyển vị  $y_t$

$$y_d = y_t \frac{V_0}{\sqrt{gy_t(1 + \frac{P}{Q})}} = y_t K_d \quad (13.28)$$

với  $K_d$  là hệ số động:

$$K_d = \frac{V_0}{\sqrt{gy_t(1 + \frac{P}{Q})}} \quad (13.29)$$

Khi không đặt sẵn trọng lượng chịu va chạm ( $P = 0$ ), hệ số động là:

$$K_d = \frac{V_0}{\sqrt{gy_t}} \quad (13.30)$$

Tương tự phân va chạm ngang, khi đã tính được hệ số động, ta áp dụng công thức:

$$S_d = S_{t,Q} K_d \quad (13.31)$$

$S_{t,Q}$  là đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do  $Q$  coi như đặt tĩnh theo phương va chạm tại điểm va chạm gây ra (H.13.20).

Điều kiện bền:

$$\sigma_{d,\max} \leq [\sigma]$$

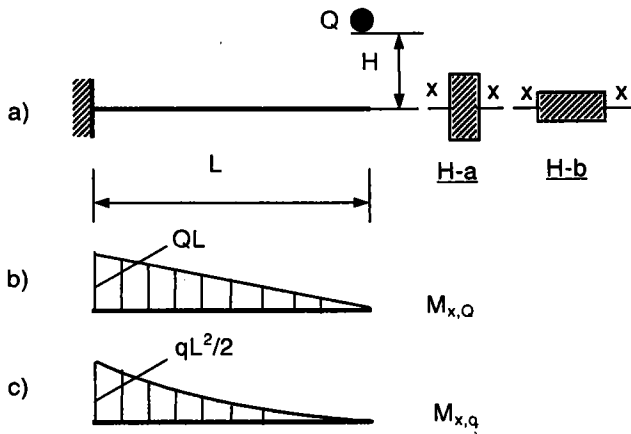
**Ví dụ 13.5** Một dầm console dài  $L = 2m$ , tiết diện chữ nhật ( $20 \times 40$ )cm đặt như hình 13.21a chịu va chạm đứng bởi một trọng lượng  $Q = 1kN$  rơi tự do từ độ cao  $H = 0,5m$  (H.13.21a). Trước tiên, bỏ qua trọng lượng bản thân dầm, tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm. Sau đó, kể đến trọng lượng bản thân dầm  $q$ , tính lại ứng suất và độ võng. Nếu đặt tiết diện dầm như hình 13.21b, tính lại ứng suất và độ võng. Cho  $E = 0,7 \cdot 10^3 kN/cm^2$ ;  $q = 0,64kN/m$ .

**Giải** Ứng suất động:

$$\sigma_d = \sigma_{t,Q} K_d$$

với: 
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t}}$$





**Hình 13.21** a) Dầm console chịu va chạm đứng  
 b) Biểu đồ mômen do  $Q$  tác dụng tĩnh  
 c) Biểu đồ mômen do trọng lượng dầm

Không kể trọng lượng bản thân dầm, độ võng dầm do  $Q$  tác dụng tĩnh là:

$$y_t = \frac{QL^3}{3EI_x} = \frac{1(200)^3}{3(0,7)10^3(20)40^3 / 12} = 0,0357 \text{ cm}$$

Hệ số động:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,0357}} = 53,93$$

Ứng suất lớn nhất tại ngàm:

$$\begin{aligned} \sigma_{d,\max} &= \sigma_{t,Q,\max} K_d = \frac{M_{x,\max}}{W_x} K_d = \frac{QL}{W_x} K_d \\ &= \frac{1(200)}{20(40)^2 / 6} (53,93) = 2,02 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Độ võng lớn nhất tại đầu tự do:

$$y_{\max} = y_{t,Q,\max} K_d = 0,0357(53,93) = 1,92 \text{ cm}$$

Khi kể đến trọng lượng bản thân, có thể dùng phương pháp thu gọn khối lượng, khi đó coi như dầm không trọng lượng và tại đầu tự do có một trọng lượng là  $(33/140)qL = 0,3\text{kN}$  ( $qL$  là trọng lượng dầm).

Hệ số động sẽ là:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,0357(1 + \frac{0,3}{1})}} = 47,43$$

Ứng suất do va chạm là:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,Q} K_d = \frac{1(200)}{20 \cdot 40^2 / 6} 47,43 = 1,78 \text{ kN/cm}^2$$

Kể thêm ứng suất do trọng lượng dầm:

$$\begin{aligned} \sigma_{d,\max} &= \frac{M_{t,q,\max}}{W_x} = \frac{qL^2 / 2}{W_x} \\ &= \frac{0,64(2)^2 100}{2(20)40^2 / 6} = 0,024 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Ứng suất lớn nhất trong dầm là:

$$\sigma_{\max} = 1,78 + 0,024 = 1,804 \text{ kN/cm}^2$$

Khi kể đến trọng lượng dầm, ứng suất lớn nhất giảm.

Độ võng do trọng lượng bản thân gây ra tại đầu tự do là:

$$y_t = \frac{qL^4}{8EI_x} = \frac{0,0064(200)^4}{8(0,7)10^3(20)40^3 / 12} = 0,017 \text{ cm}$$

Độ võng khi có va chạm:

$$\begin{aligned} y_{d,\max} &= y_{t,Q,\max} K_d + y_{t,q} \\ &= 0,0357(47,43) + 0,017 = 1,71 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nếu đặt tiết diện dầm như hình 13.21b, ta được:

- Không kể trọng lượng dầm:

$$y_t = \frac{QL^3}{3EI_x} = \frac{1(200)^3}{3(0,7)10^3(40)20^3 / 12} = 0,143 \text{ cm}$$

Hệ số động:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,143}} = 27,46$$

Ứng suất lớn nhất tại ngàm:

$$\begin{aligned}\sigma_{d,\max} &= \sigma_{t,Q,\max} K_d = \frac{M_{x,Q,\max}}{W_x} K_d = \frac{QL}{W_x} K_d \\ &= \frac{1(200)}{40(20)^2 / 6} (27,46) = 2,06 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}$$

Độ võng tại đầu tự do:

$$y_t = 0,143(27,46) = 3,93 \text{ cm}$$

- Kể đến trọng lượng bản thân ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng, khi đó coi như dầm không trọng lượng và tại đầu tự do có một trọng lượng là  $(33/140)qL = 0,3kN$ .

Hệ số động sẽ là:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,143(1 + \frac{0,3}{1})}} = 24,21$$

Ứng suất do va chạm là:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,Q} K_d = \frac{1(200)}{40.20^2 / 6} 24,21 = 1,816 \text{ kN/cm}^2$$

Kể thêm ứng suất do trọng lượng dầm:

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_{t,q,\max}}{W_x} = \frac{qL^2 / 2}{W_x} = \frac{0,64(2)^2 100}{40(20)^2 / 6} = 0,096 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất lớn nhất trong dầm là:

$$\sigma_{\max} = 1,816 + 0,096 = 1,912 \text{ kN/cm}^2$$

Độ võng do trọng lượng bản thân:

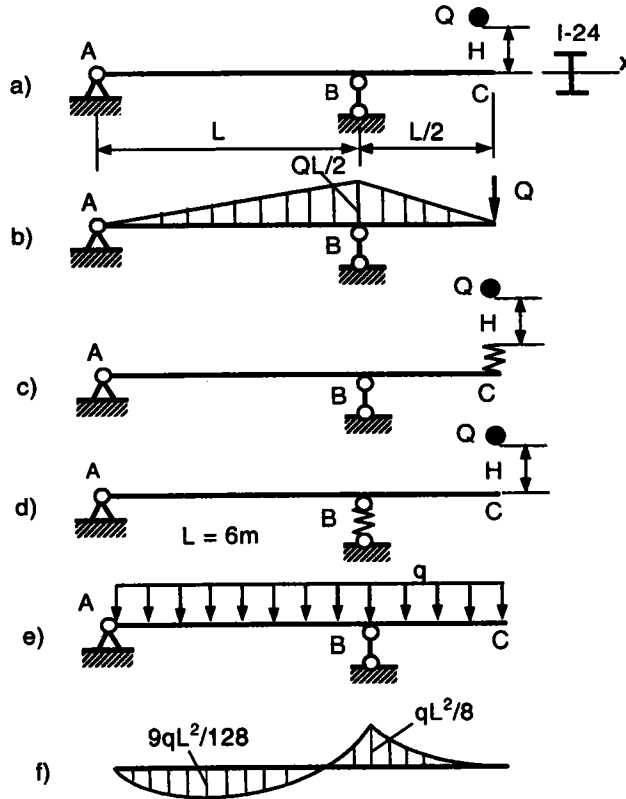
$$y_t = \frac{qL^4}{8EI_x} = \frac{0,0064(200)^4}{8(0,7)10^3(40)20^3 / 12} = 0,068 \text{ cm}$$

Độ võng tại đầu tự do:

$$y_t = 0,143(24,21) + 0,068 = 3,53 \text{ cm}$$

Khi kể đến trọng lượng dầm, ứng suất và độ võng đều giảm.

**Ví dụ 13.6** Dầm ABC có  $L = 6m$  bằng thép hình, tiết diện I-24, chịu va chạm đứng bởi một trọng lượng  $Q = 1kN$  rơi tự do từ độ cao  $H = 50cm$  (H.13.22a).



**Hình 13.22** a) Hệ chịu va chạm không có lò xo  
 b) Biểu đồ mômen do  $Q$  tác dụng tĩnh  
 c) và d) Hệ chịu va chạm có lò xo  
 e) Dầm chịu trọng lượng bản thân  
 f) Biểu đồ mômen do trọng lượng dầm

Bỏ qua trọng lượng bản thân dầm, tính  $\sigma_{max}$  và kiểm tra bền dầm. Cho I-24 có  $I_x = 3460cm^4$ ,  $W_x = 289cm^3$ ,  $q = 0,273kN/m$ ;  $[\sigma] = 16kN/cm^2$ .

Sau đó, đặt một lò xo có  $C_{lx} = 5kN/m$  tại C để đỡ vật va chạm  $Q$  (H.13.22b), tính lại hệ số động,  $\sigma_{max}$  và xét lại điều kiện bền.

Nếu không đặt ở C mà thay lò xo vào gối tựa tại B (H.13.22c), hệ số động là bao nhiêu. Cho  $E = 2.10^4kN/cm^2$ ;  $[\sigma] = 16kN/cm^2$ .

**Giải** Không kể trọng lượng bản thân dầm (H.13.22.a).

Chuyển vị do  $Q$  tác dụng tĩnh tại  $C$  là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} = \frac{1(600)^3}{8(2)10^4(3460)} = 0,39 \text{ cm}$$

Hệ số động:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,39}} = 17,04$$

Ứng suất lớn nhất tại tiết diện B:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,Q,\max} K_d = \frac{M_{x,Q,\max}}{W_x} K_d = \frac{QL}{2W_x} K_d$$

$$\sigma_{d,\max} = \frac{1(600)}{2(289)} 17,04 = 17,69 \text{ KN/cm}^2 > [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

dầm không bền.

Chuyển vị tại  $C$ :

$$y_C = 0,39(17,04) = 6,64 \text{ cm}$$

Xét trường hợp có lò xo đặt ngay tại điểm va chạm (H.13.22c).

Chuyển vị do  $Q$  tác dụng tĩnh tại điểm va chạm là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} + \frac{Q}{C_{lx}} = \frac{1(600)^3}{8(2 \cdot 10^4)3460} + \frac{1}{5} = 0,39 + 0,2 = 0,59 \text{ cm}$$

Hệ số động:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,59}} = 14,06$$

Ứng suất lớn nhất tại tiết diện B:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,Q,\max} K_d = \frac{1(600)}{2(289)} 14,06 = 14,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{d,\max} < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

dầm thỏa điều kiện bền.

Chuyển vị của dầm tại C:

$$y_C = 0,39(14,06) = 5,48 \text{ cm}$$

chuyển vị có giảm so với trường hợp trên.

Xét trường hợp có lò xo đặt tại gối B (H.13.22d).

Chuyển vị do Q tác dụng tĩnh tại C là:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{QL^3}{8EI_x} + \frac{3(3Q/2)}{2C_{lx}} \\ &= \frac{1(600)^3}{8(2)10^4(3460)} + \frac{3(3/2)}{2 \cdot 5} = 0,39 + 0,45 = 0,84 \text{ cm} \end{aligned}$$

Hệ số động:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,84}} = 11,96$$

Ứng suất lớn nhất tại tiết diện B:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{1(600)}{2.289} 11,96 = 12,41 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị tại C:

$$y_C = 0,84(11,96) = 10,05 \text{ cm}$$

Trong trường hợp này, ứng suất giảm nhưng chuyển vị tăng so với khi đặt lò xo ở đầu tự do.

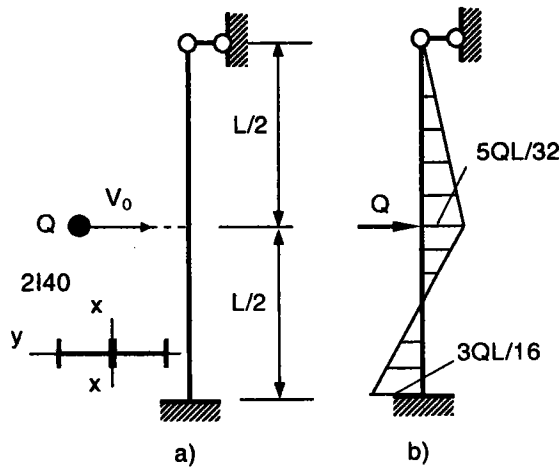
**Ví dụ 13.7** Một cột cao  $L = 10\text{m}$  bằng thép có tiết diện ghép bằng 2I-40 chịu va chạm ngang do một vật nặng  $Q = 60\text{kN}$  chuyển động với vận tốc  $3,6\text{km/h}$  (H.13.23a). Không kể trọng lượng bản thân, tính ứng suất lớn nhất. Nếu đặt thêm một trọng lượng  $P = 200\text{kN}$  tại tiết diện va chạm thì ứng suất lớn nhất là bao nhiêu.

**Giải** Tra bảng quy cách thép hình, ta tính được các đặc trưng hình học của tiết diện ghép chồng 2I-40 như sau:

$$I_x = 94980 \text{ cm}^4; \quad W_x = 2374,5 \text{ cm}^3$$

$$V_0 = 3,6 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s}$$

Không kể trọng lượng bản thân và không có trọng lượng P.



**Hình 13.23** a) Thanh chịu va chạm ngang  
b) Trọng lượng  $Q$  tác dụng tĩnh theo phương ngang

Chuyển vị ngang tại điểm va chạm do  $Q$  tác dụng tĩnh theo phương ngang là:

$$y_t = \frac{7QL^3}{768EI_x} = \frac{7(60)1000^3}{768(2)10^4(94980)} = 0,29 \text{ cm}$$

Hệ số động:

$$K_d = \frac{V_0}{\sqrt{gy_t}} = \frac{100}{\sqrt{1000(0,29)}} = 5,87$$

Ứng suất lớn nhất tại tiết diện ngàm:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x,Q,\max}}{W_x} K_d = \frac{3(60)10(100)}{16(2374,5)} 5,87 = 4,73(5,87) = 27,8 \text{ kN/cm}^2$$

Khi đặt thêm một trọng lượng  $P = 200 \text{ kN}$  tại tiết diện va chạm thì hệ số động sẽ là:

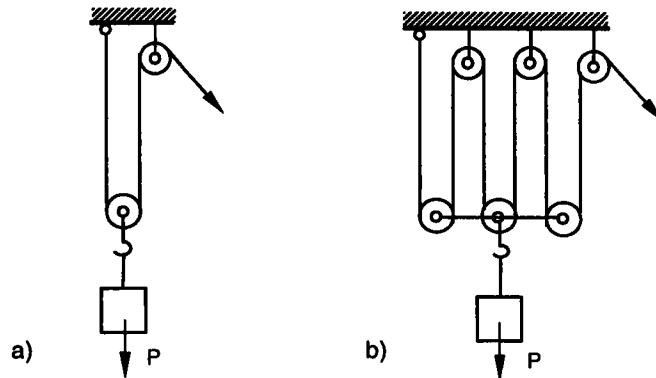
$$K_d = \frac{V_0}{\sqrt{gy_t(1 + P/Q)}} = \frac{100}{\sqrt{(1000)0,29(1 + 200/100)}} = 3,4$$

Ứng suất lớn nhất tại tiết diện ngàm:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x,Q,\max}}{W_x} K_d = 4,73(3,4) = 16,08 \text{ kN/cm}^2$$

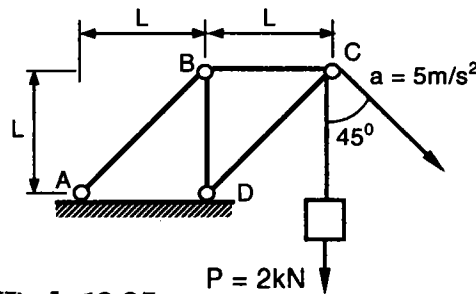
### 13.7 BÀI TẬP CHƯƠNG 13

- 13.1** Một vật nặng  $P$  được nâng lên cao bằng hệ thống ròng rọc đơn giản như trên hình 13.24a. Nếu kéo dây cáp với gia tốc đều  $a$ , tính lực căng trên dây cáp. Nếu dùng hệ thống ba cặp ròng rọc và cũng kéo dây với gia tốc  $a$  thì lực căng là bao nhiêu?



