CHƯƠNG

1

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

I. Mở đầu

Tín hiệu số là tín hiệu được biểu diễn bằng một dãy số. Xử lý tín hiệu số bao hàm mọi phép xử lý các dãy số để có được các thông tin cần thiết như phân tích, tổng hợp, mã hoá, đặc biệt là loại bỏ giao thoa tín hiệu, loại bỏ nhiễu, nhận được phổ tín hiệu, biến đổi tín hiệu sang dạng mới phù hợp hơn. Nhìn chung, các hệ thống xử lý tín hiệu phức tạp đều dựa trên các phép xử lý cơ bản sau:

1. Tích chập.

2. Tương quan, bao gồm hai loại: tự tương quan và tương quan chéo. Hàm tương quan chéo dùng để đo mức độ tương tự nhau giữa hai tín hiệu. Nó được dùng để phân tích phổ chéo, phát hiện tín hiệu trên một nền nhiễu như việc phát hiện tín hiệu phản hồi trong kỹ thuật rada, tìm mẫu tương đồng nhau trong nhận dạng, đo độ trễ.

3. Lọc số: là một thao tác cơ bản, thường được sử dụng nhằm khử nhiễu, chọn băng thông.

4. Các phép biến đổi rời rạc: cho phép biểu diễn tín hiệu rời rạc trong không gian tần số hoặc chuyển đổi giữa thời gian và tần số. Phổ của tín hiệu có thể nhận được bằng cách phân nhỏ nó thành các thành phần tần số.

5. Điều chế. Tín hiệu số thường không được truyền đi trên đường dài hoặc lưu trữ với số lượng lớn. Tín hiệu thường được điều chế để làm cho đặc tính tần số của nó phù hợp với các đặc tính của đường truyền hoặc của phương tiện lưu trữ nhằm làm giảm tối thiểu méo, nhằm sử dụng băng tần một cách có hiệu quả hoặc nhằm đảm bảo tín hiệu có một số tính chất mong muốn.

Xử lý tín hiệu số ngày càng được sử dụng trong nhiều lĩnh vực mà trước đây tín hiệu tương tự được dùng là chính; ngay cả trong những lĩnh vực rất khó hoặc không thể áp dụng với tín hiệu tương tự. Xử lý tín hiệu số có những điểm ưu việt sau:

1. Độ chính xác cao: độ chính xác phụ thuộc vào số bits dùng để biểu diễn tín hiệu số.

2. Sao chép trung thực nhiều lần.

3. Tính bền vững: các hệ thống xử lý tín hiệu số không bị ảnh hưởng bởi nhiệt độ hay thời gian như các hệ thống tương tự.

4. Tính linh hoạt và mềm dẻo: chức năng xử lý của các hệ thống xử lý tín hiệu số hoàn toàn có thể can thiệp bằng phần mềm, do đó đảm bảo tính linh hoạt và mềm dẻo.

I.1. Các định nghĩa

a. Tín hiệu

Tín hiệu là biểu diễn vật lý của thông tin.

<u>*Ví du*</u>:

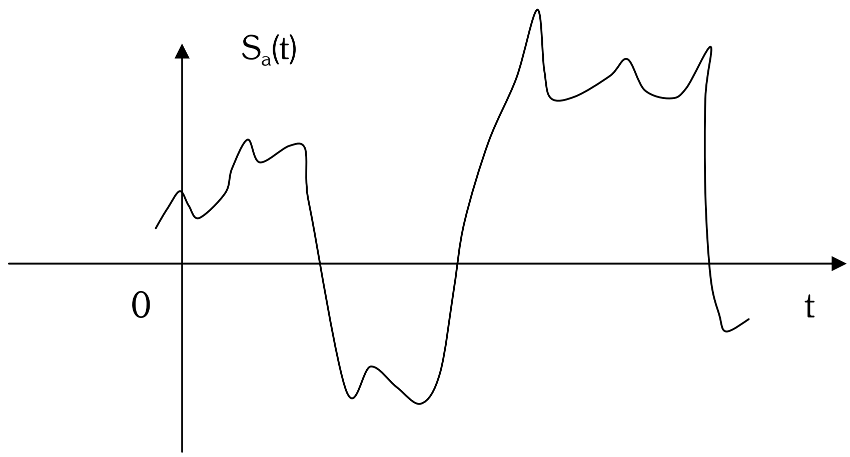
- Các tín hiệu nhìn thấy là các sóng ánh sáng mang thông tin tới mắt ta.

- Các tín hiệu nghe thấy là các sự biến đổi của áp suất không khí truyền thông tin tới tai.

b. Biểu diễn toán học của tín hiệu

Về mặt toán học, tín hiệu được biểu diễn bởi một hàm của một hoặc nhiều biến độc lập.

Ví dụ: Tín hiệu của tai nghe $S_a(t)$ là hàm một biến số (biến thời gian t), được biểu diễn như sau:



Hình 1.1. Tín hiệu tai nghe.

c. Định nghĩa tín hiệu liên tục

- Nếu biến độc lập của sự biểu diễn toán học của một tín hiệu là liên tục, thì tín hiệu đó được gọi là liên tục.

Dựa vào biên độ, tín hiệu liên tục được phân thành thành tín hiệu tương tự và tín hiệu lượng tử hoá.

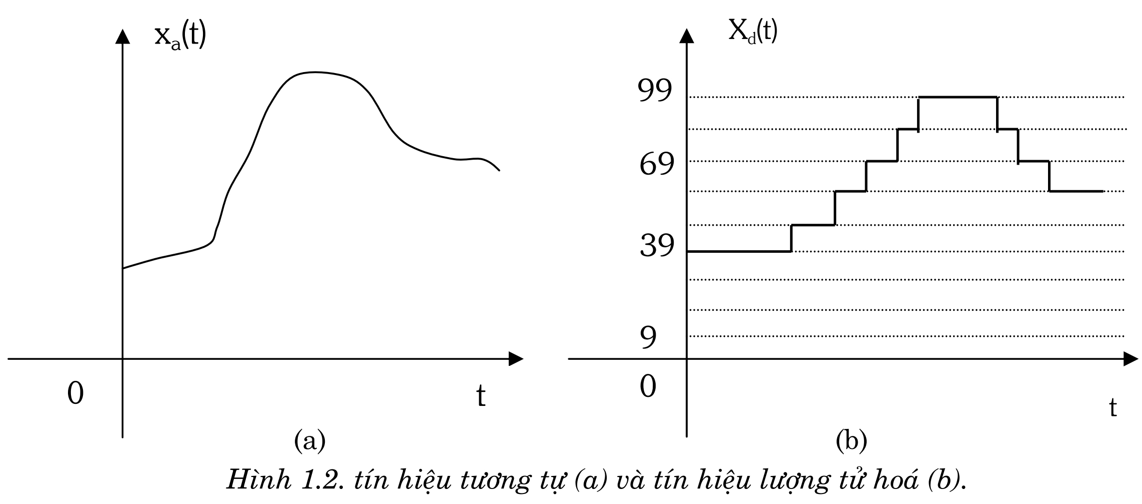
+. Tín hiệu tương tự:

Nếu biên độ của tín hiệu liên tục là liên tục thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu tương tự.

+. Tín hiệu lượng tử hoá:

Nếu biên độ của tín hiệu liên tục là rời rạc thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu lượng tử hoá.

Ví dụ: Biểu diễn các tín hiệu tương tự và tín hiệu lượng tử hoá như các hình 1.2a và 1.2b



Hình 1.2. tín hiệu tương tự (a) và tín hiệu lượng tử hoá (b).

d. Định nghĩa tín hiệu rời rạc

- Nếu tín hiệu được biểu diễn bởi hàm của các biến rời rạc, thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu rời rạc.

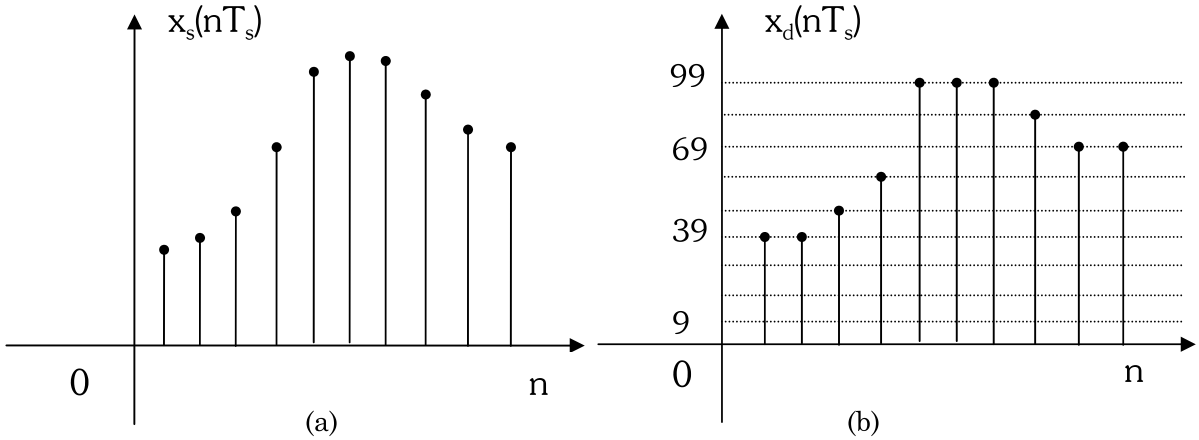
Dựa vào biên độ, tín hiệu rời rạc được phân thành tín hiệu lấy mẫu và tín hiệu số.

- Tín hiệu lấy mẫu

Nếu biên độ của tín hiệu rời rạc là liên tục (không được lượng tử hoá) thì đó được gọi là tín hiệu lấy mẫu, tín hiệu này thu được nhờ lấy mẫu từ tín hiệu tương tự.

- Tín hiệu số

Nếu biên độ của tín hiệu rời rạc là rời rạc, thì tín hiệu đó được gọi là tín hiệu số.



Hình 1.3. tín hiệu lấy mẫu (a) và tín hiệu số (b).

II. Tín hiệu rời rạc

II.1. Biểu diễn tín hiệu rời rạc.

a. Biểu diễn toán học

Tín hiệu rời rạc được biểu diễn bằng một dãy các giá trị thực hoặc phức, nếu nó được hình thành bởi các giá trị thực, thì nó được gọi là tín hiệu thực; còn nếu được hình thành bởi các giá trị phức, thì được gọi là tín hiệu phức.

Ta đưa vào các ký hiệu như sau: $x_s(nT_s)$: tín hiệu lấy mẫu; $x_d(nT_s)$: tín hiệu số và $x(nT_s)$: là tín hiệu rời rạc nói chung. Để tiện cho cách biểu diễn tín hiệu rời rạc, chúng ta sẽ chuẩn hoá biến số độc lập nT_s bởi chu kỳ lấy mẫu T_s (tương ứng trong miền tần số, chuẩn hoá theo tần số lấy mẫu F_s) như sau:

$$x(nT_s) \xrightarrow{\text{chuẩn hoá bởi } T_s} x(n)$$

Cách biểu diễn toán học tín hiệu rời rạc x(n) cụ thể như sau:

$$x(n) = \begin{cases} \text{Math Equation} & N_1 \le n \le N_2 \\ 0 & n < N_1 \text{ and } n > N_2 \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

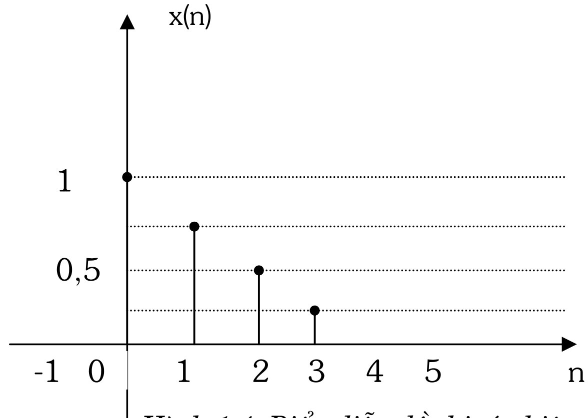
b. Biểu diễn đồ thị

Ví dụ:

Biểu diễn toán của một tín hiệu rời rạc như sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n < 0 \text{ and } n > 4 \end{cases}$$

Biểu diễn đồ thị của tín hiệu rời rạc trên như hình 1.4.



Hình 1.4. Biểu diễn đồ thị tín hiệu rời rạc.

II.2. Một số dãy cơ bản.

a. Dãy xung đơn vị.

Trong miền n, dãy xung đơn vị được định nghĩa như sau:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \ne 0 \end{cases} \qquad (1.2.2)$$

b. Dãy nhẩy đơn vị.

Trong miền n, dãy nhảy đơn vị được định nghĩa như sau:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad (1.1.3)$$

c. Dãy chữ nhật.

Trong miền n, dãy chữ nhật được định nghĩa như sau:

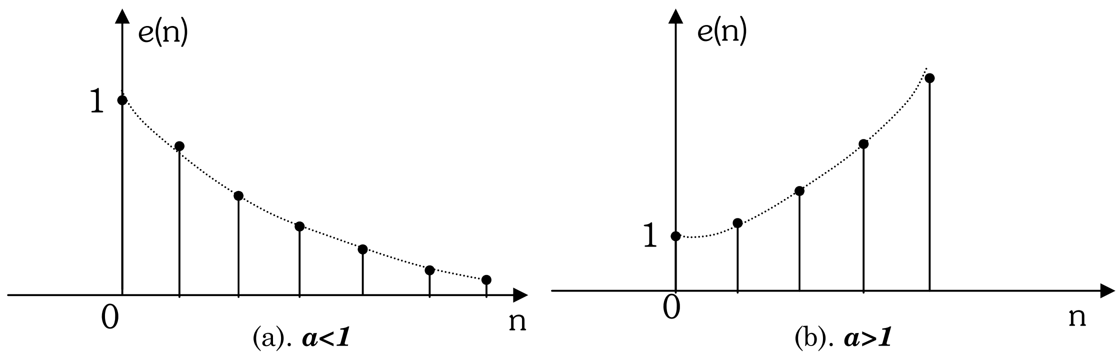
$$\mathrm{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N_1 \\ 0 & n < 0 \text{ and } n > N_1 \end{cases} \qquad (1.2.4)$$

d. Dãy hàm mũ thực.

Trong miền n, dãy hàm mũ thực được định nghĩa như sau:

$$e(n) = \begin{cases} a^n & 0 \le n \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad (1.2.5)$$

Dãy này tăng hoặc giảm tuỳ thuộc vào tham số a lớn hơn hay nhỏ hơn 1. như hình 1.5(a và b)



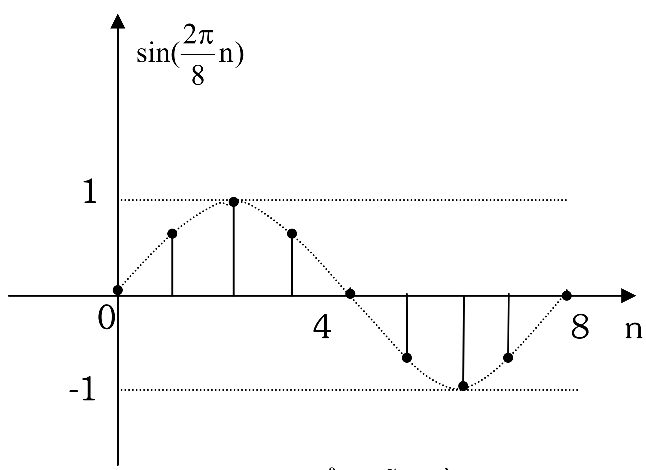
Hình 1.5. Biểu diễn đồ thị dãy hàm mũ thực.

e. Dãy sin.

Trong miền n, dãy sin được định nghĩa như sau:

$$s(n) = \sin(\omega_0 n). \quad (1.2.6)$$

Đồ thị của s(n) được biểu diễn trên hình 1.6, với $\omega_0 = \frac{2\pi}{8}$



Hình 1.6. Biểu diễn đồ thị dãy sin.

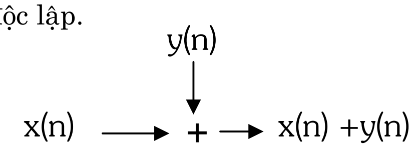
II.3. Các phép toán đối với tín hiệu rời rạc.

a. Tổng của hai dãy.

Định nghĩa: Tổng của hai dãy nhận được bằng cách cộng từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.

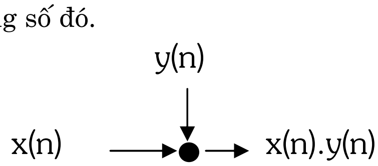
b. Tích của hai dãy.

Tích của hai dãy nhận được bằng cách nhân từng đôi một các giá trị mẫu đối với cùng một trị số của biến độc lập.



c. Tích với hằng số.

Tích của một dãy với một hằng số nhận được bằng cách nhân tất cả các giá trị mẫu của một dãy với chính hằng số đó.

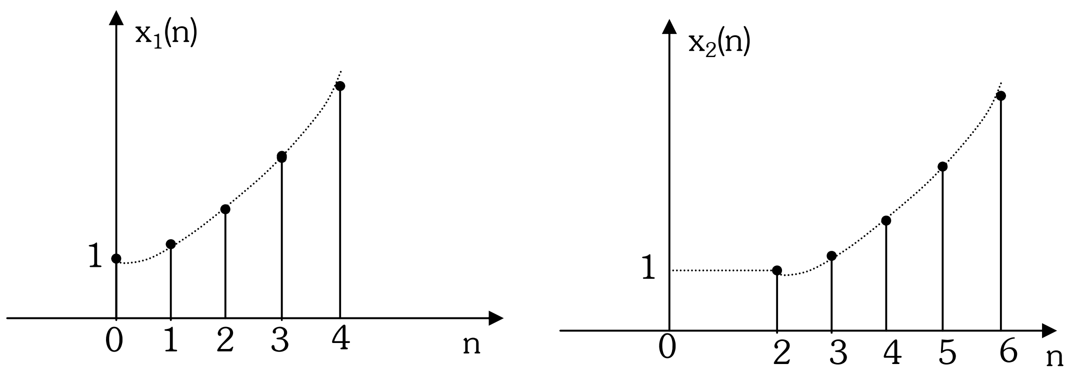


d. Trễ (phép dịch)

Ta nói rằng dãy $x_2(n)$ là dãy lặp lại trễ của dãy $x_1(n)$ khác nếu ta có:

$x_2(n) = x_1(n-n_0)$: với mọi n, n_0 nguyên.

Ví du trên hình 1.7 biểu diễn đồ thị hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$, với $x_2(n) = x_1(n-1)$.



Hình 1.7. Biểu diễn tín hiệu trễ.

III. Các hệ thống tuyến tính bất biến

Do tính khả hiện của hệ thống tuyến tính bất biến về cả lý thuyết và thực hành, nên trong giáo trình này, chúng ta chỉ hạn chế nghiên cứu các hệ tuyến tính bất biến.

III.1. Các hệ thống tuyến tính

a. Định nghĩa

Một hệ thống tuyến tính được đặc trưng bởi toán tử T (làm nhiệm vụ biến đổi dãy vào x(n) thành dãy ra y(n)) thoả mãn nguyên lý xếp chồng, tức là:

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aTx_1(n) + bTx_2(n) = ay_1(n) + by_2(n) \qquad (1.3.1)$$

trong đó: a, b là các hằng số, $y_1(n)$ là đáp ứng của kích thích $x_1(n)$ và $y_2(n)$ là đáp ứng của kích thích $x_2(n)$.

b. Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính.

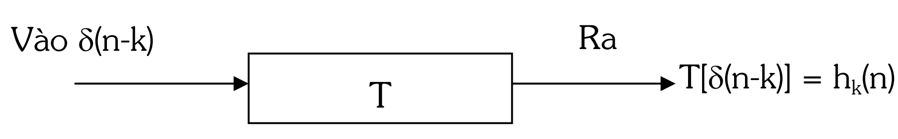
Một dãy bất kỳ x(n) có thể được biểu diễn bằng tổng:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Với hệ thống tuyến tính, ta có:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \qquad (1.3.2)$$

Nếu ký hiệu $h_k(n)$ là đáp ứng của hệ thống với kích thích δ(n-k), có nghĩa: $h_k(n) = T[\delta(n-k)]$.



Cuối cùng ta có: $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h_k(n)$. Đáp ứng $h_k(n)$ được gọi là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính.

Nhận xét:

- Các hệ thống tuyến tính được đặc trưng hoàn toàn bởi đáp ứng xung của nó.
- $h_k(n)$ là hàm của k và n, như vậy ở các giá trị k khác nhau sẽ cho ta các đáp ứng xung khác nhau, hệ thống tuyến tính này sẽ phụ thuộc vào biến k, nếu k là biến thời gian, thì ta có hệ thống tuyến tính phụ thuộc thời gian.

Sau đây chúng ta sẽ khảo sát hệ thống tuyến tính bất biến theo k.

III.2. Các hệ thống tuyến tính bất biến.

a. Định nghĩa.

Nếu y(n) là đáp ứng của kích thích x(n), thì hệ thống tuyến tính gọi là tuyến tính bất biến (TTBB) khi y(n-k) là đáp ứng của kích thích x(n-k): (k nguyên).

Ví dụ: Hệ thống y(n) = 2x(n) +3x(n-1) là hệ thống TTBB.

b. Tích chập.

Khi hệ thống là TTBB thì ta có quan hệ sau:

$T[\delta(n)] = h(n)$

$T[\delta(n-k)] = h(n-k) = h_k(n)$.

và: $$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h_k(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k) \qquad (1.3.3)$$

Khi đó, $h_k(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính. Còn h(n) là đáp ứng xung của hệ thống TTBB, không phụ thuộc vào k, tức là nếu biến là thời gian thì tại mọi thời điểm khác nhau đáp ứng xung của hệ thống TTBB luôn là h(n). Như vậy, đáp ứng xung h(n) sẽ đặc trưng hoàn toàn cho một hệ thống TTBB.

và ta có quan hệ:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(k)*h(n) \qquad (1.3.4)$$

Quan hệ (1.3.3) được gọi là tích chập của x(n) và h(n).

Chú ý: Tích chập này chỉ đúng với hệ thống TTBB, vì nó được định nghĩa chỉ cho hệ thống này.

***Ví dụ*:** Cho $x(n) = rect_5(n)$ và $h(n)=\begin{cases}1-\dfrac{n}{4} & 0\le n\le 4\\ 0 & n<0, n>4\end{cases}$

Tính tích chập x(n)*h(n).

Giải:

Từ công thức tích chập (1.3.3):

$$y(n)=x(k)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

ta thực hiện các bước:

- Đổi biến số n thành k

$x(k) = rect_5(k)$

$$h(n-k) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n-k}{4} & 0 \le n-k \le 4 \\ 0 & n-k < 0, n-k > 4 \end{cases}$$

Vì $$x(k) = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le 4 \\ 0 & k < 0, k > 4 \end{cases}$$

Nên ta có: Tổng k chỉ cần tính từ 0 đến 4 và n chỉ xác định từ 0 đến 8.

- Với n = 0 ta có: $y(0) = \sum_{k=0}^{4} x(k)h(-k) = 1.1 + 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0 = 1$

- Với n = 1 ta có: $y(1) = \sum_{k=0}^{4} x(k)h(1-k) = 1.0,75 + 1.1 + 1.0 + 1.0 + 1.0 = 1,75$

- Với n = 2 ta có: $y(2) = \sum_{k=0}^{4} x(k)h(2-k) = 1.0,5 + 1.0,75 + 1.1 + 1.0 + 1.0 = 2,25$

- Với n = 3 ta có: $y(3) = \sum_{k=0}^{4} x(k)h(3-k) = 1.0,25 + 1.0,5 + 1.0,75 + 1.1 + 1.0 = 2,5$

- Với n = 4 ta có: $y(4) = \sum_{k=0}^{4} x(k)h(4-k) = 1.0 + 1.0,25 + 1.0,5 + 1.0,75 + 1.1 = 2,5$

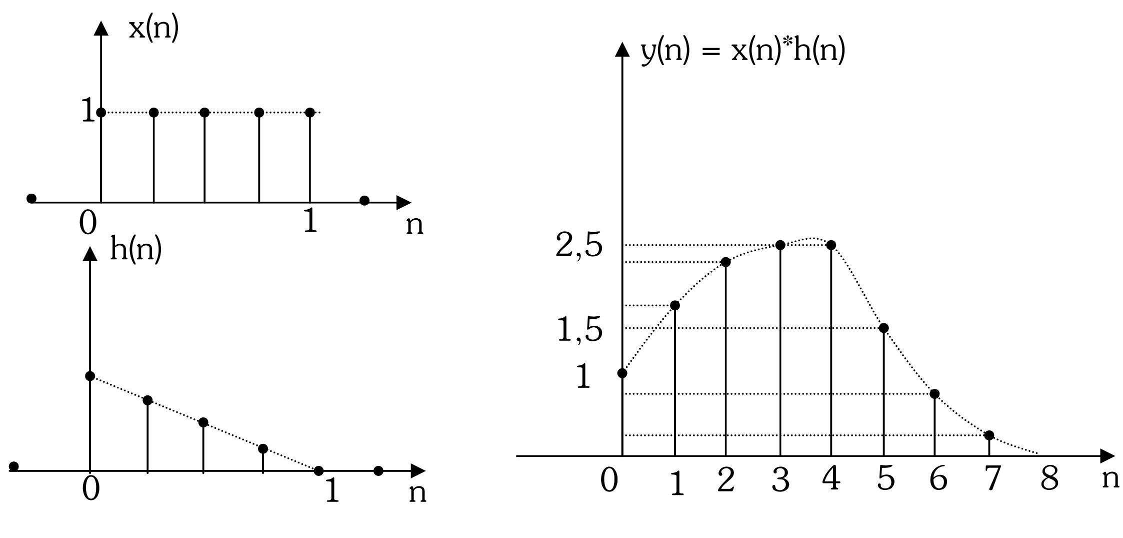
- Với n = 5 ta có: $y(5) = \sum_{k=0}^{4} x(k)h(5-k) = 1.0 + 1.0 + 1.0,25 + 1.0,5 + 1.0,75 = 1,5$

- Với n = 6 ta có: $y(6) = \sum_{k=0}^{4} x(k)h(6-k) = 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0,25 + 1.0,5 = 0,75$

- Với n = 7 ta có: $y(7) = \sum_{k=0}^{4} x(k)h(7-k) = 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0,25 = 0,25$

- Với n = 8 ta có: $y(8) = \sum_{k=0}^{4} x(k)h(8-k) = 1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0,25 + 1.0 = 0$

Cuối cùng, ta có y(n) được biểu diễn bằng đồ thị sau:



Hình 1.8. Đồ thị đáp ứng ra của hệ thống TTBB

c. Các tính chất của tích chập

- Tích chập có tính chất giao hoán.

$$y(n) = x(n)*h(n) = h(n)*x(n). \qquad (1.3.5)$$

Chứng minh: Từ biểu thức: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)h(k)$.

Thay biến: n - k = l $\Rightarrow$ k = n - l; k : - ∞ -> l : +∞ và k : + ∞ -> l : -∞

$$\Rightarrow \quad \sum_{l=+\infty}^{-\infty} x(n-l)h(l) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(l)x(n-l) \quad \Rightarrow \quad y(n) = h(n)*x(n).$$

- Tích chập có tính kết hợp.

$$y(n) = x(n)*[h_1(n) * h_2(n)] = [x(n)*h_1(n)]*h_2(n). \qquad (1.3.6)$$

Quan hệ (1.3.6) cho thấy việc mắc nối tiếp hai hệ thống TTBB có đáp ứng xung $h_1(n)$ và $h_2(n)$ sẽ tương đương với một hệ thống TTBB có đáp ứng xung là tích chập của $h_1(n)$ và $h_2(n)$.

Chứng minh:

$$\begin{aligned} x(n)*[h_1(n)*h_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)[h_1(n-k)*h_2(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)[h_2(n-k)*h_1(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_2(l)h_1[(n-k)-l]\right] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_1[(n-l)-k]\right]h_2(l) \\ &= [x(n)*h_1(n)]*h_2(n) \end{aligned}$$

- Tích chập có tính phân phối.

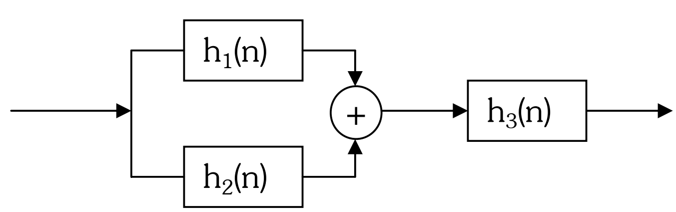
$$y(n) = x(n)*[h_1(n) + h_2(n)] = [x(n)*h_1(n)] + [x(n)*h_2(n)] \qquad (1.3.7)$$

Quan hệ (1.3.7) cho thấy việc mắc song song hai hệ thống TTBB có đáp ứng xung $h_1(n)$ và $h_2(n)$ sẽ tương đương với một hệ thống TTBB có đáp ứng xung là tổng của $h_1(n)$ và $h_2(n)$.

Chứng minh:

$$\begin{aligned} x(n)*[h_1(n)+h_2(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)[h_1(n-k)+h_2(n-k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_1(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_2(n-k) \\ &= [x(n)*h_1(n)]+[x(n)*h_2(n)] \end{aligned}$$

***<u>Ví dụ</u>*:** Cho ba hệ thống tuyến tính bất biến $h_1(n)$, $h_2(n)$ và $h_3(n)$, theo sơ đồ sau (hình 1.9):



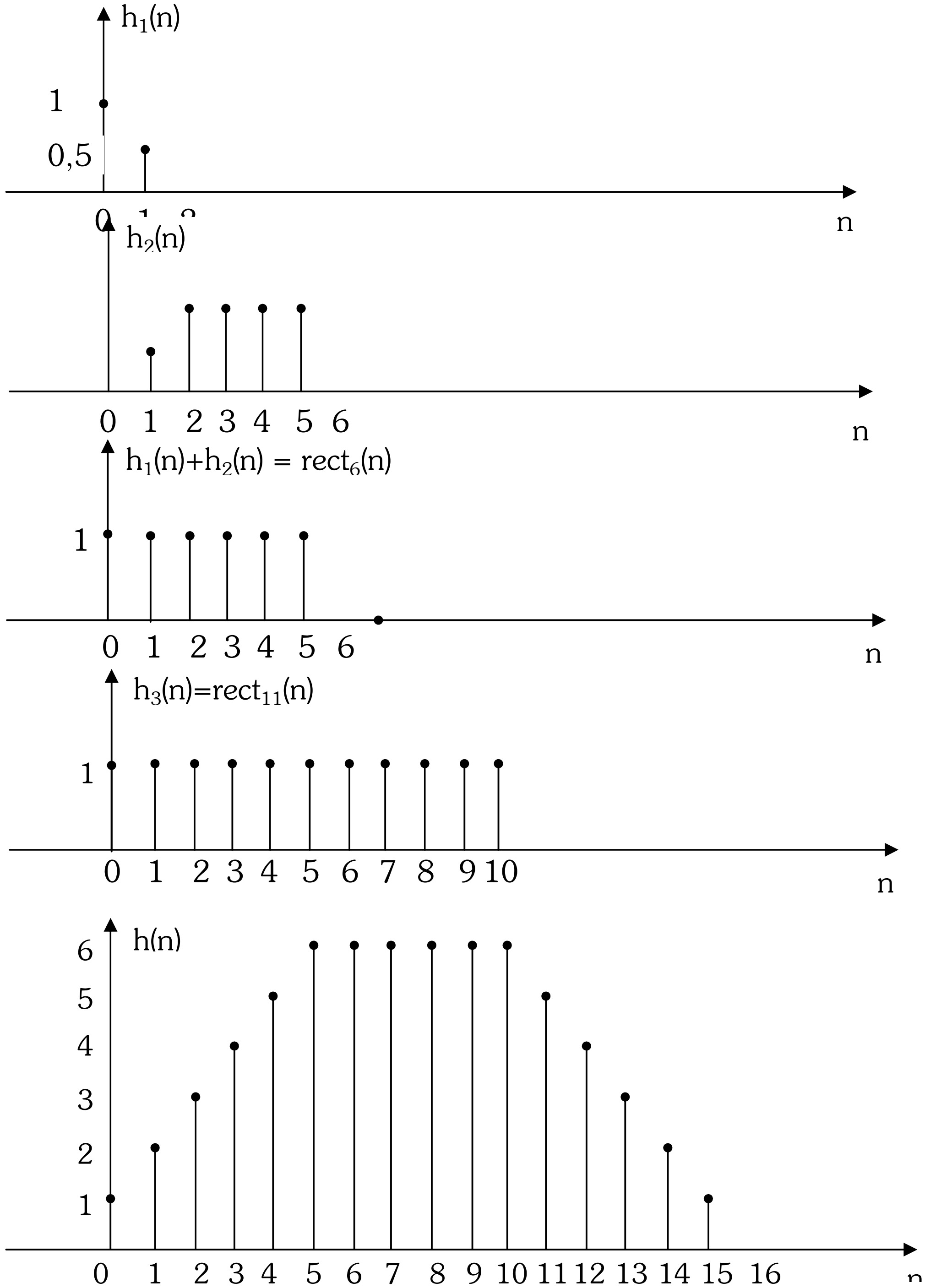
Hình 1.9. Sơ đồ hệ thống TTBB

Với: $h_1(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{2} & 0 \le n \le 2 \\ 0 & \end{cases}$ $\quad h_2(n) = \dfrac{1}{2}\delta(n-1) + u(n-2) - u(n-6)$

và $h_3(n) = rect_{11}(n)$. Tính h(n) của hệ thống.

Giải: Từ sơ đồ của hệ thống ta có đáp ứng xung của hệ thông xác định như sau:

$h(n) = [h_1(n) + h_2(n)] * h_3(n)$. Biểu diễn các đáp ứng xung dạng đồ thị như sau (hình 1.10):



Hình 1.10. Biểu diễn đáp ứng xung của hệ thống.

III.3. Hệ nhân quả.

a. Định nghĩa

Một hệ thống TTBB gọi là nhân quả nếu đáp ứng ra của nó ở một thời điểm bất kỳ chỉ phụ thuộc vào kích thích của nó trong quá khứ hoặc hiện tại (độc lập ở các thời điểm tương lai).

b. Đáp ứng xung của hệ nhân quả.

Định lý:

Đáp ứng xung của hệ nhân quả phải bằng 0 ($h(n) = 0$) với mọi $n < 0$.

Chứng minh:

Giả sử ta có hai kích thích $x_1(n)$ và $x_2(n)$: $x_1(n) = x_2(n)$ với $n<n_0$.

$x_1(n) \neq x_2(n)$ với $n \geq n_0$.

Ta có đáp ứng ra của hệ thống TTBB:

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)h(n-k)$$

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)h(n-k)$$

Nếu hệ này là hệ nhân quả thì ta có: $y_1(n) = y_2(n)$ với $n < n_0$. Biến đổi tổng trên ta được:

$$y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_1(k)h(n-k) + \sum_{k=n_0}^{\infty} x_1(k)h(n-k)$$

$$y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{n_0-1} x_2(k)h(n-k) + \sum_{k=n_0}^{\infty} x_2(k)h(n-k)$$

Với $k < n_0$ ta có:

$$y_1(n) - y_2(n) = \sum_{k=n_0}^{\infty} x_1(k)h(n-k) - \sum_{k=n_0}^{\infty} x_2(k)h(n-k)$$

$$= \sum_{k=n_0}^{\infty} \left[x_1(k) - x_2(k)\right]h(n-k)$$

Vì với $k \geq n_0$ ta có: $x_1(k) \neq x_2(k)$; mặt khác với $n < n_0$ thì $y_1(n) = y_2(n)$. Do đó, $h(n-k) = h(m) = 0$ với $m = n - k < 0$.

- Đối với hệ TTBB và nhân quả, dạng chung của công thức tính tổng chập sẽ đơn giản thành:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)h(k) \qquad (1.3.8)$$

- Nếu đáp ứng xung có độ dài hữu hạn N thì:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} x(n-k)h(k) \qquad (1.3.9)$$

III.4. Hệ thống tuyến tính bất biến ổn định.

a. Định nghĩa:

Một hệ thống được gọi là ổn định, nếu và chỉ nếu với dãy đầu vào hữu hạn, ta có dãy đầu ra hữu hạn.

b. Định lý:

Một hệ thống TTBB là ổn định khi và chỉ khi đáp ứng xung của nó thoả mãn điều kiện sau:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \qquad (1.3.10)$$

Chứng minh: Ta cần chứng minh điều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định.

- Điều kiện đủ: nếu với x(n) bị chặn với mọi n mà ta có:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \qquad \text{thì } y(n) < \infty \text{ với mọi n.}$$

Ta có: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \Rightarrow |y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$

Như vậy, nếu kích thích x(n) bị hạn chế, thì ta có: $x(n) \le M < \infty$: với mọi n ($\forall n$). Khi đó: $|y(n)| \le M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$

Theo giả thiết, nếu: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$ thì : $|y(n)| < \infty$ với mọi n.

- Điều kiện cần: theo định nghĩa hệ ổn định, ta phải có $y(n) < \infty$ với mọi n. Do đó điều kiện cần có thể được chứng minh tại một mẫu n nào đó mà y(n) không bị chặn với giả thiết tổng không bị chặn.

Ta xét mẫu n = 0.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k): \quad n = 0 \Rightarrow y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k)$$

Giả sử cho tác động x(0) = 1 nếu h(-n) > 0 và ngược lại: x(0) = -1 nếu h(-n) < 0.

Khi đó: $y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(-k)| = \infty$. Do vậy tín hiệu ra không bị chặn nếu không thoả mãn điều kiện (1.2.10).

***<u>Ví dụ</u>*:**

Với hệ có đáp ứng xung dạng $h(n) = a^n.u(n)$.

Ta thấy: đáp ứng xung của hệ h(n) = 0 với n < 0; do đó đây là hệ nhân quả. Để xét tính ổn định ta có:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n .$$

Chuỗi luỹ thừa này sẽ hội tụ và S = 1/(1-|a|) với |a|<1. Nó sẽ phân kỳ nếu |a|> 1. Do vậy hệ chỉ ổn định nếu |a|<1.

IV. Các phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

IV.1. Phương trình sai phân tuyến tính

Về mặt toán học, kích thích vào x(n) và đáp ứng ra y(n) của hầu hết các hệ thống tuyến tính thoả mãn một phương trình sai phân tuyến tính sau:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(n)y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r(n)x(n-r) \qquad (1.4.1)$$

Trong đó N, M nguyên dương, N là bậc của phương trình sai phân. Trong phương trình này, tập hợp các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$ sẽ biểu diễn toàn bộ hành vi của hệ thống với một giá trị n cho trước.

IV.2. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

a. Dạng tổng quát

Trong chương trình, đối tượng nghiên cứu là các hệ thống TTBB. Các hệ thống này có dãy vào và ra của hệ thống liên hệ với nhau bởi một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bậc N như sau:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \tag{1.4.2}$$

Khi đó, tập hợp các hệ số a_k và b_r đặc trưng cho hệ thống TTBB.

Từ (1.4.2), nếu $a_0 \neq 0$ thì ta có:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{r=0}^{M} b'_r\, x(n-r) - \sum_{k=1}^{N} a'_k\, y(n-k) \\ b'_r &= \frac{b_r}{a_0}; \quad a'_k = \frac{a_k}{a_0} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

<u>Ví dụ</u>:

Xét phương trình sai phân bậc nhất: y(n) = ay(n-1) + x(n). Tìm đáp ứng xung của hệ thống với điều kiện đầu y(n) = 0 với n <0.

<u>Giải:</u>

Giả thiết kích thích là dãy xung đơn vị: x(n) = δ(n). khi đó đáp ứng ra chính là đáp ứng xung của hệ thống: y(n) = h(n).

- Với điều kiện đầu: y(n) = 0 với n<0 ta có:

$$h(n) = 0 \quad \text{với} \quad n < 0. \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &h(0) = ah(-1) + \delta(0) = a.0 + 1 = 1. \\ &h(1) = ah(0) + \delta(1) = a.1 + 0 = a. \\ &h(2) = ah(1) + \delta(2) = a.a + 0 = a^2. \\ &h(3) = ah(2) + \delta(3) = a.a^2 + 0 = a^3. \\ &\ldots \\ &h(n) = ah(n-1) + \delta(n) = a^n. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Kết hợp (1), (2) ta có: $h(n) = a^n u(n)$. Đây là hệ thống nhân quả.

b. Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính (PTSPTT) hệ số hằng.

Các bước giải hệ PTSPTT hệ số hằng:

1. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

Phương trình sai phân thuần nhất có dạng:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0 \tag{1.4.4}$$

Thông thường, nghiệm của (1.4.4) có dạng mũ: $y_0(n) = \alpha^n$. Thay vào (1.4.4) ta được:

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + a_2\alpha^{N-2} + \ldots a_{N-1}\alpha + a_N = 0 \tag{1.4.5}$$

Phương trình này gọi là phương trình đặc trưng của hệ thống, đa thức ở vế trái gọi là đa thức đặc trưng bậc N.

Phương trình đặc trưng sẽ có N nghiệm, các nghiệm có thể là thực hoặc phức. Nếu các nghiệm trùng nhau, ta có nghiệm bội. Nếu các hệ số a_i của phương trình là thực thì các nghiệm phức sẽ là các cặp liên hợp.

Gọi α_i : i = [1, N] là các nghiệm đơn, ta sẽ có nghiệm tổng quát của phương trình sai phân thuần nhất dưới dạng sau:

$$y_0(n) = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \ldots + A_N\alpha_N^n = \sum_{k=1}^{N} a_k\alpha_k^n \qquad (1.4.6)$$

trong đó: A_i là các hằng số được xác định theo các điều kiện đầu.

2. Tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân không thuần nhất.

Nghiệm riêng $y_p(n)$ thường được chọn giống như dạng của x(n).

3. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân.

Nghiệm tổng quát của PTSPTT sẽ là tổng của nghiệm tổng quát của PTSPTT thuần nhất và nghiệm riêng của PTSPTT.

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n). \qquad (1.4.7)$$

4. Tìm các hệ số nhờ các điều kiện đầu.

***Ví dụ*:** Giải phương trình sai phân sau: y(n) + 2y(n-1) = x(n), với điều kiện đầu y(-1) = 0 và x(n) = n.

Giải:

- Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: y(n) + 2y(n-1) = 0 (*), nghiệm tổng quát $y_0(n)$ có dạng: α^n. Thay vào ta được (*) :

$$\alpha^n + 2\alpha^{n-1} = 0 \Leftrightarrow \alpha^{n-1}(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2.$$

Như vậy phương trình đặc trưng chỉ có một nghiệm đơn $\alpha_1 = -2$.

$$\Rightarrow \quad y_0(n) = A_1\alpha_1^n = A_1(-2)^n \qquad (a)$$

- Tìm nghiệm riêng, dạng giống x(n) = n:

$$y_p(n) = Bn + C$$

trong đó: B và C là các hằng số cần xác định.

Thay vào PTSPTT ta được:

$$Bn + C + 2B(n-1) + 2C = n \Leftrightarrow 3Bn + 3C - 2B = n.$$

Đồng nhất các hệ số ta được: $B = \frac{1}{3}; \quad C = \frac{2}{9}$

$$\Rightarrow \quad y_p(n) = \frac{n}{3} + \frac{2}{9} \qquad (b)$$

- Tìm nghiệm tổng quát y(n):

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1(-2)^n + \left(\frac{n}{3} + \frac{2}{9}\right) \qquad (c)$$

- Xác định hệ số A_1:

Theo giả thiết, y(-1) = 0. Thay vào (c) ta được:

$$y(-1) = A_1(-2)^{-1} + \left(\frac{-1}{3} + \frac{2}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow A_1 = -\frac{2}{9}$$

Vậy nghiệm của PTSPTT là: $y(n) = \frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\left[1 - (-2)^n\right]$

IV.3. Đáp ứng xung hữu hạn và vô hạn

Trong thực tế kỹ thuật, người ta thường phân biệt hai trường hợp của đáp ứng xung: hệ có đáp ứng xung hữu hạn và hệ có đáp ứng xung vô hạn. Ta sẽ khảo sát các hệ trên ứng với các trường hợp PTSPTT hệ số hằng sau:

Từ PTSPTT hệ số hằng của hệ: $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$

+. *Nếu N = 0, thì phương trình trở thành:* $y(n) = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r)$; $a_0 \neq 0$.

Đặt: $h(n) = \frac{b_n}{a_0}$; Ta sẽ có: $y(n) = \sum_{r=0}^{M} h(r)x(n-r)$

Đây chính là tích chập giữa h(n) và x(n) khi h(n) là nhân quả và có chiều dài hữu hạn: L[h(n)] = M+1; h(n) chính là đáp ứng xung của hệ thống không đệ quy hay hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR system).

+. *Nếu N ≠ 0, thì phương trình trở thành:*

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b'_r x(n-r) - \sum_{k=1}^{N} a'_k y(n-k) \quad ; \quad a_0 \neq 0.$$
$$b'_r = \frac{b_r}{a_0}; \quad a'_k = \frac{a_k}{a_0}$$

Trong quan hệ trên ta thấy rằng b'_r và a'_r là các hằng số, vậy hệ thống này có đáp ứng ra phụ thuộc vào kích thích ở thời điểm hiện tại và quá khứ và vào cả đáp ứng ra ở thời điểm quá khứ.

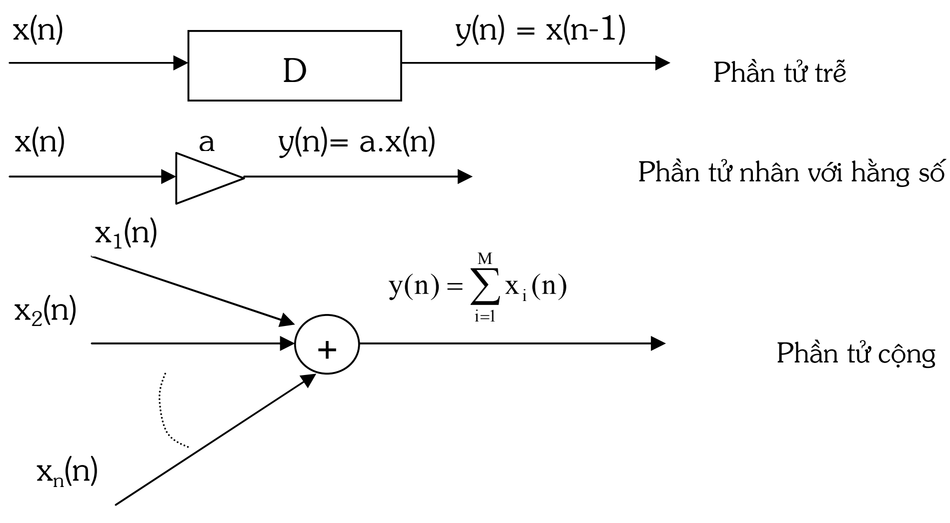
Nếu giải phương trình trên với x(n) = δ(n) để xác định đáp ứng xung h(n) ta sẽ thấy đáp ứng xung của hệ thống này có chiều dài vô hạn. Hệ thống này được gọi là hệ thống đệ quy hay hệ có đáp ứng xung dài vô hạn (IIR system).

IV.4. Các phần tử thực hiện hệ thống TTBB.

Nhờ có PTSPTT hệ số hằng, chúng ta có thể thực hiện trực tiếp các hệ thống số bằng các phần tử sau:

a. Các phần tử thực hiện.

Các phần tử trên được biểu diễn như trong các hình sau:



Hình 1.11. Các phần tử cơ bản.

b. Phương trình sai phân của các hệ thống.

- Hệ thống không đệ quy: $y(n) = b_0x(n) + \sum_{r=1}^{M} b_r x(n-r)$

- Hệ thống đệ quy: $y(n) = b_0x(n) + \sum_{r=1}^{M} b_r x(n-r) + \sum_{k=1}^{N} (-a_k)y(n-k)$

- Hệ thống đệ quy thuần tuý: $y(n) = b_0 x(n) + \sum_{k=1}^{N} (-a_k) y(n-k)$

c. Thực hiện các hệ thống rời rạc

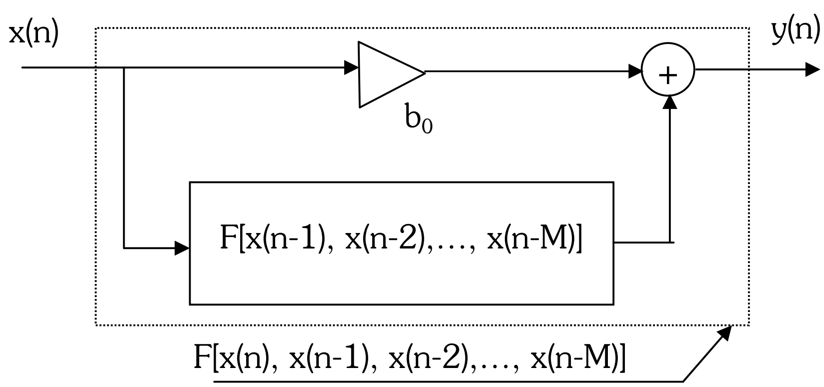
Một hệ thống TTBB nhân quả và ổn định là hệ thống thực hiện đượcc về mặt vật lý, cho dù là hệ thống đó là không đệ quy, đệ quy hay đệ quy thuần tuý.

Dựa vào phương trình sai phân hệ số hằng của từng hệ thống này, ta có thể xây dựng sơ đồ khối tổng quát của chúng như sau (hình 1.12):

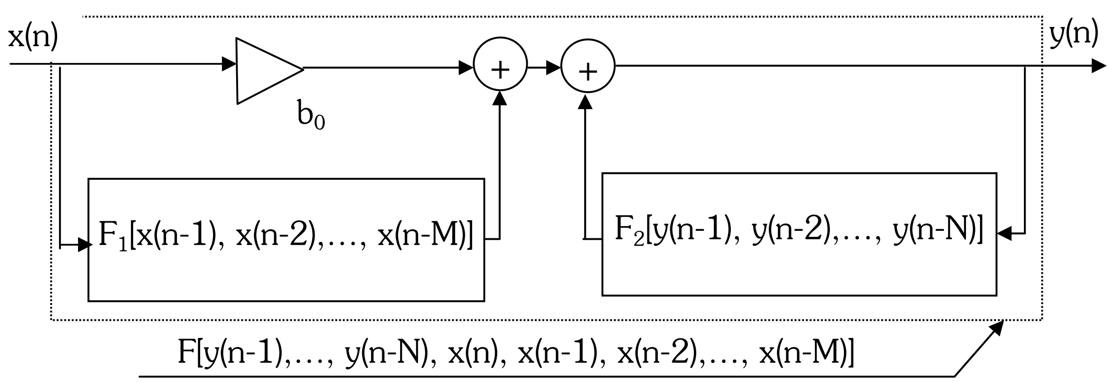
- Hệ thống không đệ quy: $y(n) = b_0 x(n) + \underbrace{\sum_{r=1}^{M} b_r x(n-r)}_{F_1[x(n-1),\dots,x(n-M)]}$

- Hệ thống đệ quy $y(n) = b_0 x(n) + \underbrace{\sum_{r=1}^{M} b_r x(n-r)}_{F_1[x(n-1),\dots,x(n-M)]} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} (-a_k) y(n-k)}_{F_2[y(n-1),\dots,y(n-N)]}$

- Hệ thống đệ quy thuần tuý $y(n) = b_0 x(n) + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} (-a_k) y(n-k)}_{F_2[y(n-1),\dots,y(n-N)]}$



Hình 1.12a. Hệ thống không đệ quy



Hình 1.12b. Hệ thống đệ quy

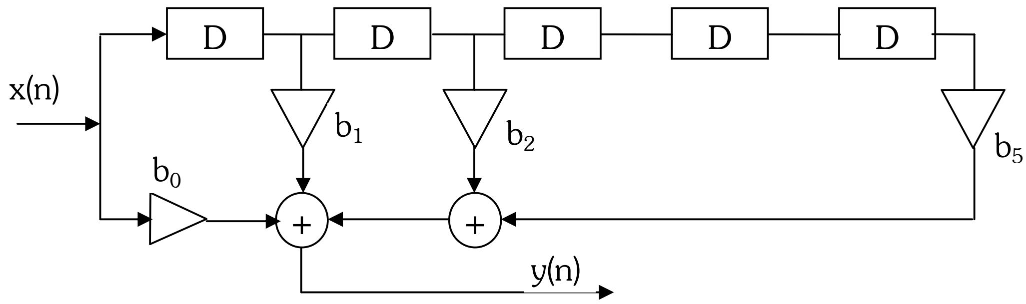
Ví dụ: Cho phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) + b_5x(n-5)$$

Vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống mô tả bởi phương trình này.

Giải:

Đây là hệ thống không đệ quy: N = 0, M = 5. Sơ đồ của hệ thống như sau:



V. tương quan của các tín hiệu

V.1. Mở đầu

Trong việc xử lý tín hiệu, chúng ta luôn cần phải so sánh các tín hiệu với nhau, chẳng hạn như trong kỹ thuật rađa, rađa sẽ phát tín hiệu tìm mục tiêu là x(n), tín hiệu này nếu gặp mục tiêu sẽ phản xạ trở lại nhưng bị trễ đi một thời gian $D = n_0T_s$ (T_s là chu kỳ lấy mẫu), độ suy giảm của tín hiệu với hệ số A, tức là tín hiệu nhận được là $A.x(n - n_0)$. Ngoài tín hiệu phản xạ này còn có các tín hiệu nhiễu cộng can thiệp $\gamma(n)$. Vậy tín hiệu tổng cộng mà rađa nhận được sẽ là:

$$y(n) = ax(n - n_0) + \gamma(n).$$

Nếu không có mục tiêu thì :

$$y(n) = \gamma(n).$$

So sánh hai tín hiệu x(n) và y(n) ta sẽ phát hiện được có mục tiêu hay không, từ đó có thể xác định được vị trí cũng như tính chất của mục tiêu. Một phương pháp so sánh thường được sử dụng nhất đó là tương quan, sẽ trình bày dưới đây.

V.2. Tương quan chéo và tự tương quan

a. Tương quan chéo

Giả sử ta có hai dãy x(n) và y(n), tối thiểu một trong hai dãy có năng lượng hữu hạn. Tương quan chéo của x(n) và y(n) được định nghĩa như sau:

$$r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(m-n) \qquad (1.5.1)$$

b. Tự tương quan

Trong định nghĩa về tương quan chéo, nếu x(n) = y(n) thì quan hệ trên trở thành tự tương quan. Tự tương quan được định nghĩa như sau:

$$r_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m-n) \qquad (1.5.2)$$

CHƯƠNG 2
PHÉP BIẾN ĐỔI Z

I. Mở đầu

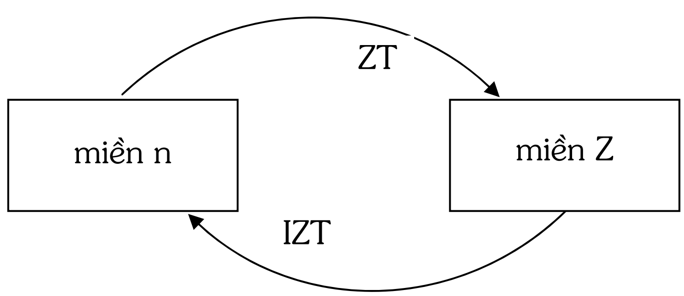
Trong chương 1, chúng ta đã khảo sát tín hiệu và hệ thống rời rác trong miền biến số độc lập tự nhiên. Đây là cách khảo sát trực tiếp, tuy nhiên trong nhiều trường hợp cách này gặp khó khăn và nói chung hiệu quả không cao.

Ngoài phương pháp này, chúng ta có thể dùng nhiều phương pháp khảo sát gián tiếp khác thông qua các kỹ thuật biến đổi. Các biến đổi này làm nhiệm vụ chuyển miền biến số độc lập tự nhiên sang các miền khác và như vậy tín hiệu và hệ thống rời rạc sẽ được biểu diễn trong các miền mới với các biến số mới. Mỗi cách biến đổi sẽ có những thuận lợi riêng của nó, tuỳ từng trường hợp cụ thể mà ta ứng dụng chúng. Sau khi đã khảo sát xong tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền các biến số mới này, nếu cần thiết chúng ta lại có thể dùng các phép biến đổi ngược để đưa chúng về miền biến số độc lập tự nhiên.

Các phương pháp khảo sát gián tiếp nói chung sẽ làm đơn giản rất nhiều những khó khăn mà ta gặp khi sử dụng phép khảo sát trực tiếp. Một trong các phương pháp khảo sát gián tiếp thường được sử dụng là phép biến đổi Z mà ta sẽ nghiên cứu trong nội dung của chương này.

Phép biến đổi Z đóng vai trò như phép biến đổi Laplace trong việc phân tích tín hiệu và hệ thống liên tục.

Quan hệ giữa miền tự nhiên n và miền Z được minh hoạ như hình 2.1 sau:



Hình 2.1. Quan hệ giữa miền n và miền Z

II. Phép biến đổi Z (ZT - Z Transform)

II.1. Định nghĩa phép biến đổi Z hai phía và một phía

a. Biến đổi Z hai phía.

Định nghĩa. Biến đổi Z hai phía của dãy x(n) được định nghĩa như sau:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} \tag{2.2.1}$$

Ký hiệu: $ZT[x(n)] = X(Z)$, hay $x(n) \xrightarrow{ZT} X(Z)$

trong đó Z là biến số phức.

Như vậy biến đổi Z là biến đổi việc biểu diễn tín hiệu x(n) trong miền biến số độc lập tự nhiên thành việc biểu diễn tín hiệu X(Z) trong miền phức Z và X(Z) là một hàm phức.

Biến đổi Z là một chuỗi luỹ thừa vô hạn, nó chỉ tồn tại với các giá trị của Z mà tại đó chuỗi hội tụ.

Ví dụ: Tìm biến đổi Z của các tín hiệu có chiều dài hữu hạn sau:

$x_1(n) = \delta(n)$

$x_2(n) = 2\delta(n+2) + \delta(n) + 3\delta(n-1)$

Giải: $X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) Z^{-n} = 1.Z^0 = 1$

$$X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[2\delta(n+2) + \delta(n) + 3\delta(n-1)\right] Z^{-n} = 2Z^2 + 1.Z^0 + 3.Z^{-1}$$

Nhận xét:

- $X_1(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z, tức là trong toàn bộ mặt phẳng Z. Khi đó ta nói $ZT[x_1(n)]$ hội tụ trong toàn mặt phẳng Z.
- $X_2(Z)$ tồn tại với mọi giá trị của Z, trừ Z = 0 và Z = ∞, tức là $ZT[x_2(n)]$ hội tụ trong toàn mặt phẳng Z, trừ gốc 0 và điểm vô cực ∞.

b. Biến đổi Z một phía

Định nghĩa. Biến đổi Z một phía của dãy x(n) được định nghĩa như sau:

$$X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) Z^{-n} \qquad (2.2.2)$$

Ký hiệu: $ZT^1[x(n)] = X^1(Z)$

Chú ý:

- Biến đổi Z một phía không biểu diễn được tín hiệu x(n) đối với miền biến số độc lập âm.
- Đối với tín hiệu nhân quả thì biến đổi Z một phía là duy nhất, vì tín hiệu nhân quả bằng không với n < 0.

Ví dụ: Tìm biến đổi Z một phía của các tín hiệu có chiều dài hữu hạn sau:

$x_1(n) = \delta(n)$

$x_2(n) = 2\delta(n+2) + \delta(n) + 3\delta(n-1)$

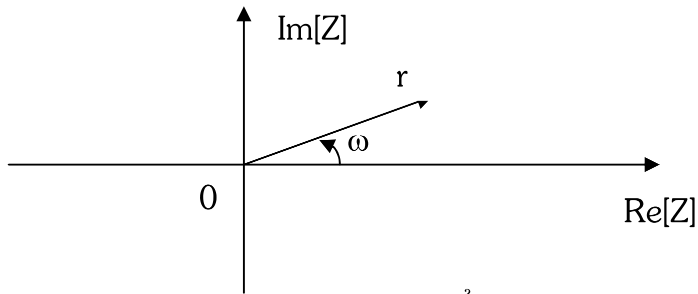
Giải:

$X_1^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) Z^{-n} = 1.Z^0 = 1$ tồn tại với mọi giá trị của Z

$X_2^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[2\delta(n+2) + \delta(n) + 3\delta(n-1)\right] Z^{-n} = 1.Z^0 + 3.Z^{-1} = 1 + 3Z^{-1}$ tồn tại với mọi giá trị của Z, trừ Z = 0.

c. Mặt phẳng Z

Mặt phẳng phức Z được tạo bởi trục tung ứng với trục ảo và trục hoành là trục thực như hình 2.2



Hình 2.2. Mặt phẳng Z

Biểu diễn Z trong các hệ toạ độ như sau:

$$Z = Re[Z] + j.Im[Z] \qquad (2.2.3)$$

hoặc trong toạ độ cực: $Z = z.e^{j\omega}$ (2.2.4)

Trong mặt phẳng Z cần nói đến vòng tròn đơn vị, là vòng tròn ứng với $|Z|=1$. Đây là vòng tròn đặc biệt quan trọng trong việc đánh giá các đặc tính của hệ thống số dựa vào các vị trí của điểm cực, điểm không đối với vòng tròn đơn vị; mà ta sẽ khảo sát trong nội dung tiếp theo.