Hình 13.24

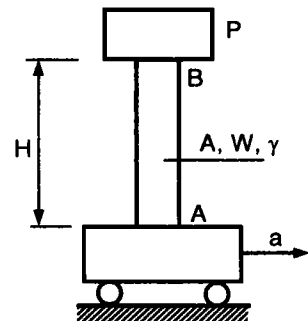
- 13.2** Một kết cấu nâng vật nặng  $P$  chuyển động lên với gia tốc  $a$  (H.13.25). Tính nội lực phát sinh trong các thanh AB, BC và CD.



Hình 13.25

- 10.3** Một trụ  $AB$  có chiều cao  $H$ , diện tích mặt cắt ngang là  $F$ , môđun chống uốn  $W$ , trọng lượng riêng là  $\gamma$  mang một vật nặng  $P$ . Trụ được gắn chặt vào một bộ vận chuyển theo phương ngang với gia tốc  $a$  (H.13.26).

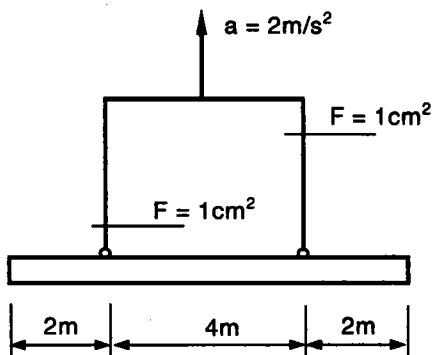
Xem trụ bị ngâm tại tiết diện  $A$  vào bộ, xác định ứng suất pháp  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  tại mặt cắt nguy hiểm của trụ.



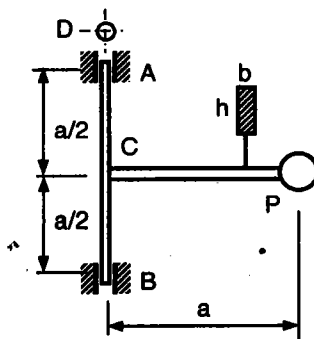
Hình 23.26



13.4 Xác định ứng suất pháp lớn nhất trong dây cáp và trong dầm I-24 do tác dụng đồng thời của trọng lực và lực quán tính khi hệ được kéo lên với gia tốc  $a$  (H.13.27).



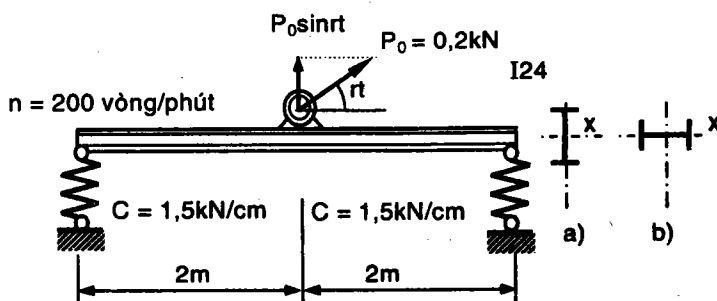
Hình 13.27



Hình 13.28

13.5 Một trục tiết diện tròn  $AB$  đường kính  $D$  mang một thanh  $CD$  tiết diện chữ nhật  $b.h$ , đầu thanh  $CD$  có một vật nặng trọng lượng  $P$ , hệ quay quanh trục  $AB$  với vận tốc  $n = 210$  vòng/phút (H.13.28). Tính ứng suất lớn nhất trong thanh  $CD$  và trục  $AB$ . Cho:  $a = 1m$ ;  $D = 4cm$ ;  $h = 2b = 6cm$ ;  $P = 0,1kN$ . Bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ.

13.6 Một dầm đơn giản mặt cắt hình chữ  $I$  số 40 dài  $8m$  mang một trọng lượng  $20kN$  ở giữa nhịp. Tính tần số riêng  $\omega$  của hệ khi có kể và khi không kể đến trọng lượng dầm.

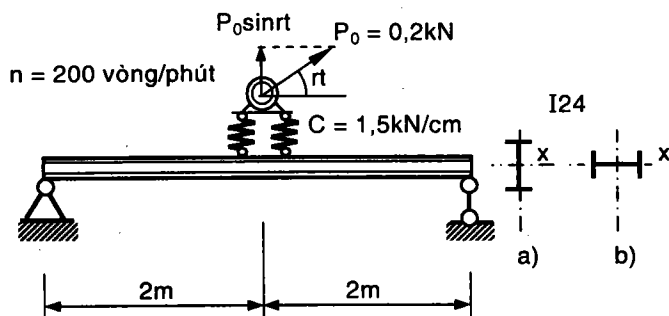


Hình 13.29

13.7 Một dầm thép I24 mang một mô-tơ nặng  $2kN$  tốc độ 200 vòng/phút, lực quán tính do khối lượng lệch tâm là  $0,2kN$

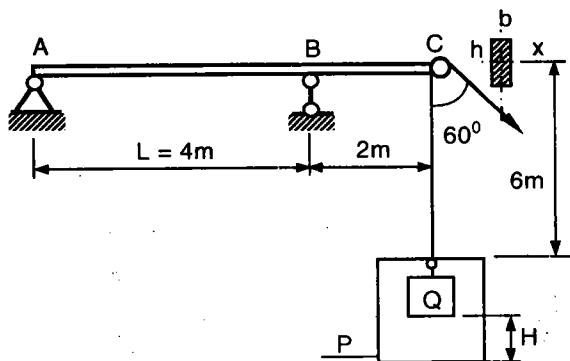
(H.13.29). Bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm và lò xo, xác định ứng suất động lớn nhất trong dầm khi tiết diện dầm đặt theo phương đứng và phương ngang như ở a) và b).

- 13.8** Giả sử hai gối tựa lò xo trên dầm ở hình 13.29 được thay bằng gối tựa cứng và đặt hai lò xo dưới đế mô-tơ như ở hình 13.30. Tính lại ứng suất và độ võng lớn nhất trong dầm theo cả hai trường hợp như trên. Cho  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .



**Hình 13.30**

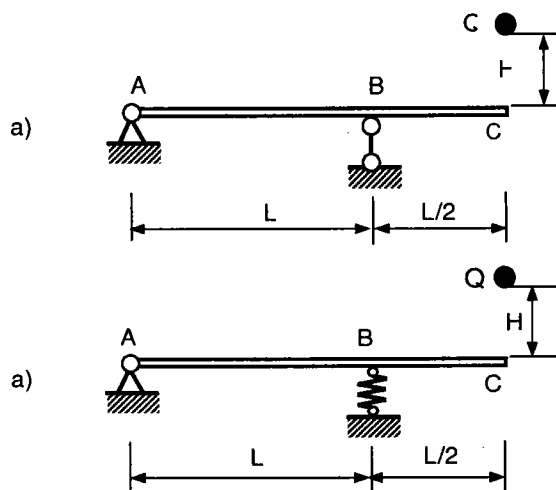
- 13.9** Một dầm nút thừa bằng gỗ tiết diện chữ nhật  $bh = 12,24 \text{ cm}^2$ ,  $L = 4 \text{ m}$ ,  $E_{gỗ} = 10^3 \text{ kN/cm}^2$ , ở đầu C của dầm có gắn một ròng rọc để làm tời kéo một thùng trọng lượng  $P$ . Trong thùng có treo một vật nặng  $Q$  (H.13.31). Hãy xét hai trường hợp:



**Hình 13.31**

- a) Vật nặng  $P$  được treo trong thùng và thùng được kéo lên với gia tốc  $a = 2 \text{ m/s}^2$ . Bỏ qua trọng lượng dầm, dây và ròng rọc, tính ứng suất lớn nhất của dầm. Cho  $P = 0,5 \text{ kN}$ ;  $Q = 1 \text{ kN}$ .

b) Giả sử khi chuyển động với gia tốc  $a = 2m/s^2$  vật nặng  $P$  bị rơi xuống đáy thùng. Xem thùng tuyệt đối cứng, tính lại ứng suất của dầm. Cho  $H = 0,4m$ , chiều dài dây tính từ ròng rọc đến thùng khi vật  $Q$  bị rơi là  $6m$ , diện tích tiết diện dây là  $A = 2cm^2$  và môđun đàn hồi của dây là  $E = 2.10^4 kN/cm^2$ .



Hình 13.32

**13.10** Một trọng lượng  $Q = 0,5kN$  rơi từ một độ cao  $H = 10cm$  xuống đầu  $C$  của một dầm tiết diện chữ nhật  $bh = 20 \times 40cm^2$ ,  $L = 4m$  (H.13.32a).

Tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm.

Nếu thay gối tựa  $B$  bằng một lò xo có đường kính  $D = 100mm$ , đường kính sợi thép  $d = 10mm$ , số vòng làm việc  $n = 10$  (H.13.32b). Tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm.

Cho  $E_{dầm} = 2.10^4 kN/cm^2$ ,  $G_{lò xo} = 8.10^3 kN/cm^2$ .

## TÍNH ĐỘ BỀN THEO TRẠNG THÁI GIỚI HẠN

### 14.1 KHÁI NIỆM CHUNG

Trong các chương trước đây, việc tính toán độ bền của các cấu kiện cơ bản dựa trên việc đánh giá sức chịu của vật liệu tại một điểm nguy hiểm. Theo quan điểm này, trạng thái nguy hiểm tại một điểm xảy ra khi ứng suất cục bộ tại đó đạt tới giá trị nguy hiểm: đó là giới hạn chảy dẻo (đối với vật liệu dẻo) và giới hạn bền (đối với vật liệu giòn); trạng thái của phần vật liệu còn lại không được xét đến. Để thiên về an toàn, người ta đưa vào hệ số an toàn  $n$  và khi đó điều kiện bền của thanh là ứng suất lớn nhất trong thanh không được vượt qua trị số ứng suất cho phép, mà trị số này có thể được xác định như sau:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}; \quad [\tau] = \frac{\tau_0}{n} \quad (14.1)$$

trong đó:  $\sigma_0, \tau_0$  - ứng suất nguy hiểm;  $n$  - hệ số an toàn.

Ta gọi phương pháp tính độ bền như trên là phương pháp tính độ bền theo *ứng suất cho phép* (ÚSCP). Như thế rõ ràng theo phương pháp này, vật liệu hoàn toàn làm việc trong giai đoạn đàn hồi.

Tuy nhiên, khi sự phân bố ứng suất không đều trên mặt cắt ngang, chẳng hạn như trong trường hợp thanh chịu uốn và thanh chịu xoắn, trong các kết cấu siêu tĩnh làm bằng vật liệu dẻo, việc ứng suất cục bộ đạt đến trạng thái chảy dẻo tại một số nơi trong kết cấu cũng chưa chắc đã gây nguy hiểm cho toàn bộ kết cấu. Do vậy, người ta thấy cần thiết phải tìm một phương pháp mới để đánh giá độ bền của kết cấu ở *trạng thái giới hạn* (TTGH).

TTGH của kết cấu là trạng thái mà khi đó kết cấu mất khả năng chịu đựng các tác nhân bên ngoài hoặc không còn đáp ứng các yêu cầu để kết cấu làm việc bình thường.

*Ta phân biệt ba loại TTGH:*

**TTGH I**, theo khả năng chịu lực (độ bền, độ ổn định, độ chịu mỏi). Khi kết cấu đạt đến trạng thái sao cho kết cấu đó mất khả năng chịu tải bên ngoài hoặc kết cấu tồn tại những ứng suất dư sao cho không còn đáp ứng các yêu cầu để khai thác.

**TTGH II**, theo sự phát triển của biến dạng dư gây ra bởi các tải trọng tĩnh hoặc động sao cho biến dạng không thuận nghịch phát triển quá mức hoặc dao động với biên độ nguy hiểm, không đáp ứng được yêu cầu khai thác.

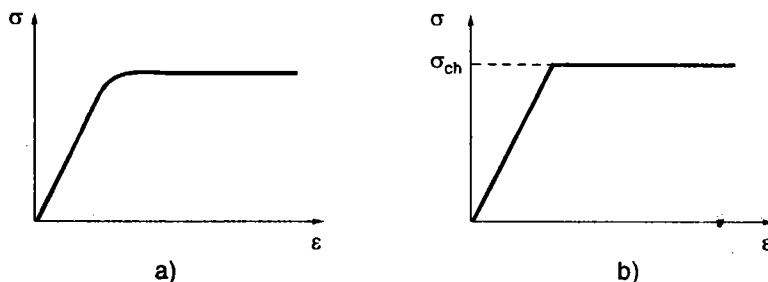
**TTGH III**, theo sự hình thành và phát triển của các vết nứt, khi kết cấu có quá nhiều vết nứt không thể khai thác được mặc dù vẫn bảo đảm độ bền và độ ổn định.

Các phương pháp tính toán theo trạng thái giới hạn hiện nay được phát triển rộng rãi cho phép tận dụng được khả năng làm việc của vật liệu và tiết kiệm được trọng lượng bản thân.

Trong phạm vi giáo trình này ta khảo sát việc tính toán độ bền theo TTGH I với giả thiết vật liệu dẻo tuyệt đối có thêm chảy dẻo trên giản đồ kéo, nén và cắt thuần túy. Nhằm mục đích đơn giản tính toán, dạng của biểu đồ quan hệ ứng suất - biến dạng thực (H.14.1a) được sơ đồ hóa sao cho đoạn thẳng diễn tả định luật Hooke biến đổi trực tiếp thành đường thẳng nằm ngang không qua giai đoạn trung gian. Như vậy, ta chấp nhận giới hạn đàn hồi trùng với giới hạn chảy dẻo. Chiều dài của đoạn nằm ngang không giới hạn, hay nói khác đi, ta giả sử vật liệu dẻo lý tưởng không củng cố. Giản đồ như thế gọi là *giản đồ Prandtl* (H.14.1b).

Giả sử có một kết cấu chịu tải trọng  $P$ . Tải trọng tương ứng với kết cấu ở trạng thái nguy hiểm gọi là *tải trọng giới hạn*  $P_{gh}$ . Nếu gọi  $n$  là hệ số an toàn khi tính theo trạng thái giới hạn, khi đó độ bền được tính theo công thức:

$$P_{\max} \leq [P] = \frac{P_{gh}}{n} \quad (14.2)$$



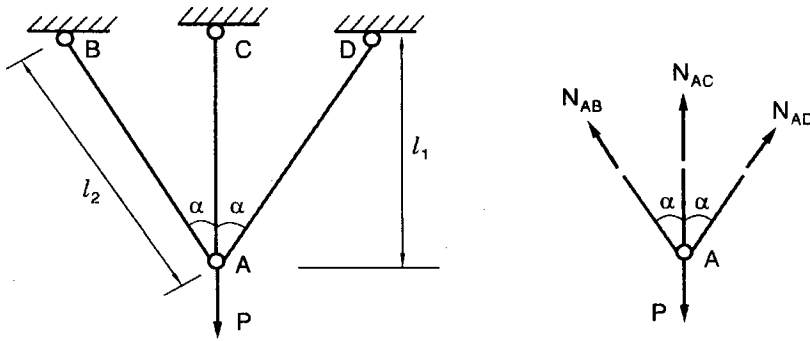
**Hình 14.1** Quan hệ ứng suất biến dạng  
a) Giản đồ thật; b) Giản đồ Prandtl

## 14.2 TÍNH HỆ THANH CHỊU KÉO NÉN ĐÚNG TÂM

Khi thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm, ứng suất phân bố đều trên mặt cắt ngang của thanh và có trị số  $\sigma = N/A$ . Khi lực dọc đạt tới trị số giới hạn  $N_{ch} = \sigma_{ch}A$  thì ứng suất tại mọi điểm trên mặt cắt ngang đạt tới ứng suất chảy,  $\sigma_{ch}$ , và khi đó thanh đạt tới trạng thái giới hạn. Do vậy, với một thanh chịu kéo (nén) đúng tâm thì cách tính theo ứng suất cho phép và cách tính theo trạng thái giới hạn cho cùng trị số tải trọng giới hạn  $N_{ch}$ .