II.2. Sự tồn tại của phép biến đổi Z

a. Miền hội tụ của biến đổi Z

Định nghĩa 1:

Tập hợp các giá trị của Z mà tại đó chuỗi $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = ZT[x(n)]$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z (hai phía).

Định nghĩa 2:

Tập hợp các giá trị của Z mà tại đó chuỗi $X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} = ZT^1[x(n)]$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z một phía.

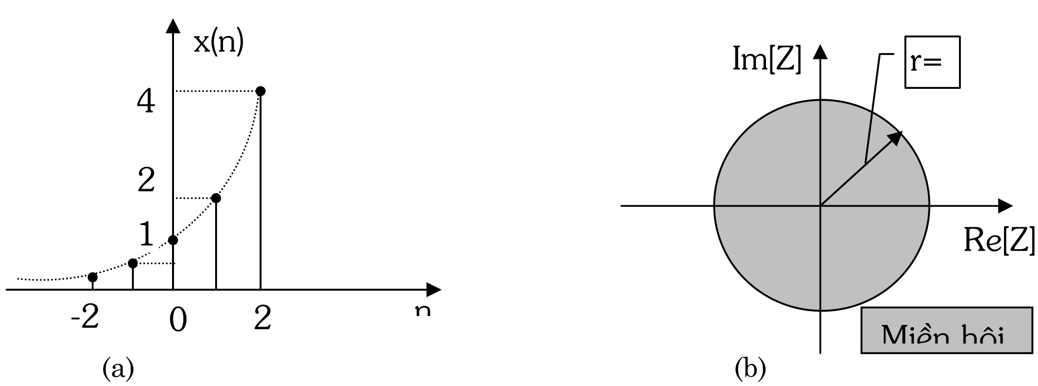
<u>*Ví dụ*</u>: Cho tín hiệu rời rạc sau:

$$x(n) = \begin{cases} 2^n & \text{with: } -\infty \le n \le 2 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

Xác định biến đổi Z hai phía, một phía và xác định miền hội tụ.

Giải:

Tín hiệu x(n) là không nhân quả, có chiều dài vô hạn: L[x(n)]=[-∞, 2] = ∞ và được biểu diễn trên hình 2.3a sau:



Hình 2.3. Biểu diễn x(n) (a) và miền hội tụ của X(Z) (b).

- Xác định biến đổi Z hai phía.

Ta có: $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{2} 2^n Z^{-n} = 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n Z^{-n}$

Đổi biến m = - n ta có: $X(Z) = 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} Z^{m} = X_2(Z) + X_1(Z)$

trong đó: $X_1(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} Z^m = \dfrac{2^{-1}Z}{1-2^{-1}Z}$ với $|Z|<2$

$X_2(Z) = 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1$ với $Z \neq 0$.

Vậy: $X(Z) = 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1 + \dfrac{2^{-1}Z}{1-2^{-1}Z}$ với $|Z|<2$ và $Z \neq 0$.

Hình 2.3b biểu diễn miền hội tụ của X(Z0 trong mặt phẳng Z, là hình tròn $|Z|<2$, trừ gốc toạ độ.

- Xác định biến đổi Z một phía.

Ta có: $X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{2} 2^n Z^{-n} = 4Z^{-2} + 2Z^{-1} + 1$

Miền hội tụ là toàn bộ mặt phẳng Z trừ gốc toạ độ.

b. Tiêu chuẩn Cauchy (Côsi)

Một chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) = x(0) + x(1) + \ldots + x(n) + \ldots \qquad (2.2.5)$$

hội tụ nếu thoả mãn điều kiện:

$$\lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n} < 1 \qquad (2.2.6)$$

c. áp dụng tiêu chuẩn Cauchy

Để áp dụng tiêu chuẩn Cauchy chúng ta có thể phân chuỗi X(Z) hai phía thành hai chuỗi như sau:

$$X^1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} = X_1(Z) + X_2(Z)$$

- Xét chuỗi $X_2(Z)$:

$$\lim_{n\to\infty} |x(n)Z^{-n}|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n} \, |Z^{-1}|$$

Đặt $R_{x-} = \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n}$

áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi $X_2(Z)$ ta có:

$R_{x-}|Z^{-1}|<1 \Leftrightarrow |Z| > R_{x-}$.

Vậy chuỗi $X_2(Z)$ sẽ hội tụ với $|Z| > R_{x-}$, tức miền hội tụ sẽ là miền ngoài vòng tròn tâm gốc toạ độ có bán kính R_{x-} (hình 2.4).

- Xét chuỗi $X_1(Z)$, qua phép đổi biến m = - n:

$$X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} x(n)Z^{-n} - x(0) = \sum_{m=0}^{\infty} x(-m)Z^{m} - x(0)$$

Nếu x(0) là hữu hạn, ta xét giới hạn:

$$\lim_{m\to\infty} |x(-m)Z^m|^{1/m} = \lim_{m\to\infty} |x(-m)|^{1/m} \, |Z|$$

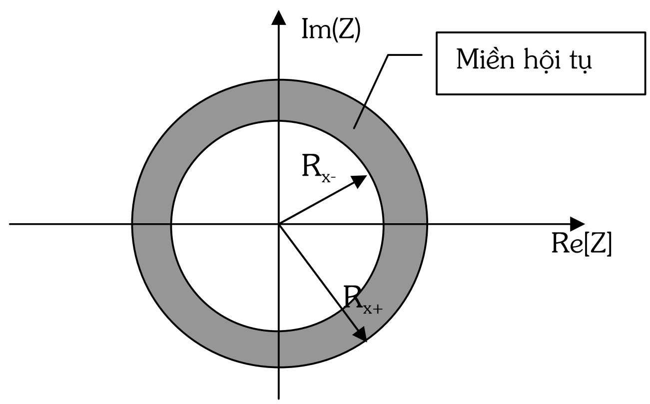
Đặt

$$R_{x+} = [\lim_{m\to\infty} |x(-m)|^{1/m}]^{-1}$$

áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho chuỗi $X_1(Z)$ ta có: $|Z| < R_{x+}$.

Vậy chuỗi $X_1(Z)$ sẽ hội tụ với $|Z| < R_{x+}$, tức miền hội tụ sẽ là miền trong vòng tròn tâm gốc toạ độ có bán kính R_{x+} (hình 2.4).

Cuối cùng, nếu $R_{x-} < R_{x+}$ thì miền hội tụ của biến đổi Z hai phía là một hình vành khăn có bán kính trong R_{x-} và bán kính ngoài R_{x+} (hình 2.4).



Hình 2.4. Miền hội tụ của biến đổi Z hai phía.

Nhận xét:

- Vì R_{x-} và R_{x+} được xác định từ x(n) vậy hai giới hạn này đặc trưng cho tín hiệu x(n).

- Đối với tín hiệu nhân quả có chiều dài vô hạn L[x(n)] =[0, ∞], miền hội tụ của biến đổi Z hai phía X[Z] nằm ngoài vòng tròn bán kính R_{x-}.

- Đối với tín hiệu phản nhân quả có chiều dài vô hạn L[x(n)] =[-∞, 0], miền hội tụ của biến đổi Z hai phía X[Z] nằm trong vòng tròn bán kính R_{x+}.

- Nếu nếu $R_{x-} \geq R_{x+}$ thì X(Z) không tồn tại.

- Chuỗi $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$ có tên là chuỗi Laurent, nó là một hàm giải tích. Vì vậy trong miền hội tụ, biến đổi Z và tất cả các đạo hàm của nó là hàm liên tục của Z.

<u>Ví dụ:</u>

Cho chuỗi $x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|}$ với mọi giá trị của n. Tìm biến đổi Z và miền hội tụ.

<u>Giải:</u>

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|} Z^{-n}$$

Ta có:

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}Z^{-1}\right)^{n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} Z^{-1}\right)^{n}$$

Gọi:

+. $X_1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}Z^{-1}\right)^n = \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}Z^{-1}}$ với $\left|\frac{3}{4}Z^{-1}\right| < 1$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, xét với chuỗi $X_1(Z)$ ta có: $R_{x-} = \frac{3}{4}$, hay miền hội tụ là $|Z| > \frac{3}{4}$.

+. $X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}Z^{-1}\right)^n = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}Z^{-1}\right)^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)Z\right)^m = \dfrac{\frac{3}{4}Z}{1-\frac{3}{4}Z}$ với : $\left|\frac{3}{4}Z\right| < 1$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, xét với chuỗi $X_2(Z)$ ta có: $R_{x+} = \frac{4}{3}$, hay miền hội tụ là $|Z| < \frac{4}{3}$.

Cuối cùng, ta có:

$X(Z) = X_1(Z) + X_2(Z) = \dfrac{1}{1-\frac{3}{4}Z^{-1}} + \dfrac{\frac{3}{4}Z}{1-\frac{3}{4}Z}$, với $\frac{3}{4} < |Z| < \frac{4}{3}$ là miền hội tụ.

II.3. Điểm cực và không

Trong thực tế chúng ta thường gặp các biến đổi Z cho dưới dạng một thương số của hai đa thức, như vậy X(Z) là hàm hữu tỷ của Z:

$$X(Z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$$

Do đó tồn tại các giá trị (điểm) Z làm cho X(Z) bằng 0 hoặc vô định; các điểm này cần được kể đến trong các phép biến đổi, là các điểm không và điểm cực được xét dưới đây.

a. Điểm không.

Tại các điểm $Z = Z_{0r}$ ta có $X(Z_{0r}) = 0$ thì các điểm đó gọi là các không của X(Z).

b. Điểm cực.

Tại các điểm $Z = Z_{pk}$ ta có $X(Z_{pk}) = \infty$ thì các điểm đó gọi là các cực của X(Z).

III. Phép Biến đổi Z ngược.

Thông thường khi chúng ta có biến đổi Z: X(Z) của một dãy nào đó, tức là chúng ta có biểu diễn của dãy x(n) trong miền Z, sau khi khảo sát gián tiếp dãy x(n) trong miền Z thì ta cần phải đưa nó trở về miền biên số độc lập tự nhiên, tức là tìm x(n) hay từ biến đổi Z X(Z) của nó. Phép đổi Z ngược sẽ cho phép thực hiện điều này.

Phép biến đổi Z ngược được xây dựng trên cơ sở của định lý Cauchy, một định lý quan trọng trong lý thuyết biến số phức.

III.1. Định lý Cauchy.

Định lý Cauchy về tích phân trên đường cong kín trong mặt phẳng phức được phát biểu như sau:

$$I = \frac{1}{2\pi j}\oint_c Z^{n-1}dZ = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

trong đó c là đường cong khép kín bao quanh gốc toạ độ của mặt phẳng phức theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

III.2. Biến đổi Z ngược

Theo định nghĩa của biến đổi Z ta có:

$$X(Z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)Z^{-m}$$

- Nhân hai vế của quan hệ này với $\frac{Z^{n-1}}{2\pi j}$ và lấy tích phân theo chiều dài của một đường cong kín c bao quanh gốc toạ độ và nằm trong miền hội tụ của X(Z), ta có:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(Z)Z^{n-1}dZ = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m)Z^{-m+n-1}dZ$$

- Đổi thứ tự của tổng và tích phân ở vế phải trong quan hệ trên:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(Z)Z^{n-1}dZ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\frac{1}{2\pi j}\oint_c Z^{-m+n-1}dZ$$

theo định lý Cauchy ta có:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c Z^{-n+1-1}dZ = \begin{cases} 1, & (-m+n)=0 \Leftrightarrow m=n \\ 0, & (-m+n)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq n \end{cases}$$

Vậy với m = n ta có:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(Z)Z^{n-1}dZ \qquad (2.3.2)$$

biểu thức (2.3.2) chính là biểu thức của biến đổi Z ngược.

Để tính biến đổi Z ngược chúng ta có ba phương pháp sau:

- Tính trực tiếp tích phân dùng lý thuyết thặng dư (PP thặng dư).
- Phương pháp khai triển thành chuỗi luỹ thừa theo Z hoặc Z^{-1}.
- Phương pháp khai triển thành tổng các phân thức tối giản.

III.3. Phương pháp thặng dư

Theo lý thuyết thặng dư của hàm biến phức thì tích phân trong biểu thức biến đổi Z ngược có thể được đánh giá bằng tổng các thặng dư sau:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(Z)Z^{n-1}dZ = \sum_k \mathrm{Res}\left[X(Z)Z^{n-1}\Big|_{Z=Z_{pk}}\right] \qquad (2.3.3)$$

trong đó: +. Z_{pk} là các điểm cực của $X(Z)Z^{n-1}$ trong đường cong kín c.

+. Thặng dư tại điểm cực k: Z_{pk}, bậc s_k của $X(Z)Z^{n-1}$ trong đường cong kín c là:

$$\mathrm{Res}\left[X(Z)Z^{n-1}\Big|_{Z=Z_{pk}}\right] = \lim_{Z\to Z_{pk}} \frac{1}{(s_k-1)!}\frac{d^{s_k-1}}{dZ^{s_k-1}}\left[X(Z)Z^{n-1}(Z-Z_{pk})^{s_k}\right] \qquad (2.3.4)$$

đối với các điểm cực đơn:

$$\mathrm{Res}\left[X(Z)Z^{n-1}\Big|_{Z=Z_{pk}}\right] = \lim_{Z\to Z_{pk}}\left[X(Z)Z^{n-1}(Z-Z_{pk})\right] \qquad (2.3.5)$$

<u>Ví dụ:</u>

Cho: $X(Z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}$; miền hội tụ RC[X(Z)] : $|Z| > 0{,}5$. Tìm x(n).

Giải: - Xác định các điểm cực Z_{pk} của $X(Z)Z^{n-1}$ trong miền hội tụ $|Z| > 0{,}5$:

Ta có: $$X(Z)Z^{n-1} = \frac{Z^n}{Z - \frac{1}{2}}$$

Từ đây, với $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ta có $Z_{p1} = 0{,}5$ là một cực đơn.

Để đơn giản, ta có thể chọn đường cong c là đường tròn bán kính R > 0,5. Như vậy ta có:

$$\mathrm{Res}\left[X(Z)Z^{n-1}\big|_{Z=0,5}\right] = \lim_{Z\to 0,5}\left[\frac{Z^n}{Z-0{,}5}(Z-0{,}5)\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Vậy $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ với $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Với n < 0, đặt n = -m (m > 0) ta sẽ có:

$$x(-m) = \sum_k \mathrm{Res}\left[X(Z)Z^{-m-1}\big|_{Z=Z_{pk}}\right] = \sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{1}{Z^m(Z-\frac{1}{2})}\Big|_{Z=Z_{pk}}\right]$$

ở đây ta có một cực đơn tại $Z_{p1} = 0{,}5$ và một cực bội bậc m tại $Z_{p2} = 0$.

Tính các thặng dư tại các cực ta có:

- Tại cực đơn

$$\mathrm{Res}\left[X(Z)Z^{n-1}\big|_{Z=0,5}\right] = \lim_{Z\to 0,5}\left[\frac{1}{Z^m(Z-0{,}5)}(Z-0{,}5)\right] = 2^m$$

- Tại cực bội

$$\mathrm{Res}\left[X(Z)Z^{n-1}\big|_{Z=Z_{pk}}\right] = \lim_{Z\to 0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dZ^{m-1}}\left[\frac{1}{Z^m(Z-0{,}5)}Z^m\right]$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(-0{,}5)^m}\right] = -2^m$$

Vậy với n < 0 ta có: x(n) = 0.

III.4. Phương pháp khai triển thành chuỗi luỹ thừa.

Trong miền hội tụ của X(Z) thì X(Z) là một hàm gải tích của Z, như vậy hoàn toàn có thể khai triển X(Z) thành chuỗi luỹ thừa có dạng:

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z^{-n} \tag{2.3.6}$$

theo định nghĩa ta có: $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$. Cả hai chuỗi này đều hội tụ trong miền hội tụ của X(Z), vậy đồng nhất hoá các hệ số của chuỗi cho ta:

$$x(n) = a(n) \tag{2.3.7}$$

Ví dụ:

Cho $X(Z) = \frac{Z}{Z+2}$. Tìm x(n) với miền hội tụ của X(Z) như sau:RC[X(Z)] : $|Z|>2$

Giải:

RC[X(Z)] : $|Z|>2$ hay miền ngoài vòng tròn bán kính 2.

$$X(Z) = \frac{Z}{Z+2} = \frac{1}{1+2Z^{-1}}$$

Nhờ chia đa thức tử cho mẫu ta nhận được X(Z) ở dạng chuỗi luỹ thừa như sau:

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n Z^{-n}$$

Cuối cùng ta được: $x(n) = (-2)^n u(n)$.

III.5. Phương pháp khai triển thành phân thức tối giản.

Đây là một trong các phương pháp thông dụng. Nguyên tắc của phương pháp này là nếu X(Z) có dạng tỷ số hai đa thức theo Z thì ta có thể khai triển X(Z) thành các phân thức hữu tỷ tối giản. Khi đó biến đổi Z ngược của X(Z) sẽ là tổng các biến đổi Z ngược của các phân thức tối giản

Giả sử X(Z) có dạng:

$$X(Z) = \frac{C(Z)}{D(Z)}$$

trong đó, C(Z) là đa thức bậc M, D(Z) là đa thức bậc N.

- Nếu $M \geq N$, tiến hành chia hai đa thức và kết quả có dạng:

$$X(Z) = S(Z) + \frac{P(Z)}{Q(Z)} \qquad (2.3.8)$$

trong đó, S(Z) là đa thức bậc M-N có dạng:

$$S(Z) = B_{M-N}Z^{M-N} + B_{M-N-1}Z^{M-N-1} + ... + B_1 Z^1 + B_0 \qquad (2.3.9)$$

- Nếu M < N thì S(Z) = 0.

- Khai triển thương số $\frac{P(Z)}{Q(Z)}$ thành các phân thức tối giản như sau:

- Trường hợp X(Z) chỉ có N các cực đơn:

$$\frac{P(Z)}{Q(Z)} = \sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{Z-Z_{pk}} \qquad (2.3.10)$$

trong đó, Z_{pk} là các cực đơn của X(Z) và A_k được xác định theo biểu thức:

$$A_k = (Z - Z_{pk})\frac{P(Z)}{Q(Z)}\bigg|_{Z=Z_{pk}} \qquad (2.3.11)$$

- Trường hợp X(Z) có một cực bội bậc s và N-s cực đơn:

$$\frac{P(Z)}{Q(Z)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{N-s}\frac{A_k}{Z-Z_{pk}} + \sum_{j=1}^{s}\frac{c_j}{(Z-Z_{pl})^j} \qquad (2.3.12)$$

khi đó, c_j được xác định như sau:

$$c_j = \frac{1}{(s-j)!}\frac{d^{s-j}}{dZ^{s-j}}\left[(Z-Z_{pk})^s\frac{P(Z)}{Q(Z)}\right]\bigg|_{Z=Z_{pl}} \qquad (2.3.13)$$

Cuối cùng, sau khi khai triển xong X(Z) ta sẽ tìm biến đổi Z ngược của từng phân thức một rồi tổng hợp kết quả ta sẽ có được x(n).

Biến đổi ngược (IZT) của các phân thức tối giản có thể tham khảo theo một số dạng như sau:

+. $IZT\left[\dfrac{Z}{Z-Z_{pk}}\right] = Z_{pk}^{n}u(n)$

+. $IZT\left[\dfrac{1}{Z-Z_{pk}}\right] = Z_{pk}^{n-1}u(n-1)$ (2.3.14)

+. $IZT\left[\dfrac{Z}{(Z-Z_{pk})^{m+1}}\right] = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!} Z_{pk}^{n-m}u(n)$ (2.3.15)

với $|Z| > |Z_{pk}|$.

+. $IZT\left[\dfrac{Z}{(Z-Z_{pk})^{m+1}}\right] = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!} Z_{pk}^{n-m}u(-n-1)$ (2.3.16)

với $|Z| < |Z_{pk}|$.

***<u>Ví dụ</u>*:**

Cho $X(Z) = \dfrac{Z+2}{2Z^2-7Z+3}$. Tìm x(n) bằng phương pháp khai triển tối giản.

<u>Giải:</u>

$$X(Z) = \frac{Z+2}{2(Z-\frac{1}{2})(Z-3)}$$

vậy X(Z) có hai điểm cực đơn là: $Z_{p1} = \dfrac{1}{2}$ và $Z_{p2} = 3$.

Vậy ta có:

$$X(Z) = \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{Z-Z_{pk}}$$

trong đó:

$$A_1 = (Z-0,5)\frac{Z+2}{2(Z-0,5)(Z-3)}\bigg|_{Z=0,5} = -0,5$$

$$A_2 = (Z-3)\frac{Z+2}{2(Z-0,5)(Z-3)}\bigg|_{Z=3} = 1$$

Vậy:

$$X(Z) = \frac{-0,5}{Z-0,5} + \frac{1}{Z-3}$$

áp dụng biểu thức (2.3.14) ta có:

$$x(n) = -0,5(0,5)^{n-1}u(n-1) + 3^{n-1}u(n-1) = 3^{n-1}u(n-1) - 0,5^{n}u(n-1)$$

IV. Tính chất của các biến đổi Z

Các tính chất của biến đổi Z sẽ hỗ trợ nhiều trong vấn đề xử lý tín hiệu số.

<u>Ví dụ</u> Tính chất tuyến tính dưới đây sẽ cho ta cách tính biến đổi Z ngược thông qua việc phân tích thành các hàm đơn giản.

IV.1 Tính tuyến tính

Nếu ta có hai dãy $x_1(n)$, $x_2(n)$ và các biến đổi Z của nó nnhw sau:

$$ZT[x_1(n)] = X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)Z^{-n}.$$

RC[$X_1(Z)$]: $R_{x1-} < |Z| < R_{x1+}$

$$ZT[x_2(n)] = X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)Z^{-n}.$$

RC[$X_2(Z)$]: $R_{x2-} < |Z| < R_{x2+}$

Giả sử ta có dãy x(n) là tổ hợp tuyến tính của hai dãy $x_1(n)$, $x_2(n)$ như sau:

$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, a và b là các hằng số.

Biến đổi Z của x(n) sẽ là:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax_1(n) + bx_2(n)]Z^{-n}$$

$$= a\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)Z^{-n} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)Z^{-n} = aX_1(Z) + bX_2(Z)$$

Miền hội tụ: RC[X(Z)]: $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

trong đó: $R_{x-} = \max[R_{1x-}, R_{2x-}]$ và $R_{x+} = \min[R_{1x+}, R_{2x+}]$.

Chú ý: Nếu như tổ hợp tuyến tính lại đưa vào một số điểm không, khử đi một số điểm cực thì miền hội tụ (R_{x-}, R_{x+}) có thể sẽ rộng ra.

Ví dụ:

Cho các dãy: $x_1(n) = a^n u(n)$; $a > 0$.

$x_2(n) = a^n u(n-1)$; $a > 0$.

$x(n) = a^n u(n) - a^n u(n-1)$;

Xác định miền hội tụ của $X_1(Z)$, $X_2(Z)$ và X(Z).

Giải:

$$X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(aZ^{-1})^n = \frac{1}{1-aZ^{-1}}; \qquad |Z| > a.$$

$$X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)Z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}(aZ^{-1})^n = \frac{aZ^{-1}}{1-aZ^{-1}}; \qquad |Z| > a.$$

áp dụng tính chất tuyến tính ta có:

$$X(Z) = \frac{1}{1-aZ^{-1}} - \frac{aZ^{-1}}{1-aZ^{-1}} = \frac{1-aZ^{-1}}{1-aZ^{-1}} = 1$$

Vậy miền hội tụ của X(Z) là toàn bộ mặt phẳng Z.

IV.2 Tính dịch chuyển theo thời gian.

Giả sử có một dãy x(n) và ZT[x(n)] = X(Z); RC[X(Z)] : $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$.

Nếu ta có dãy y(n) là tín hiệu x(n) dịch đi một đoạn n_0 mẫu:

$y(n) = x(n-n_0)$

Thì:

$$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)Z^{-n} =$$

$$= Z^{-n_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)Z^{-(n-n_0)} = Z^{-n_0}X(Z)$$

Vậy: - Việc dịch đi n_0 mẫu sang phải, tức là tạo ra tín hiệu trễ n_0 mẫu sẽ tương ứng với việc nhân với Z^{-n_0} trong phép biến đổi Z.

- Với $n_0 = 1$, ta có toán tử Z^{-1} tương ứng với toán tử trễ đi một mẫu, là toán tử được dùng rất rộng rãi trong việc biểu diễn các hệ thống xử lý tín hiệu số.

- Miền hội tụ có thể bị thay đổi nếu việc nhân với Z^{-n_0} với X(Z) gây triệt tiêu đi hoặc đưa thêm vào một số điểm cực tại Z = 0 hoặc điểm không tại Z = ∞.

IV.3 nhân với dãy hàm mũ a^n.

Nhân dãy x(n) với dãy hàm mũ a^n ta có:

$y(n) = x(n)a^n$.

$$\Rightarrow \quad ZT[y(n)] = Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(\frac{Z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{Z}{a}\right)$$

Vậy: $ZT[a^n x(n)] = X\left(\frac{Z}{a}\right)$. Với X(Z) = ZT[x(n)].

và: $RC\left[X\left(\frac{Z}{a}\right)\right]$: $|a|R_{x-} < |Z| < |a|R_{x+}$

IV.4 Đạo hàm của biến đổi Z.

Lấy đạo hàm của biến đổi Z ta có:

$$\frac{dX(Z)}{dZ} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n)x(n)Z^{-n-1}$$

Với $Z \neq 0$, nhân cả hai vế với -Z ta được:

$$-Z\frac{dX(Z)}{dZ} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)Z^{-n}$$

Cuối cùng: $ZT[nx(n)] = -Z\frac{dX(Z)}{dZ}$

Ví dụ: Tìm biến đổi Z của dãy $x_2(n) = n^2 x_1(n)$ theo hàm của $X_1(Z) = ZT[x_1(n)]$.

Giải: áp dụng biểu thức đạo hàm của biến đổi Z ta có:

$$ZT[nx_1(n)] = -Z\frac{dX_1(Z)}{dZ}$$

và: $$ZT[n^2 x_1(n)] = -Z\frac{d}{dZ}\left[-Z\frac{dX_1(Z)}{dZ}\right] = Z\frac{dX_1(Z)}{dZ} + Z^2\frac{d^2X_1(Z)}{dZ^2}$$

IV.5. Định lý giá trị đầu.

Định lý này cho phép xác định giá trị gốc của một dãy khi biết biến đổi Z của nó.

Đối với dãy nhân quả thì: $x(0) = \lim_{Z\to\infty} X(Z)$

Hệ quả: Nếu X(Z) hội tụ khi $|Z| > R_{x-}$ và: $\lim_{Z\to\infty} Z^{n_0} X(Z) = A < \infty$ thì: $x(n_0) = A$ và x(n) = 0 với $n < n_0$.

IV.6.Tích chập của hai dãy

Giả sử $x_3(n)$ là tích chập của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$: $x_3(n) = x_1(n)*x_2(n)$ thì trong miền Z ta có: $X_3(Z) = X_1(Z).X_2(Z)$.

Chứng minh:

$$X_3(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x_1(n)*x_2(n)]Z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)x_2(n-k)\right]Z^{-n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n-k)Z^{-n}$$

đổi biến: m = n-k ⇒ n = m+k

Ta có: $$X_3(Z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)Z^{-k}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_2(m)Z^{-m}\right]=X_1(Z).X_2(Z)$$

Miền hội tụ của tích chập hai dãy được xác định:

$$RC[X_3(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_1(Z)]$$

Chú ý: miền hội tụ của $X_3(Z)$ có thể rộng hơn giao của miền hội tụ $X_1(Z)$ và $X_2(Z)$ nếu có các điểm không của biến đổi Z này bù cho các điểm cực của biến đổi Z kia hoặc ngược lại.

***Ví dụ*:** Cho hai dãy: $x_1(n) = n.u(n)$ và $x_2(n) = n.u(n)$. Tìm tích chập của hai dãy trên.

Giải:

- Tìm $X_3(Z)$:

$$X_1(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x_1(n)]Z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n.u(n)Z^{-n}=-Z\frac{d}{dZ}\left[\sum_{n=0}^{\infty}Z^{-n}\right]=-Z\frac{d}{dZ}\left[\frac{1}{1-Z^{-1}}\right]$$

$$=-Z\frac{d}{dZ}\left[\frac{Z}{Z-1}\right]=-Z\frac{(Z-1)-Z}{(Z-1)^2}=\frac{Z}{(Z-1)^2}$$

$$X_2(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x_2(n)]Z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)Z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}Z^{-n}=\frac{Z}{Z-1}$$

$$\Rightarrow \qquad X_3(Z)=X_1(Z).X_2(Z)=\frac{Z}{(Z-1)^2}.\frac{Z}{Z-1}=\frac{Z^2}{(Z-1)^3}$$

- Tìm $x_3(n)$ từ $X_3(Z)$ qua phép biến đổi Z ngược.

$$IZT\left[\frac{Z^2}{(Z-1)^3}\right]=\sum_k Res\left[\frac{Z^2}{(Z-1)^3}Z^{n-1}\right]\Bigg|_{Z=Z_{pk}}=\sum_k Res\left[\frac{Z^{n+1}}{(Z-1)^3}\right]\Bigg|_{Z=Z_{pk}}$$

Các điểm cực ở đây là 1 điểm cực bội bậc 3: $Z_{pk} = 1$.

Vậy:

$$Res\left[\frac{Z^{n+1}}{(Z-1)^3}\right]\Bigg|_{Z=Z_{pk}}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dZ^2}\left[\frac{Z^{n+1}}{(Z-1)^3}(Z-1)^3\right]\Bigg|_{Z=1}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Cuối cùng ta có: $x_3=(n)\dfrac{n(n+1)}{2}$

IV.7.Tích của hai dãy

Giả sử ta có $x_3(n)$ là tích của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau: $x_3(n) = x_1(n).\ x_2(n)$

Thì trong miền Z ta có quan hệ sau: $$X_3(Z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X_1(v)X_2\left(\frac{Z}{v}\right)v^{-1}dv$$

Với miền hội tụ:

$RC[X_1(Z)]$:	$R_{x1-} < \lvert Z\rvert < R_{x1+}$
$RC[X_2(Z)]$:	$R_{x2-} < \lvert Z\rvert < R_{x2+}$
$RC[X_3(Z)]$:	$RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$

Chứng minh:

Ta có : $X_3(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_3(n)Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)Z^{-n}$

Mặt khác: $x_1(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X_1(v)v^{n-1}dv$

$$\Rightarrow \quad X_3(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\frac{1}{2\pi j}\oint_c X_1(v)v^{n-1}dvZ^{-n} = \frac{1}{2\pi j}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\oint_c X_1(v)\left(\frac{Z}{v}\right)^{-n} v^{-1}dv$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\left(\frac{Z}{v}\right)^{-n}\right] X_1(v)v^{-1}dv = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X_1(v)X_2\left(\frac{Z}{v}\right)v^{-1}dv$$

Chú ý: Đường cong kín c phải được chọn trong miền giao của hai miền hội tụ của $X_1(Z)$ và $X_2(Z)$, hay chính là miền hội tụ của $X_3(Z)$.

IV.8.Tương quan của hai tín hiệu

Hàm tương quan chéo của hai tín hiệu x(n) và y(n) được định nghĩa bởi quan hệ sau: $r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n)y(m-n)$

Trong miền Z quan hệ tương ứng là: $R_{xy}(Z) = X(Z)Y\left(\frac{1}{Z}\right)$

Miền hội tụ được xác định: RC[X(Z)]: $R_{x-} < |Z| < R_{x+}$

$RC\left[Y\left(\frac{1}{Z}\right)\right]$: $\frac{1}{R_{y-}} < |Z| < \frac{1}{R_{y+}}$

$RC[R_{xy}(Z)]$: $RC[X(Z)] \cap RC\left[Y\left(\frac{1}{Z}\right)\right]$

IV.9.Tổng kết các tính chất của biến đổi Z

Miền n	Miền Z	Miền hội tụ
$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(Z)Z^{n-1}dZ$	$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$	$R_{x-} < \lvert Z \rvert < R_{x+}$
$y(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c Y(Z)Z^{n-1}dZ$	$Y(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)Z^{-n}$	$R_{y-} < \lvert Z \rvert < R_{y+}$
ax(n) + by(n)	aX(Z) + bY(Z)	$RC[X(Z)] \cap RC[Y(Z)]$
$x(n-n_0)$	$Z^{-n_0}X(Z)$	$R_{x-} < \lvert Z \rvert < R_{x+}$
	$X(a^{-1}Z)$	
$a^n x(n)$	$\lim_{Z\to\infty} X(Z)$	$R_{x-} < \lvert a^{-1}Z \rvert < R_{x+}$
x(0) (nếu x(n) là nhân quả)	X(Z).Y(Z)	
x(n)*y(n)	$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y(\frac{Z}{v})v^{-1}dv$	$RC[X(Z)] \cap RC[Y(Z)]$
x(n).y(n)	$R_{xy}(Z) = X(Z)Y\left(\frac{1}{Z}\right)$	$RC[X(Z)] \cap RC[Y(Z)]$
$r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n)y(m-n)$		$RC[X(Z)] \cap RC\left[Y\left(\frac{1}{Z}\right)\right]$

IV.10. Một số biến đổi Z thông dụng

Miền n	Miền Z	Miền hội tụ
$\delta(n)$	1	Toàn bộ mặt phẳng Z
$\delta(n-n_0)$	Z^{-n_0}	Toàn bộ mặt phẳng Z
$u(n)$	$\frac{1}{1-Z^{-1}}$	$\lvert Z\rvert > 1$
$u(-n-1)$	$\frac{1}{Z^{-1}-1}$	$\lvert Z\rvert < 1$
$nu(n)$	$\frac{Z^{-1}}{(1-Z^{-1})^2}$	$\lvert Z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-aZ^{-1}}$	$\lvert Z\rvert > a$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-aZ^{-1}}$	$\lvert Z\rvert < a$
$n\,a^n u(n)$	$\frac{Z^{-1}}{\left(1-aZ^{-1}\right)^2}$	$\lvert Z\rvert > a$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{Z^{-1}}{\left(1-aZ^{-1}\right)^2}$	$\lvert Z\rvert < a$
$(\cos\omega_0 n).u(n)$	$\frac{1-Z^{-1}\cos\omega_0}{1-2Z^{-1}\cos\omega_0+Z^{-2}}$	$\lvert Z\rvert > 1$
$(\sin\omega_0 n).u(n)$	$\frac{1-Z^{-1}\sin\omega_0}{1-2Z^{-1}\cos\omega_0+Z^{-2}}$	$\lvert Z\rvert > 1$

V. Biểu diễn hệ thống rời rạc trong miền Z

Trong miền n, một hệ thống tuyến tính bất biến được đặc trưng bởi đáp ứng xung h(n) của nó hoặc được đặc trưng bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng. Nhưng việc phân tích hệ thống nói chung gặp nhiều khó khăn như việc tính tích chập, giải phương trình sai phân, xét độ ổn định, … .

Để giải quyết những khó khăn trong miền biến số độc lập tự nhiên n, chúng ta chuyển cách biểu diễn hệ thống sang miền Z, sau đâu ta nghiên cứu khái niệm hàm truyền đạt của hệ thống.

V.1. Hàm truyền đạt của hệ thống rời rạc

a. Định nghĩa:

Hàm truyền đạt của một hệ thống rời rạc chính là biến đổi Z của đáp ứng xung h(n) và được ký hiệu là H(Z).

$$H(Z) = ZT[h(n)]$$

b. Mô tả qua phương trình sai phân hàm truyền đạt của hệ thống rời rạc.

Quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của một hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến và nhân quả được cho bởi phương trình sai phân sau:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

Lấy biến đổi Z hai vế của phương trình ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)\right]Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)\right]Z^{-n}$$

Sử dụng các tính chất tuyến tính và tính chất trễ của biến đổi Z ta có:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k ZT[y(n-k)] = \sum_{r=0}^{M} b_r ZT[x(n-r)]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k} Y(Z) = \sum_{r=0}^{M} b_r Z^{-r} X(Z) \Leftrightarrow Y(Z)\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k} = X(Z)\sum_{r=0}^{M} b_r Z^{-r}$$

$$\Rightarrow \qquad H(Z) = \frac{X(Z)}{Y(Z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r Z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k}} \qquad (2.5.1)$$

c. Biểu diễn hàm truyền đạt bằng các điểm cực và điểm không.

Giống như tín hiệu rời rạc, hàm truyền đạt H(Z) của một hệ thống rời rạc có thể được biểu diễn bằng các điểm cực và điểm không của nó như sau:

$$H(Z) = c\frac{\prod_{r=1}^{M}\left(1 - Z_{0r}Z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - Z_{pk}Z^{-1}\right)} = cZ^{N-M}\frac{\prod_{r=1}^{M}\left(Z - Z_{0r}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(Z - Z_{pk}\right)} \qquad (2.5.2)$$

V.2. Phân tích hệ thống trong miền Z

a. Các phần tử thực hiện

- Phần tử trễ:

Gọi x(n) là đầu vào, y(n) là đầu ra; quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của phần tử trễ trong miền Z được xác định như sau:

Từ: $y(n) = x(n-1)$

Lấy biến đổi Z ta có:

$$Y(Z) = Z^{-1}X(Z)$$

Như vậy phép trễ trong miền biến độc lập tự nhiên n được thay bằng phép nhân với Z^{-1} trong miền Z.

- Phần tử cộng:

Gọi $x_i(n)$ (i = 1.. M) là các đầu vào, y(n) là đầu ra; quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của phần tử cộng trong miền Z được xác định như sau:

Từ: $y(n) = \sum_{i=1}^{M} x_i(n)$

Lấy biến đổi Z ta có:

$$Y(Z) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i(n)Z^{-n} = \sum_{i=1}^{M} X_i(Z)$$

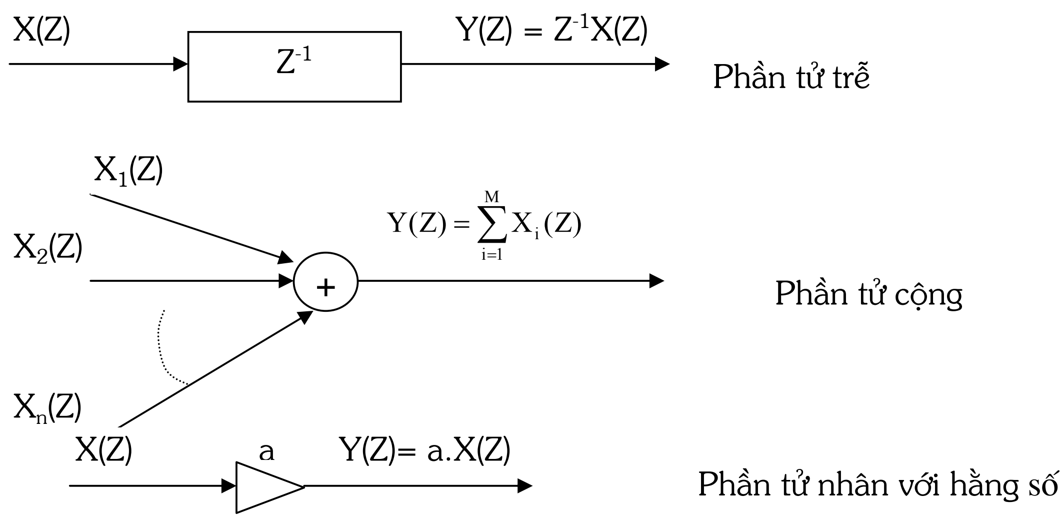
- Phần tử nhân với hằng số (phần tử khuếch đại)

Gọi x(n) là đầu vào, a là hằng số và y(n) là đầu ra; quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của phần tử nhân với hằng số trong miền Z được xác định như sau:

Từ: $y(n) = ax(n)$

Lấy biến đổi Z ta có: $Y(Z) = aX(Z)$

Các phần tử trên được biểu diễn như trong các hình sau:



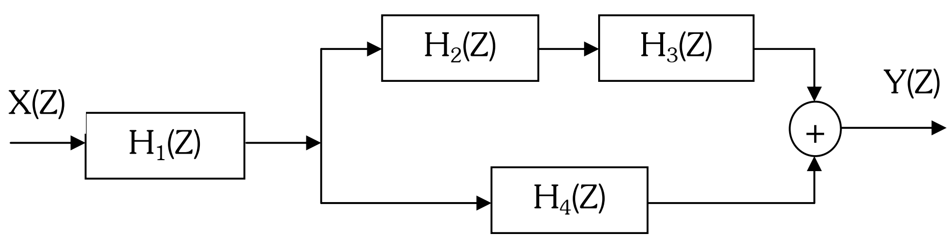
Hình 2.5. Các phần tử cơ bản.

b. Phân tích hệ thống rời rạc

Việc phân tích hệ thống rời rạc dựa trên các nguyên tắc sau:

- Phân tích hệ thống tổng quát thành các hệ thống (khối) nhỏ và đơn giản hơn.
- Tìm quan hệ ghép nối giữa các khối (hệ thống) này.
- Tìm hàm truyền đạt $H_i(Z)$ của từng khối nhỏ.
- Ghép các hàm truyền đạt trên theo các quan hệ đã xác định.

Ví dụ: Cho hệ thống như hình vẽ, phân tích và tìm hàm truyền đạt của hệ thống.



Giải: Các khối 2 và 3 nối tiếp nhau và ghép song song với khối 4, khối 1 ghép nối tiếp với hệ thống này.

Do đó ta có:

$$H(Z) = H_1(Z)[\, H_2(Z)\, H_3(Z) + H_4(Z)]$$

V.3. Giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

Vì các điều kiện đầu của các phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng là khác không, vì vậy ta chỉ dùng biến đổi Z một phía trong các ứng dụng này.

Xét biến đổi Z của thành phần x(n - m) với m cố định và n ≥ 0.

$$\begin{aligned} ZT\left[x(n-1)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)Z^{-n} \\ &= x(-1) + Z^{-1}\left[x(0) + x(1)Z^{-1} + x(2)Z^{-2} + \ldots\right] \\ &= Z^{-1}X(Z) + x(-1) \end{aligned}$$

$$ZT[x(n-2)] = Z^{-2}X(Z) + Z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

$$ZT[x(n-3)] = Z^{-3}X(Z) + Z^{-2}x(-1) + Z^{-1}x(-2) + x(-3)$$

...

$$ZT[x(n-m)] = Z^{-m}X(Z) + Z^{-m+1}x(-1) + \ldots + Z^{-1}x(-m+1) + x(-m)$$

$$= Z^{-m}\left[X(Z) + \sum_{r=1}^{m} x(-r)Z^{r}\right]$$

Biểu thức trên sẽ được áp dụng để giải các PTSPTT hệ số hằng.

Ví dụ:

Giải hệ phương trình sai phân sau:

y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)

với: $x(n) = 3^{n-2}$.

y(-2) = - 4/9 ; y(-1) = - 1/3.

Giải:

Lấy biến đổi Z một phía của phương trình:

$ZT^1[y(n)] - 3.ZT^1[y(n-1)] + 2.\ ZT^1[y(n-2)] = ZT^1[3^{n-2}]$

$$\Leftrightarrow \quad Y(Z) - 3\left(Z^{-1}Y(Z) + y(-1)\right) + 2\left(Z^{-2}Y(Z) + Z^{-1}y(-1) + y(-2)\right) = 3^{-2}\frac{Z}{Z-3}$$

Thay y(-1) = -1/3 và y(-2) = -4/9 vào phương trình trên ta được:

$$Y(Z) - 3Z^{-1}Y(Z) + 1 + 2\left(Z^{-2}Y(Z) - Z^{-1}\frac{1}{3} - \frac{4}{9}\right) = 3^{-2}\frac{Z}{Z-3}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(Z)\left(1 - 3Z^{-1} + 2Z^{-2}\right) - \frac{2}{3Z} + \frac{1}{9} = \frac{Z}{9(Z-3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(Z)\frac{(Z-1)(Z-2)}{Z^2} = \frac{6(Z-3) - Z(Z-3) + Z^2}{9Z(Z-3)} = \frac{Z-2}{Z(Z-3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(Z) = \frac{Z}{(Z-1)(Z-3)}$$

Tìm biến đổi Z ngược của Y(Z):

Dùng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản:

$$\frac{Y(Z)}{Z} = \frac{A_1}{Z-1} + \frac{A_2}{Z-3}$$

Với A_k được tính theo công thức:

$$A_k = (Z - Z_{pk})\left.\frac{P(Z)}{Q(Z)}\right|_{Z=Z_{pk}}$$

ta có: $A_1 = (Z-1)\left.\frac{1}{(Z-1)(Z-3)}\right|_{Z=1} = -\frac{1}{2}$ và $A_2 = (Z-3)\left.\frac{1}{(Z-1)(Z-3)}\right|_{Z=3} = \frac{1}{2}$

Vậy: $Y(Z) = -\frac{Z}{Z-1} + \frac{Z}{Z-3}$

Cuối cùng, ta có đáp ứng ra y(n) hư sau:

$$y(n) = -\frac{1}{2}1^{n}u(n) + \frac{1}{2}3^{n}u(n) = \frac{1}{2}\left(3^{n} - 1\right)u(n)$$

V.4. Độ ổn định

a. Sự ổn định của một hệ thống tuyến tính bất biến

Khi không có tín hiệu đầu vào của hệ thống số, nhưng có thể ở đầu ra của hệ thống xuất hiện tín hiệu, đó là trường hợp hệ thống không ổn định.

Tính ổn định của một hệ thống tuyên tính bất biến (không nhất thiết là nhân quả) phụ thuộc vào đáp ứng xung:

Điều kiện: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ là điều kiện ổn định trong miền n.

Chuyển điều kiện này sang miền Z, lúc đó hàm truyền đạt H(Z) sẽ đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống.

$$H(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)Z^{-n} \qquad R_{h-} < |Z| < R_{h+}$$

Để thoả mãn điều kiện ổn định trong miền n thì hàm truyền đạt H(Z) phải hội tụ với $|Z|=1$, vì thế miền hội tụ của H(Z) nnhất thiết phải chứa vòng tròn đơn vị $|Z|=1$.

Từ đây ta có điều kiện ổn định của hệ thống TTBB như sau:

Một hệ thống TTBB là ổn định nếu và chỉ nếu vòng tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ của hàm truyền đạt của hệ thống.

b. Sự ổn định của hệ thống TTBB nhân quả

Trong thực tế, với các hệ thống nhân quả ta có:

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)Z^{-n}$$

Miền hội tụ của H(Z) là miền ngoài của vòng tròn bán kính R_{h-}: $R_{h-} < |Z|$, trong đó:

$$R_{h-} = \lim_{n\to\infty} |h(n)|^{1/n} \qquad \text{theo tiêu chuẩn Cauchy.}$$

Vậy:

- Một hệ thống TTBB là nhân quả nếu và chỉ nếu miền hội tụ của hàm truyền đạt của hệ thống nằm ngoài vòng tròn có bán kính R_{h-}.
- Một hệ thống TTBB nhân quả là ổn định nếu và chỉ nếu tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt H(Z) nằm bên trong vòng tròn đơn vị.

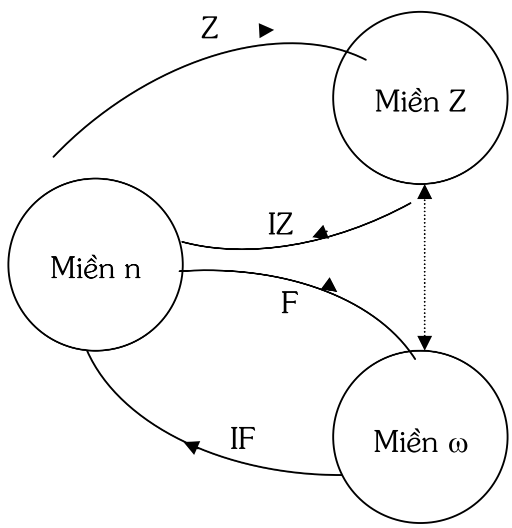
CHƯƠNG 2

BIỂU DIỄN HỆ THỐNG VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

I. Mở đầu.

Trong chương 1 đã trình bày về việc biểu diễn tín hiệu của hệ thống rời rạc trong miền biến số độc lập tự nhiên (miền n); đây là phương pháp nghiên cứu trực tiếp. ở chương 2, thông qua biến đổi Z chúng ta đã nghiên cứu tín hiệu của hệ thống rời rạc trong miền Z và đây là một phương pháp nghiên cứu gián tiếp. Một trong những phương pháp nghiên cứu (biểu diễn) gián tiếp khác thường được sử dụng là biến đổi Fourier (FT) để chuyển việc biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc từ miền biến số độc lập tự nhiên n sang miền tần số liên tục ω.

Sự liên hệ giữa các miền được biểu diễn qua hình 3.1 sau:



Hình 3.1. Sơ đồ liên hệ giữa các miền.

II. Biến đổi Fourier của các tín hiệu rời rạc

II.1. Định nghĩa biến đổi Fourier.

a. Định nghĩa:

Biến đổi Fourier của một tín hiệu rời rạc x(n) được định nghĩa như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega} \qquad (3.2.1)$$

b. Các phương pháp thể hiện $X(e^{j\omega})$

- Thể hiện dưới dạng phần thực và phần ảo.

$$X(e^{j\omega}) = \text{Re}[X(e^{j\omega})] + j.\text{Im}[X(e^{j\omega})] \qquad (3.2.2)$$

trong đó: $\text{Re}[X(e^{j\omega})]$ là phần thực của $X(e^{j\omega})$

$\text{Im}[X(e^{j\omega})]$ là phần ảo của $X(e^{j\omega})$

- Thể hiện dưới dạng modun và argument

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\arg\left[X(e^{j\omega})\right]}$$

trong đó: $|X(e^{j\omega})|$ gọi là phổ biên độ của x(n).

$\arg[X(e^{j\omega})]$ gọi là phổ pha của x(n).

Quan hệ giữa phổ biên độ, phổ pha với phần thực và phần ảo của $X(e^{j\omega})$ như sau:

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left[X(e^{j\omega})\right] + \mathrm{Im}^2\left[X(e^{j\omega})\right]} \qquad (3.2.3)$$

$$\arg\left[X(e^{j\omega})\right] = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]}{\mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right]} \qquad (3.2.4)$$

Thường dùng ký hiệu φ(ω) để chỉ argument:

$\varphi(\omega) = \arg[X(e^{j\omega})]$

Cuối cùng ta có: $$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)} \qquad (3.2.5)$$

- Thể hiện dưới dạng độ lớn và pha

Giả sử ta biểu diễn $X(e^{j\omega})$ ở dạng sau: $$X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)} \qquad (3.2.6)$$

khi đó:

$A(e^{j\omega})$ là thực và:

$$|A(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})| \qquad (3.2.7)$$

$$\arg\left[A(e^{j\omega})\right] = \begin{cases} 2k\pi & : A(e^{j\omega}) \geq 0;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ (2k+1)\pi & : A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases} \qquad (3.2.8)$$

hay:

$$\arg\left[A(e^{j\omega})\right] = \left\{2k + \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{sgn}[A(e^{j\omega})]\right]\right\}\pi = \left\{2k + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{A(e^{j\omega})}{\left|A(e^{j\omega})\right|}\right]\right\}\pi \qquad (3.2.9)$$

Còn θ(ω) sẽ được thể hiện như sau:

$\arg[X(e^{j\omega})] = \arg[A(e^{j\omega})] + \theta(\omega) = \varphi(\omega)$

$$\Rightarrow \quad \theta(\omega) = \varphi(\omega) - \arg[A(e^{j\omega})] \qquad (3.2.10)$$

<u>Ví dụ</u>:

Cho phổ $X(e^{j\omega})$ có dạng sau: $X(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\sin 3\omega$

Tìm: a. $\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$ và $\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$

b. $A(e^{j\omega})$ và θ(ω). c. $|X(e^{j\omega})|$ và φ(ω).

d. Vẽ $A(e^{j\omega})$, θ(ω), $|X(e^{j\omega})|$ và φ(ω).

<u>Giải</u>:

a. Ta có:

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\sin 3\omega = \left(\cos\frac{\omega}{2} - j\sin\frac{\omega}{2}\right)\sin 3\omega$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] = \cos\frac{\omega}{2}.\sin 3\omega$$

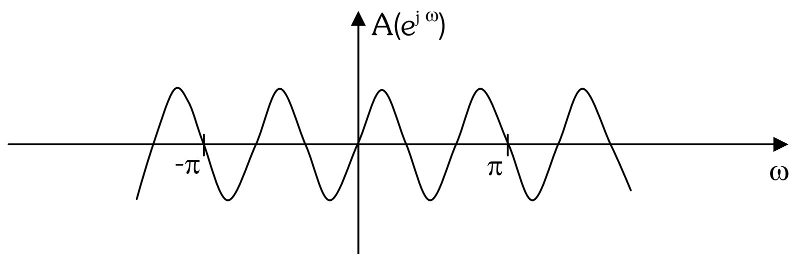
$$\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right] = \sin\frac{\omega}{2}.\sin 3\omega$$

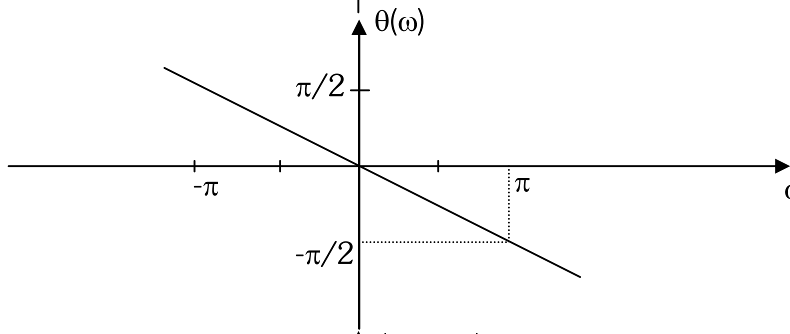
b. Từ biểu thức (3.2.6) ta có: $A(e^{j\omega}) = \sin 3\omega$ và $\theta(\omega) = \frac{\omega}{2}$

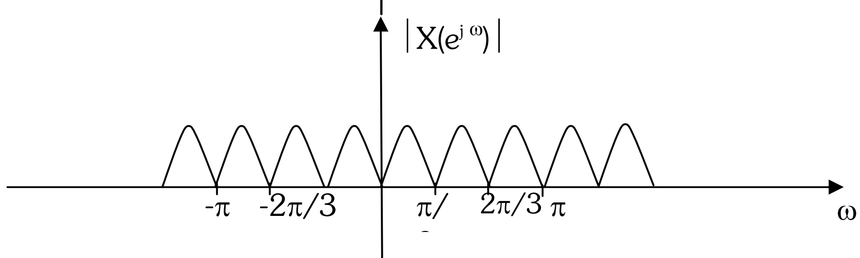
c. $|X(e^{j\omega})| = |\sin 3\omega|$

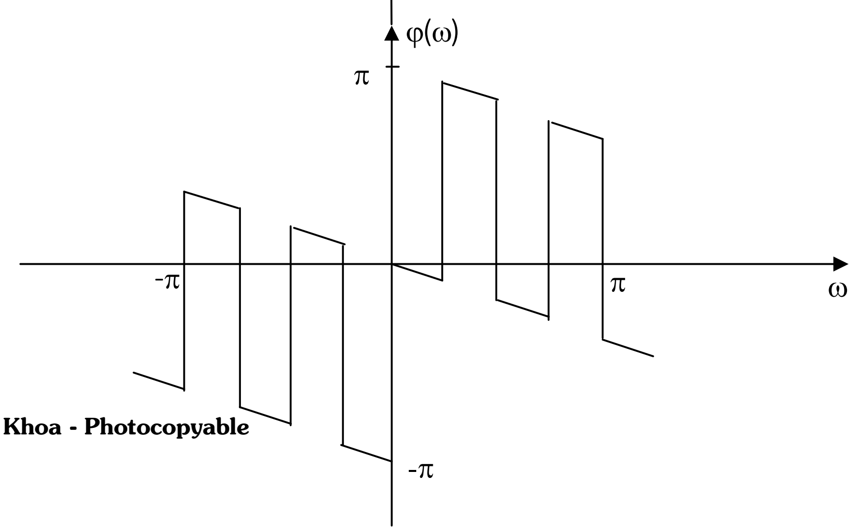
$$\varphi(\omega) = -\frac{\omega}{2} + \left\{2k + \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sin 3\omega}{|\sin 3\omega|}\right]\right\}\pi$$

d. Đồ thị của $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|X(e^{j\omega})|$ và $\varphi(\omega)$ được biểu diễn trên các hình:









Hình 3.2. Đồ thị của $A(e^{j\omega})$, $\theta(\omega)$, $|X(e^{j\omega})|$ và $\varphi(\omega)$

II.2. Sự tồn tại của biến đổi Fourier.

Biến đổi Fourier chỉ tồn tại nếu chuỗi trong (3.2.1) hội tụ. Ta có thể phát biểu điều kiện hội tụ của chuỗi này như sau:

Chuỗi trong (3.2.1.1) hội tụ nếu và chỉ nếu x(n) thoả mãn điều kiện sau đây:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \qquad (3.2.11)$$

Nếu điều kiện này được thoả mãn thì chuỗi (3.2.1) sẽ hội tụ tuyệt đối về một hàm liên tục của ω.

<u>Nhận xét:</u>

Về mặt toán học chúng ta có quan hệ sau:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \le \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right]^2$$

Nếu (3.2.11) thoả mãn thì:

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \right]^2 < \infty \Rightarrow E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \qquad (3.2.12)$$

Vậy: nếu năng lượng E_x của tín hiệu x(n) là hữu hạn thì x(n) sẽ thoả mãn điều kiện (3.2.11) hay: ***Biến đổi Fourier của tín hiệu có năng lượng hữu hạn là luôn hội tụ.***

<u>Ví dụ:</u> Xét sự tồn tại của biến đổi Fourier và tính năng lượng E_x của các dãy x(n) sau:

a. $x_1(n) = u(n)$. b. $x_2(n) = r(n)$. c. $x_3(n) = \delta(n)$. d. $x_4(n) = rect_N(n)$.

<u>Giải:</u>

a. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |1| = \infty$$

$$E_{x1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |1|^2 = \infty$$

Vậy $X_1(e^{j\omega})$ không tồn tại.

b. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |r(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |n| = \infty$$

$$E_{x2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |n|^2 = \infty$$

Vậy $X_2(e^{j\omega})$ không tồn tại.

c. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta(n)| = 1$$

$$E_{x3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\delta(n)|^2 = 1$$

Vậy $X_3(e^{j\omega})$ tồn tại.

d. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_4(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|rect_N(n)| = \sum_{n=0}^{N}|1| = N$$

$$E_{x4} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x_4(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N}|1|^2 = N$$

Vậy $X_4(e^{j\omega})$ tồn tại.

II.2. Biến đổi Fourier ngược.

Vì $X(e^{j\omega})$ là một hàm tuần hoàn của biến tần số ω có chu kỳ 2π và $X(e^{j\omega})$ tồn tại nếu thoả mãn điều kiện (3.2.11). Nên ta có thể khai triển hàm $X(e^{j\omega})$ thành chuỗi Fourier trong khoảng (-π, π) và có thể coi các hệ số của khai triển chuỗi Fourier này chính là x(n), tức là ta có thể tìm được các giá trị của x(n) từ $X(e^{j\omega})$ xét trong khoảng (-π, π).

Từ biểu thức (3.2.1);

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega}$$

Nhân cả hai vế với $e^{j\omega m}$ rồi lấy tích phân trong khoảng (-π, π) ta được:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega n})e^{j\omega m}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega(m-n)}d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega$$

Mặt khác ta có:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega = \begin{cases} 2\pi & : m = n \\ 0 & : m \neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega = \begin{cases} 2\pi x(m) & : m = n \\ 0 & : m \neq n \end{cases}$$

Cuối cùng ta có:

$$x(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega$$

Hay: $$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \qquad (3.2.13)$$

Đây chính là biểu thức biến đổi Fourier ngược (IFT).

<u>Ví dụ:</u>

Cho: $$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_0} & : |\omega| \le \omega_c \\ 0 & : \omega < -\omega_c, \omega > \omega_c \end{cases}$$

Tìm x(n), vẽ $X(e^{j\omega})$ và x(n) với: $\omega_c = \frac{\pi}{2}, n_0 = 4$.