Hệ thanh tĩnh định là hệ có vừa đủ số thanh liên kết, vì vậy khi một thanh mất khả năng chịu lực, bị loại bỏ thì hệ sẽ thiếu liên kết và trở nên biến hình, chuyển sang trạng thái giới hạn, mất khả năng chịu lực. Như vậy với hệ thanh tĩnh định chịu kéo (nén) đúng tâm thì cách tính theo ÚSCP và TTGH cho cùng kết quả.

Hệ thanh siêu tĩnh có số lượng thanh liên kết nhiều hơn số lượng cần thiết, vì vậy khi một thanh bị chảy dẻo thì hệ có thể chưa bị mất khả năng chịu lực, tải trọng tác dụng vẫn có thể tăng lên nữa, khi đó tải trọng trong các thanh bị chảy dẻo vẫn giữ nguyên ở trị số  $N_{ch}$  và nội lực trong các thanh khác lần lượt tăng lên và chảy dẻo cho đến khi kết cấu trở thành biến hình. Điều này có thể minh họa dễ dàng thông qua ví dụ bài toán ba thanh chịu kéo bởi lực  $P$  như hình vẽ dưới đây (H.14.2) trong đó các thanh đều có cùng diện tích mặt cắt ngang và cùng làm bằng vật liệu dẻo có ứng suất chảy dẻo  $\sigma_{ch}$ .



Hình 14.2

Giải bài toán siêu tĩnh ở trạng thái đàn hồi ta được kết quả lực dọc trong các thanh như sau:

$$N_{AC} = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad (14.3)$$

$$N_{AB} = N_{AD} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} P \quad (14.4)$$

Đương nhiên, chúng ta luôn luôn có  $N_{AC} > N_{AB} = N_{AD}$ , hay nói khác đi nội lực trong thanh giữa là lớn nhất và do đó ứng suất cực đại sẽ xảy ra trong thanh giữa và có giá trị bằng:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{AC}}{A} = \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{P}{A} \quad (14.5)$$

Thanh này sẽ chảy dẻo trước tiên khi ứng suất trong thanh AC đạt tới giá trị  $\sigma_{ch}$  tương ứng với nội lực:

$$N_{AC} = N_{ch} = \sigma_{ch} A \quad (14.6)$$

và tải trọng tác dụng có trị số:

$$P_{1gh} = (1 + 2 \cos^3 \alpha) \sigma_{ch} A \quad (14.7)$$

Trong khi đó, nội lực trong hai thanh AB và AD là:

$$N_{AB} = N_{AD} = \frac{P - \sigma_{ch} A}{2 \cos \alpha} \quad (14.8)$$

và chúng vẫn còn ở giai đoạn đàn hồi, hệ chưa bị biến hình nên vẫn còn chịu được tải.

Tiếp tục tăng tải cho đến khi hai thanh AB và AD bị chảy dẻo tương ứng với tải trọng giới hạn  $P_{gh}$ ; khi đó ta có:

$$N_{AB} = N_{AD} = \sigma_{ch} A = \frac{P_{gh} - \sigma_{ch} A}{2 \cos \alpha} \quad (14.9)$$

từ đó suy ra tải trọng giới hạn là:

$$P_{gh} = (1 + 2 \cos \alpha) \sigma_{ch} A \quad (14.10)$$

Nếu gọi  $n$  là hệ số an toàn thì tải trọng cho phép theo trạng thái giới hạn như sau:

$$[P] = \frac{P_{gh}}{n} = (1 + 2 \cos \alpha) [\sigma] A \quad (14.11)$$

Nếu tính theo USCP thì tải trọng cho phép là:

$$[P] = \frac{P_{1gh}}{n} = (1 + 2 \cos^3 \alpha) [\sigma] A \quad (14.12)$$

So sánh tải trọng cho phép theo hai phương pháp, ta thấy tải trọng cho phép tính theo TTGH lớn hơn. Cụ thể khi  $\alpha = 30^\circ$  thì tải trọng cho phép tính theo TTGH lớn hơn tải trọng cho phép tính theo USCP 19%

## 14.3 TÍNH DÂM CHỊU UỐN PHẪNG

### 14.3.1 Dâm chịu uốn thuần túy

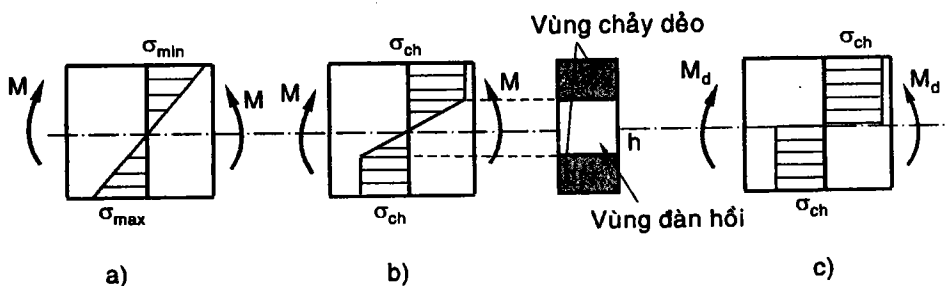
Dâm chịu uốn thuần túy khi trên mọi mặt cắt ngang chỉ tồn tại thành phần mômen uốn.

Trong giai đoạn đàn hồi, ứng suất pháp tại một điểm trên mặt cắt ngang tuân theo quy luật bậc nhất theo chiều cao tiết diện và tỷ lệ với khoảng cách từ đường trung hòa đến điểm cần tính ứng suất. Như thế, ứng suất cực đại xảy ra tại thớ các xa đường trung hòa nhất và có giá trị:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{M_x}{I_x} |y|_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \quad (14.13)$$



Giai đoạn đàn hồi chấm dứt khi ứng suất tại mép tiết diện đạt trị số  $\sigma_{ch}$ , tương ứng với mômen *giới hạn đàn hồi*  $M_{dh} = \sigma_{ch} W_x$ . Khi đó, thanh chưa bị phá hoại và vẫn còn chịu được mômen uốn lớn hơn  $M_{dh}$ . Khi tăng tải trọng, những điểm đạt ứng suất chảy dẻo ở mép trên và mép dưới không tăng được nữa và vật liệu ở những nơi này có biến dạng dẻo. Khi đó, những điểm ở bên trong, vốn còn ở đàn hồi, sẽ lần lượt bị chảy dẻo cho đến khi toàn bộ tiết diện bị chảy dẻo. mômen nội lực trên mặt cắt lúc này là mômen dẻo  $M_d$ , và ứng suất trên toàn mặt cắt là  $\sigma_{ch}$  chia làm hai miền: *miền kéo* và *miền nén*. Đường phân cách hai miền kéo và nén là *đường trung hòa chảy dẻo*. Nói chung, đường trung hòa chảy dẻo không trùng với đường trung hòa đàn hồi.



**Hình 14.3** Quy luật phân bố của ứng suất pháp trên mặt cắt ngang của thanh chịu uốn khi vật liệu  
 a) Ở trạng thái đàn hồi  
 b) Vật liệu ở trạng thái đàn dẻo  
 c) Vật liệu ở trạng thái dẻo hoàn toàn

Trị số của mômen uốn dẻo phải cân bằng với mômen của các ứng suất:

$$M_d = \int_A y \sigma dA = \int_{A_k} y \sigma_{ch} dA + \int_{A_n} y \sigma_{ch} dA = \sigma_{ch} \left( \int_{A_k} y dA + \int_{A_n} y dA \right)$$

hoặc:  $M_d = \sigma_{ch} W_d$

với:  $W_d = |S_{x_l}^{(k)}| + |S_{x_l}^{(n)}|$

trong đó:  $W_d$  - mômen kháng dẻo;

$S_{x_l}^{(k)}$  và  $S_{x_l}^{(n)}$  - lần lượt là các mômen tĩnh đối với trục trung hòa của phần diện tích chịu kéo và phần diện tích chịu nén.

Vị trí trục trung hòa khi uốn  $x_l$  được xác định từ điều kiện lực dọc bằng không:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA = \int_{A_k} \sigma_{ch} dA + \int_{A_n} -\sigma_{ch} dA \\ &= \sigma_{ch} \left( \int_{A_k} dA - \int_{A_n} dA \right) = 0 \end{aligned}$$

từ đó suy ra:  $A_k = A_n$

nghĩa là: Đường trung hòa chảy dẻo  $x_l$  là đường vuông góc với mặt phẳng uốn và chia đôi diện tích tiết diện. Trục  $x_l$  chỉ trùng với trục trung tâm  $x$  khi tiết diện đối xứng qua trục  $x$  như trong trường hợp của tiết diện chữ nhật, hình tròn, hình chữ I...

Khi đó, ta có thể viết:

$$W_d = 2 S_{\max}$$

với  $S_{\max}$  mômen tĩnh của nửa tiết diện đối với trục trung hòa.

Tỉ số: 
$$\alpha = \frac{M_d}{M_{dh}} = \frac{W_d}{W_x}$$

đặc trưng cho độ gia tăng an toàn của dầm khi tính theo trạng thái giới hạn.

Trong trường hợp dầm có tiết diện chữ nhật

$$\alpha = \frac{W_d}{W_x} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = 1,5$$

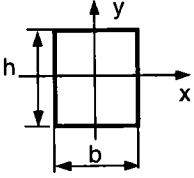
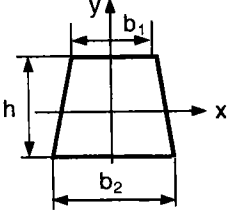
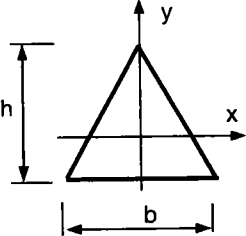
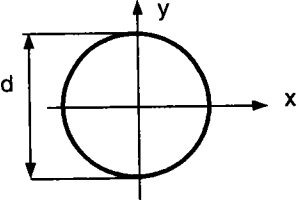
Đối với tiết diện chữ I, tỉ số này vào khoảng:

$$\alpha = \frac{W_d}{W_x} = (1,15 \div 1,17)$$

Đối với các tiết diện tròn:  $\alpha \approx 1,7$

Bảng 14.1 cung cấp các công thức tính mômen kháng dẻo cho một số tiết diện dầm.

**Bảng 14.1** Mômen kháng dẻo cho một số tiết diện dầm

Tiết diện	mômen kháng dẻo
	$W_d = \frac{bh^2}{4}; \quad W_d = 1,5W_x$
	$W_p = \frac{h^2}{3(b_2 - b_1)^2} \left[ b_1^3 + b_2^3 - (b_1^2 + b_2^2) \sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \right]$
	$W_d = \frac{bh^2}{6} (2 - \sqrt{2}) \approx 0,0977bh^2$ $W_d \approx 2,36 W_x$
	$W_d = \frac{d^3}{6}; \quad W_d = 1,7 W_x$

**14.3.2 Thanh chịu uốn ngang phẳng**

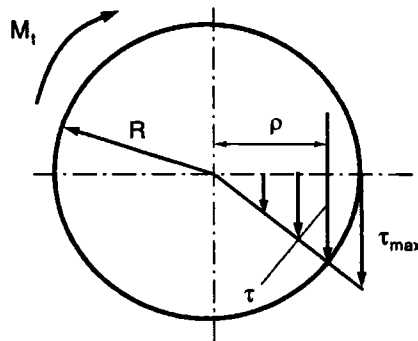
Khi thanh chịu uốn ngang phẳng ngoài ứng suất pháp do mômen uốn còn có ứng suất tiếp do lực cắt và bài toán sẽ phức tạp hơn. Trong trường hợp tiết diện chữ I tựa đơn chịu tác dụng của tải trọng tập trung  $P$  ở giữa dầm, thực tế các ứng suất pháp của dầm không thể hoàn toàn đạt tới trạng thái dẻo như trường hợp chịu uốn thuần túy phẳng, do vậy trên tiết diện luôn tồn tại một bộ phận vật liệu còn nằm trong giới hạn đàn hồi.

### 14.4 THANH TRÒN CHỊU XOẮN

Đối với những thanh mặt cắt ngang tròn đặc chịu xoắn thuần túy, trong giai đoạn đàn hồi, ứng suất tiếp tại một điểm ở cách tâm O của mặt cắt ngang một khoảng  $\rho$  (H.14.4) được tính bởi công thức:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_t}{I_p} \rho \quad (14.14)$$

với  $M_t$  là mômen xoắn tại mặt cắt ngang đang xét,  $I_p$  là mômen quán tính độc cực của tiết diện.



**Hình 14.4** Sự phân bố của ứng suất đàn hồi trên mặt cắt ngang của thanh tròn chịu xoắn

Ứng suất cực đại xảy ra trên biên, tương ứng với  $\rho = R$ , cho bởi công thức:

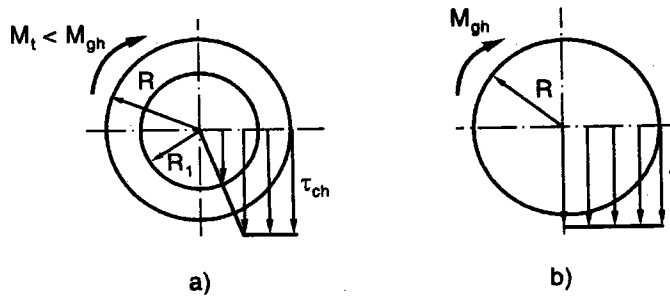
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \quad (14.15)$$

trong đó  $W_p$  là mômen chống xoắn.

Tính theo ứng suất cho phép, thanh tròn chịu xoắn thuần túy sẽ đạt trạng thái nguy hiểm khi ứng suất tiếp trên biên đạt tới giới hạn chảy  $\tau_{ch}$  thứ ngoài cùng bị chảy dẻo, tương ứng với mômen xoắn đạt trị số:

$$M_t = M_{ch} = \tau_{ch} W_p \quad (14.16)$$

Lúc này các thớ trên biên bị biến dạng dẻo, trong khi các thớ còn lại vẫn còn ở trạng thái đàn hồi. Ta nói thanh chuyển sang trạng thái đàn dẻo.



Hình 14.5 Sự phát triển của ứng suất tiếp

Nếu tiếp tục gia tăng mômen xoắn ngoại lực, lần lượt các thớ tiến dần về phía tâm đạt trạng thái chảy dẻo như hình 14.5a. Thanh vẫn còn khả năng chịu mômen xoắn ngoại lực cho đến khi toàn bộ mặt cắt ngang bị chảy dẻo. Ta nói mặt cắt ngang thanh đạt tới trạng thái giới hạn như hình 14.5b và mômen xoắn đạt tới trị số giới hạn  $M_{gh}$ :

$$M_{gh} = \int_A \rho \cdot dA \cdot \tau_{ch} = \tau_{ch} \cdot 2\pi \int_0^{d/2} \rho^2 d\rho \quad (14.17)$$

hay: 
$$M_{gh} = \tau_{ch} \cdot \frac{\pi d^3}{12} \quad (14.18)$$

Đại lượng: 
$$W_{p(pl)} = \frac{\pi d^3}{12} \quad (14.19)$$

được gọi là *mômen chống xoắn dẻo*. Khi đó ta có thể viết:

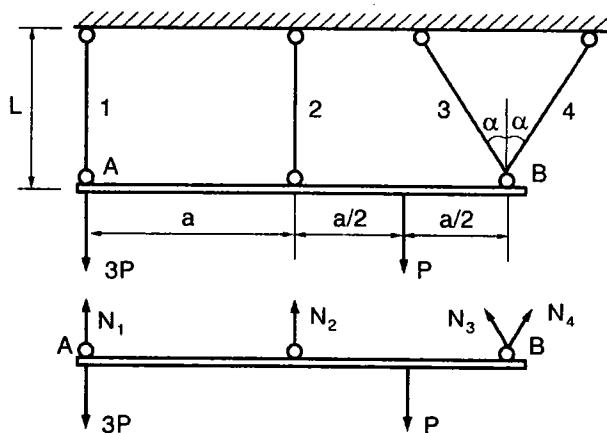
$$M_{gh} = \tau_{ch} \cdot W_{p(pl)} \quad (14.20)$$

Tỷ số giữa mômen giới hạn trên mômen chảy dẻo có thể được viết:

$$\frac{M_{gh}}{M_{ch}} = \frac{W_{p(pl)}}{W_p} = \frac{\pi d^3}{12} \frac{16}{\pi d^3} = 1,333$$

hay 
$$M_{gh} = 1,333 M_{ch}$$

**Ví dụ 14.1** Cho hệ thanh làm bằng thép treo dầm cứng AB chịu lực như hình 14.6. Cho biết  $\alpha = 30^\circ$ ;  $A_1 = 2A$ ;  $A_2 = 3A$ ;  $A_3 = A_4 = A$ . Tính  $P_{gh}$ .