<u>Giải:</u>

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-n_0)}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(n-n_0)}e^{j\omega(n-n_0)}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-n_0)]}{(n-n_0)}$$

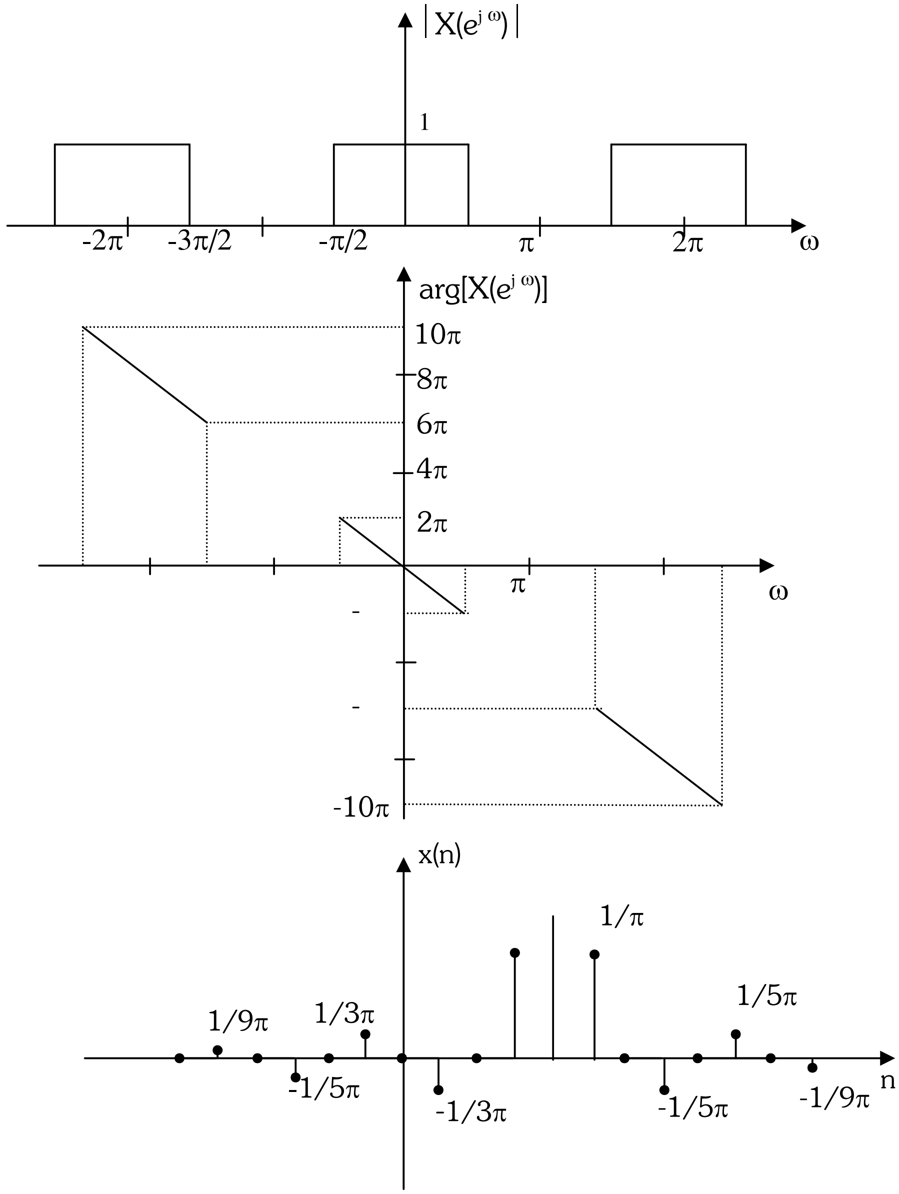
Với: $\omega_c = \dfrac{\pi}{2}, n_0 = 4$ ta có:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j4\omega} & : |\omega| \le \pi/2 \\ 0 & \end{cases} \quad \text{và} \quad x(n) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left[\pi/2\,(n-4)\right]}{(n-4)}$$

Biểu diễn $X(e^{j\omega})$ và x(n) bằng đồ thị:

Ta có:

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & : |\omega| \le \pi/2 \\ 0 & \end{cases} \quad \text{và:} \quad \arg\left[X(e^{j\omega})\right] = \begin{cases} -4\omega & : |\omega| \le \pi/2 \\ 0 & \end{cases}$$



Hình 3.3. Đồ thị của $X(e^{j\omega})$ và x(n).

III. các tính chất của Biến đổi Fourier

III.1. Tính chất tuyến tính.

Giả sử có hai tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$ với các biến đổi Fourier tương ứng là: $X_1(e^{j\omega})$ và $X_2(e^{j\omega})$.

Gọi dãy x(n) là tổ hợp tuyến tính của $x_1(n)$ và $x_2(n)$:

$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$; với a, b là các hằng số.

thì biến đổi Fourier của x(n) như sau:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[ax_1(n) + b.x_2(n)\right]e^{-j\omega n} \\ &= a\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n} = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

III.2. Tính chất trễ.

Giả sử y(n) là tín hiệu trễ của x(n), tức là: $y(n) = x(n- n_0)$

Ta có:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-j\omega n} = \sum_{n-n_0=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-j\omega(n-n_0)}e^{-j\omega n_0} \\ &= e^{-j\omega n_0}\sum_{n-n_0=-\infty}^{\infty} x(n-n_0)e^{-j\omega(n-n_0)} = e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega}) \end{aligned} \qquad (3.3.2)$$

Biểu diễn dưới dạng mô đun và argumen ta có:

$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$

$\arg[Y(e^{j\omega})] = -\omega n_0 + \arg[X(e^{j\omega})]$ (3.3.3)

Từ biểu thức (3.3.3) ta thấy rằng tín hiệu x(n) bị trễ đi n_0 mẫu trong miền biến số độc lập, thì trong miền tần số phổ biên độ của nó không đổi, còn phổ pha của nó thì sẽ tăng thêm một lượng $-\omega n_0$.

Ví dụ: Cho $x(n) = rect_N(n-n_0)$.

- Tìm $X(e^{j\omega})$
- Tìm phổ biên độ và phổ pha của x(n).

Giải:

áp dụng tính chất trễ ta có:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=n_0}^{N+n_0-1} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= e^{-j\omega n_0}\frac{e^{j\omega\frac{N}{2}} - e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}\frac{e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} = e^{-j\omega(n_0+\frac{N-1}{2})}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

Vậy ta có phổ biên độ và phổ pha của x(n) như sau:

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|$$

$$\arg\left[X(e^{j\omega})\right] = \omega(n_0 + \frac{N-1}{2}) + \arg\left[\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]$$

trong đó: $$\arg\left[\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right] = \left\{2k + \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{sig}\left(\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right)\right]\right\}\pi$$

III.3. Tính chất đối xứng.

Trong trường hợp tổng quát, tín hiệu x(n) là tín hiệu phức và ta có thể viết: $x(n) = Re[x(n)] + j .Im[x(n)]$

Vậy dãy liên hợp phức của x(n) là $x^*(n)$ có dạng:

$x^*(n) = Re[x(n)] - j .Im[x(n)]$

Khi đó, quan hệ giữa các biến đổi Fourier tương ứng như sau:

$$FT\left[x(n)\right] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$FT\left[x^*(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \left\{\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n}\right]^*\right\}^*$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega n}\right]^* = \left[X(e^{-j\omega n})\right]^* = X^*(e^{-j\omega n})$$

Vậy: $$FT\left[x^*(n)\right] = X^*(e^{-j\omega}) \qquad (3.3.4)$$

Với x(n) là thực, ta có quan hệ:

$X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$ hay $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$.

(3.3.5)

Quan hệ (3.3.5) cho thấy tính chất đối xứng Hermit của phổ của tín hiệu thực.

Từ đây thấy rằng, đối với x(n) thực ta có:

$Re[X(e^{j\omega})] = Re[X(e^{-j\omega})]$

$Im[X(e^{j\omega})] = - Im[X(e^{-j\omega})]$ (3.3.6)

Tương tự, đối với modun và argument ta cũng có:

$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$

$\arg[X(e^{j\omega})] =- \arg[X(e^{-j\omega})]$ (3.3.7)

III.4. Tính chất biến số n đảo

Giả sử ta có tín hiệu x(n) và biến đổi Fourier của nó là:

$$FT\left[x(n)\right] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{\arg\left[X(e^{j\omega})\right]}$$

Xét biến đổi Fourier của tín hiệu x(-n):

$$FT\left[x(-n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-j\omega n}$$

đổi biến: m = - n ta có: $$FT\left[x(-n)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{j\omega m} = X(e^{-j\omega}) \qquad (3.3.8)$$

Nếu x(n) và x(-n) là thực thì từ tính đối xứng Hermit ta có:

$$FT[x(-n)] = X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) = |X(e^{-j\omega})| e^{j\arg[X(e^{-j\omega})]} = |X(e^{j\omega})| e^{-j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

III.4. Tích chập của hai tín hiệu

Xét hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ có biến đổi Fourier tương ứng là $X_1(e^{j\omega})$ và $X_2(e^{j\omega})$.

Ta có tích chập của hai dãy là:

$x_3(n) = x_1(n)*x_2(n)$

Biến đổi Fourier của $x_3(n)$ được xác định như sau:

$$FT[x_3(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[x_1(n)*x_2(n)]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}[x_1(k)x_2(n-k)]\right]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n-k)e^{-j\omega n}$$

áp dụng tính chất trễ ta có:

$$X_3(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)e^{-j\omega k}X_2(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)e^{-j\omega k} = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

Vậy:

$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}).X_2(e^{j\omega})$.

<u>Ví dụ:</u>

Cho hai tín hiệu: $x_1(n) = x_2(n) = \delta(n+2) + \delta(n-2)$. Tính tích chập: $x_3(n) = x_1(n)*x_2(n)$ thông qua tính chất biến đổi Fourier.

<u>Giải:</u>

Ta có:

$$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}[\delta(k+2)+\delta(k-2)]e^{-j\omega k}$$

$$= e^{j2\omega} + e^{-j2\omega} = 2\cos 2\omega$$

Vậy $X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}).X_2(e^{j\omega}) = 2\cos2\omega.2\cos2\omega = 4\cos^2 2\omega$

$= (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})^2 = e^{j4\omega} + 2 + e^{-j4\omega}$.

áp dụng biến đổi Fourier ngược ta có:

$x_3(n) = \delta(n+4) + 2\delta(n) + \delta(n-4)$.

III.5. Tích của hai dãy

Nếu ta có:

$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$ và $FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$.

thì:

$$FT[x_1(n).x_2(n)] = FT[x_3(n)] = X_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j(\omega-\omega')})X_2(e^{j\omega'})d\omega'$$

Chứng minh:

$$X_3(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[x_1(n).x_2(n)]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_2(e^{j\omega'})e^{j\omega' n}d\omega'\right]e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)e^{-j(\omega-\omega')n}X_2(e^{j\omega'})d\omega'$$

Vậy:

$$X_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j(\omega-\omega')}\right)X_2(e^{j\omega'})d\omega'$$

$$= X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega}) \qquad (3.3.9)$$

$$= X_2(e^{j\omega}) * X_1(e^{j\omega}) \qquad (3.3.10)$$

Quan hệ (3.3.9 và 3.3.10) được gọi là tích chập liên tục và tuần hoàn voí chu kỳ 2π.

Nhận xét:

Tích $x_3(n) = x_1(n).\ x_2(n)$ thường được dùng trong trường hợp nghiên cứu $x_1(n)$ có chiều dài rất lớn, để hạn chế chiều dài của $x_1(n)$ ta sẽ nhân nó với $x_2(n)$ có chiều dài hữu hạn, như là ta dùng một cửa sổ chữ nhật $x_2(n) = rect_N(n)$. Đây gọi là kỹ thuật cửa sổ, được dùng để tổng hợp bộ lọc số FIR.

III.6. Vi phân trong miền tần số

Nếu:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

thì:

$$FT\left[nx(n)\right] = j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Chứng minh:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \Rightarrow \quad \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{d\omega}e^{-j\omega n} = -j\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-j\omega n} = -j.FT\left[nx(n)\right]$$

Vậy ta có: $FT\left[nx(n)\right] = j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$

III.7. Trễ tần số

Nếu ta có:

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$$

thì: $$FT\left[e^{j\omega_0 n}x(n)\right] = X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \qquad (3.3.11)$$

Chứng minh:

Theo định nghĩa của biến đổi Fourier ta có:

$$FT\left[e^{j\omega_0 n}x(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega-\omega_0)n} = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

Nhận xét:

Việc nhân dãy x(n) với $e^{j\omega_0 n}$ trong miền biến số n sẽ tương đương với việc dịch chuyển tần số của phổ $X(e^{j\omega})$ đi một lượng ω_0.

Ví dụ:

Cho x(n) và $FT[x(n)] = X(e^{j\omega})$. Tìm phổ của $x(n)\cos\omega_0 n = y(n)$ và minh hoạ phổ của x(n) và y(n) với $\omega_0 = \pi/2$.

Giải:

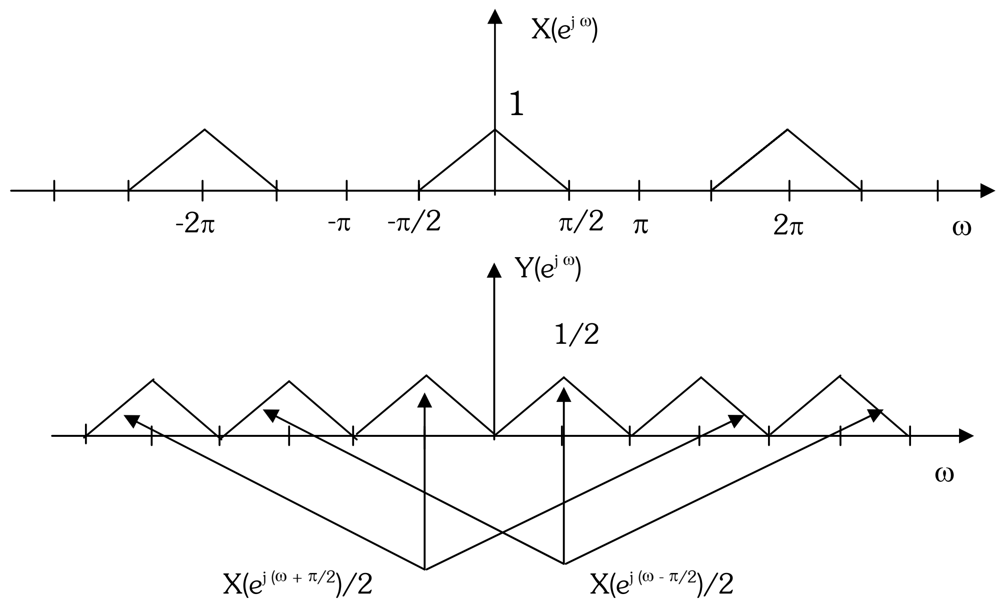
Vì: $$\cos\omega_0 n = \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}$$

Do đó:

$$FT[x(n)\cos\omega_0 n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos\omega_0 n e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(e^{-j(\omega-\omega_0)n} + e^{-j(\omega+\omega_0)n}\right) = \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) + \frac{1}{2}X\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right)$$

Minh hoạ phổ của x(n) và y(n) với $\omega_0 = \pi/2$.



III.8. Quan hệ parseval

Nếu ta có:

$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$

$FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$

thì: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n).x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega})X_2^*(e^{j\omega})d\omega \qquad (3.3.12)$$

Chứng minh:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n).x_2^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\right]^*$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_2^*(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_2^*(e^{j\omega})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n}\right]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_2^*(e^{j\omega})X_1(e^{j\omega})d\omega$$

Trong trường hợp $x_1(n) = x_2^*(n) = x(n)$, quan hệ Parseval cho ta:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \qquad (3.3.13)$$

$\left|X(e^{j\omega})\right|^2$ gọi là phổ mật độ năng lượng của x(n), nó thể hiện sự phân bố năng lượng theo hàm của tần số; được ký hiệu là $S_{xx}(e^{j\omega})$.

Vậy: $S_{xx}(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|^2$ (3.3.14)

Mặt khác năng lượng của tín hiệu x(n) là E_x: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

Như vậy quan hệ Parseval chính là quan hệ giữa năng lượng của tín hiệu và phổ mật độ năng lượng của tín hiệu đó.

Trong trường hợp x(n) là thực thì $|X(e^{j\omega})|$ là đối xứng:

$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$

Vậy ta có thể nói rằng: nếu x(n) thực thì $S_{xx}(e^{j\omega})$ cũng là đối xứng:

$S_{xx}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{-j\omega})$ (3.3.15)

III.9. Định lý tương quan và định lý weiner khintchine

Nếu ta có:

$$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$$
$$FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$$

thì:

$$FT\left[r_{x_1x_2}(n)\right] = R_{x_1x_2}(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{-j\omega}) \qquad (3.3.16)$$

Chứng minh:

$$FT\left[r_{x_1x_2}(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{x_1x_2}(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[x_1(m)x_2(m-n)\right]\right]e^{-j\omega n}$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(m-n)e^{-j\omega n}$$

đổi biến: m - n = k.

$$FT\left[r_{x_1x_2}(n)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)e^{-j\omega(m-k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k)e^{j\omega k}\right]e^{-j\omega m}$$
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)e^{-j\omega m}\left[X_2(e^{-j\omega})\right] = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{-j\omega})$$

Nhận xét:

Nếu $x_2(n)$ là thực, ta có:

$$R_{x_1x_2}(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2^*(e^{j\omega})$$

Nếu $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$ ta có hàm tự tương quan:

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})X(e^{-j\omega})$$

Nếu hàm tự tương quan x(n) là thực, ta có:

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|^2 = S_{xx}(e^{j\omega})$$

Vậy: Biến đổi Fourier của hàm tự tương quan sẽ bằng phổ mật độ năng lượng của tín hiệu.

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = S_{xx}(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|^2 \qquad (3.3.17)$$

Quan hệ (3.3.17) gọi là định lý Weiner - Khintchine. Định lý này có ý nghĩa rất quan trọng và nó chứng tỏ rằng dãy tự tương quan và phổ mật độ năng lượng có chứa cùng một thông tin về tín hiệu. Tuy vậy, cả hai đều không chứa thông tin về pha, do vậy việc phục hồi tín hiệu từ hàm tự tương quan hoặc phổ mật độ năng lượng không là duy nhất.

Đối với biến đổi Fourier của hàm tương quan chéo ta còn gọi $R_{x_1x_2}(e^{j\omega})$ là phổ mật độ năng lượng chéo của $x_1(n)$ và $x_2(n)$, ký hiệu là $S_{x_1x_2}(e^{j\omega})$

$$R_{x_1x_2}(e^{j\omega}) \equiv S_{x_1x_2}(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2^*(e^{j\omega}) \qquad (3.3.18)$$

Ví dụ: Cho tín hiệu x(n) là thực. Tính giá trị của hàm tự tương quan của x(n) tại n = 0 và nhận xét về kết quả.

Giải:

Theo định nghĩa hàm tự tương quan ta có:

$$r_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m-n)$$

Tại n = 0:

$$r_{xx}(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)|^2 = E_x$$

Theo công thức biến đổi Fourier ngược ta có:

$$r_{xx}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_{xx}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\Rightarrow \qquad r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_{xx}(e^{j\omega})d\omega$$

Theo giả thiết x(n) là thực, nên:

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Cuối cùng ta có:

$$E_x = r_{xx}(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

III.10. Tổng kết các tính chất của biến đổi Fourier với tín hiệu rời rạc

Tính chất	Miền biến số tự nhiên n	Miền tần số liên tục ω
FT và IFT	$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$	$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$
Tuyến tính	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$
Tính chất trễ	$x(n - n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Đối xứng	x(n) thực	$X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$ $Re[X^*(e^{j\omega})] = Re[X(e^{-j\omega})]$ $Im[X^*(e^{j\omega})] = -Im[X(e^{-j\omega})]$ $\left\|X(e^{j\omega})\right\|=\left\|X(e^{-j\omega})\right\|$ $arg[X^*(e^{j\omega})] = -arg[X(e^{-j\omega})]$
Liên hợp phức	$x^*(n)$	$X^*(e^{j\omega})$
Biến số đảo	$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
Tích chập	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(e^{j\omega}).\ X_2(e^{j\omega})$
Tích số	$x_1(n).x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(e^{j(\omega-\omega')})X_2(e^{j\omega'})d\omega'$
Vi phân trong miền ω	$nx(n)$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Trễ tần số	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Điều chế	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(e^{j(\omega+\omega_0)})+\frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Quan hệ Farseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n).x_2^*(n)$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|x(n)\right\|^2$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_2^*(e^{j\omega})X_1(e^{j\omega})d\omega$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\|X(e^{j\omega})\right\|^2d\omega$
Tương quan	$r_{x_1x_2}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(m-n)$ $r_{xx}(n)$	$X_1(e^{j\omega}).\ X_2(e^{-j\omega})$ $R_{xx}(e^{j\omega})=S_{xx}(e^{j\omega})=\left\|X(e^{j\omega})\right\|^2$

IV. Định lý lấy mẫu

Để có thể áp dụng các kỹ thuật xử lý tín hiệu số trong việc xử lý các tín hiệu tương tự thì điều cơ bản đầu tiên là cần chuyển đổi các tín hiệu tương tự thành dãy các số. Quá trình này được thực hiện bằng cách lấy mẫu tín hiệu tương tự theo chu kỳ. Nếu gọi tín hiệu tương tự là $x_a(t)$, x(n) là tín hiệu rời rạc theo thời gian thu được sau quá trình lấy mẫu, T là chu kỳ lấy mẫu thì:

$$x(n) = x_a(nT) \quad \text{với} \quad -\infty < n < \infty \qquad (3.4.1)$$

Quan hệ (3.4.1) mô tả quá trình lấy mẫu trong miền thời gian. Để quá trình lấy mẫu không làm mất mát thông tin của phổ tín hiệu (không gây ra hiện tượng trùng phổ) thì tần số lấy mẫu $F_s = 1/T$ phải có giá trị đủ lớn. Khi điều này được đảm bảo thì tín hiệu tương tự có thể được khôi phục chính xác từ tín hiệu rời rạc theo thời gian.

Nếu $x_a(n)$ là tín hiệu không tuần hoàn với năng lượng hữu hạn, thì phổ của nó có thể được xác định bởi quan hệ của biến đổi Fourier :

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt \qquad (3.4.2)$$

Ngược lại, tín hiệu $x_a(t)$ có thể được khôi phục từ phổ của nó qua biến đổi Fourier ngược:

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dt \qquad (3.4.3)$$

ở đây, việc sử dụng tất cả các thành phần tần số trong khoảng :$-\infty < F < \infty$ là cần thiết để có thể khôi phục được tín hiệu $x_a(t)$ nếu tín hiệu này có dải tần vô hạn.

Phổ của tín hiệu rời rạc theo thời gian x(n) nhận được bằng cách lấy mẫu của $x_a(t)$, được biểu diễn qua phép biến đổi Fourier như sau:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \qquad (3.4.4)$$

hoặc : $$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fn} \qquad (3.4.5)$$

Ngược lại, dãy x(n) có thể được khôi phục lại từ X(ω) hoặc từ X(f) qua biến đổi ngược:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi fn} df \qquad (3.4.6)$$

Từ quan hệ giữa chu kỳ lấy mẫu *T*, các biến độc lập *t* và *n*:

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \qquad (3.4.7)$$

Thay vào (3.4.2), ta suy ra quan hệ tương ứng trong miền tần số của các biến tần số F và f giữa $X_a(t)$ và X(f) và ngược lại:

$$x(n) \equiv x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi n F/F_s} dF \qquad (3.4.8)$$

Từ (3.4.6) và (3.4.8) ta có hệ thức quan hệ:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi fn}df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF \tag{3.4.9}$$

Khi quá trình lấy mẫu được thực hiện tuần hoàn thì:

$$f = \frac{F}{F_s} \tag{3.4.10}$$

Khi đó, hệ thức (3.4.9) trở thành:

$$\frac{1}{F_s}\int_{-F_s/2}^{F_s/2} X\left(\frac{F}{F_s}\right)e^{j2\pi n F/F_s}dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF \tag{3.4.11}$$

Biến đổi biểu thức thuộc vế phải của (3.4.11), ta có:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF \tag{3.4.12}$$

Thực hiện việc đổi biến trong (3.4.12) và sử dụng tính chất tuần hoàn của hàm mũ:

$$e^{j2\pi n (F-kF_s)/F_s} = e^{j2\pi n F/F_s}$$

sẽ cho ta: $X_a(F)$ trong khoảng tần số $(k-1/2)F_s$ đến $(k+1/2)F_s$ sẽ hoàn toàn tương ứng với $X_a(F - kF_s)$ trong khoảng $-F_s/2$ đến $F_s/2$. Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F-kF_s)e^{j2\pi n F/F_s}dF \\ &= \int_{-F_s/2}^{F_s/2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F-kF_s)\right]e^{j2\pi n F/F_s}dF\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

So sánh (3.4.6) và (3.4.13) ta được:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F-kF_s) \tag{3.4.14}$$

hoặc:
$$X(f) = F_s\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left[(f-k)F_s\right] \tag{3.4.15}$$

Các hệ thức (3.4.14) và (3.4.15) đưa ra mối quan hệ giữa phổ $X(F/F_s)$ hoặc $X(f)$ của tín hiệu rời rạc theo thời gian và phổ $X_a(F)$ của tín hiệu tương tự. Thực chất, vế phải của hai biểu thức này là sự lặp lại có chu kỳ của phổ đã được lấy tỷ lệ $X_a(F)$ với chu kỳ F_s.

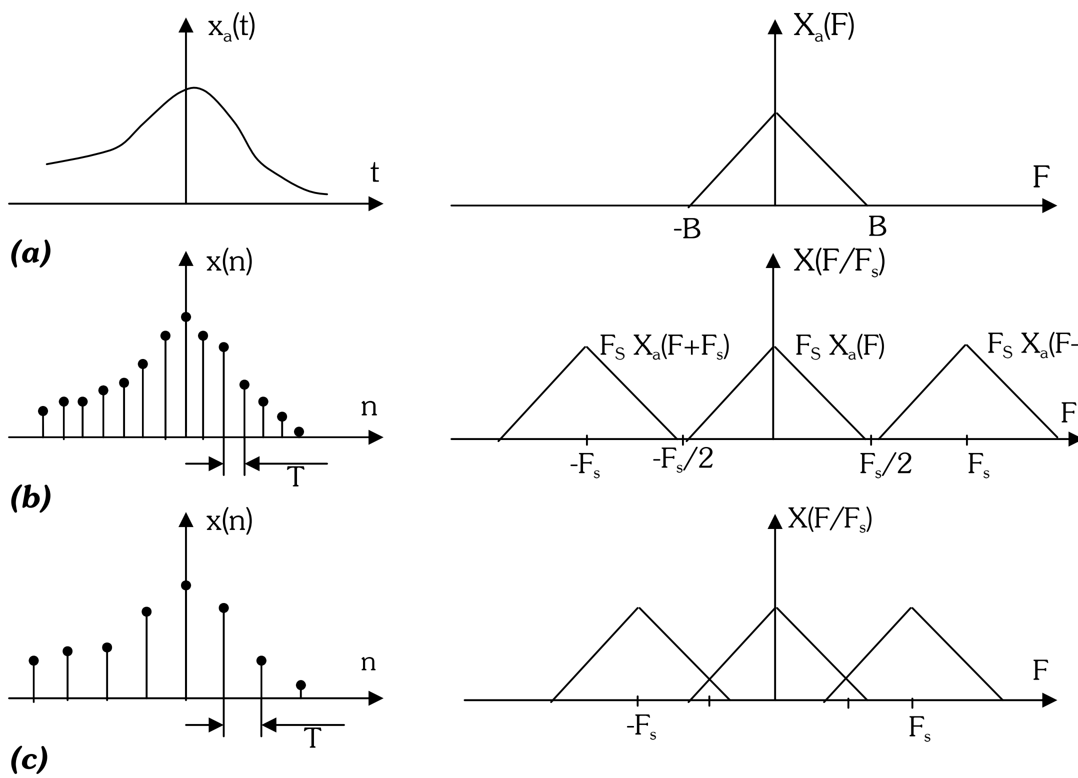
Xét quan hệ (3.4.14) và (3.4.15) với các tần số lấy mẫu có giá trị khác nhau. Để thực hiện điều này, ta xét với ví dụ là một tín hiệu tương tự với bề rộng phổ hữu hạn. Tín hiệu này được mô tả trên hình (3.4a). Phổ của tín hiệu sẽ bằng không khi $|F| \geq B$.

• Nếu chọn tần số lấy mẫu $F_s \geq 2B$ thì phổ $X(F/F_s)$ của tín hiệu rời rạc sẽ có dạng như trên hình (3.4b). Như vậy, nếu tần số lấy mẫu F_s được chọn sao cho $F_s \geq 2B$, với 2B là tần số Nyquist thì:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s X_a(F) \tag{3.4.16}$$

trong trường hợp này hiện tượng trùng phổ sẽ không xảy ra và vì vậy, trong miền giới hạn của tần số cơ bản $|F| \le F_s/2$ hoặc $|f| \le 1/2$, phổ của tín hiệu rời rạc sẽ đồng nhất với phổ của tín hiệu tương tự.

• Nếu chọn tần số lấy mẫu $F_s < 2B$ thì trong công thức xác định $X\left(\frac{F}{F_s}\right)$, do có sự lặp lại có chu kỳ của $X_a(F)$ nên sẽ phát sinh hiện tượng trùng phổ, như mô tả trên hình (3.4c). Khi đó phổ $X\left(\frac{F}{F_s}\right)$ của tín hiệu rời rạc theo thời gian sẽ có chứa các thành phần với các tần số nhầm lẫn của phổ tín hiệu tương tự $X_a(F)$, vì vậy việc khôi phục chính xác tín hiệu gốc từ các mẫu sẽ không thể thực hiện được.



Hình 3.4. Mô tả sự lấy mẫu tín hiệu có bề rộng phổ hữu hạn và sự trùm phổ.