Hình 14.6

**Giải** Hệ thanh đã cho là hệ siêu tĩnh bậc 1. Dưới tác dụng của tải trọng, lực dọc trong các thanh có trị số khác nhau, ngoại trừ hai thanh 3 và 4 bằng nhau do đối xứng. Ngoại lực tăng lên cho đến khi thanh có nội lực lớn nhất bị chảy dẻo. Hệ thống sẽ giảm bậc siêu tĩnh, trở thành hệ tĩnh định. Lúc này hệ vẫn chưa bị phá hoại mà vẫn còn chịu thêm lực cho đến khi có ít nhất một thanh nữa bị chảy dẻo. Có thể có các trường hợp sau đây xảy ra:

- Các thanh 1 và 2 chảy dẻo
- Các thanh 1, 3 và 4 bị chảy dẻo
- Các thanh 2, 3 và 4 bị chảy dẻo.

Ta tính tải trọng ứng với mỗi trường hợp có thể xảy ra. Tải trọng nhỏ nhất sẽ là tải trọng giới hạn cần tìm.

*Trường hợp 1:* thanh 1 và 2 bị chảy dẻo nên  $N_1 = \sigma_{ch} \cdot A_1$ ;  $N_2 = \sigma_{ch} \cdot A_2$ . Lấy tổng mômen các lực đối với điểm B bằng không ta tìm được:

$$3P_1 \times 2a + P_1 \times \frac{a}{2} - \sigma_{ch} \cdot A_1 \times 2a - \sigma_{ch} \cdot A_2 \times a = 0$$

Phương trình này cho ta:  $P_1 = 1,077\sigma_{ch} \cdot A$

*Trường hợp 2:* thanh 1, 3 và 4 bị chảy dẻo nên  $N_1 = \sigma_{ch} \cdot A_1$ ;  $N_3 = N_4 = \sigma_{ch} \cdot A_3$ . Lấy tổng mômen các lực đối với điểm C bằng không ta tìm được:

$$3P_2 \times a - P_2 \times \frac{a}{2} - \sigma_{ch} \cdot A_1 \times a + 2\sigma_{ch} \cdot A_3 \cos \alpha \times a = 0$$

Phương trình này cho ta:  $P_2 = 0,107\sigma_{ch} \cdot A$

*Trường hợp 3:* thanh 2, 3 và 4 bị chảy dẻo nên  $N_2 = \sigma_{ch} \cdot A_2$ ;  $N_3 = N_4 = \sigma_{ch} \cdot A_3$ . Lấy tổng mômen các lực đối với điểm A bằng không ta tìm được:

$$P_3 \times \frac{3a}{2} - \sigma_{ch} \cdot A_2 \times a - 2\sigma_{ch} \cdot A_3 \cos \alpha \times a = 0$$

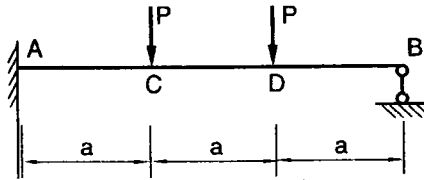
Phương trình này cho ta:  $P_2 = 3,0155\sigma_{ch} \cdot A$

So sánh các tải trọng trong ba trường hợp ta thấy trường hợp 2 là trường hợp giới hạn. Vậy:

$$P_{gh} = \min(P_1, P_2, P_3) = 0,107\sigma_{ch} \cdot A$$

**Ví dụ 14.2** Một dầm AB chịu lực như trên hình 14.7. Tính  $P_{gh}$  trong hai trường hợp:

a)  $P_1 = P_2 = P$ ; b)  $P_2 = \frac{1}{2}P_1$

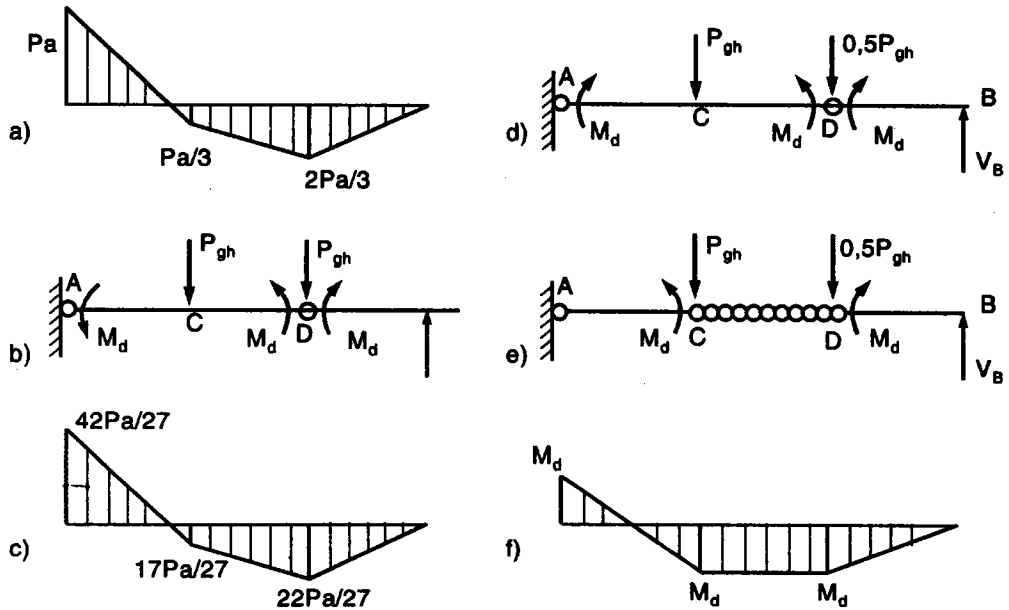


**Hình 14.7**

**Giải** Giải hệ siêu tĩnh ta được:

$$V_B = \frac{4}{27}P_1 + \frac{14}{27}P_2$$

a) *Trường hợp 1:*  $P_1 = P_2 = P$



Hình 14.8

Ta vẽ được biểu đồ mômen uốn như trên hình 14.8a. Như vậy khớp dẻo sẽ hình thành tại A với mômen dẻo âm. Dầm đến trạng thái giới hạn khi ở D hình thành khớp dẻo với mômen dẻo dương (H.14.8b). Lấy tổng mômen các lực đối với A bằng không ta có:

$$V'_B \times 3a - P_{gh} \times 2a - P_{gh} \times a + M_d = 0$$

Do sự cân bằng của dầm DB ta suy ra:

$$V'_B = \frac{M_d}{a}$$

Thay vào phương trình trên ta được:

$$P_{gh} = \frac{4M_d}{3a}$$

b) Trường hợp 2:  $P_2 = \frac{1}{2}P_1$

Ta vẽ được biểu đồ mômen uốn như trên hình 14.8c. Như vậy khớp dẻo sẽ hình thành đầu tiên tại A và sau đó tại C và D (H.14.8d).



Cũng giống như trên giả sử khớp dẻo hình thành ở D. Xét sự cân bằng của dầm AB ở trạng thái giới hạn ta được:

$$P_{gh} = \frac{2M_d}{a}$$

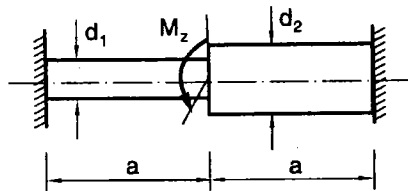
Khi đó mômen uốn tại C cân bằng:

$$M_C = V_B \times 2a - \frac{1}{2} P_{gh} \times a = \frac{M_d}{a} \times 2a - \frac{1}{2} \frac{2M_d}{a} \times a = M_d$$

hay  $M_C = M_d$

Điều này cũng chứng tỏ ở trạng thái giới hạn, đoạn CD bị uốn thuần túy và chảy dẻo trên cả đoạn như hình 14.8f.

**Ví dụ 14.3** Trục tròn AB mặt cắt thay đổi chịu mômen xoắn  $M_z$  như hình 14.9. Tính mômen giới hạn đàn hồi  $M_{zdh}$  và mômen giới hạn dẻo  $M_{zgh}$  của ngẫu lực đặt vào trục. Biết rằng  $d_1 = d$ ;  $d_2 = 2d$ .



**Hình 14.9**

**Giải** Giải bài toán xoắn đàn hồi siêu tĩnh ta thu được mômen xoắn ở hai đầu đoạn trục như sau:

$$M_1 = \frac{M_z}{17}; \quad M_2 = \frac{16M_z}{17}$$

Ứng suất ở đoạn thứ hai đến giới hạn chảy đầu tiên. Do đó ta tính được mômen xoắn giới hạn chảy đàn hồi:

$$M_{zdh} = \frac{8,5}{16} \pi d^3 \tau_{ch} \tag{a}$$

Khi trục đến trạng thái giới hạn, hai đoạn trục đều bị chảy dẻo. Do sự cân bằng ta có:

$$M_{zgh} = W_{pd1}\tau_{ch} + W_{pd2}\tau_{ch} = \frac{4}{3}(W_{p1} + W_{p2})\tau_{ch} = \frac{3}{4}\pi d^3\tau_{ch}$$

Với hệ số vượt tải là 1,2, mômen làm việc bằng:

$$M_z = \frac{M_{zgh}}{1,2} = \frac{10}{16}\pi d^3\tau_{ch}$$

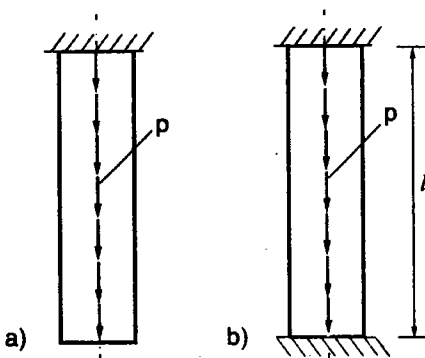
So sánh với phương trình (a) ta thấy trục làm việc ngoài giai đoạn đàn hồi. Muốn trục làm việc hoàn toàn đàn hồi hệ số vượt tải tối thiểu phải là:

$$n = \frac{M_{zgh}}{M_{zdh}} = 1,41$$

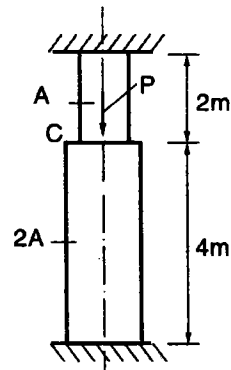
## 14.5 BÀI TẬP CHƯƠNG 14

14.1 Một thanh dài  $l$  chịu tải trọng  $p$  phân bố đều dọc trục như hình 14.10. Tính tải trọng giới hạn trong hai trường hợp:

- Thanh bị ngàm một đầu.
- Thanh bị ngàm cả hai đầu.



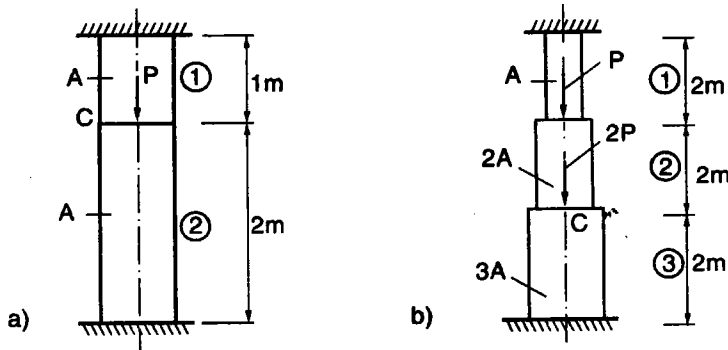
Hình 14.10



Hình 14.11

14.2 Một cột thép ngàm chặt hai đầu, có kích thước và mặt cắt ngang như hình 14.11. Tính  $P_{gh}$  và chuyển vị của mặt cắt C khi  $P$  tăng từ không đến  $P_{gh}$ . Cho biết:  $\sigma_{ch}^k = \sigma_{ch}^n = \sigma_{ch} = 240 \text{ MN/m}^2$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$ ,  $A = 20 \text{ cm}^2$ .

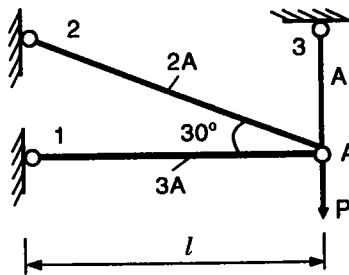
14.3 Cùng đầu đề như bài toán trên, tính cột thép vẽ ở hai hình 14.2.



Hình 14.12

14.4 Tại đầu A của hệ gồm ba thanh cùng vật liệu nhưng mặt cắt khác nhau có treo một trọng lượng P (H.14.3). Tính tải trọng giới hạn đặt vào hệ. Cho  $A = 10\text{cm}^2$ ,  $\sigma_{ch}^k = \sigma_{ch}^n = \sigma_{ch} = 240\text{MN/m}^2$ .

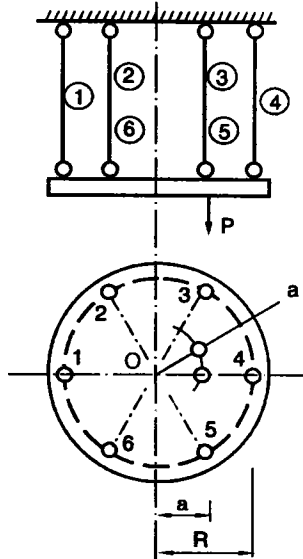
Hướng dẫn: So sánh hai phương án: hai thanh 2 và 3 chảy dẻo, hai thanh 1 và 3 chảy dẻo.



Hình 14.3

14.5 Một đĩa tròn cứng được treo bởi sáu thanh kim loại có diện tích mặt cắt ngang bằng nhau và cùng chiều dài. Điểm treo đĩa là đỉnh một hình sáu cạnh đều bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R = 1\text{m}$ . Tải trọng  $P = 24\text{kN}$  đặt cách tâm đĩa một khoảng  $a = 0,5\text{m}$ . Tính diện tích mặt cắt ngang thanh theo phương pháp trạng thái giới hạn, biết rằng giới hạn chảy của vật liệu  $\sigma_{ch} = 200\text{MN/m}^2$ , hệ số đồng nhất  $k = 0,625$ , hệ số vượt tải  $n = 1,25$ . Tính theo hai trường hợp sau:

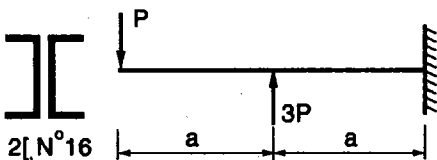
- a) Trọng lượng  $P$  đặt trên đường nối hai điểm treo đĩa.
- b) Trọng lượng  $P$  trên đường phân giác  $Oa$ .



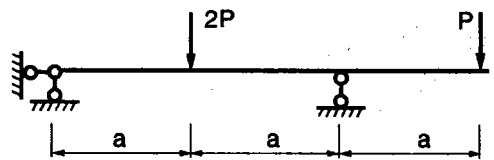
Hình 14.14

14.6 Có hai mặt cắt cùng diện tích: một mặt cắt hình vành khăn có tỷ số đường kính trong và đường kính ngoài  $\eta = d/D = 0,8$  và một mặt cắt hình tròn đặc. So sánh mômen chống xoắn đàn hồi  $W_p$  và mômen chống dẹo  $W_{pd}$  của hai hình.

14.7 Một dầm công son chịu tải trọng như trên hình 14.15. Tính tải trọng cho phép đặt vào công son theo phương pháp trạng thái giới hạn. Biết  $a = 3m$ ,  $\sigma_{ch} = 24kN/cm^2$ , hệ số đồng nhất  $k = 0,666$ .



Hình 14.15



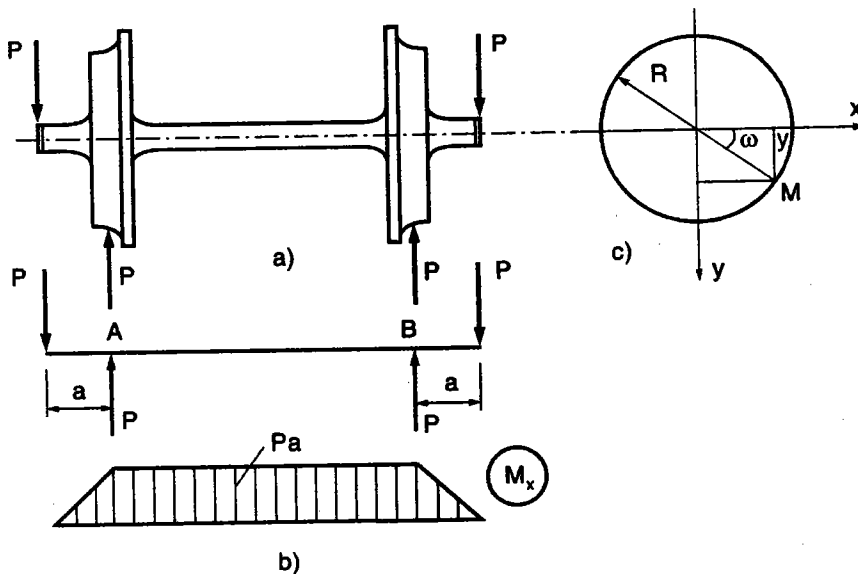
Hình 14.16

14.8 Một dầm có nút thừa  $AB$  chịu tải trọng như trên hình 14.16. Chọn mặt cắt chữ I cần thiết theo phương pháp trạng thái giới hạn. Biết  $P = 40kN$ ,  $a = 2m$ ,  $\sigma_{ch} = 24kN/cm^2$ , hệ số đồng nhất  $k = 0,833$ .

## TÍNH ĐỘ BỀN KHI ỨNG SUẤT THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN

### 15.1 KHÁI NIỆM VỀ ỨNG SUẤT THAY ĐỔI VÀ HIỆN TƯỢNG MỎI

Nhiều chi tiết máy hay bộ phận công trình, do điều kiện hoạt động và chịu lực của chúng, ứng suất bên trong là hàm số thay đổi theo thời gian. Ví dụ trường hợp chịu lực của trục bánh xe tàu hỏa (H.15.1a).



Hình 15.1

Sơ đồ tính và biểu đồ mô men uốn của trục biểu diễn như hình 15.1b. Xét ứng suất tại một điểm  $M$  nào đó nằm trên chu vi mặt cắt ngang (H.15.1c).

Trị số ứng suất tại điểm đó được tính theo công thức:

$$\sigma_M = \frac{M_x}{I_x} y$$

với  $y$  là khoảng cách từ điểm  $M$  đến trục trung hòa  $x$ .

Vì  $M_x$  không đổi (đoạn  $AB$ ) nên trục trung hòa cũng không đổi. Nếu gọi  $\omega$  là vận tốc góc của trục và giả sử ban đầu  $M$  nằm trên trục trung hòa thì góc giữa trục trung hòa  $x$  với bán kính  $OM$  sẽ là  $\omega t$ . Ta có ứng suất tại  $M$  là:

$$\sigma_M = \frac{M_x}{I_x} R \sin \omega t$$

nghĩa là ứng suất thay đổi theo thời gian  $t$ .

Đã từ lâu người ta nhận thấy nếu vật liệu làm việc dưới tác dụng của ứng suất thay đổi thì mặt dù ứng suất trong thanh còn bé so với giới hạn bền của vật liệu, thanh vẫn bị phá hỏng.

Sự phá hỏng xảy ra đột ngột, không có biến dạng dư mặc dù chi tiết làm bằng vật liệu dẻo, và *hiện tượng vật liệu bị phá hoại do ứng suất thay đổi được gọi là hiện tượng mỏi của vật liệu*.

Trước đây để giải thích hiện tượng này người ta cho rằng dưới tác dụng của ứng suất thay đổi, vật liệu bị "*mỏi mệt*" đến lúc không chịu lực được nữa thì bị phá hỏng. Ngày nay nhờ những thí nghiệm tỉ mỉ và những nghiên cứu về lý thuyết lệch mạng trong vật lý kim loại và trong cơ học phá hủy cũng như sự phát triển của vết nứt vi mô người ta đưa ra lý thuyết như sau.

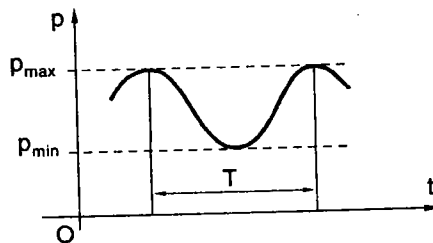
Vì một nguyên nhân nào đó, có thể vì cấu tạo của vật liệu hay do gia công, trên chi tiết máy có những vết nứt vi mô. Vết nứt đó sẽ phát triển nếu vật liệu làm việc dưới tác dụng của ứng suất thay đổi và trị số cực đại của ứng suất thay đổi đó vượt quá một giới hạn nhất định mà ta sẽ gọi là *giới hạn mỏi*. Sự phát triển đó càng ngày càng lớn cho đến khi phần diện tích còn lại của chi tiết không chịu đựng được ngoại lực nữa thì chi tiết bị phá hỏng.

Với quan niệm đó, hiện nay sự nghiên cứu về mỏi tập trung vào các mặt sau đây:

- Xác định giới hạn mỏi của các vật liệu làm việc với các giá trị ứng suất thay đổi khác nhau
- Tìm những nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi, nghĩa là tìm những nhân tố dễ làm phát sinh vết nứt vi mô
- Tìm những biện pháp nâng cao giới hạn mỏi, tức là tìm các biện pháp hạn chế sự phát sinh vết nứt vi mô.

## 15.2 PHÂN LOẠI CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA CHU TRÌNH ỨNG SUẤT

Ta gọi một *chu trình ứng suất* khi trị số ứng suất  $p$  ( $\sigma$  hay  $\tau$ ) biến thiên từ trị số cực đại sang trị số cực tiểu và trở lại trị số cực đại. Thời gian thực hiện một chu trình là một chu kỳ (H.15.2).



Hình 15.2

Qua thực tế và nhiều thí nghiệm người ta thấy các yếu tố quyết định đến độ bền của chi tiết chịu ứng suất thay đổi là những đặc trưng sau đây của một chu trình ứng suất:

- Giá trị  $p_{max}$ ,  $p_{min}$
- Giá trị của ứng suất trung bình:

$$p_{tb} = \frac{p_{max} + p_{min}}{2} \quad (15.1)$$

- Giá trị biên độ của ứng suất (hay thường gọi là *ứng suất biên độ*):

$$p_{bd} = \frac{p_{max} - p_{min}}{2} \quad (15.2)$$

- Hệ số bất đối xứng của chu trình ứng suất:

$$r = \frac{p_{min}}{p_{max}} \quad (15.3)$$

Từ đó ta phân loại các chu trình ứng suất như sau:

1- Chu trình dương:  $p_{max} > p_{min} > 0$  (luôn chịu kéo)

2- Chu trình âm:  $p_{max} < p_{min} < 0$  (luôn chịu nén)

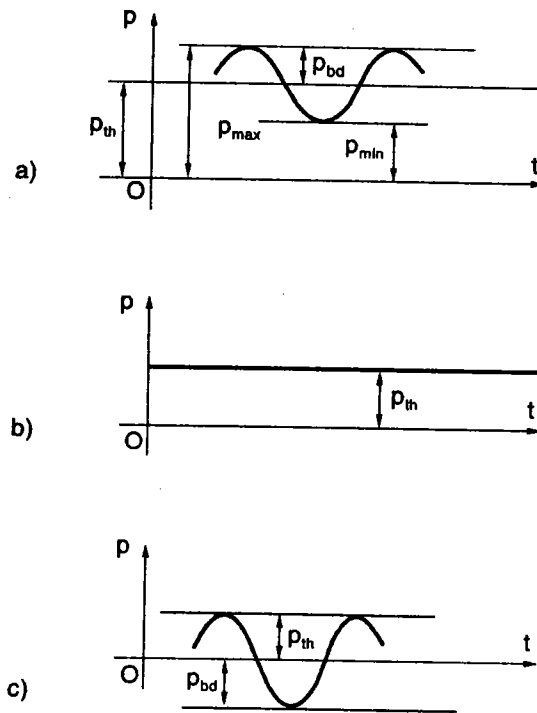
3- Chu trình đối xứng:  $p_{max} = -p_{min}$

Suy ra:  $p_{tb} = 0$  và  $r = -1$

4- Chu trình bất đối xứng:  $r$  bất kỳ

5- Chu trình mạch động khi  $r = 0$  hay  $r = \infty$

**Nhận xét:** Ta có thể xem một chu trình bất đối xứng là sự cộng tác dụng của một chu trình đối xứng với  $p_{max} = p_{bd}$  và một chu trình tĩnh với:  $p_{max} = p_{min} = p_{tb}$  (H.15.3).



**Hình 15.3** a) Chu trình bất đối xứng  
b) Chu trình tĩnh  
c) Chu trình đối xứng



## 15.3 GIỚI HẠN MỎI VÀ BIỂU ĐỒ GIỚI HẠN MỎI

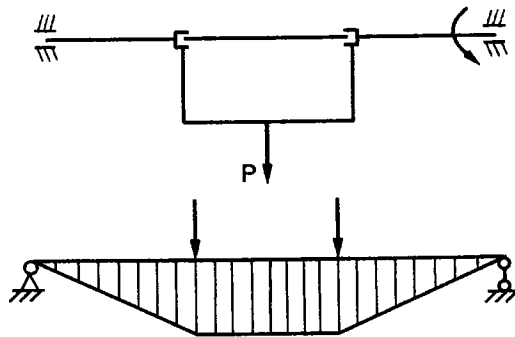
### 15.3.1 Giới hạn mỏi

Không phải bất cứ lúc nào chi tiết máy chịu ứng suất thay đổi cũng phát sinh vết nứt vi mô. Qua các thí nghiệm người ta nhận thấy khi ứng suất lớn nhất đạt đến một giá trị nào đó thì chi tiết mới phát sinh vết nứt vi mô. Chúng ta có định nghĩa sau:

*Giới hạn mỏi của vật liệu là giá trị lớn nhất của ứng suất thay đổi tuần hoàn mà vật liệu có thể chịu đựng được với một số chu trình vô hạn và không làm xuất hiện vết nứt vi mô.*

Giới hạn mỏi ký hiệu là  $p_r^m$ . Chỉ số  $r$  để chỉ hệ số bất đối xứng của chu trình ứng suất, vì với mỗi loại vật liệu và với mỗi loại chu trình ứng suất khác nhau thì giới hạn mỏi cũng khác nhau.

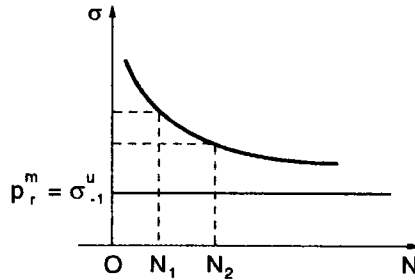
Để tìm giới hạn mỏi, người ta chế tạo ra nhiều loại máy thí nghiệm. Trên hình 15.4 trình bày sơ đồ máy thí nghiệm xác định giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng khi thanh chịu uốn thuần túy phẳng (máy Veler).



**Hình 15.4**

Quá trình thí nghiệm như sau: số lượng mẫu là  $6 + 10$  mẫu, với vật liệu và điều kiện gia công hoàn toàn như nhau. Đặt mẫu thứ nhất vào máy và cho chịu một tải trọng thích hợp, sao cho ứng suất pháp lớn nhất  $\sigma_{max}$  có giá trị từ  $0,5 + 0,6$  giới hạn bền. Sau một số vòng quay  $N_1$  của máy thì mẫu bị gãy. Thí nghiệm với mẫu thứ hai nhưng với tải trọng bé hơn để ứng suất lớn nhất nhỏ hơn lần đầu. Lần này máy quay được  $N_2$  vòng thì mẫu bị gãy và ta có  $N_2 > N_1$ .

Nếu cứ tiếp tục thí nghiệm với các mẫu khác nhưng  $\sigma_{max}$  càng bé dần thì số vòng quay của máy để mẫu bị gãy càng tăng lên. Lập đồ thị biểu diễn giữa ứng suất  $\sigma$  và số vòng quay (số chu trình)  $N$ , ta sẽ được một đường cong (H.15.5). Đường cong này tiệm cận với một đường thẳng nằm ngang và gọi là biểu đồ mỏi.



**Hình 15.5** Đường cong mỏi

Giá trị  $\sigma_{-1}^u$  (chu trình đối xứng  $r = -1$ ) của ứng suất pháp lớn nhất tương ứng với đường tiệm cận ngang là giới hạn mỏi khi uốn thuần túy phẳng vì đó là ứng suất pháp lớn nhất và mẫu có thể chịu đựng được với một số chu trình vô hạn mà không bị phá hỏng.

Thí nghiệm cho thấy rằng đối với thép nếu mẫu chịu được  $10^7$  chu trình mà không bị gãy thì nói chung mẫu sẽ chịu được mãi mãi. Đối với kim loại màu thì giới hạn mỏi là ứng suất pháp lớn nhất ứng với  $20 \cdot 10^7 \div 50 \cdot 10^7$  chu trình mà mẫu chưa bị phá hỏng.

Quan hệ giữa giới hạn bền và giới hạn mỏi khi uốn trong chu trình đối xứng có thể lấy gần đúng như sau:

- Đối với thép có:  $\sigma_b = 30 \div 120 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\sigma_{-1}^u \approx 0,5 \sigma_b$
- Đối với thép có:  $\sigma_b = 120 \div 180 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\sigma_{-1}^u \approx 40 + 1/6 \sigma_b$
- Đối với thép đúc và gang:  $\sigma_{-1}^u \approx 0,4 \sigma_b$
- Đối với kim loại màu:  $\sigma_{-1}^u \approx (0,25 \div 0,50) \sigma_b$

Nếu chi tiết chịu kéo, nén hay xoắn thì thay đổi giới hạn mỏi đối với các trường hợp này được lấy gần đúng như sau:

$$\sigma_{-1}^{kn} \approx (0,70 \div 0,80) \sigma_{-1}^u; \quad \tau_{-1}^x \approx (0,40 \div 0,70) \sigma_{-1}^u$$

trong đó:  $\sigma_{-1}^{kn}$  - giới hạn mỗi khi kéo, nén

$\tau_{-1}^x$  - giới hạn mỗi khi xoắn.

### 15.3.2 Biểu đồ giới hạn mới

Đối với mỗi loại vật liệu, giới hạn mới phụ thuộc vào hệ số bất đối xứng của chu trình ứng suất. Để diễn đạt một cách tổng quát ta phải tìm cách biểu diễn giới hạn mới theo  $r$  trên một biểu đồ nhất định. Biểu đồ đó còn được gọi là *biểu đồ giới hạn mới*.

Ta sẽ khảo sát biểu đồ giới hạn mới vẽ trên hệ tọa độ  $p_{bd} - p_{tb}$  (biểu đồ Colây). Chia (15.2) cho (15.1), ta có:

$$\frac{p_{bd}}{p_{tb}} = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_{\max} + p_{\min}} = \frac{1 - r}{1 + r}$$

vậy: 
$$p_{bd} = \frac{1 - r}{1 + r} p_{tb} \quad (15.4)$$

Với một trị số  $r$  nhất định tương quan giữa  $p_{bd}$  và  $p_{tb}$  là một đường thẳng qua gốc tọa độ, nghĩa là, với các chu trình có cùng hệ số bất đối xứng  $r$  thì được biểu diễn bằng các điểm trên cùng một đường thẳng. Ví dụ các *chu trình mạch động* có  $r = 0$  được biểu diễn bằng các điểm trên đường phân giác của gốc tọa độ (H.15.6). Rõ ràng trên đường đó ta sẽ tìm thấy một điểm D biểu diễn cho giới hạn mới  $p_o$ . Tọa độ của D được tính như sau.