Trong trường hợp không có hiện tượng trùng phổ, tín hiệu gốc $x_a(n)$ có thể được khôi phục lại một cách chính xác từ các mẫu x(n):

$$X_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) & |F| \le F_s/2 \\ 0 & |F| > F_s/2 \end{cases} \qquad (3.4.17)$$

Theo phép biến đổi Fourier thì:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi F n/F_s}$$

và biến đổi ngược Fourier sẽ cho ta $x_a(t)$ từ phổ của nó $X_a(F)$:

$$x_a(t) = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

Giả sử $F_s = 2B$, thay vào các hệ thức trên, ta được:

$$x_a(t) = \frac{1}{F_s} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi F n/F_s} \right] e^{j2\pi Ft} dF = x \frac{1}{F_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-F_s/2}^{F_s/2} e^{j2\pi F(t-n/F_s)} dF$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin(\pi/T)(t-nT)}{(\pi/T)(t-nT)} \qquad (3.4.18)$$

Công thức (3.4.18) có chứa hàm:

$$g(t) = \frac{\sin(\pi/T)t}{(\pi/T)t} = \frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt} \qquad (3.4.19)$$

được dịch bởi các lượng nT, n = 0, ±1, ±2, ±3,… và được nhân với các mẫu tương ứng $x_a(nT)$ của tín hiệu rời rạc. Công thức (3.4.19) được gọi là *công thức nội suy* và được dùng để khôi phục tín hiệu liên tục $x_a(t)$ từ các mẫu, còn hàm g(t) trong (3.4.19) được gọi là *hàm nội suy*. Vì tại ***t = kT*** thì hàm nội suy g(t-kT) sẽ có giá trị bằng không, ngoại trừ ***k*** = ***n***; Do đó giá trị của $x_a(t)$ tại các thời điểm ***t = kT*** sẽ chính là mẫu $x_a(kT)$. ở tất cả các thời điểm còn lại, giá trị của $x_a(t)$ sẽ bằng giá trị của hàm nội suy sau khi đã lấy tỷ lệ với $x_a(nT)$.

Công thức (3.4.19) dùng để khôi phục tín hiệu liên tục $x_a(t)$ từ các mẫu, được gọi là *công thức nội suy lý tưởng* và là cơ sở của định lý lấy mẫu.

♦ **Phát biểu định lý lấy mẫu**

Tín hiệu liên tục theo thời gian có bề rộng phổ hữu hạn với tần số cao nhất B(Hz) có thể được khôi phục một cách duy nhất từ các mẫu, nếu quá trình lấy mẫu được thực hiện với tốc độ $F_s \geq 2B$ trên 1 giây.

chương 4

phép biến đổi Fourier rời rạc

Phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc, X(f), về mặt lý thuyết cho ta những công thức giải tích gọn và đẹp. Nó được sử dụng rộng rãi khi nghiên cứu các tín hiệu viết được dưới dạng giải tích. Tuy nhiên nó có một số hạn chế khi áp dụng trong thực tế khi chạy chương trình máy tính. Cụ thể là:

1. Độ dài tín hiệu số(số mẫu tín hiệu đem phân tích) là vô cùng. Trong khi độ dài tín hiệu trong thực tế bao giờ cũng là ***hữu hạn.***

2. Biến độc lập f (tần số) của X(f) là một biến liên tục, trong khi đó việc xử lý tín hiệu trên máy tính bao giờ cũng phải được ***rời rạc*** hoá, số hoá.

Do tầm quan trọng to lớn của phép biến đổi Fourier nên người ta đã tìm cách khắc phục các hạn chế trên bằng cách đưa nó về dạng thích hợp. Đó là phép biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu có ***độ dài hữu hạn*** và có trục tần số cũng được **rời rạc hoá**, thường được gọi một cách ngắn gọn là phép biến đổi Fourier rời rạc, được viết tắt trong tiếng Anh là **DFT**, là một thuật ngữ được dùng phổ biến. Cần phân biệt với tên gọi " phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc" mà ta đã nghiên cứu ở chương 3. Ngoài ý nghĩa về mặt lý thuyết, DFT còn đóng vai trò rất quan trọng trong thực tế xử lý tín hiệu số do tồn tại cách tính DFT rất hiệu quả, tốc độ nhanh FFT.

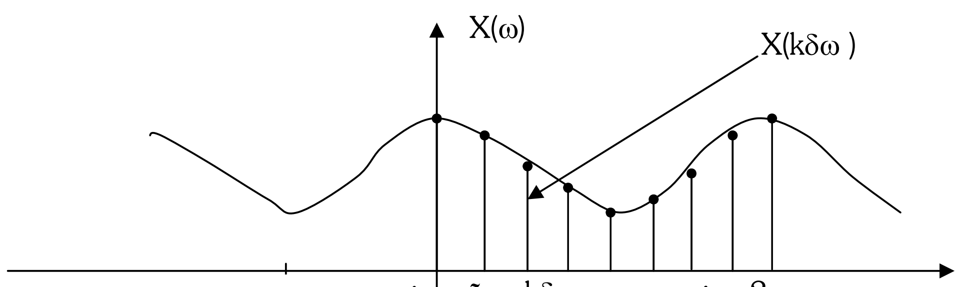
I. Lấy mẫu trong miền tần số - biến đổi Fourier rời rạc

Trước khi nghiên cứu DFT, ta hãy xét việc lấy mẫu của biến đổi Fourier đối với dãy tín hiệu rời rạc theo thời gian không tuần hoàn và từ đó có thể thiết lập được quan hệ giữa biến đổi Fourier đã được lấy mẫu với DFT.

I.1. Lấy mẫu trong miền tần số và khôi phục tín hiệu rời rạc theo thời gian

Xét biến đổi Fourier $X(e^{j\omega})$ hay X(ω) của một tín hiệu không tuần hoàn rời rạc theo thời gian x(n): $$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Giả sử tín hiệu X(ω) được lấy mẫu tuần hoàn và khoảng cách lấy mẫu là δω. Vì X(ω) là tuần hoàn với chu kỳ 2π, do vậy chỉ cần xét đến các mẫu được lấy trong miền tần số cơ bản: $0 \le \omega \le 2\pi$ và số lượng mẫu được lấy trong khoảng này là N, thì khoảng cách lấy mẫu là δω = 2π/N, (hình 4.1).



Hình 4.1. Lấy mẫu của biến đổi Fourier

Xét giá trị của X(ω) tại ω = 2πk/N ta được:

$$X(\frac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$, với k nguyên, k =[0..N-1] (4.1.1)

Nếu chia tổng (4.1.1) thành một số lượng vô hạn các tổng, trong đó mỗi tổng chứa N phần tử thì ta được:

$$X(\frac{2\pi}{N}k) = \ldots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + $$
$$+ \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \ldots \quad = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Thực hiện việc đổi biến n = n - lN và đổi thứ tự lấy tổng ta được:

$$X(\frac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \right] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (4.1.2)$$

Chú ý trong biểu thức trên, đã sử dụng tính chất:

$$e^{-j\frac{2\pi k(n-lN)}{N}} = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}.e^{j2\pi kl} = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Ta thấy tín hiệu: $x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$ (4.1.3)

nhận được do sự xếp chồng của vô số tín hiệu x(n) đặt lệch nhau một chu kỳ N.

Như vậy, $x_p(n)$ là tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ cơ bản là N, nên có thể khai triển qua chuỗi Fourier như sau:

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$,với n nguyên: [0..N-1] (4.1.4)

với các hệ số: $c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$,với k nguyên: [0..N-1]

(4.1.5)

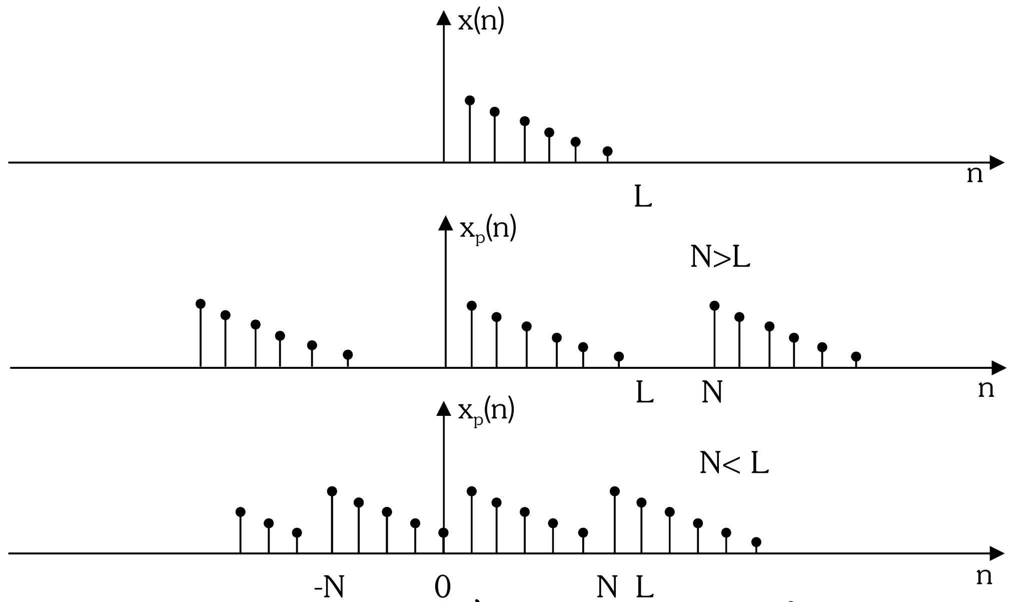
Từ (4.1.2), (4.1.3) và (4.1.5) ta có:

$$c_k = \frac{1}{N}X(\frac{2\pi}{N}k) \quad (4.1.6)$$

$$\Rightarrow \quad x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\frac{2\pi}{N}k)e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (4.1.7)$$

Quan hệ (4.1.6) chính là công thức cho phép khôi phục lại tín hiệu tuần hoàn $x_p(n)$ từ các mẫu của phổ X(ω). Tuy nhiên quan hệ này không thể đảm bảo được rằng x(n) hoặc X(ω) có thể khôi phục từ các mẫu hay không. Để đảm bảo điều này, cần phải khảo sát quan hệ giữa x(n) và $x_p(n)$.

Vì $x_p(n)$ là tín hiệu nhận được do sự xếp chồng của các tín hiệu x(n) đặt lệch nhau một chu kỳ N. Vì vậy x(n) có thể được khôi phục từ $x_p(n)$ nếu không có sự "***trùm thời gian***" giữa các thành phần của $x_p(n)$. Điều này đòi hỏi x(n) phải có độ dài hữu hạn L và phải nhỏ hơn chu kỳ N của $x_p(n)$. Hình 4.2 mô tả hai trường hợp của tín hiệu $x_p(n)$ ứng với các trường hợp N > L và N < L.



Hình 4.2. Dãy không tuần hoàn x(n) và dãy mở rộng $x_p(n)$.

Không làm mất tính tổng quát, ta có thể xem x(n) là một dãy có độ dài hữu hạn với các giá trị bằng không ngoài khoảng [0 .. L-1].

Như vậy ta có:

$$x(n) = x_p(n), \qquad 0 \le n \le N-1$$

Cuối cùng, phổ của tín hiệu không tuần hoàn rời rạc theo thời gian có độ dài hữu hạn L có thể khôi phục một cách chính xác từ các mẫu của nó tại các tần số $\omega_k = 2k\pi/N$ nếu $N \ge L$:

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \end{cases} \tag{4.1.8}$$

$$\Rightarrow \qquad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \text{ với: } 0 \le n \le N\text{-}1 \tag{4.1.9}$$

và:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}\right]e^{-j\omega n} = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(\omega - \frac{2\pi k}{N})n}\right] \tag{4.1.10}$$

Tổng của các phần tử trong dấu ngoặc vuông của (4.1.10) biểu diễn công thức nội suy được dịch bởi 2πk/N theo tần số. Đặt:

$$p(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{N}\frac{e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}\frac{e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} = \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{N\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\frac{\omega(N-1)}{2}} \tag{4.1.11}$$

$$\Rightarrow \qquad X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)p\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right), \ N \ge L \tag{4.1.12}$$

Như vậy X(ω) có thể được xác định thông qua các mẫu $X(\frac{2\pi}{N}k)$ của nó qua công thức nội suy (4.1.11) và (4.1.12).

II. Biến đổi Fourier rời rạc đối với các tín hiệu tuần hoàn

II.1. Các định nghĩa

a. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc.

Biến đổi Fourier rời rạc của các dãy tuần hoàn $x_p(n)$ có chu kỳ N được định nghĩa như sau:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (4.1.13)$$

Đặt: $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ thì ta có: $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ và $W_N^{-kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ (4.1.14)

$$\Rightarrow \qquad X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) W_N^{kn} \qquad (4.1.15)$$

Đây chính là biểu thức của biến đổi Fourier rời rạc.

<u>*Ví du:*</u>

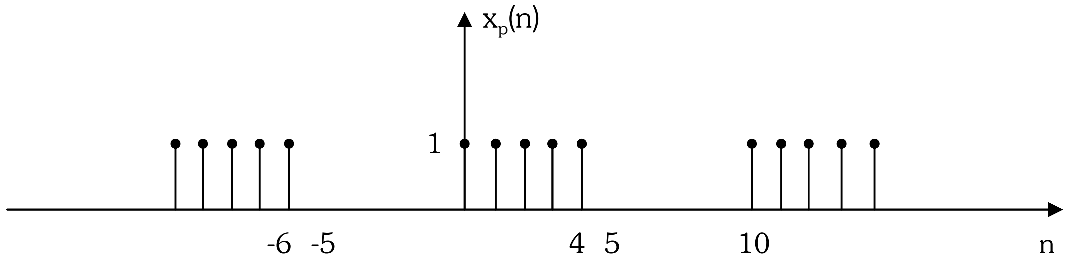
Cho dãy tuần hoàn $x_p(n)$ với chu kỳ N = 10, như sau:

$$x_p(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & 5 \le n \le 9 \end{cases}$$

Tìm $X_p(k)$.

<u>*Giải:*</u>

Dạng của $x_p(n)$ được biểu diễn như sau:



Hình 4.3. Đồ thị tín hiệu tuần hoàn chu kỳ N=10.

áp dụng biểu thức (4.1.15) ta có:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{9} x_p(n) W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k5}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{10}k} e^{-j\frac{\pi}{10}k4} = 5e^{-j\frac{\pi}{10}k4} \frac{\sin\frac{\pi}{2}k \Big/ \frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{10}k \Big/ \frac{\pi}{10}k}$$

Đặt:

$$A_p(k) = 5 \frac{\sin\frac{\pi}{2}k \Big/ \frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{10}k \Big/ \frac{\pi}{10}k}$$

ta có: $X_p(k) = e^{-j\frac{\pi}{10}k4} A_p(k) = |X_p(k)| e^{j\arg[X_p(k)]} = |X_p(k)| e^{j\varphi(k)}$

ở đây: $\varphi(k) = \arg[X_p(k)]$

$$|X_p(k)| = |A_p(k)| \qquad \varphi(k) = -\frac{2\pi}{5}k + \frac{\pi}{2}\{1 - \mathrm{Sgn}[A_p(k)]\}$$

b. Định nghĩa biến đổi Fourier ngược.

Biến đổi Fourier ngược được định nghĩa như sau:

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)e^{j\frac{2\pi}{N}k} \qquad (4.1.16)$$

hoặc:

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)W_N^{-kn} \qquad (4.1.17)$$

II.2. Các tính chất của Biến đổi Fourier rời rạc đối với các tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ n

a. Tính chất tuyến tính.

DFT là một biến đổi tuyến tính, tức là nếu có hai dãy $x_{1p}(n)$ và $x_{2p}(n)$ là các dãy tuần hoàn có cùng chu kỳ N và $x_{3p}(n)$ là tổ hợp tuyến tính của hai dãy trên:

$x_{3p}(n) = a.x_{1p}(n) + b.x_{2p}(n)$

thì ta có:

$$DFT[x_{3p}(n)] = X_{3p}(k) = a.X_{1p}(k) + b.X_{2p}(k) \qquad (4.1.18)$$

trong đó: $DFT[x_{1p}(n)] = X_{1p}(k)$ và $DFT[x_{2p}(n)] = X_{2p}(k)$

b. Tính chất trễ.

Nếu $x_p(n)$ là dãy tuần hoàn có cùng chu kỳ N với $DFT[x_p(n)] = X_p(k)$, và dãy $x_p(n + n_0)$ là dãy trễ của $x_p(n)$ cũng là dãy tuần hoàn chu kỳ N thì:

$$DFT[x_p(n+n_0)] = W_N^{-kn_0} X_p(k)$$

(4.1.19)

c. Tính đối xứng

Nếu $x_p(n)$ là dãy tuần hoàn có cùng chu kỳ N với $DFT[x_p(n)] = X_p(k)$ thì:

$$DFT[x^*_p(n)] = X^*_p(-k)$$

(4.1.20)

Chứng minh:

$$DFT\left[x_p^*(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p^*(n)W_N^{kn} = \left\{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_p^*(n)W_N^{kn}\right]^*\right\}^*$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)W_N^{-kn}\right]^* = X_p(-k)$$

Tương tự ta cũng có:

$$DFT[x^*_p(-n)] = X^*_p(k)$$

(4.1.21)

Chứng minh:

$$DFT\left[x_p^*(-n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p^*(-n)W_N^{kn}$$

đổi biến m = - n ta được:

$$DFT\left[x_p^*(-n)\right] = \sum_{m=0}^{-(N-1)} x_p^*(m)W_N^{-km}$$

do tính tuần hoàn chu kỳ N của $x_p(n)$ và W_N^{-km} nên ta có:

$$DFT\left[x_p^*(-n)\right] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_p(m) W_N^{km}\right]^* = X_p^*(k)$$

Và:

$$DFT\left\{Re\left[x_p(n)\right]\right\} = \frac{1}{2}\left[X_p(k) + X_p^*(-k)\right] \tag{4.1.22}$$

$$DFT\left\{Im\left[x_p(n)\right]\right\} = \frac{1}{2j}\left[X_p(k) - X_p^*(-k)\right] \tag{4.1.23}$$

Chứng minh:

$x_p(n) = Re[x_p(n)] + j\,.Im[x_p(n)]$

$x^*_p(n) = Re[x_p(n)] - j\,.Im[x_p(n)]$

$\Rightarrow$ $$Re\left[x_p(n)\right] = \frac{1}{2}\left[x_p(n) + x_p^*(n)\right]$$

$\Rightarrow$ $$DFT\left\{Re\left[x_p(n)\right]\right\} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_p(n) + x_p^*(n)\right]W_N^{kn} = \frac{1}{2}\left[X_p(k) + X_p^*(-k)\right]$$

và:

$\Rightarrow$ $$Im\left[x_p(n)\right] = \frac{1}{2j}\left[x_p(n) - x_p^*(n)\right]$$

$\Rightarrow$ $$DFT\left\{Im\left[x_p(n)\right]\right\} = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_p(n) - x_p^*(n)\right]W_N^{kn} = \frac{1}{2j}\left[X_p(k) - X_p^*(-k)\right]$$

d. Tích chập tuần hoàn

Công thức tích chập được trình bày trong chương 1:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m)$$

được gọi là tích chập tuyến tính. Đối với tích chập này các dãy là bất kỳ. Tuy nhiên ở tích chập tuần hoàn, chiều dài các dãy tuần hoàn là vô cùng nhưng có các chu kỳ lặp lại giống nhau, vì thế tổng chỉ lấy trong một chu kỳ. Và ta có định nghĩa tích chập tuần hoàn như sau:

Tích chập tuần hoàn của hai dãy tuần hoàn $x_{1p}(n)$ và $x_{2p}(n)$ là có cùng chu kỳ N là dãy $x_{3p}(n)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N:

$$x_{3p}(n) = x_{1p}(n)(*)_N x_{2p}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m) x_{2p}(n-m) \tag{4.1.24}$$

Xét tích chập tuần hoàn trong miền k:

$$X_{3p}(k) = X_{1p}(k).\, X_{2p}(k) \tag{4.1.25}$$

Chứng minh:

$$X_{3p}(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m) x_{2p}(n-m)\right]W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m) \sum_{n=0}^{N-1} x_{2p}(n-m) W_N^{kn}$$

đổi biến: l = n - m, n = l + m và vì $x_{2p}(n)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N, nên ta có:

$$X_{3p}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m) \sum_{l=-m}^{-m+N-1} x_{2p}(l) W_N^{k(l+m)} = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m) W_N^{km} \sum_{l=0}^{N-1} x_{2p}(l) W_N^{kl} = X_{1p}(k) X_{2p}(k)$$

e.Tích của hai dãy

Nếu ta coi tích của hai dãy tuần hoàn $x_{1p}(n)$ và $x_{2p}(n)$ có cùng chu kỳ N là dãy $x_{3p}(n)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N:

$x_{3p}(n) = x_{1p}(n).x_{2p}(n)$

thì ta có:

$$X_{3p}(k) = X_{1p}(n)(*)_N X_{2p}(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_{1p}(m)X_{2p}(k-m) \qquad (4.1.26)$$

Như vậy, tích đại số trong miền n thì tương ứng với tích chập trong miền k.

f. Tương quan tuần hoàn.

Nếu ta có hai dãy tuần hoàn $x_{1p}(n)$ và $x_{2p}(n)$ với cùng chu kỳ N thì hàm tương quan chéo của chúng sẽ được tính toán trên một chu kỳ theo biểu thức sau:

$$r_{x_{1p}x_{2p}}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m)x_{2p}(m-n) \qquad (4.1.27)$$

Như vậy, hàm tương quan chéo của hai dãy cũng là một dãy tuần hoàn với chu kỳ N.

Xét trong miền k:

$$R_{x_{1p}x_{2p}}(k) = X_p(k).X_p(-k) \qquad (4.1.28)$$

III. Biến đổi Fourier rời rạc đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn

III.1. Các định nghĩa

Như đã đề cập đến trong phần lấy mẫu trong miền tần số, một dãy x(n) không tuần hoàn và có chiều dài hữu hạn N, ta ký hiệu là $x(n)_N$ sẽ nhận được bằng cách trích ra một chu kỳ N của dãy tuần hoàn $x_p(n)$ có chu kỳ N:

$$x(n)_N = \begin{cases} x_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n < 0, n > N-1 \end{cases}$$

Để nhận được dãy $x(n)_N$ ta có thể sử dụng một dãy chữ nhật:

$$rect_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n < 0, n > N-1 \end{cases}$$

và thực hiện tích:

$x(n)_N = x_p(n).rect_N(n)$

Trong miền k, đối với dãy X(k) có thể được xác định như sau:

$$X(k) = \begin{cases} X_p(k) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n < 0, n > N-1 \end{cases}$$

và: $X(k) = X_p(k).rect_N(k)$

Hơn nữa, biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N chỉ tính trong một chu kỳ rồi kết quả đó được tuần hoàn hoá từ - ∞ đến +∞ với chu kỳ N để làm định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn N nhưng không được thực hiện tuần hoàn hoá mà chỉ lấy từ 0 đến N-1.

Như vậy, biến đổi Fourier rời rạc (DFT) đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N được định nghĩa như sau:

a. Biến đổi Fourier thuận:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & n < 0, n > N-1 \end{cases} \qquad (4.3.1)$$

b. Biến đổi Fourier ngược:

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k < 0, k > N-1 \end{cases} \qquad (4.3.2)$$

ở đây ta gọi X(k) là phổ rời rạc của tín hiệu x(n), nếu biểu diễn dưới dạng modun và argument ta có:

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$$

$$\varphi(k) = \arg[X(k)]$$

(4.3.3)

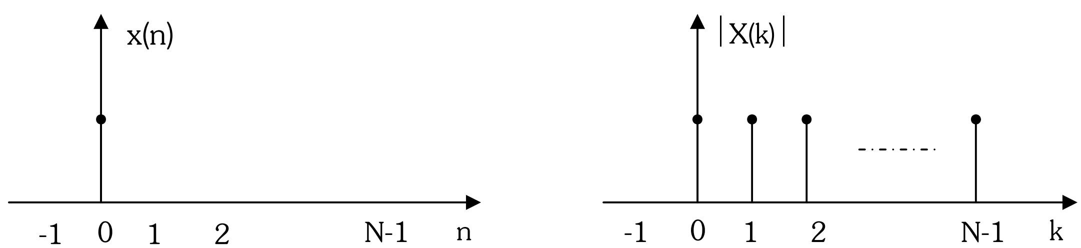
trong đó: $|X(k)|$ gọi là phổ rời rạc biên độ và φ(k) gọi là phổ rời rạc pha.

Ví dụ 1:

Tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn x(n) sau:

$$x(n) = \delta(n)$$

Giải: Trước hết ta chọn chiều dài của dãy, giả sử là N. Vậy dãy x(n) có dạng:



(a) (b)

Hình 4.4. a- Biểu diễn của dãy x(n), b- Biểu diễn của phổ rời rạc biên độ

Khi đó X(k) được tính như sau:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn} = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k < 0, k > N-1 \end{cases}$$

Vậy phổ biên độ rời rạc và phổ pha rời rạc là:

$$|X(k)| = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k < 0, k > N-1 \end{cases}$$

$$\varphi(k) = 0.$$

Dạng của $|X(k)|$ được biểu diễn trên hình 4.4b.

Ví dụ 2:

Tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn x(n) sau, với a < 1:

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \end{cases}$$

Giải:

Theo định nghĩa DFT ta có:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \end{cases} \Rightarrow \quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(aW_N^k\right)^n = \frac{1 - \left(aW_N^k\right)^N}{1 - aW_N^k}$$

Vì: $$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \Rightarrow W_N^{kN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kN} = e^{-j2\pi k} = 1$$

$$X(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} = \frac{1-a^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{(1-a^N)\left(1-ae^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)}{\left(1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)\left(1-ae^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$= \frac{(1-a^N)\left(1-a.\cos\frac{2\pi}{N}k - ja.\sin\frac{2\pi}{N}k\right)}{1+a-2a.\cos\frac{2\pi}{N}k} = |X(k)|e^{j\varphi(\omega)}$$

Vậy:

$$|X(k)| = \sqrt{\{\mathrm{Re}[X(k)]\}^2 + \{\mathrm{Im}[X(k)]\}^2} = (1-a^N)\frac{\sqrt{\left(1-2a.\cos\frac{2\pi}{N}k + a^2\right)}}{1-2a.\cos\frac{2\pi}{N}k + a}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Re}[X(k)]}{\mathrm{Im}[X(k)]} = \mathrm{arctg}\left[\frac{-a.\sin\frac{2\pi}{N}k}{1-a.\cos\frac{2\pi}{N}k}\right] = -\mathrm{arctg}\left[\frac{a.\sin\frac{2\pi}{N}k}{1-a.\cos\frac{2\pi}{N}k}\right]$$

III.2. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc đối với các dãy chiều dài hữu hạn

Trong phần I, cho thấy DFT chính là tập hợp N mẫu $\{X(2\pi k/N)\}$ của biến đổi Fourier $X(\omega)$ của dãy $\{x(n)\}$ với độ dài hữu hạn $L \le N$. Việc lấy mẫu của $X(\omega)$ được thực hiện tại N tần số cách đều nhau và thông qua N mẫu. Và ta đã có được DFT, IDFT của dãy x(n). Trong phần này ta sẽ xét một số tính chất quan trọng của DFT. Ngoại trừ một số tính chất riêng, về cơ bản các tính chất này cũng giống các tính chất của biến đổi Fourier. Các tính chất của DFT có một vai trò rất quan trọng khi giải quyết các bài toán trong thực tế.

a. Tính chất tuyến tính

DFT là một biến đổi tuyến tính, tức là nếu ta có hai dãy chiều dài hữu hạn $x_1(n)$ và $x_2(n)$ và dãy $x_3(n)$ là tổ hợp tuyến tính của hai dãy này, thì:

$$X_3(k) = a.X_1(k) + b.X_2(k) \qquad (4.3.4)$$

Chú ý: nếu chiều dài của dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ khác nhau thì ta phải chọn chiều dài của dãy $x_3(n)$ như sau:

$$L[x_3(n)] = N_3 = \max[N_1, N_2]$$

và tất cả các $DFT[x_1(n)]$, $DFT[x_2(n)]$ và $DFT[x_3(n)]$ đều phải tính trên N_3 mẫu.

b. Trễ vòng

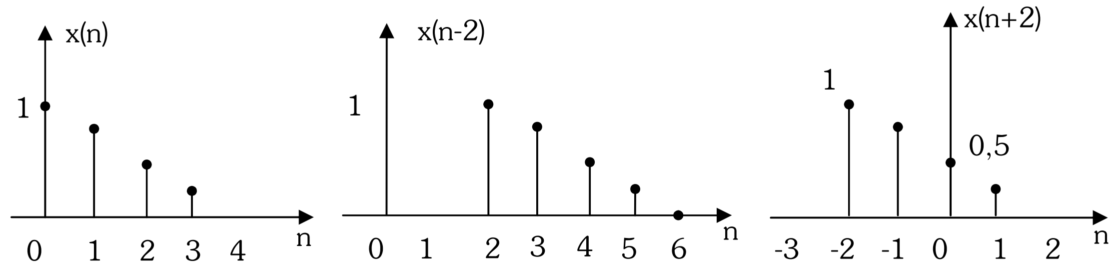
Trước hết ta xét hai ví dụ sau nhằm so sánh trễ tuyến tính và trễ tuần hoàn:

<u>*Ví dụ 1.*</u> Cho dãy x(n) sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1-\frac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & \end{cases}.$$

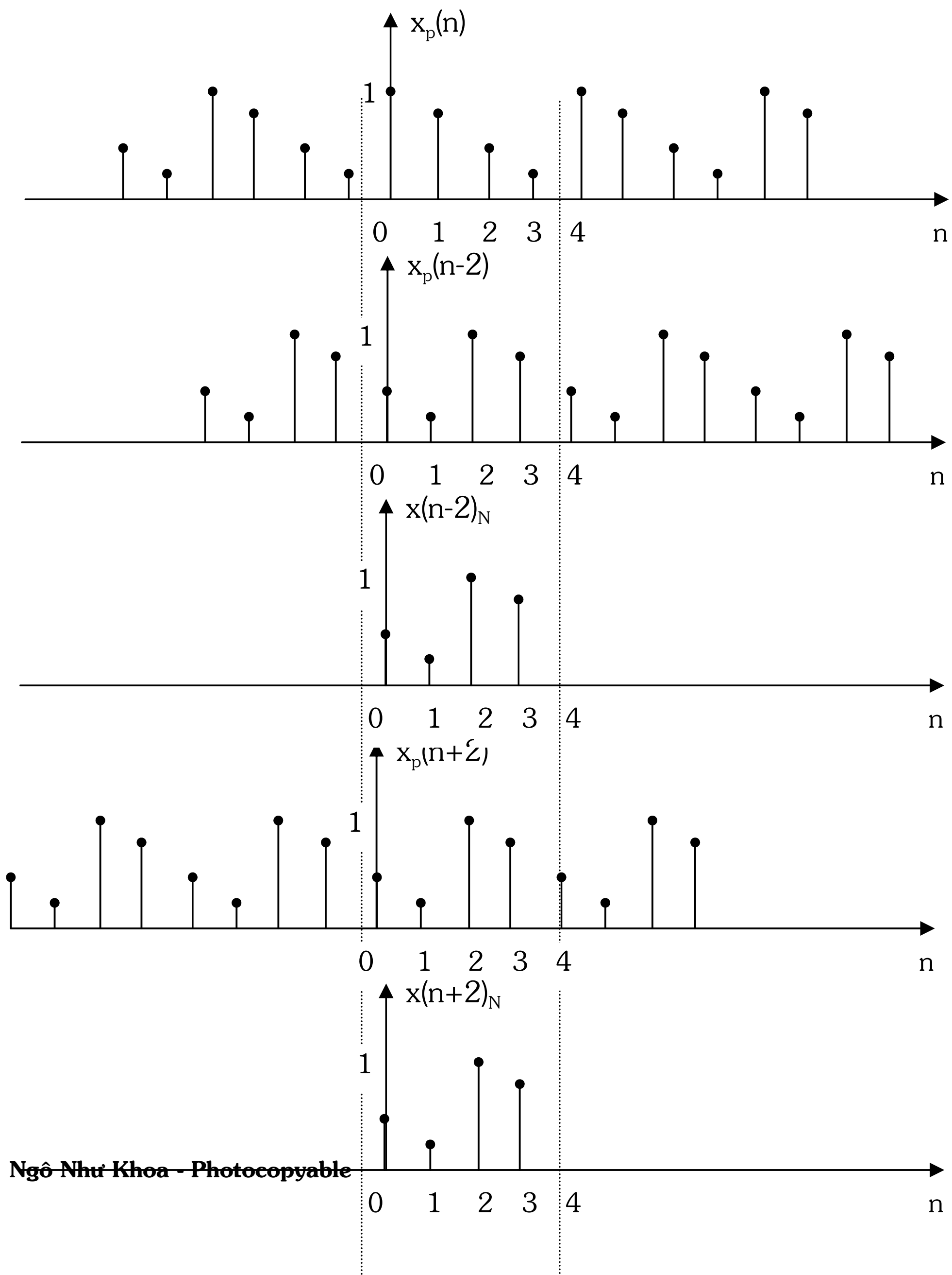
Tìm trễ tuyến tính x(n-2) và x(n+2)