Cộng (15.1) và (15.2) ta được:  $p_{\max} = p_{bd} + p_{tb}$

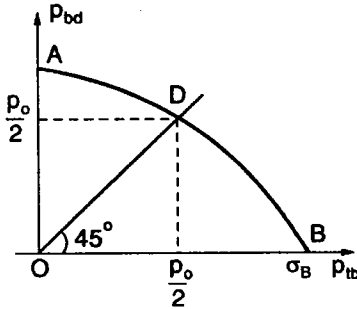
Với các điểm trên đường phân giác ta có  $p_{bd} = p_{tb}$  vậy khi  $p_{\max} = p_o$  ta sẽ tìm thấy hoành độ và tung độ của D bằng  $p_o/2$ .

Các điểm trên trục tung biểu diễn cho các chu trình đối xứng vì với các chu trình đó ta có  $p_{tb} = 0$  và  $r = -1$ . Vì vậy trên trục tung ta sẽ tìm thấy một điểm giới hạn A. Tung độ của A chính là giới hạn của chu trình đối xứng  $p_{-1}$ .

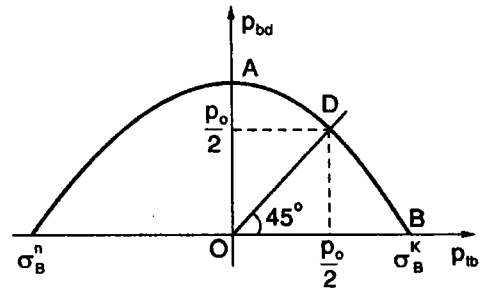
Các điểm trên trục hoành biểu diễn cho chu trình tĩnh vì  $r = 1$ ,  $p_{bd} = 0$ . Điểm giới hạn của các chu trình này là giới hạn bền của vật liệu.

Ta có:  $\sigma_B = p_{tb}$ . Đó là điểm B trên trục hoành (H.15.6).

Tiến hành thí nghiệm với  $r$  thay đổi ta sẽ xác định được các điểm giới hạn khác. Nối các điểm đó lại ta được đường cong biểu diễn giới hạn mỏi (H.15.6). Đường cong đó biểu diễn cho các chu trình dương. Đối với vật liệu dẻo ta không tìm thấy giới hạn bền khi nén do đó khi có một chu trình âm ta lấy trị số tuyệt đối của các ứng suất và tính nó như một chu trình dương.



**Hình 15.6** Biểu đồ giới hạn mỏi



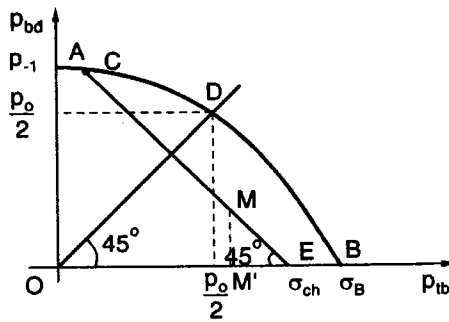
**Hình 15.7** Biểu đồ giới hạn mỏi của vật liệu giòn

Đối với vật liệu giòn biểu đồ giới hạn mỏi có dạng như hình 15.7.

Vì phần âm lớn hơn phần dương nên khi có chu trình âm ta lấy trị số tuyệt đối và tính như một chu trình dương thì hệ số an toàn sẽ cao hơn. Do vậy, sau đây ta chỉ để ý đến phần bên phải của biểu đồ.

Đường cong giới hạn mỏi ADB (H.15.6) chia phần tư thứ nhất của mặt phẳng tọa độ thành hai miền. Với những chu trình ứng suất được biểu diễn bằng một điểm trong miền OADB là những chu trình an toàn, nghĩa là vật liệu có thể làm việc lâu dài dưới tác dụng của chu trình ứng suất đó. Ngược lại, với những chu trình được biểu diễn bằng điểm bên ngoài OADB thì vật liệu thế nào cũng bị phá hỏng vì mỏi.

Thông thường (nhất là đối với ngành cơ khí), chúng ta không được để ứng suất vượt quá  $\sigma_{ch}$ , nghĩa là điểm giới hạn đối với các chu trình ứng suất là khi ứng suất cực đại  $p_{max}$  đạt tới giới hạn chảy  $\sigma_{ch}$ . Các điểm giới hạn này nằm trên đường thẳng xuất phát từ điểm E có hoành độ là  $\sigma_{ch}$  và tạo với trục hoành một góc nghiêng  $45^\circ$  (H.15.8).



Hình 15.8 Tính toán mỏi cho vật liệu dẻo

Gọi giao điểm của đường thẳng đó với biểu đồ mỏi là C. Ta dễ dàng thấy rằng một chu trình ứng suất được biểu diễn bởi một điểm M nào đó trên EC sẽ có trị số ứng suất cực đại  $p_{max}$  bằng  $\sigma_{ch}$ . Thực vậy,  $p_{max}$  của chu trình ứng suất đó có trị số là:

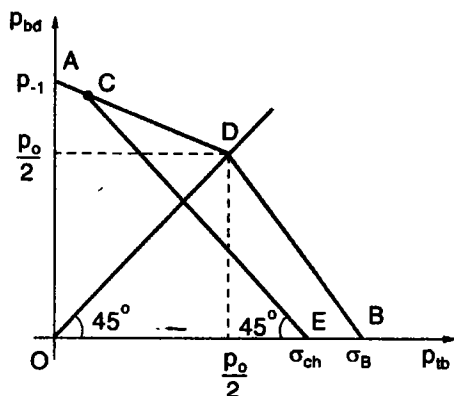
$$\begin{aligned} p_{max} &= p_{bd} + p_{tb} = \overline{OM'} + \overline{M'M} \\ &= \overline{OM'} + \overline{M'E} = \overline{OE} = \sigma_{ch} \end{aligned}$$

Như vậy, ta chỉ được phép sử dụng các chu trình ứng suất trong miền ACE. Ta cũng thấy rằng, vùng ACE được chia ra hai vùng AOC và COE. Những chu trình có hệ số bất đối xứng  $r$  nằm trong vùng AOC nghĩa là những chu trình được biểu diễn trên những tia nằm trong vùng AOC, khi chúng ta tăng trị số  $p_{max}$  lên, nhưng với  $r$  không đổi, thì những chu trình đó sẽ bị phá hỏng vì mỗi trước khi  $p_{max}$  đạt đến giới hạn chảy. Còn những chu trình có trị số nằm trong vùng COE, trị số  $p_{max}$  sẽ đạt đến giới hạn chảy trước khi đến giới hạn mỏi. Điều này dẫn đến nhận xét khá quan trọng là:

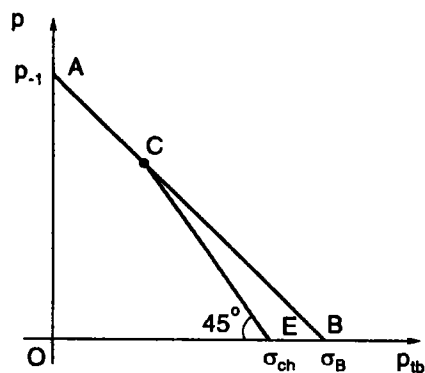
*Chúng ta chỉ cần tính toán về mỏi khi  $r$  nằm trong miền AOC. Khi  $r$  nằm trong COE thì ta chỉ cần so sánh  $p_{max}$  với giới hạn chảy  $\sigma_{ch}$ .*

Vậy thực tế ta chỉ cần đoạn cong AC của biểu đồ giới hạn mỏi. Một cách gần đúng ta có thể thay thế đoạn cong đó bằng một đoạn thẳng. Ta có thể có hai cách thu gọn theo Xêrenxen và Kinaxôcvili như sau:

- Thay cả đoạn cong AD bằng đoạn thẳng AD (H.15.9).
- Thay cả đoạn cong ADB bằng đoạn thẳng AB (H.15.10).



**Hình 15.9** Biểu đồ giới hạn  
mỗi đơn giản hóa



**Hình 15.9** Biểu đồ giới hạn  
mỗi đơn giản nhất

Với cách đơn giản như thế ta chỉ cần làm một số thí nghiệm là đủ để có biểu đồ. Ví dụ đối với biểu đồ thứ nhất chỉ cần tìm  $p_{-1}$ ,  $p_o$  và  $\sigma_{ch}$ , còn với biểu đồ thứ hai ta phải tìm  $p_{-1}$ ,  $\sigma_{ch}$  và  $\sigma_B$  mà thôi.

## 15.4 CÁC YẾU TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN GIỚI HẠN MỎI

Chúng ta sẽ kể đến các yếu tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi, nghĩa là những yếu tố dễ tạo nên các vết nứt vi mô làm giảm thấp giới hạn mỏi.

### 15.4.1 Ảnh hưởng của sự tập trung ứng suất

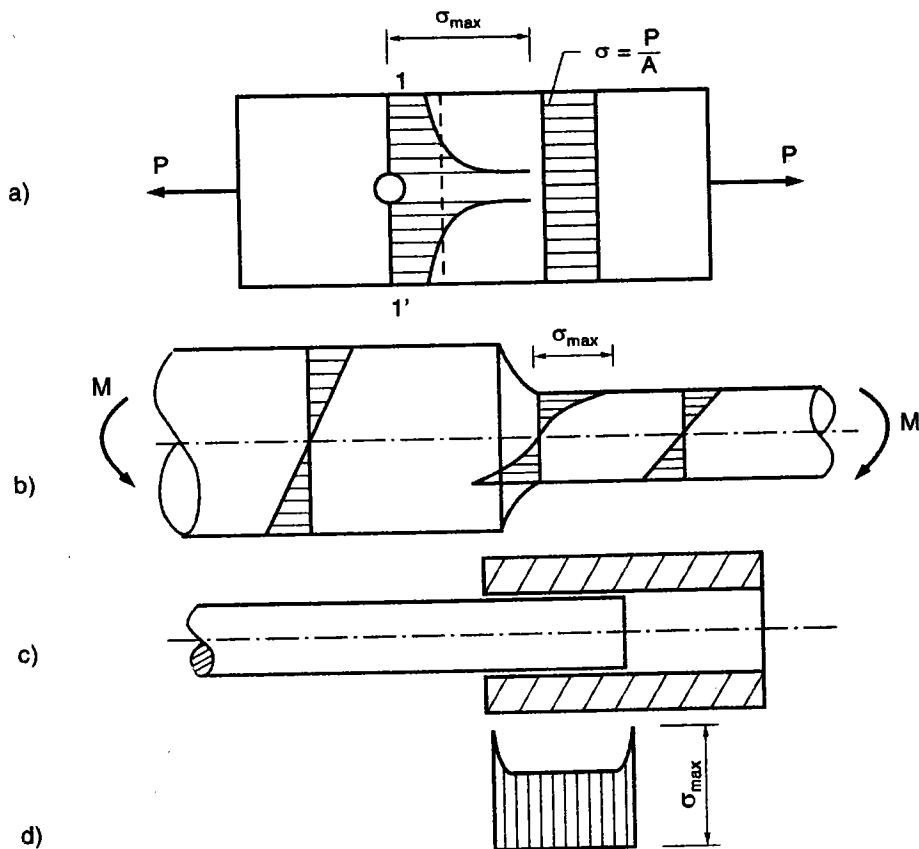
Nhiều thí nghiệm đã chứng tỏ rằng ở những nơi có sự thay đổi đột ngột về kích thước và những vùng lắp ghép căng giữa các chi tiết máy có hiện tượng tập trung ứng suất.

Ví dụ, một tấm chịu kéo có lỗ nhỏ (H.15.11.a) trên mặt cắt 1-1. Trên mặt cắt đó ứng suất không đều như ở những mặt cắt khác mà tại mép lỗ ứng suất có trị số lớn hơn (H.15.11.a). Tương tự như vậy trong trường hợp trục bậc chịu uốn (H.15.11.b) hay trục lắp ghép căng với ống (H.15.11.c).

- Nếu chi tiết máy làm việc trong điều kiện ứng suất tĩnh thì sự tập trung ứng suất không làm giảm giới hạn nguy hiểm của vật liệu. Thật vậy, nếu vật liệu làm chi tiết là dẻo thì ở vùng có tập trung ứng

suất, khi lực tăng lên, vùng đó sẽ tạo thành một vùng biến dạng dẻo nhưng vẫn không có vết nứt, nếu tiếp tục tăng lên thì vùng dẻo sẽ lan dần cho đến lúc chiếm toàn bộ diện tích mặt cắt ngang. Điều đó không khác gì với trường hợp không có tập trung ứng suất. Trước khi phá hỏng toàn bộ mặt cắt ngang của thanh cũng phải ở trạng thái biến dạng dẻo. Còn nếu vật liệu là giòn thì trong lòng vật liệu đã có sẵn những yếu tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng gì đến giới hạn bền của vật liệu giòn.

- Nhưng nếu chi tiết làm việc dưới tác dụng của ứng suất thay đổi thì rõ ràng yếu tố tập trung ứng suất sẽ ảnh hưởng đến độ bền của vật liệu vì tại những điểm có  $\sigma_{ch}$  sẽ dễ phát sinh các vết nứt vi mô.



**Hình 15.11** Sự tập trung ứng suất với các dạng chịu lực khác nhau

Để đánh giá mức độ ảnh hưởng của sự tập trung ứng suất đối với giới hạn mỏi ta dùng hệ số tập trung ứng suất:

$$K = \frac{p_r^m}{p_{rK}^m}$$

trong đó:  $p_r^m$  - giới hạn mỏi của chi tiết không có yếu tố tập trung ứng suất

$p_{rK}^m$  - giới hạn mỏi của chi tiết máy cùng loại nhưng có sự tập trung ứng suất.

Như đã phân tích ở trên, một chu trình bất kỳ có thể xem là tổng của một chu trình đối xứng với  $p_{max} = p_{bd}$  và một chu trình tĩnh với ứng suất tác dụng là  $p_{tb}$ . Yếu tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng đến chu trình tĩnh, vậy nó chỉ tác động trực tiếp đến phần ứng suất thay đổi, nói cách khác sự phát sinh ứng suất vì mô ở những nơi có tập trung ứng suất là do  $p_{bd}$  trực tiếp tác động. Do đó, chúng ta chỉ quan tâm đến hệ số tập trung ứng suất trong trường hợp chu trình đối xứng:

$$K = \frac{p_{-1}^m}{p_{-1K}^m}$$

Hệ số  $K$  được xác định bằng thí nghiệm với hình dạng của chi tiết có những yếu tố tập trung ứng suất khác nhau. Các hệ số này được cho trong các sổ tay kỹ thuật, xem bảng 15.3, 15.4, 15.5, 15.6.

#### 15.4.2 Ảnh hưởng của trạng thái bề mặt

Độ nhẵn bóng của bề mặt chi tiết cũng ảnh hưởng đến điều kiện gây nên vết nứt vì mô. Cũng tương tự như trên, chỉ có chu trình đối xứng là chịu ảnh hưởng của độ nhẵn bóng bề mặt.

Ta định nghĩa hệ số giảm ứng suất do điều kiện độ nhẵn bóng bề mặt gây nên là:

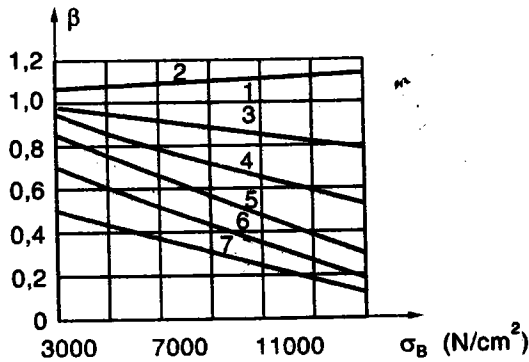
$$\beta = \frac{p_{-1n}^m}{p_{-1}^m}$$

trong đó:  $p_{-1}$  - giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng của mẫu có bề mặt nhẵn theo tiêu chuẩn



$p_{-1n}^m$  - giới hạn mỏi của mẫu có bề mặt tương tự với bề mặt chi tiết.

Hình 15.12 giới thiệu trị số của  $\beta$  theo các loại thép có giới hạn bền khác nhau.



Hình 15.12 Hệ số giảm ứng suất theo độ nhẵn bề mặt

Hệ số bề mặt tiêu chuẩn xem như bằng đơn vị (đường 1). Đường 2 cho bề mặt được đánh bóng. Đường 3 cho bề mặt được tạo nên bằng phương pháp cắt gọt. Đường 4 cho dũa tinh. Đường 5 cho bề mặt tạo bằng phương pháp cán. Đường 6, 7 cho các chi tiết có bề mặt bị ăn mòn trong nước ngọt và nước mặn.

### 15.4.3 Ảnh hưởng của kích thước chi tiết

Thí nghiệm cho thấy rằng chi tiết càng to giới hạn mỏi càng thấp. Cách giải thích của chúng ta cũng tương tự như ảnh hưởng của độ nhẵn bề mặt. Chi tiết càng to, khuyết tật trong lòng càng nhiều và càng dễ gây vết nứt vi mô. Và chúng ta cũng thấy ảnh hưởng của kích thước chỉ có đối với chi tiết chịu tác dụng của chu trình đối xứng.

Ta định nghĩa hệ số kích thước:

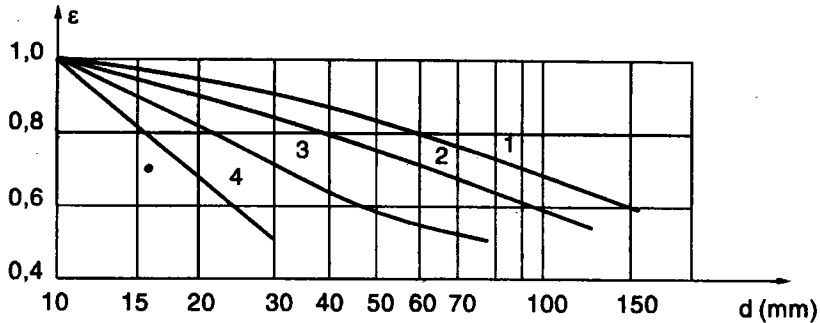
$$\epsilon = \frac{p_{-1d}^m}{p_{-1}^m}$$

trong đó:  $p_{-1d}^m$  - giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng của chi tiết thực

$p_{-1}^m$  - giới hạn mỏi của mẫu có kích thước tiêu chuẩn

( $d = 8 \div 12 \text{ mm}$ ). Ta giả thiết rằng bề mặt của chi tiết và mẫu thí nghiệm có chất lượng như nhau.

Hình 15.13 cho ta trị số của  $\varepsilon$  đối với các trục chịu uốn và chịu xoắn theo đường kính của chúng.



**Hình 15.13.** Hệ số giảm ứng suất theo kích thước chi tiết

Đường 1: thép cacbon không có sự tập trung ứng suất

Đường 2: thép hợp kim có  $\sigma_B = 100 \div 120 \text{ kN/cm}^2$  và không có sự tập trung ứng suất

Đường 4: cho các loại thép có tập trung ứng suất

Bảng 15.1 cũng cho một số giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng với mẫu thí nghiệm có đường kính khác nhau.

**Bảng 15.1**

d (mm)	Giới hạn mỏi $\sigma_{-1}$ (N/cm <sup>2</sup> )						
	Thép cacbon			Thép hợp kim			
15	25000	26500	32000	38000	44000	50000	60000
30	21000	22500	27000	32000	37000	42000	50000
60	17500	19000	22500	27000	31000	35000	42000
100	16000	17000	20000	24000	28000	31500	38000
$\sigma_B$ (N/cm <sup>2</sup> )	45000	55000	65000	80000	88000	98000	120000
$\sigma_{ch}$ (N/cm <sup>2</sup> )	25000	36000	36000	56000	61000	73000	100000

Như vậy nếu kể đến ảnh hưởng của cả ba yếu tố trên, giới hạn mỏi của một chu trình ứng suất bất kỳ  $r$  sẽ giảm đi một lượng là  $\beta\varepsilon/K$  lần ta có:

$$(p_r^m) = \frac{\beta \epsilon}{K} p_r^m$$

trong đó  $(p_r^m)$  và  $p_r^m$  là giới hạn mỏi của vật liệu khi có và khi không có kể đến các yếu tố ảnh hưởng.

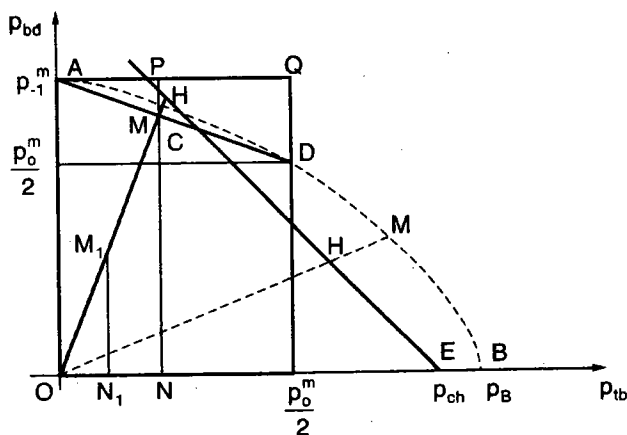
## 15.5 TÍNH ĐIỀU KIỆN BỀN KHI ỨNG SUẤT THAY ĐỔI

### 15.5.1 Đối với trạng thái ứng suất đơn và trượt thuần túy

Như đã biết ở trên, những chu trình ứng suất nằm trong vùng AOC (H.15.14) khi có trị số  $p_{max}$  tăng lên sẽ bị phá hỏng vì mỏi trước khi bị phá hỏng vì chảy. Để đảm bảo cho vật liệu làm việc được bền và an toàn là:

$$p_{max} \leq \frac{(p_r^m)}{[n]} \tag{a}$$

trong đó  $[n]$  là hệ số an toàn cho phép được xác định trước từ điều kiện sản xuất, điều kiện làm việc của chi tiết...



**Hình 15.14** Đồ thị dùng tính điều kiện bền mỏi

Như vậy, với một chi tiết cụ thể dưới tác dụng của một loại chu trình ứng suất có trị số  $r$  nhất định, ta phải xác định được đường thẳng OM để tìm thấy trị số  $(p_r^m)$  và phải chọn được một hệ số an toàn cho phép  $[n]$  để tiến hành kiểm tra bền theo (a). Quá trình tính đó gặp khó khăn khá lớn là phải xây dựng được biểu đồ giới hạn mỏi

và mỗi lần tính phải tìm trị số  $p_r^m$ . Vì vậy, ta đưa ra một phương pháp tính như sau.

Nếu gọi  $n^m$  là hệ số an toàn thực tế của chi tiết:

$$n^m = \frac{(p_r^m)}{p_{\max}} \quad (b)$$

thì điều kiện bền của chi tiết được biểu diễn như sau:

$$n^m \geq [n] \quad (c)$$

Như vậy, phải xác định công thức tính  $n^m$  cho mọi loại chu trình có  $r$  khác nhau.

Để xét đến ảnh hưởng các yếu tố làm giảm giới hạn mỗi ta thừa nhận giả thiết rằng nếu các yếu tố ảnh hưởng làm giảm giới hạn mỗi trong chu trình đối xứng của vật liệu một lượng  $\beta\epsilon/K$  lần thì điều đó cũng tương tự như chúng ta tăng biên độ của chu trình ứng suất làm việc lên  $K/\beta\epsilon$  lần.

Như vậy, với một chu trình ứng suất đã cho được đặc trưng bởi  $p_{bd}$  và  $p_{tb}$  thì khi kể đến các yếu tố ảnh hưởng ta phải xem chu trình đó có ứng suất trung bình là  $p_{tb}$  và ứng suất biên độ là:

$$\frac{K}{\beta\epsilon} p_{bd}$$

(b) có thể viết lại được dưới dạng:

$$n^m = \frac{(p_r^m)}{p_{\max}} = \frac{(p_r^m)}{p_{tb} + \frac{K}{\beta\epsilon} p_{bd}} \quad (d)$$

trong đó  $p_{\max}$  là ứng suất cực đại của chu trình khi đã xét đến các yếu tố ảnh hưởng làm giảm giới hạn mỗi.

Gọi  $M_1$  là điểm tượng trưng cho chu trình ứng suất đó trong biểu đồ mỗi (H.15.14). Hai tam giác đồng dạng  $ON_1M_1$  và  $ONM$  cho ta:

$$\frac{ON}{ON_1} = \frac{NM}{N_1M_1} = \frac{ON + NM}{ON_1 + N_1M_1} = \frac{(p_r^m)}{p_{tb} + \frac{K}{\beta\epsilon} p_{bd}} = n^m \quad (e)$$

với:  $ON_1 = p_{tb}$  và  $N_1M_1 = \frac{K}{\beta\varepsilon} p_{bd}$ .

Như vậy, để xác định  $n^m$  ta chỉ cần xác định ON. Từ A kẻ đường song song trục hoành, cắt NM tại P và cắt đường song song trục tung qua D tại Q. Các tam giác đồng dạng APM và ADQ cho ta:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{ON}{\frac{p_o^m}{2}} = \frac{AM}{AD} = \frac{MP}{DQ} = \frac{p_{-1} - NM}{p_{-1} - \frac{p_o^m}{2}}$$

hay

$$ON = \frac{p_{-1} - NM}{\left(p_{-1} - \frac{p_o^m}{2}\right)} \frac{p_o^m}{2} = \frac{p_{-1} - NM}{\frac{2p_{-1} - p_o^m}{p_o^m}}$$

mang ON vào (e) ta được:

$$\frac{p_{-1} - NM}{\psi p_{tb}} = \frac{NM}{N_1M_1} \tag{f}$$

trong đó:  $\psi = \frac{2p_{-1} - p_o^m}{p_o^m}$

từ (f)  $\Rightarrow \frac{NM}{N_1M_1} = \frac{p_{-1}}{N_1M_1 + \psi p_{tb}} = \frac{p_{-1}}{\frac{K}{\beta\varepsilon} p_{bd} + \psi p_{tb}}$

mang vào (e) ta được:

$$n^m = \frac{p_{-1}}{\frac{K}{\beta\varepsilon} p_{bd} + \psi p_{tb}}$$

Trường hợp  $p = \sigma$  ta có:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\beta\varepsilon_\sigma} \sigma_{bd} + \psi_\sigma \sigma_{tb}}$$

và khi  $p = \tau$ , ta có:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\beta\varepsilon_\tau} \tau_{bd} + \psi_\tau \tau_{tb}}$$

Thường có thể lấy  $\psi_\sigma \approx 0,05$ ;  $\psi_\tau \approx 0$  đối với thép ít cacbon;  $\psi_\sigma \approx 0,1$  và  $\psi_\tau \approx 0,05$  đối với thép cacbon trung bình;  $\psi_\sigma \approx 0,15$  và  $\psi_\tau \approx 0,1$  đối với thép hợp kim.

Kéo dài OM<sub>1</sub> đến cắt đường EC tại H, điểm này là điểm giới hạn khi làm việc ở giai đoạn chảy. Vì H nằm ngoài đoạn OM nên ta thấy ngay hệ số an toàn của chu trình đang xét đối với giới hạn chảy lớn hơn hệ số an toàn vì mỗi:

$$n_{ch} = \frac{P_{ch}}{P_{max}} \geq n^m$$

Ngược lại, nếu ta xét các chu trình nằm trong miền OCE, ta sẽ thấy điểm H nằm trong đoạn OM (đường nét đứt). Như vậy, hệ số an toàn vì mỗi sẽ lớn hơn hệ số an toàn vì chảy. Nhưng với những chu trình trong miền này ta phải so sánh với giới hạn chảy chứ không phải giới hạn mỗi khi xét điều kiện bền.

Như vậy trong cả hai trường hợp ta đều có thể tính cả hai trị số an toàn và chọn trị số an toàn bé để so sánh với hệ số an toàn cho phép. Nếu hệ số an toàn bé đó lớn hơn hệ số an toàn cho phép  $[n]$  thì vật liệu làm việc được bền.

### 15.5.2 Đối với trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt

Đối với trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt ta xem như là sự cộng tác dụng của trạng thái ứng suất đơn và trạng thái trượt thuần túy. Để tính hệ số an toàn vì mỗi ta thừa nhận các công thức kinh nghiệm sau:

Đối với thép:

$$n^m = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}$$

Đối với gang:

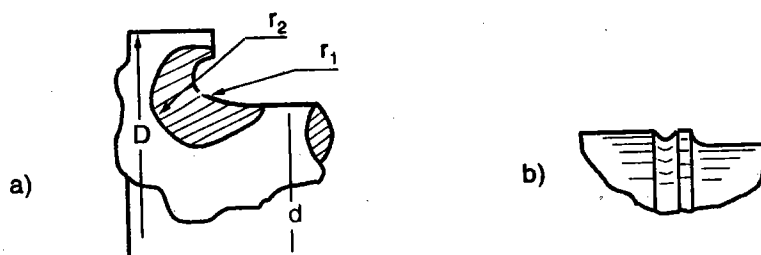
$$\left(\frac{n^m}{n_\sigma}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}} - 1\right) + \frac{n^m}{n_\sigma} \left(2 - \frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right) + \left(\frac{n^m}{n_\sigma}\right)^2 = 1$$

thường ta lấy  $[n] = 1,5 \div 2,5$ ; còn khi cần tăng độ cứng ta lấy  $[n] = 2,5 \div 3,0$ .

### 15.6 BIỆN PHÁP NÂNG CAO GIỚI HẠN MỎI

Để nâng cao giới hạn mỏi, người ta thường sử dụng các biện pháp để hạn chế sự phát sinh vết nứt vi mô trong các chi tiết, ví dụ:

- Tăng bán kính chỗ lượn để giảm bớt sự tập trung ứng suất (H.15.15a)
- Làm các rãnh để điều hòa ứng suất (H.15.15b)
- Mài nhẵn, đánh bóng hoặc mạ bề mặt chi tiết để loại bỏ các vết nứt ở bề mặt phát sinh trong quá trình gia công
- Dùng các biện pháp cơ khí để làm cứng mặt ngoài như cán, lăn hoặc phun hạt gang lên bề mặt
- Hóa luyện bề mặt như xêmantit hóa, cyanua hóa, azôt hóa...