Giải: Ta giải bằng phương pháp đồ thị như hình sau:



Ví dụ 2. Cho dãy $x_p(n)$ tuần hoàn với chu kỳ N = 4 sau: $x_p(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & \end{cases}$

Tìm trễ tuần hoàn $x_p(n-2)$ và $x_p(n+2)$ sau đó lấy ra một chu kỳ của các dãy này.
Giải: Ta giải bằng phương pháp đồ thị như hình sau:



ở đây ta dùng các ký hiệu:

$x(n \pm n_0)$: Trễ tuyến tính

$x_p(n \pm n_0)$: Trễ tuần hoàn chu kỳ N

$x(n \pm n_0)_N$: Trễ vòng với chiều dài N

Qua hai ví dụ trên ta thấy:

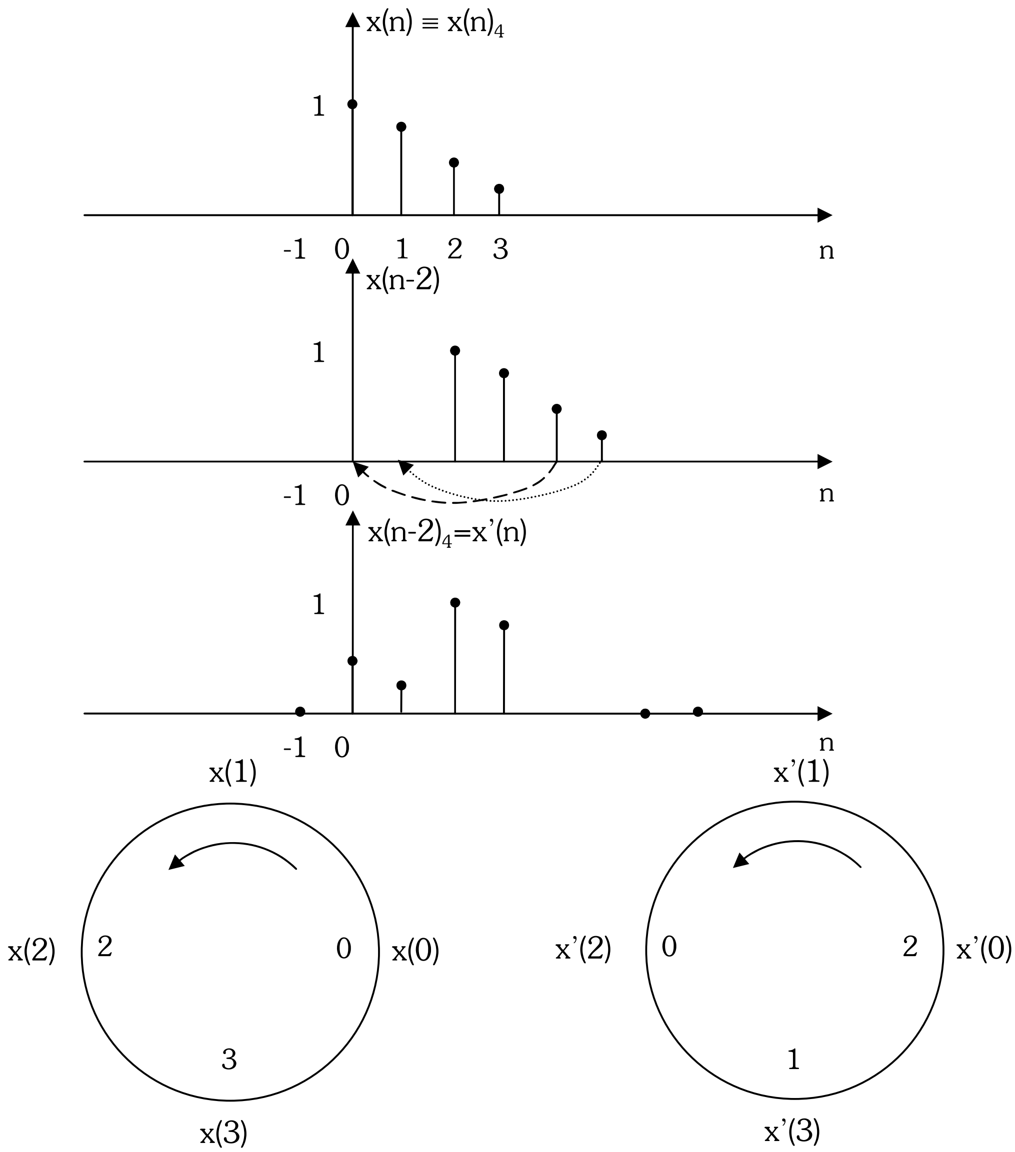
Nếu trích ra một chu kỳ (từ 0 đến N-1) của trễ tuần hoàn chu kỳ N thì ta sẽ được trễ vòng $x(n \pm n_0)_N$, so sánh với trễ tuyến tính $x(n \pm n_0)$ thì ta thấy rằng nếu các mẫu của trễ tuyến tính vượt ra ngoài khoảng [0, N-1] thì nó sẽ vòng vào bên trong khoảng đó để sao cho dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)_N$ xác định trong khoảng [0, N-1] thì trễ vòng của nó $x(n \pm n_0)_N$ xác định trong khoảng [0, N-1] chứ không được vượt ra ngoài khoảng đó.

Vậy trễ vòng tương ứng với việc hoán vị vòng các mẫu của dãy $x(n)_N$ trong khoảng [0, N-1] và được biểu diễn như sau:

$$x(n) = x(n)_N = x_p(n).rect_N(n)$$

$$x(n \pm n_0)_N = x_p(n \pm n_0)rect_N(n) \qquad (4.3.5)$$

Bản chất của trễ vòng có thể được minh hoạ như sau:



Để xác định trễ vòng trong miền k, do tính đối ngẫu nên trong miền k trễ vòng cũng có bản chất tương tự như trong miền n, tức là:

$X(k) = X_p(k).rect_N(k)$

$X(k - n_0)_N = X_p(k - n_0).rect_N(k)$

(4.3.6)

và:

$$DFT\left[x(n - n_0)_N\right] = W_N^{kn_0} X(k) \qquad (4.3.7)$$

trong đó: $DFT[x(n)] = X(k)$

Chứng minh:

Ta có: $DFT\left[x_p(n - n_0)_N\right] = W_N^{kn_0} X_p(k)$

Nếu cả hai vế ta đều lấy ra một chu kỳ [0, N-1]:

$x(n - n_0)_N = x_p(n - n_0).rect_N(n)$

$X(k) = X_p(k).rect_N(k)$

Vậy ta có: $DFT\left[x(n - n_0)_N\right] = W_N^{kn_0} X(k)$

c. Tính đối xứng

Tính đối xứng của DFT có thể nhận được bằng cách áp dụng phương pháp đã được sử dụng đối với biến đổi Fourier. Trong trường hợp tổng quát, dãy x(n) có chiều dài hữu hạn N và DFT của nó đều có giá trị phức. Khi đó, các dãy này có thể được biểu diễn dưới dạng:

$x(n) = Re[x(n)] + j.Im[x(n)]$

và $X(k) = Re[X(k)] + j.Im[X(k)]$

$X^*(k) = X(-k) = Re[X(k)] - j.Im[X(k)]$

Từ các biến đổi Fourier thuận và nghịch (DFT, IDFT) ta có:

$$Re\left[X(k)\right] = \sum_{n=0}^{N-1}\left[Re\left[x(n)\right]\cos\frac{2\pi kn}{N} + Im\left[x(n)\right]\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (4.3.8)$$

$$Im\left[X(k)\right] = -\sum_{n=0}^{N-1}\left[Re\left[x(n)\right]\sin\frac{2\pi kn}{N} - Im\left[x(n)\right]\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (4.3.9)$$

và

$$Re\left[x(n)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[Re\left[X(k)\right]\cos\frac{2\pi kn}{N} - Im\left[X(k)\right]\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (4.3.10)$$

$$Im\left[x(n)\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[Re\left[X(k)\right]\sin\frac{2\pi kn}{N} + Im\left[X(k)\right]\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (4.3.11)$$

• ***Dãy có giá trị thực:***

Nếu x(n) là dãy thực thì ta có:

$X(N - k) = X^*(k) = X(-k)$

(4.3.12)

$\Rightarrow$ $|X(N-k)| = |X(k)|$ và $arg[X(N-k)] = -arg[X(k)]$

và x(n) còn được xác định theo (4.3.10), là một dạng khác của IDFT.

• ***Tín hiệu chẵn và thực:***

Nếu x(n) là dãy chẵn và thực, thì ta có:

$$x(n) = x(-n) = x(N-n) \qquad (4.3.13)$$

Từ hệ thức (4.3.10) ta có Im[X(k)] = 0 và do vậy DFT trở thành:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.14)$$

là một dãy chẵn. Do Im[X(k)] = 0 nên IDFT trở thành:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cos\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.15)$$

• ***Tín hiệu lẻ và thực:***

Nếu x(n) là dãy lẻ và thực, thì ta có:

x(n) = -x(- n) = -x(N-n)

(4.3.16)

Từ hệ thức (4.3.10) ta có Re[X(k)] = 0 và do vậy DFT trở thành:

$$X(k) = -j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.17)$$

là một dãy lẻ, phức thuần tuý. Và do đó, IDFT trở thành:

$$x(n) = -\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{Im}\left[X(k)\right]\sin\frac{2\pi kn}{N} = j\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sin\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.18)$$

• ***Dãy phức thuần tuý:***

$$\mathrm{Re}\left[X(k)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Im}\left[x(n)\right]\sin\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.19)$$

$$\mathrm{Im}\left[X(k)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Im}\left[x(n)\right]\cos\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.20)$$

Nếu Im[x(n)] là lẻ thì Im[X(k)] = 0 và do vậy X(k) là thực thuần tuý. Nếu Im[x(n)] là chẵn thì Re[X(k)] = 0 và do vậy X(k) là phức thuần tuý.

d. Tích chập vòng.

Giả sử $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là hai dãy có độ dài hữu hạn N với các DFT tương ứng là:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j2\pi nk/N} \quad \text{và} \quad X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)e^{-j2\pi nk/N}$$

Gọi $X_3(k)$ là tích của hai DFT trên: $X_3(k) = X_1(k).\,X_2(k)$; Là DFT của $x_3(n)$. Ta sẽ tìm quan hệ giữa $x_3(n)$ với $x_1(n)$ và $x_2(n)$.

Biến đổi Fourier ngược của $X_3(k)$ là:

$$\begin{aligned} x_3(m) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_3(k)e^{j2\pi mk/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[X_1(k).X_2(k)\right]e^{j2\pi mk/N} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j2\pi nk/N}\right]\left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)e^{-j2\pi lk/N}\right]e^{j2\pi mk/N} \qquad (4.3.21) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)\left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(m-n-l)k/N}\right] \end{aligned}$$

Trong đó, tổng biểu diễn bởi biểu thức trong ngoặc vuông của (4.3.21) có giá trị:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(m-n-l)k/N} = \begin{cases} N & l = m - n + pN = \left(\left(m-n\right)\right)_N \\ 0 & \text{Other} \end{cases}$$

Thay vào (4.3.21) ta được:

$$x_3(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2\big((m-n)\big)_N \qquad m = 0,1,2..., N-1 \qquad (4.3.22)$$

Biểu thức (4.3.22) có dạng của một tích chập. Tuy vậy, đây không phải là một tích chập biểu diễn quan hệ giữa đáp ứng và kích thích của hệ thống tuyến tính bất biến. Trong tích chập này, có chứa chỉ số $(m\text{-}n)_N$ đặc trưng cho tính dịch vòng, vì vậy công thức (4.3.22) được gọi là tích chập vòng. Như vậy tích các DFT của hai dãy sẽ tương đương với tích chập vòng của hai dãy trong miền biến số độc lập tự nhiên n.

Ví dụ: Tích tích chập vòng của hai dãy sau: $x_1(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 1 \right\}$ và $x_2(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \right\}$

Giải:

Để tính tích chập vòng của hai dãy, ta sẽ tiến hành qua hai phương pháp sau:

• *PP1:* Sử dụng các phép biến đổi DFT và IDFT.

Ta có:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)e^{-j2\pi nk/4} = 2 + e^{-j\pi k/2} + 2.e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2}, \quad (k = 0,1,2,3)$$

$\Rightarrow \quad X_1(0) = 6; \quad X_1(1) = 0; \quad X_1(2) = 2; \quad X_1(3) = 0.$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{3} x_2(n)e^{-j2\pi nk/4} = 1 + 2.e^{-j\pi k/2} + 3.e^{-j\pi k} + 4.e^{-j3\pi k/2}, \quad (k = 0,1,2,3)$$

$\Rightarrow \quad X_2(0) = 10; \quad X_2(1) = -2 + j.2; \quad X_2(2) = -2; \quad X_2(3) = -2 - j.2.$

$\Rightarrow \quad X_3(0) = 60; \quad X_3(1) = 0; \quad X_3(2) = -4; \quad X_3(3) = 0.$

theo định nghĩa biến đổi Fourier ngược ta có:

$$x_3(n) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X_3(k)e^{j2\pi nk/4} = \frac{1}{4}(60 - 4e^{-j\pi n}), \quad (n = 0,1,2,3)$$

$\Rightarrow \quad x_3(0) = 14; \quad x_3(1) = 16; \quad x_3(2) = 14; \quad x_3(3) = 16.$

• *PP2:* Mô tả các mẫu của từng dãy thông qua các điểm trên hai vòng tròn khác nhau. Cách mô tả này như thể hiện trên hình 4.5a, chiều dương được quy ước là ngược chiều kim đồng hồ.

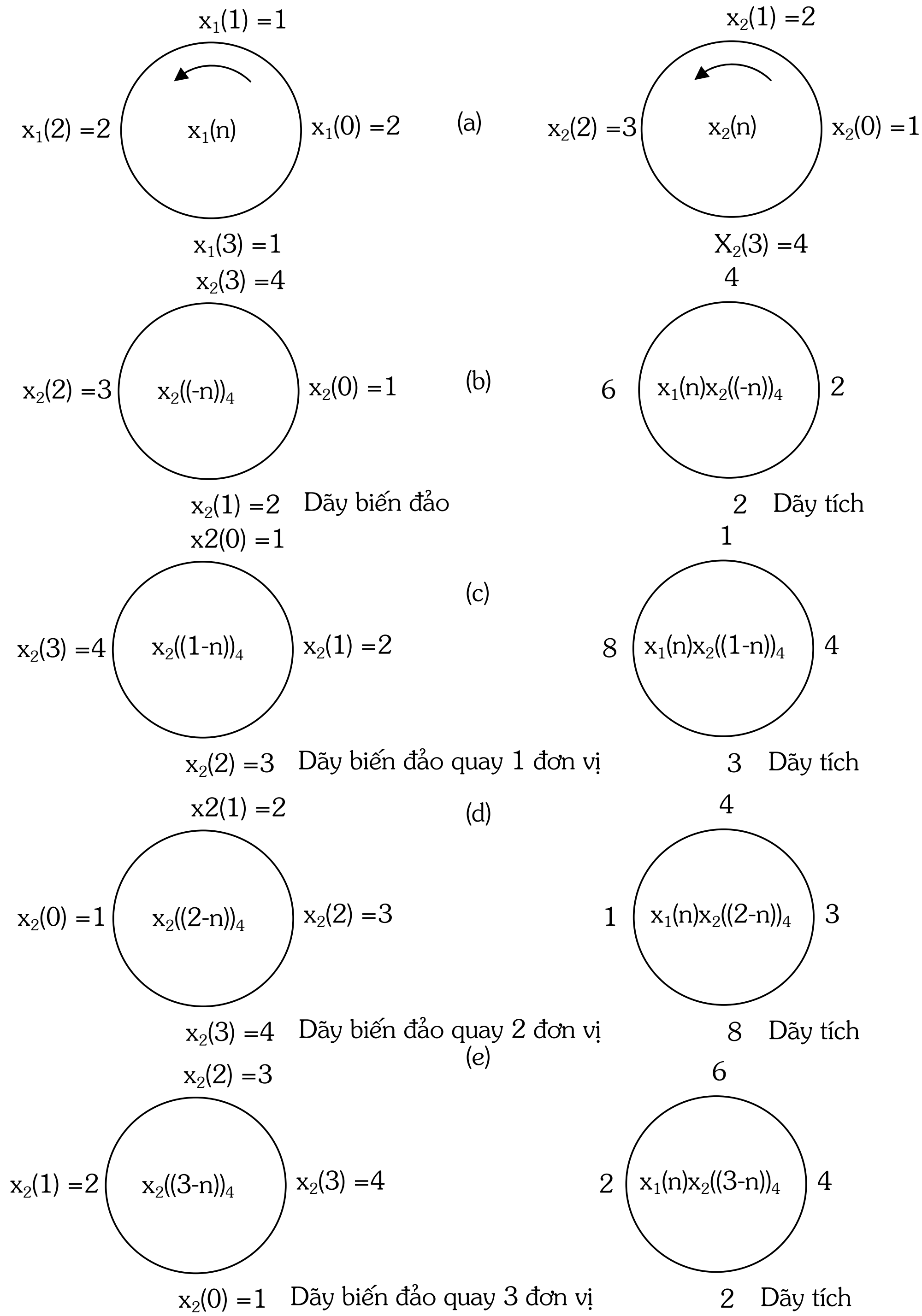
+. Với m = 0, ta có: $\qquad x_3(0) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)x_2((-n))_4$

Hình 4.5b mô tả vị trí các mẫu của dãy biến số đảo $x((-n))_4$ trên đường tròn. Các vị trí này nhận được bằng cách vẽ các điểm mẫu theo chiều âm; và ta nhận được: $x_3(0) = 14$.

+. Với m = 1, ta có: $\qquad x_3(0) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n)x_2((1-n))_4$

Dãy $x_2((1\text{-}n))_4$ nhận được bằng cách quay các điểm của $x_2((\text{-}n))_N$ đi một đơn vị thời gian theo chiều dương, hình 4.5c mô tả vị trí các mẫu của dãy biến số đảo $x_2((1\text{-}n))_4$ trên đường tròn, và nhận được: $x_3(1) = 16$.

Tương tự, (các hình 4.5d và e) ta cũng xác định được các giá trị các mẫu còn lại: $x_3(2) = 14$ và $x_3(3) = 16$.



Hình 4.5. Tích chập vòng của hai dãy.

IV. Hiệu ứng hạn chế độ dài tín hiệu để phân tích Fourier

Ta đã biết rằng một tín hiệu có độ dài hữu hạn N có thể được biểu diễn một cách đầy đủ thông qua phép biến đổi Fourier rời rạc DFT. Tuy vậy, khi các tín hiệu có độ dài quá lớn hoặc vô hạn thì việc xác định biến đổi Fourier rời rạc của nó là không thể thực hiện được. Trong trường hợp này, ta cần lấy một đoạn thích hợp nhất của tín hiệu với một độ dài cho phép để thực hiện biến đổi DFT. Khi đó rõ ràng rằng phương pháp DFT chỉ cho ra một kết quả xấp xỉ của tín hiệu. ở đây, ta xem xét vấn đề hạn chế độ dài của tín hiệu và các hiệu ứng phát sinh do việc sử dụng phương pháp DFT đối với dãy đã được hạn chế về độ dài.

Nếu tín hiệu cần phân tích là tín hiệu tương tự thì trước tiên tín hiệu này cần được chuyển qua bộ lọc để loại bỏ các nhiễu (hoặc các thành phần của tần số không cần thiết) và sau đó được lấy mẫu với tần số F_s □2B, với B là độ rộng của dải thông. Như vậy tần số cao nhất của hài thành phần có chứa tín hiệu khi lấy mẫu là $F_s/2$. Để có thể hạn chế độ dài của tín hiệu đã được lấy mẫu, giả sử chỉ xét tín hiệu trong một khoảng thời gian hữu hạn $T_0 = NT$, trong đó N là số lượng mẫu và T là khoảng thời gian giữa hai lần lấy mẫu (chu kỳ lấy mẫu). Khoảng thời gian lấy mẫu này về nguyên tắc sẽ hạn chế độ phân giải về tần số; nghĩa là nó sẽ hạn chế khả năng phân biệt đối với các thành phần tần số mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $1/T_0 = 1/NT$ trong miền tần số.

Giả sử rằng {x(n)} là tín hiệu cần phân tích. Có thể thấy việc giới hạn độ dài của dãy {x(n)} với N mẫu trong khoảng $n_0 \le n \le n_0 + N-1$, sẽ tương đương với việc nhân tín hiệu này với một hàm cửa sổ với độ dài N *(để đơn giản, từ đây ta coi $n_0 = 0$, khi đó các kết quả với n_0 <> 0 sẽ nhận được bằng cách áp dụng tính chất trễ và dịch chuyển. Và khi đó khoảng xác định của N mẫu sẽ là: $0 \le n \le N-1$)*. Nghĩa là:

Trong đó $x_N(n) = x(n)w(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$

Việc nhân tín hiệu với hàm cửa sổ theo thời gian tương đương với việc lấy tích chập phổ của tín hiệu x(n) với phổ của cửa sổ:

$$X_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega'})W(e^{j(\omega-\omega')})d\omega' = X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

trong đó: $X_N(e^{j\omega})$, $X(e^{j\omega})$ và $W(e^{j\omega})$ là các biến đổi Fourier tương ứng của x_N

Với tín hiệu $x_N(n)$, chúng ta có thể áp dụng DFT vì nó có chiều dài hữu hạn. Các hệ số $X_N(e^{j\omega})$ của DFT lúc này sẽ biểu diễn gần đúng cho các mẫu của $X(e^{j\omega})$. Để đánh giá mức độ xấp xỷ, chúng ta phải đánh giá tích chập trên đây, theo từng kiểu cửa sổ quan sát.

Vấn đề thứ hai là số lượng mẫu N được chọn như thế nào và vị trí cửa sổ đặt ở đâu (tức là tìm n_0), cũng như mức độ ảnh hưởng của hàm cửa sổ đã chọn.

Để chọn vị trí cửa sổ, ta phải cần biết cụ thể thêm về tín hiệu cần phân tích. Nói chung, nguyên tắc chọn vị trí cửa sổ (chọn n_0) sao cho cửa sổ bao trùm lên phần quan trọng của tín hiệu và bỏ qua những đoạn tín hiệu có biên độ nhỏ không đáng kể.

Ví dụ tín hiệu có dạng:

$x(n) = a^{|n|}$ với $|a| < 1$

thì các mẫu có biên độ lớn tập trung ở gốc toạ độ. Bởi vậy cửa sổ cần đặt xung quanh gốc toạ độ.

a. Hàm cửa sổ chữ nhật

Hàm cửa sổ chữ nhật được biểu diễn như sau:

$$w_R(n) = \mathrm{Rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Trong miền tần số, ta có:

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin\omega\frac{N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

b. Cửa sổ tam giác

Trong miền n, cửa sổ tam giác được định nghĩa như sau:

$$w_T(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \le n \le \frac{N-1}{2} \\ 1 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Trong miền tần số, ta có:

$$W_T(e^{j\omega}) = \frac{2}{N-1} e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left[\frac{\omega\frac{N-1}{2}}{2}\right]}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

c. Cửa sổ Hanning và Hamming

Trong miền n, cửa sổ Hanning và Hamming được định nghĩa như sau:

$$w_H(n) = \begin{cases} \alpha - (1-\alpha)\cos\frac{2\pi n}{N-1} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

- Nếu α = 0,5 ta có cửa sổ Hanning như sau:

$$w_{Han}(n) = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5\cos\frac{2\pi n}{N-1} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

- Nếu α = 0,54 ta có cửa sổ Hamming như sau:

$$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos\frac{2\pi n}{N-1} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Và trong miền tần số, ta có:

$$W_H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\left[\alpha\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin\left(\omega\frac{N}{2} - \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right)} + \frac{1-\alpha}{2}\frac{\sin\left(\omega\frac{N}{2} + \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N-1}\right)}\right]$$

Bởi vì thông qua DFT ta có thể biểu diễn một dãy với độ dài hữu hạn trong miền tần số qua các tần số rời rạc, do đó DFT có thể được sử dụng như một công cụ tính toán trong việc phân tích các hệ thống tuyến tính và đặc biệt cho các bộ lọc tuyến tính. Tuy nhiên không thể tính Chúng ta đã biết rằng, khi một hệ thống với đáp ứng tần số H(ω) được kích thích bởi tính hiệu đầu vào có phổ là y(ω)=X(ω)H(ω). Dãy đầu ra y(n) được xác định từ phổ của nó thông qua biến đổi ngược Fourier. Tuy vậy, khi tính toán ,có thể thấy vấn đề nảy sinh khi sử dụng các phương pháp trong miền tần số là cả X(ω), H(ω) và Y(ω) đều là các hàm liên tục của biến ω, vì vậy không thể sử dụng máy tính số để xử lý bởi ví máy tính chỉ có thể lưu trữ và thực hiện các việc tính toán trên các giá trị rời rạc của tần số .

Có thể thấy DFT rất thích hợp với việc tính toán trên máy tính số và có thể được sử dụng để thực hiện việc lọc tuyến tính trong miền tần số .Mặc dù chúng ta đưa ra các thủ tục tính toán trong miền thời gian như tích chập, tuy nhiên trong miền tần số các phương pháp dựa trên DFT lại tỏ ra hiệu quả hơn nhiều so với phương pháp tích chập trong miền thời gian do tồn tại một loạt thuật toán mới hiệu quả hơn. Các thuật toán này được gọi là biến đổi nhanh Fourier(*FFT*) và sẽ được trình bày trong chương 5.

IV.1 Sử dụng DFT trong lọc tuyến tính

Mặc dù tích của hai DFT sẽ tương đương với tổng chập vòng của hai dãy tương ứng được biểu diễn trong miền thời gian, nhưng có thể thấy công thức của tích chập vòng lại không dùng được trong trương hợp cần xác định đầu ra của bộ lọc tuyến tính khi đầu vào chịu sự tác động của tín hiệu. Trong trường hợp này cần phải tìm một phương pháp nào đó trong miền tần số tương đương với tổng chập tuyến tính.

Giả sử x(n) là dãy có độ dài hữu hạn Lvà được tác động lên bộ lọc tuyến tính với độ dài M. Không làm mất tính tổng quát ta có thể giả sử :

$$x(n)=0 \qquad n<0 \text{ và } n\geq L$$

$$h(n)=0 \qquad n\leq 0 \text{ và } n\leq M$$

ở đây h(n) là đáp ứng xung của bộ lọc FIR có thể được xác định thông qua tổng chập của x(n) và h(n):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

Bởi vì x(n) và h(n) là các dãy với dộ dài hữu hạn do vậy tổng chập của chúng cũng có độ dài hữu hạn. Cụ thể độ dài là L + M-1.

Trong miền tần số, công thức tương đương với tích chập sẽ là :

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

Nếu dãy y(n) được biểu diễn một cách duy nhất trong miền tần số bằng cách lấy phổ Y(n) tại các tần số rời rạc phân biệt nhau thì số lượng các mẫu này phải bằng hoặc lớn hơn L + M-1. Như vậy để có thể biểu diễn y(n) một cách duy nhất trong miền tần số thì cần phảI sử dụng DFT với độ dài N≥M+L-1.

Sau khi lấy mẫu, ta có:

$$Y(k)\equiv Y(\omega)\big|_{\omega=2\pi k/N}, \ k=0,1,,\ldots,N-1$$

$$Xk)H\omega)\big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k=0,1,,\ldots,N-1$$

Và $$Y(k)=X(k)H(k), \qquad k=0,1,\ldots,N-1 \quad \textbf{(4.3.3)}$$

Trong công thức **(4.3.3)** thì X(k) và Y(k) là các DFT - N điểm của các dãy tương ứng x(n) và y(n) có độ dài hữu hạn nhỏ hơn N do vậy ta chỉ cần thêm các mẫu không vào các dãy để tăng độ dài của chúng lên N .Việc tăng độ dài của các dãy sẽ không ảnh hưởng đến phổ liên tục X(ω) và Hω) của chúng bởi vì các dãy này là các dãy tuần hoàn. Tuy vậy, bằng cách này (sử dụng DFT-N điểm) số lượng mẫu dùng để biểu diễn các dãy trong miền tần số đã vượt quá số lượng nhỏ nhất (L hoặc M).

Bởi vì DFT với độ dài M+L-1 điểm của dãy đầu ra y(n) trong miền tần số suy ra rằng có thể xác định được {y(n)} thông qua IDFT sau khi đã xác định tính của các DFT – N điểm X(k) và H(k). Như vậy giống như điều đã khẳng định trong phần 4.2.2 có thể kết luận rằng tổng chập vòng N điểm của x(n) và h(n) sẽ tương đương với tổng chập tuyến tính của hai dãy này. Nói một cách khác,bằng cách tăng độ dài của hai dãy x(n) và h(n) lên N điểm thông qua việc đưa thêm các không và tính tổng chập vòng trên các dãy mới ta sẽ nhận được kết quả giống với trường hợp sử dụng tổng chập tuyến tính. Từ đây suy ra với các mẫu không được thêm vào thì DFT có thể được sử dụng để thực hiện việc lọc tuyến tính.