Hình 15.15 Các biện pháp tăng giới hạn mỏi

### Đặc trưng cơ học của thép

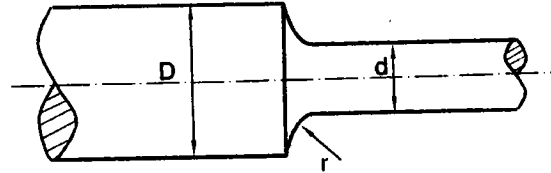
Bảng 15.2

Loại thép	Giới hạn bền (N/mm <sup>2</sup> )	Giới hạn chảy (N/mm <sup>2</sup> )	Giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng		
			Uốn $\sigma_{-1}^n$ (N/mm <sup>2</sup> )	Xoắn $\tau_{-1}^n$ (N/mm <sup>2</sup> )	Kéo, nén $\sigma_{-1}^{kn}$ (N/mm <sup>2</sup> )
<b>1. Thép Cacbon</b>					
10	320 ÷ 420	180	160 ÷ 220	80 ÷ 120	120 ÷ 150
20	400 ÷ 500	240	170 ÷ 220	100 ÷ 150	120 ÷ 160
30	480 ÷ 600	280	200 ÷ 270	110 ÷ 140	170 ÷ 210
35	520 ÷ 650	300	220 ÷ 300	130 ÷ 180	170 ÷ 220
40	570 ÷ 700	320	230 ÷ 320	140 ÷ 190	180 ÷ 240

Loại thép	Giới hạn bền (N/mm <sup>2</sup> )	Giới hạn chảy (N/mm <sup>2</sup> )	Giới hạn mỗi trong chu trình đối xứng		
			Uốn $\sigma_{-1}^n$ (N/mm <sup>2</sup> )	Xoắn $\tau_{-1}^n$ (N/mm <sup>2</sup> )	Kéo, nén $\sigma_{-1}^{kn}$ (N/mm <sup>2</sup> )
<b>1. Thép Cacbon</b>					
45	600 ÷ 750	340	250 ÷ 340	150 ÷ 200	190 ÷ 250
50	630 ÷ 800	350	270 ÷ 350	160 ÷ 210	200 ÷ 260
60	650 ÷ 900	370	310 ÷ 380	180 ÷ 220	220 ÷ 280
30 Γ	560 ÷ 700	290	220 ÷ 320	—	—
50 Γ	650 ÷ 850	370	290 ÷ 360	—	—
45 Γ	700 ÷ 900	410	310 ÷ 400	180 ÷ 220	—
<p><i>Chú ý:</i> - Những trị số trên đây là thí nghiệm với các loại thép trong trạng thái bình thường với các mẫu thí nghiệm có đường kính <math>d = 6 \div 12\text{mm}</math></p> <p>- Bề mặt của các mẫu thí nghiệm được mài nhẵn, số chu trình để làm cơ sở của thí nghiệm là <math>N = 10^7</math>, giới hạn chảy được xác định là giới hạn chảy thấp.</p>					
<b>2. Thép hợp kim</b>					
20X	720 ÷ 850	400 ÷ 600	310 ÷ 380	170 ÷ 230	—
40X	730 ÷ 1050	650 ÷ 900	320 ÷ 480	210 ÷ 260	240 ÷ 340
45X	850 ÷ 1050	700 ÷ 950	400 ÷ 500	—	—
40XH	1000 ÷ 1450	800 ÷ 1300	460 ÷ 600	—	310 ÷ 420
40XHMA	1000 ÷ 1700	850 ÷ 1600	500 ÷ 700	270 ÷ 380	—
40XΦ	900 ÷ 1250	800 ÷ 950	380 ÷ 490	—	—
50 XΦ	1150 ÷ 1400	900 ÷ 1200	550 ÷ 630	—	—
12XH3A	950 ÷ 1250	700 ÷ 1100	420 ÷ 640	220 ÷ 300	—
37 XH3A	1150 ÷ 1600	1000 ÷ 1400	520 ÷ 700	320 ÷ 400	—
20 XH3A	950 ÷ 1450	850 ÷ 1100	340 ÷ 650	240 ÷ 310	—
18 XHBA	1150 ÷ 1400	850 ÷ 1200	540 ÷ 620	300 ÷ 340	—
•25 XHBA	1100	950	500	—	—
30 XΓCA	1100 ÷ 1700	480 ÷ 1500	480 ÷ 700	280 v 400	—
<p><i>Chú ý:</i> Giới hạn mỗi tìm với các mẫu thí nghiệm được mài nhẵn, số chu trình cơ sở là:  <math>N = 5.10^6 \div 10^7</math> chu trình</p>					

- Trị số  $k_\sigma$  và  $k_r$  tại góc lượn khi  $\frac{D}{d} = 1,25 \div 2$





Hình 15.16 Thay đổi đột ngột tiết diện

Bảng 15.3

Tỷ số $r/d$	$k_\sigma$ đối với trục thép có $\sigma_b$ (N/mm <sup>2</sup> )						$k_\tau$ đối với trục thép có $\sigma_b$ (N/mm <sup>2</sup> )			
	$\leq 500$	600	700	800	900	$\geq 1000$	$\leq 700$	800	900	$\geq 1000$
0	3,20	3,50	3,85	-	-	-	2,15	2,40	2,60	2,85
0,02	2,40	2,60	2,80	3,00	3,25	3,50	1,80	1,90	2,00	2,10
0,04	2,00	2,10	2,15	2,25	2,35	2,45	1,53	1,60	1,65	1,70
0,06	1,85		1,90		2,00		1,40	1,45	1,50	1,53
0,08	1,66		1,70		1,76		1,30	1,35	1,40	1,42
0,10	1,57		1,61		1,64		1,25	1,28	1,32	1,35
0,15	1,41		1,45		1,49		1,15	1,18	1,20	1,24
0,20	1,32		1,36		1,40		1,10	1,14	1,16	1,20

Chú thích:

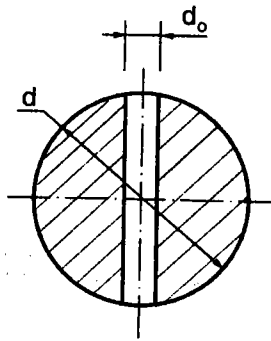
Nếu  $\frac{D}{d} < 1,25$ ,  $k_\sigma$  và  $k_\tau$  được tính theo công thức:

$$k_\sigma = (2,28 \frac{D}{d} - 1,90)(k_{\sigma \text{ bảng}} - 1) + 1$$

$$k_\tau = (2,28 \frac{D}{d} - 2,12)(k_{\tau \text{ bảng}} - 1) + 1$$

$k_{\sigma \text{ bảng}}$  và  $k_{\tau \text{ bảng}}$  tra theo bảng 8.3, ( $\frac{D}{d} = 1,25 \div 2$ )

- Trị số  $k_\sigma$  và  $k_r$  tại lỗ xuyên

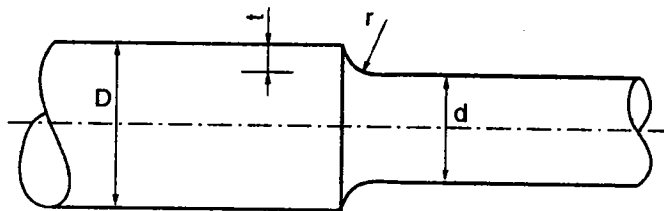


**Hình 15.17** Kích thước lỗ xuyên qua trục

**Bảng 15.4**

Giới hạn bền $\sigma_b$ (N/mm <sup>2</sup> )	$d_o/d$		
	0,05 ÷ 0,10	0,15 ÷ 0,25	0,05 ÷ 0,25
	$K_\sigma$		$k_r$
≤ 700	2,00	1,80	1,75
900	2,15	1,90	1,90
≥ 1000	2,35	2,10	2,00

- Trị số  $k_\sigma$  tại chỗ rãnh vòng của trục



**Hình 15.18** Cấu tạo giảm tập trung ứng suất

**Bảng 15.5.a**

Tỷ số		$k_c$ đối với trục thép có $\sigma_b$ (N/mm <sup>2</sup> )				
	r/d	≤ 650	700	800	900	≥ 1000
0,4 < t/r ≤ 0,6	0,00	1,96	2,11	2,26	2,40	2,50
	0,02	1,82	1,92	2,06	2,21	2,30
	0,04	1,77	1,82	1,96	2,06	2,16
	0,06	1,72	1,77	1,87	1,92	1,96
	0,08	1,68	1,72	1,77	1,87	1,92
	0,10	1,63	1,68	1,72	1,77	1,82
0,1 < t/r ≤ 1,0	0,15	1,53	1,55	1,58	1,63	1,68
	0,00	2,00	2,15	2,30	2,45	2,55
	0,02	1,85	1,95	2,10	2,25	2,35
	0,04	1,80	1,85	2,00	2,10	2,20
	0,06	1,75	1,80	1,90	1,95	2,00
	0,08	1,70	1,75	1,80	1,90	1,96
	0,10	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85
1,0 < t/r ≤ 1,5	1,15	1,55	1,57	1,60	1,65	1,70
	0,00	2,05	2,20	2,36	2,52	2,62
	0,02	1,89	1,99	2,15	2,31	2,21
	0,04	1,84	1,89	2,05	2,15	2,26
	0,06	1,78	1,84	1,94	1,99	2,05
	0,08	1,73	1,78	1,84	1,94	1,99
	0,10	1,68	1,73	1,78	1,84	1,89
1,5 < t/r ≤ 2,0	0,15	1,58	1,60	1,63	1,68	1,73
	0,00	2,09	2,25	2,43	2,58	2,69
	0,02	1,93	2,04	2,20	2,37	2,47
	0,04	1,87	1,93	2,09	2,20	2,31
	0,06	1,82	1,87	1,98	2,04	2,09
	0,08	1,76	1,82	1,87	1,98	2,04
	0,10	1,71	1,76	1,82	1,87	1,93
	0,15	1,60	1,62	1,66	1,71	1,76

- Trị số  $k_r$  tại chỗ rãnh vòng của trục.

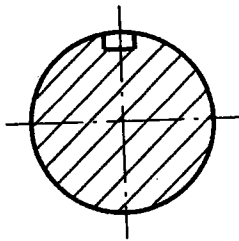
**Bảng 15.5.b**

Tỷ số		$k_r$ đối với trục thép có $\sigma_b$ (N/mm <sup>2</sup> )				
D/d	r/d	≤ 650	700	800	900	≥ 1000
1,02 < D/d ≤ 1,1	0,02	1,29	1,32	1,39	1,46	1,50
	0,04	1,27	1,30	1,37	1,43	1,48
	0,06	1,25	1,29	1,36	1,41	1,46
	0,08	1,21	1,25	1,32	1,39	1,43
	0,10	1,18	1,21	1,29	1,32	1,37
	0,15	1,14	1,18	1,21	1,25	1,29
1,1 < D/d ≤ 1,2	0,02	1,37	1,41	1,50	1,59	1,65
	0,04	1,35	1,38	1,47	1,55	1,62
	0,06	1,32	1,37	1,46	1,52	1,59
	0,08	1,27	1,32	1,41	1,50s	1,55
	0,10	1,23	1,27	1,37	1,41	1,47
	0,15	1,18	1,23	1,27	1,37	1,37
1,2 < D/d ≤ 1,4	0,02	1,40	1,45	1,55	1,65	1,70
	0,04	1,38	1,42	1,52	1,60	1,68
	0,06	1,35	1,40	1,50	1,57	1,65
	0,08	1,30	1,35	1,45	1,55	1,60
	0,10	1,25	1,30	1,40	1,45	1,52
	0,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40

- Trị số  $k_\sigma$  và  $k_r$  tại rãnh thân

**Bảng 15.6**

Hệ số tập trung ứng suất	Giới hạn bền $\sigma_b$ (N/mm <sup>2</sup> )				
	500	600	700	800	1000
$K_\sigma$	1,60	1,75	1,90	2,00	2,30
$k_r$	1,40	1,50	1,70	1,90	2,20



**Hình 15.19** Trục có rãnh

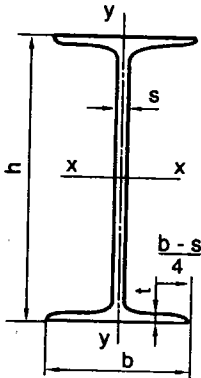
- Hệ số kích thước  $\epsilon_\sigma$ ,  $\epsilon_\tau$

**Bảng 15.7**

Loại vật liệu	Đường kính trục d (mm)							
	15	20	30	40	50	70	100	200
	Hệ số kích thước							
$\epsilon_\sigma$ của thép cacbon	0,95	0,92	0,88	0,85	0,81	0,76	0,70	0,61
$\epsilon_\sigma$ của thép hợp kim và $\epsilon_\tau$ của tất cả các loại thép	0,87	0,83	0,77	0,73	0,70	0,65	0,59	0,52

## PHỤ LỤC

## I - 1 THÉP HÌNH I CÁN NÓNG (theo ГОСТ 8239 - 89; TCVN 1655-85)



h - chiều cao tiết diện

b - chiều rộng của cánh

S - bề dày của thanh

T - chiều dày cánh

A - diện tích tiết diện

I - mômen quán tính

W - mômen chống uốn

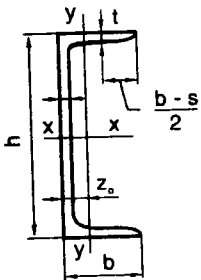
S - mômen tĩnh của nửa tiết diện

r - bán kính quán tính

M - khối lượng trên một mét dài

N <sup>o</sup>	m kg/m	Kích thước, mm				A cm <sup>2</sup>	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	r <sub>x</sub> cm	S <sub>x</sub> cm <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> cm <sup>3</sup>	r <sub>y</sub> cm
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	31,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1598	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	135	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

**I - 2 THÉP HÌNH U CÁN NÓNG** (theo ГOCT 8239 - 89; TCVN 1654-85)



h - chiều cao tiết diện  
 b - chiều rộng của cánh  
 s - bề dày của thân  
 t - chiều dày cánh  
 A - diện tích tiết diện  
 $z_0$  - khoảng cách từ trục y đến mép ngoài của thân

I - mômen quán tính  
 W - mômen chống uốn  
 S - mômen tĩnh của nửa tiết diện  
 R - bán kính quán tính  
 m - khối lượng trên một mét dài

N°	m kg/m	Kích thước, mm				A cm <sup>2</sup>	$I_x$ cm <sup>4</sup>	$W_x$ cm <sup>3</sup>	$r_x$ cm	$S_x$ cm <sup>3</sup>	$I_y$ cm <sup>4</sup>	$W_{yc}$ m <sup>3</sup>	$r_y$ cm	$z_0$ cm
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	24,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	0820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	5220	760	15,7	444	642	73,4	3,23	2,70

N <sup>o</sup>	m kg/m	Kích thước, mm		A cm <sup>2</sup>	I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	r <sub>x</sub> cm	I <sub>xo max</sub> cm <sup>4</sup>	r <sub>xo max</sub> cm	I <sub>yo min</sub> cm <sup>2</sup>	r <sub>yo min</sub> cm	I <sub>xv</sub>   cm <sup>4</sup>	z <sub>o</sub> cm
		b	t									
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,80	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,10
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,9
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,30
	27		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34		14	43,6	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1886	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89



## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bùi Trọng Lựu và các tác giả, *Sức bền vật liệu*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1977.
2. Đặng Việt Cương, Nguyễn Nhật Thăng, Nhữ Phương Mai, *Sức bền vật liệu*, NXB Khoa học Kỹ thuật, 2002.
3. Lê Ngọc Hồng, *Sức bền vật liệu*, NXB Khoa học Kỹ thuật, 1998.
4. Lê Quang Minh, *Sức bền vật liệu*, NXB Đại học và Giáo dục Chuyên nghiệp, 1988.
5. Nguyễn Y Tô và các tác giả, *Sức bền vật liệu*, NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp, 1977.
6. Phạm Ngọc Khánh và các tác giả, *Sức bền vật liệu*, NXB Xây dựng, 2002.
7. Vũ Đình Lai, Nguyễn Xuân Lựu, Bùi Đình Nghi, *Sức bền vật liệu*, NXB Giao thông Vận tải, 2002.
8. Agati P., *Résistance des matériaux*, Dunod Paris, 1999.
9. Benham P.P., Crawford R.J., Armstrong C. G., *Mechanics of engineering materials*, Second edition, Longman Group Limited, 1996.
10. Belyaev M., *Strength of materials*, Mir Publishers, Moscow, 1979.
11. Crandall S., Dahl N., *An Introduction to the mechanics of solids*, McGraw-Hill, 1959.
12. Drucker D., *Introduction to the mechanics of Deformable solids*, McGraw-Hill, 1967.
13. Hall A. S., *An Introduction to the Mechanics of Solids*, Wiley International Edition, 1974.
14. Hibbeler R.C., *Mechanics of materials*, Second edi., Prentice Hall, 1994.
15. Popov E. P., *Engineering mechanics of solids*, Prentice Hall, 1990.
16. Timoshenko S. P., *Strength of materials*, Van Nostrand Reinhold Company, 1958.
17. Timoshenko S. P., *Mechanics of Materials*, third edition, Chapman and Hall, 1991.

# **Giáo trình SỨC BỀN VẬT LIỆU**

*Đỗ Kiến Quốc (chủ biên) – Nguyễn Thị Hiền Lương  
Bùi Công Thành – Lê Hoàng Tuấn – Trần Tấn Quốc*

---

## **NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH**

KP 6, P. Linh Trung, Q. Thủ Đức, TP HCM

**ĐT:** 724 2181 + 1421, 1422, 1423, 1425, 1426

**Fax:** 724 2194; **Email:** vnuhp@vnuhcm.edu.vn

\* \* \*

*Chịu trách nhiệm xuất bản*

**PGS-TS NGUYỄN QUANG ĐIỂN**

*Biên tập*

**NGUYỄN TIẾN NAM**

*Sửa bản in*

**TRẦN VĂN THẮNG**

*Trình bày bìa*

**TRƯƠNG NGỌC TUẤN**

*Liên kết xuất bản*

**TRƯỜNG ĐH BÁCH KHOA - ĐHQGTPHCM**

---

In 500 cuốn, khổ 16 x 24 cm

Số đăng ký KHXB: 732-2006/CXB/150-72/ĐHQGTPHCM

Quyết định xuất bản số: 62/QĐ-ĐHQGTPHCM/TB

ngày 18/4/2007. của Nhà Xuất bản ĐHQG TPHCM

In tại Xưởng in Đại học Bách khoa - ĐHQG TP.HCM

Nộp lưu chiếu tháng 5 năm 2007.