Ví dụ 4.3.1: Sử dụng IDFT và DFT hãy xác định đáp ứng của bộ lọc tuyến tính.

H(n) = {1,2,3}

Khi tín hiệu vào là:

X(n) = {1,2,2,1 }

Giải: dãy đầu vào có độ dài L=4 và đáp ứng xung có độ dài M=3. Tổng cập tuyến tính của hai dãy này sẽ cho kết quả với độ dài là N=6. Suy ra rằng, độ dài của các DFT cần sử dụng ít nhất phảI bằng 6.

ở đây, để đơn giản ta sẽ sử dụng các DFT – 8 điểm. DFT – 8 điểm của x(n) sẽ là:

X(k)= $\sum_{n=0}^{7} x(n)e^{-j2\pi kn/8}$ = 1 + 2E$^{-j\pi k/4}$ + 2e$^{-j\pi k/2}$ +2e$^{-j3\pi k/4}$, k=0,1,…7

Từ đây suy ra:

X(0) =6 X(1)= $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ - j$\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)$

X(2) = - 1-j X(3) = $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ - j$\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)$

X(4) = 0 X(5) = $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ - j$\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)$

X(6) = - 1+j X(7) = $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ +j$\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)$

DFT – 8 điểm của h(n) là:

H(k)= $\sum_{n=0}^{7} h(n)e^{-j2\pi kn/8}$ = 1 + 2E$^{-j\pi k/4}$ + 3e$^{-j\pi k/2}$

Suy ra:

H(0) = 6 H(1) = + $\sqrt{2}$ -j (3+$\sqrt{2}$)

H(2) = -2-j2 H(3) =1- $\sqrt{2}$ +j (3 -$\sqrt{2}$)

H(4) = 2 H(5) =1- $\sqrt{2}$ -j (3 -$\sqrt{2}$)

H(6) =-2 + j2 H(7) = 1+ $\sqrt{2}$ +j (3+$\sqrt{2}$)

Tích của 2 DFT vừa tính trên sẽ cho Y(k) và do vậy:

Y(0) = 36 Y(1) = - 14.07 - 17.48 Y(2) = j4

Y(3) = 0.07 +j0.515 Y(4) = 0 Y(5) = 0.07 - j.0515

Y(6) = -j4 Y(7) = - 14.07 + j17.48

Cuối cùng IDFT - 8 điểm:

$$Y(n) = \sum_{n=0}^{7} Y(k) e^{j2\pi kn/8}, \quad n= 0,1,\ldots 7$$

sẽ cho kết quả là: y(n) = {1,4,9.11,8,3,0,0}

Do dãy y(n) chỉ có sáu phần tử nên các giá trị đầu sẽ bị loại bỏ. Hai phần tử này có giá trị bằng không bởi vì ta đã sử dụng độ dài của các DFT là 8 điểm và quá mức cần thiết 2 điểm.

Mặc dầu tích của hai DFT tương ứng với tổng chập vòng trong miền thời gian, tuy nhiên ta cũng thấy rằng việc đưa thêm vào các dãy x(n) và h(n) với một số lượng đủ các mẫu có giá trị không đã làm cho tổng chập vòng có cùng kết quả với tổng chập tuyến tính. Trong trường hợp lọc Fỉ của ví dụ 4.3.1 thì tổng chập vòng 6 điểm của các dãy:

h(n) = {1,2,3,0,0,0,} (4.3.4)

x(n) = {1,2,2,1,0,0,} (4.3.5)

sẽ cho dãy đầu ra:

y(n) = {1,4,9.11,8,3} (4.3.6)

giống với dãy nhân được bằng tổng chập tuyến tính.

Một điều rất quan trọng cần lưu ý là khi độ dài của các DFT nhỏ hơn L + M - 1 thì kết quả nhân được sẽ có sự sai lệch so với kết quả đúng.

Ví dụ dưới đây sẽ đề cập đến vấn đề này:

Ví dụ 4.3.2: Hãy xác định dãy y(n) bằng cách sử dụng các FT - 4 điểm đối với ví dụ 4.3.1

Giải: DFT -4 điểm của h(n) là:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{3} h(n) e^{-j2\pi k/4}$$

$H(k) = 1+ 2e^{-j\pi k}/2 + 3e^{-j\pi k}$, k= 0,1,2,3

Suy ra:

H(0) =6 H(1) = -2 –j2 H(2) = 2 H(3) = -2 + j2

DFT-4 điểm của x(n) là:

$X(k) = 1+ 2e^{-j\pi k/2} + 2e^{-j\pi k} + 3e^{-j\pi k/2}$, k= 0,1,2,3

Từ đây suy ra:

Y(n) = {9,7,9,11}

Kết quả này cũng giống với kết quả nhận được nếu ta sử dụng tổng chập vòng 4 điểm của h(n) và h(n).

Nếu so sánh kết quả của y’(n) nhận được từ DFT-4 điểm với dãy y(n) nhận được bằng cách sửdụng DFT-8 điểm (thực chất chỉ cần 6 điểm) thì ta sẽ thấy các kết quả này có sự sai lệch như đã đề cập trong phần 4.2.2. Cụ thể có thể tìm thấy quan hệ sau:

y’(0) = y(0) + y(4) =9

y’(5) = y(1) + y(5) =7

Trong 4 giá trị tìm được của y’(n) thì chỉ hai giá trị đầu là sai lệch so với các giá trị tương ứng của y(n).

Như vậy có thể thấy nếu x(n) là dãy hữu hạn với độ dàI L, h(n) là dãy hữu hạn có độ dàI M (giả sử L>M) thì khi sử dụng các DFT và IDFT sẽ có M-1 giá trị đầu bị sai lệch so với giá trị đúng và cần phảI loại bỏ. Đây là một kết luận rất quan trọng còn được sử dụng về sau.

IV.2. Lọc các dãy số có độ dài dữ liệu lớn

Trong thực tế, thông thường bài toán lọc tuyến tính của tín hiệu thường có dữ liệu đầu vào x(n) với độ dài rất lớn. Điều này lại càng đúng đối với một vài ứng dụng xử lý tín hiệu trong thời gian thực có liên quan đến việc theo dõi và phân tích tín hiệu. Khi tín hiệu có độ dài quá lớn thì rõ ràng việc sử dụng máy tính trong quá trình xử lý theo phương pháp DFT cũng gặp phải một số khó khăn:

Việc xử lý có thể đòi hỏi một dung lượng bộ nhứ rất lớn trong khi bộ nhớ của máy tính là có hạn.

- Thời gian tính toán quá lớn vượt hẳn thời gian cho phép.

Để có được một số mẫu đầu tiên thì phải đợi cho đến khi kết thúc tất cả quán trình tính toán.

Để khắc phục các nhược điểm này, tín hiệu đâù vào có độ dài lớn cần phải được phân thành các đoạn khác nhau với độ dài nhất định trước khi thực hiện việc xử lý. Bởi vì bộ lọc là tuyến tính do vậy việc xử lý các dãy tín hiệu này có thể được tiến hành ở mỗi thời điểm khác nhau thông qua DFT. Các tín hiệu đầu ra này sau đó được kết hợp với nhau để có thể nhận được đầu ra tương đương với trường hợp bộ lọc được tác động bởi một tín hiệu đầu vào duy nhất.

Dựa vào việc phân tín hiệu đầu vào thành các đoạn có kích thước vừa phảI, có hai phương pháp DFT hay được sử dụng đối với bộ lọc FIR tuyến tính với tín hiệu vào có độ dài quá lớn. Phương pháp thứ nhất được gọi là phương pháp đặt kề nhau, phương pháp thứ hai được gọi là phương pháp xếp chồng. Trong cả hai phương pháp ta sẽ giả sử bộ lọc FIR có độ dài là M, dãy đầu vào được chia thành các dãy con với độ dài mỗi dãy là L. ở đây không làm mất tính tổng quát, giả sử rằng L>>M.

IV.2.1. Phương pháp đặt kề nhau

Theo phương pháp này, độ dài của mỗi đoạn dữ liệu đầu vào sẽ là N = L+ M – 1, độ dài của DFT và IDFT được sử dụng sẽ là N. Như vậy độ dài của các đoạn dữ liệu đầu vào đã được tăng từ L lên L+ M -1. Trong trường hợp này, có thể xem x(n) như là tổng của các dãy thành phần đặt kề nhau M-1 điểm và mỗi dãy chứa M-1 điểm cuối cùng của dãy trước và L điểm dữ liệu mới. Riêng dãy đầu tiên sẽ được bổ sung thêm M-1 mẫu không đầu tiên. Như vậy, các dãy dữ liệu thành phần của x(n)sẽ là:

$x_1(n) = \{0, 0,..., 0, x(0), x(1),..., x(L-1)\}$ (4.3.7)

$x_2(n) = \{x(L - M + 1),..., x(L-1), x(L),..., x(2L-1)\}$ (4.3.8)

$x_3(n) = \{x(2L-M + 1),..., x(2L-1), x(2L),..., x(3L-1)\}$ (4.3.9)

và v.v..

DFT - N điểm sẽ được tính đối với mỗi dãy thành phần. Độ dài đáp ứng xung của bộ lọc FIR cũng được tăng thêm L-1 mẫu không và DFT –N điểm của dãy sẽ được tính và lưu trữ lại. Tích của hai DFt –N điểm {H(k)} và $\{X_m(k)\}$ đối với mỗi dãy dữ liệu sẽ cho kết quả:

$Y'_m(k) = H(k)\, X_m(k), \qquad k= 0,1,...,N-1$ (4.3.10)

IDFT - N điểm sẽ cho kết quả:

$y'_m(n) = y'_m(0)\, y'_m(1)...\, y'_m(M-1)\, y'_m(M),...\, y'_m(N-1)$ (4 .3.11)

Bởi vì DFT và IDFT được sử dụng ở đây chỉ có độ dài của chuỗi đầu vào cho nên theo kết luận trong 4.3.1, M-1 điểm đầu tiên của dãy kết quả này sẽ bị loại bỏ. L điểm cuối cùng của dãy $Y'_m(n)$ sẽ hoàn toàn trùng với các giá trị tương ứng được tính theo tổng chập tuyến tính, nghĩa là:

$$y'_m(n) = y_m(n), \qquad n = M, M+1, ..., N-1 \qquad (4.3.12)$$

Việc phân đoạn dữ liệu đầu vào và sắp xếp các khối dữ liệu đầu ra tương ứng với chúng để nhân được dãy dữ liệu đầu ra kết quả được mô tả trên hình 4.10.

IV.2.2. Phương pháp cộng xếp chồng

Theo phương pháp này, kchs thước của mỗi dãy thành phần là L điểm và độ dài của Dft và IDFt là N = L+M-1. Đối với mỗi dãy thành phần này ta đưa thêm M-1 mẫu không và tính DFT –N điểm. Như vậy các dãy thành phần được biểu diễn như sau:

$$x_1(n) = \{x(0), x(1),..., x(L-1), 0,0,...,0\} \qquad (4.3.13)$$

$$x_2(n) = \{x(L), x(L+1),..., x(2L-1), 0,0,...,0\} \qquad (4.3.14)$$

$$x_3(n) = \{x(2L), ..., x(3L-1), 0,0,...,0\} \qquad (4.3.15)$$

và v.v.. Hai DFT – N điểm được nhân với nhau để nhận được:

$$Y_m(k) = H(k)\, X_m(k), \quad k = 0,1,...,N-1 \qquad (4.3.16)$$

DFTlà phương pháp gián tiếp để tính đầu ra của bộ lọc tuyến tính và cho đến thời điểm này có thể thấy phương pháp tương đối phức tạp do một loạt các thao tác cần phải được thực hiện như dãy đầu vào cần phải được chuyển đổi sang miền tần số thông qua DFt, nhân kết quả nhận được với DFt của bộ lọc FIR và sau đó để nhận được kết quả cuối cùng lại phải thực hiện biến đổi ngược IDFT sang miền thời gian. Mặc dù vậy phương pháp này lại cho phép sử dụng một thuật toán rất hiệu quả (biến đổi nhanh Fourier). So với việc xử lý trực tiếp bộ lọc FIR trong miền thời gian, các thuật toán biến đổi nhanh chỉ đòi hỏi rất ít các phép toán để có thể nhân được dãy đầu ra và dây chuyền chính là nguyên nhân chủ yếu dẫn đến việc sử dụng rộng rãi phương pháp DFt trên thực tế. Các thuật toán biến đổi nhanh Fourier sẽ được giới thiệu trong chương VI

4.4. Phân tích tín hiệu trong miền tần số bằng DFT

Ta đã biết rằng một tín hiệu có độ dài hữu hạn N có thể được biểu diễn một cách đầy đủ thông qua phép biến đổi Fourier rời rạc DFt. Tuy vậy, khi các tín hiệu có độ dài quá lớn hoặc vô hạn thì việc xác định biến đổi Fourier rời rạc của nó là không thể thực hiện được. Trong trường hợp này, ta cần lấy một đoạn thích hợp nhất của tín hiệu với một độ dài cho phép để thực hiện biến đổi DFT. Khi đó rõ ràng rằng phương pháp DFt chỉ cho ra một kết quả xấp xỉ của tín hiệu. ậ đây, ta xem xét vấn đề hạn chế độ dài của tín hiệu và các hiệu ứng nải sinh do việc sử dụng phương pháp DFT đối với dãy đã được hạn chế về độ dài.

Nếu tín hiệu cần phân tích là tín hiệu tương tự thì trước tiên tín hiêu này cần được chuyền qua bộ lọc để loại bỏ các nhiễu (hoặc các thành phần của tần số không cần thiết) và sau đó được lấy mẫu với tần số F_s □2B, với B là độ rộng của dải thông. Như vậy tần số cao nhất của hai thành phần có chứa tín hiệu khi lấy mẫu là $F_s/2$. Để có thể hạn chế độ dài của tín hiệu đã được lấy mẫu, giả xử chỉ xét tín hiệu trong một khoảng thời gian hữu hạn $T_0 = LT$, trong đó L là lượng mẫu và T là khoảng thời gian gữa hai lần lấy mẫu (chu kỳ lấy mẫu). Khoảng thời gian lấy mẫu này về nguyên tắc sẽ hạn chế độ phân giải về tần số; nghĩa là nó sẽ hạn chế khả năng phân biệt đối với các thành phần tần số mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $1/T_0 = 1/LT$ trong miền tần số.

Giả sử rằng {x(n)} là tín hiệu cần phân tích. Có thể thấy việc giới hạn độ dài của dãy {x(n)} với L mẫu trong khoảng 0 n L-1 sẽ tương đương với việc nhân tín hiệu này với một hàm cửa sổ hình chữ nhật (gọi tắt là hàm cửa sổ) với độ dài L. Nghĩa là:

$X(n) = x(n)\,\omega(n)$

Trong đó $\omega(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$

Hãy xét một trường hợp đơn giản khi dãy x(n) là dãy tín hiệu hình sin:

X(n)=

IV. Tích chập nhanh (tích chập phân đoạn)

a. Tổng quan

Để ứng dụng DFT vào việc tính tích chập không tuần hoàn, tức tích chập tuyến tính, trước hết cần phân biệt hai trường hợp:

Trường hợp thứ nhất khi các dãy chập với nhau có chiều dài gần bằng nhau và ngắn.

Trường hợp thứ hai là khi các dãy chập với nhau và có chiều dài khác xa nhau.

Trường hợp thứ nhất chính là trường hợp đã được nghiên cứu ở phần trên. Nhưng trong thực tế, ta thường gặp trường hợp thứ hai. Việc tính toán DFT của dãy có chiều dài quá lớn sẽ bị hạn chế bởi vấn đề dung lượng bộ nhớ của máy tính điện tử và thời gian tính toán không đảm bảo. Hơn nữa, để có được mẫu đầu tiên của kết quả ta phải đợi đến khi kết thúc quá trình tính toán.

Để giải quyết các vấn đề trên, chúng ta phải chia quá trình tính toán ra thành nhiều giai đoạn. Có hai phương pháp gồm các nội dung chính:

- Chia dãy thành nhiều dãy con.
- Chập từng dãy con một
- Tổ hợp các kết quả thành phần.

Giả sử dãy x(n) có chiều dài N, dãy h(n) có chiều dài M và N >> M. Khi đó chậph của x(n) và h(n) là y(n) sẽ có chiều dài N+ M - 1. Nếu N rất lớn thì ta không thể dùng DFT để tính trực tiếp tích chập này được. Vì thế, nếu muốn dùng DFT ta phải phân dãy x(n) ra làm nhiều đoạn nhỏ.

b. Phương pháp 1: Cộng xếp chồng

Giả sử ta cần tính tích chập tuyến tính

$y(n) = x(n)*h(n)$

$L[x(n)] = N$, $L[h(n)] = M$ và $N >> M$.

Dãy x(n) được coij là tổng của các dãy thành phần $x_i(n)$, mà $L[x_i(n)] = N_1$. Tức là:

$$x(n) = \sum_i x_i(n) \tag{4.4.1}$$

với
$$x_i(n) = \begin{cases} x(n) & iN_1 \le n \le (i+1)N_1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} y(n) = h(n) * x(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\left[\sum_i x_i(n-m)\right] \\ &= \sum_i \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x_i(n-m) = \sum_i h(n) * x_i(n) = \sum_i y_i(n) \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

khi đó, $y_i(n) = h(n)*x_i(n)$ gọi là tích chập phân đoạn, đây là tích chập tuyến tính, nếu dùng DFT thì mỗi tích chập phân đoạn này ta phải tính DFT với chiều dài N_1+M-1. Tức là ta phải tính tích chập vòng với chiều dài $2(N_1$+M-1):

Chong 3

PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIOR RỜI RẠC.

I. Mở đầu:

Từ trớc tới nay chúng ta đã học nhiều loại biến đổi Fourier nh sau:

1. Chuỗi Fourier,áp dụng cho tín hiệu liên tục và tuần hoàn.
2. Tích phân Fourier dùng cho tín hiệu liên tục và không tuần hoàn.
3. Biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc vừa đợc trình bầy ở chong 1.

Phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc, X(f), về mặt lý thuyết cho ta những công thức giải tích gọn và đẹp. Nó đợc sử dụng rộng rãi khi nghiên cứu các tín hiệu viết đợc dới dạng giải tích. Tuy nhiên nó có một số hạn chế khi áp dụng trong thực tế khi chạy chong trìng máy tính. Cụ thể là:

1. Độ dài tín hiệu số(số mẫu tín hiệu đem phân tích) là vô cùng. Trong khi độ dài tín hiệu trong thực tế bao giờ cũng là ***hữu hạn.***

2. Biến độc lập f (tần số) của X(f) là một biến liên tục, trong khi đó việc sử lý tín hiệu trên máy tính bao giờ cũng phải đợc ***rời rạc*** hoá, số hoá.

Do tầm quan trọng to lớn của phép biến đổi Fourier nên ngời ta đã tìm cách khắc phục các hạn chế trên bằng cách đa nó về dạng thích hợp. Đó là phép biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu có ***độ dài hữu hạn*** và có trục tần số cũng đợc **rời rạc hoá**, thờng đợc gọi một cách ngắn gọn là phép biến đổi Fourier rời rạc, đợc viết tắt trong tiếng Anh là **DFT**, là một thuật ngữ đợc dùng phổ biến. Cần phân biệt với tên gọi " phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc" mà ta đã nghiên cứu ở chong 1. Ngoài ý nghĩa về mặt lý thuyết, DFT còn đóng vai trò rất quan trọng trong thực tế xử lý tín hiệu số do tồn tại cách tính DFT rất hiệu quả, tốc độ nhanh mà ta sẽ dàng hẳn một chong để trình bày (chong DFT). Sau đó chúng ta sẽ nghiên cứu các tính chất và ứng dụng của nố. Đó là nội dung chính của chong này.

Có nhiều phong pháp dẫn dắt đến phép biến đổi ó nhiều phong pháp rời rạc (DFT) nh:

- Từ phép biến đổi của tín hiệu rời rạc nhng tuần hoàn, tức là chuỗi ó nhiều phong pháp rời rạc.

- Trực tiếp trục tần số của X(f).

Chúng ta sẽ làm theo cách đầu, sau đó xem xét thêm các cách sau.

II. Chuỗi Fourier rời rạc cuat tín hiệu rời rạc tuần hoàn

Chúng ta đã làm quen với khái niệm chuỗi Fourier và tích phân Fourier đối với tín hiệu tơng tự. ý tổng chủ đạo của việc phân tích Fourier là phân tích hàm tín hiệu thành các hàm điều hoà (thực hoặc phức). Đối với tín hiệu rời rạc cũng vậy, ta vẫn sử dụng ý tởng chủ đạo trên: *Phân tích tín hiệu rời rạc thành tổ hợp tuyến tính của các hàm điều hoà.*

Cũng tơng tự nh khi phân tích tín hiệu tơng tự, ta hãy xem xét việc khai triển Fourierdãy tín hiệu tuần hoàn thành chuỗi.

Tín hiệu tuần hoàn Xp (n)là tuần hoàn với chu kỳ N nếu Xp (n)=Xp (n+N) với mọi n (chỉ số p chỉ period: tuần hoàn). Đối với tín hiệu rời rạc, chúng ta sẽ khai triển Fourier theo hàm:

$\xi_k(n) = e^{j(2\pi k/N)n}$ k = 0, ± 1, ±2… (3.1)

Ta thấy toàn bộ tập hợp tín hiệu e mũ phức này đều là hàm tuần hoàn với chu kỳ N:

$\xi_k(n) = \xi_k(n+lN)$ l nguyên (3.2)

Tất cả các tín hiệu này đều có tần số là b ội của tần số cơ bản, 2π/N, do vậy chúng có quan hệ điều hoà với nhau.

Điểm khác biệt quan trọng của các tín hiệu này so với tín hiệu tơng tự là: Trong khi tất cả các hàm điều hoà liên tục có tần số khác nhau thì phân biệt với nhau, còn các hàm điều hoà phức rời rạc chỉ có Ntín hiệu phân biệt với nhau vì các tín hiệu sai khác nhau là bội của N thì đều nh nhau:

$\xi_k(n) = \xi_{k\pm N}(n) = \xi_{k\pm 2N}(n) = e^{j(2\pi k/N)n}$ (3.3)

Bây giờ chúng ta muốn triển khai tín hiệu tuần hoàn x(n) thành:

$x_p(n) = \sum_k a_k \xi_k(n) = \sum_k a_k \, \mathbf{e}^{\mathbf{j(2\pi k/N)n}}$ (3.4)

Do $\xi_k(n)$ chỉ phân biệt đợc với N giá trị liên tục của k nên tổng trên chỉ cần tính trong khoảng này: tổng tính theo biến chạy k thai đổi trong một giải N nguyên tố kề nhau liên tục, và để cho tiện ta ký hiệu k = <N > nghĩa là k có thể lấy k= 0,1,…, N- 1, hoặc k = 2,3,…,N+2 hoặc tổng quát hơn: k = k_0, k_0+ N-1 với k_0 là số nguyên tuỳ ý.

$$x_p(n) = \sum_{k=<N>} a_k \, \mathbf{e}^{\mathbf{j(2\pi k/N)n}} \qquad (3.5)$$

Công thức (3.5) trên đợc gọi là chuỗi Fourier rời rạc (DFS) của tín hiệu tuần hoàn và rời rạc $x_p(n)$, trong đó các hệ số a_k là các hệ số khai triển chuỗi Fourier rời rạc hay còn đợc gọi là các vạch phổ của tín hiệu tuần hoàn. Ta thấy ngay cũng chỉ có N hệ số a_k mà thôi. Để cho tiện với quy ớc tính biến đổi Fourier rời rạc ta viết lại (3.5) với $x_p(k)$ thay cho a_k nh sau:

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X_p(k) e^{\mathbf{j(2\pi k/N)n}} \qquad (3.6)$$

Cụ thể là:

$$x_p(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X_p(k)$$

$$x_p(1) = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X_p(k) e^{\mathbf{j(2\pi k/N)}}$$

……………

$$x_p(1) = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X_p(k) e^{\mathbf{j(2\pi k(N-1)/N}}$$

Hệ số 1/N đợc đa vào cho thuận tiện và không làm ảnh hởng tới bản chất của cách biểu diễn chuỗi. Vấn đề còn lại là phải xác định các hệ số $X_p(k)$. Trớc hết ta chứng minh tính chất trực chuẩn sau:

1 n = ℓN với ℓ = ± 0, ±1,±2…

$$\frac{1}{N} \sum_{k=<N>} e^{\mathbf{j(2\pi k(N-1)/N}} = \qquad (3.7)$$

0 với mọi n khác ℓN

Chứng minh:

Với mọi n, tổng trên là một cấp số nhân có công bội là: Q = $e^{j(2\pi n/N)}$

(để tiện việc tính toán và viết, ta ký hiệu k = <N>…N-1)

Do đó:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi k/N)n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Q^k = \frac{1}{N}.\frac{1-Q^N}{1-Q}$$

Với n khác lN, tức là với mẫu số 1- Q khác 0 nên:

$$\frac{1}{N}.\frac{0}{1-Q} = 0$$

Với n = ℓN, mẫu số 1-Q = 0 vì $Q^{\ell \mathbf{N}}$ = 1 nên ta phải tính trực tiếp tổng. Khi này các $e^{j(2\pi k/N)n}$ đều có giá trị bằng 1. Do đó cả tổng có giá trị là N, đem chia cho N, kết quả là 1. Tính chất trực chuẩn đọc chứng minh.

Hình 3.1 minh hoạ công thức (3.7) cho trờng hợp N = 6, trong đó các số $e^{j(2\pi k/N)n}$ đợc biểu diễn bằng các vector trong mặt phẳng phức. Các vectơ này đều có độ dài bằng 1. Do tính đối xứng của các hình này, ta cũng có thể rút ra là tổng của các $e^{j(2\pi k/N)n}$ sẽ bằng 0 trừ khi k=0,6,12…

Quay lại tính $x^p(k)$, ta thực hiện:

Nhân hai vế của (3.6) với $e^{-j(2\pi k/N)n}$ và lấy tổng từ n=0 tới N-1

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^p(n).\,e^{-j(2\pi k/N)n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{k=<N>} X_p(k).e^{\mathbf{j(2\pi k/N)(k\text{-}r)n}}$$

Đổi thứ tự lấy tổng của vế phải:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^p(n).\,e^{-j(2\pi k/N)n} = \sum_{k=0}^{N-1} x^p(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(2\pi/N)(k-r)n}\right]$$

Sử dụng (3.7) vừa chứng minh cho phần trong ngoặc vuông vế phải, ta có:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^p(n).\,e^{-j(2\pi/N)nr} = x^p(r)$$

Hay:

$$x^p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x^p(n).\, e^{-j(2\pi/N)kn} \qquad (3.8)$$

Nhận xét:

$x^p(k)$ theo (3.8) cũng là <u>*hàm tuần hoàn với chu kỳ N*</u>

$x^p(k) = x^p(k + lN)$

điều này là đơng nhiên vì các hàm số mũ trong (3.8) chỉ phân biệt với k = 0…N-1 và do đó chỉ có N hệ số Fourier .

các hệ số chuỗi Fourier $x^p(k)$ cũng có thể đợc xen nh là một dãy số có <u>độ dài hữu hạn</u>, cho bởi (3.8) với k = 0, 1,…,N-1 và bằng 0 với mọik khác. Rõ ràng là cả hai cách giải thích này đều đúng cả và tơng đơng nhau. Song nói chung ngời ta thờng giải thích các hệ số của chuỗi Fourier $x^p(k)$ nh là một <u>chuỗi tuần hoàn</u> để có đợc sự đối ngẫu giữa thời gian và tần số của chuỗi Fourier .

Công thức (3.6) và (3.8) là cặp công thức chuỗi Fourier cho một tín hiệu tuần hoàn. (3.8) đợc coi là công thức <u>phân tích</u>. (3.6) đợc coi là công thức <u>tổng hợp</u>. để tiện sử dụng ngời ta còn dùng ký hiệu:

$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$

và do vậy:

$W_N^n = e^{-j(2\pi/N)n} = e^{-j(2\pi n/N)}$

để tiện ấn loát và cho gọn, trong tài liệu này có thể chỉ viết W^n khi chỉ số dới của W là N. Nếu chỉ số này khác N, ta phải nghi rõ thêm.

Cặp công thức phân tích và tổng hợp chuỗi Fourier trở thành:

$$x^p(k) = \sum_{n=<N>} x(n).\, W^{nk} \qquad \text{Phân tích} \qquad (3.9)$$

$$x^p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X(k).W^{-kn} \qquad \text{Tổng hợp} \qquad (3.10)$$

Một cách giải thích khác của dãy tuần hoàn $x^p(k)$: $x^p(k)$ chính là các mẫu trên đờng tròn đơn vị của biến đổi z một chu kỳ của $x^p(n)$, tức là các mẫu của biến đổi Fourier X(f) của một chu kỳ $x^p(n)$ (vì biến đổi z tính trên đờng tròn đơn vị chính là biến đổi Fourier X(f)).

Một chu kỳ x(n) của $x^p(n)$ có thể đợc định nghĩa là:

$x(n) = x^p(n)$ với $0 \le n \le N-1$

0 với mọi n khác

Do vậy X(z) của x(n) là:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

và:

$$x^p(k) = X(z)\Big|_{z=e^{j.k(2\pi/N)}} = W_N^{-k}$$

Tức là N hệ số của $x^p(k)$ chính pà giá trị của biến đổi z tính trên đờng tròn đơn vị tại N điểm chia đều nhau.

Ví dụ 3.1: xét tín hiệu $x(n) = \sin(\Omega n) = \sin(2\pi n/N)$

Tín hiệu này chỉ tuần hoàn khi $N = 2\pi/N$ là một số nguyên hoặc tỉ số của hai số nguyên.

Ta có ngay:

$$x(n) = \frac{e^{j(2\pi n/N)} - e^{-(j2\pi n/N)}}{2j}$$

hay:

$x^p(1) = x^p(N+1) = \ldots = N/2j$

$x^p(-1) = x^p(N-1) = \ldots = -N/2j$

khi tỉ số $2\pi\Omega$ có dạng m/N ta có $\Omega = 2\pi m/N$

$$x(n) = \frac{e^{jm(2\pi n/N)} - e^{-jm(2\pi n/N)}}{2j}$$

hay

$x^p(m) = x^p(N+m) = \ldots = N/2j$

$x^p(-m) = x^p(N-m) = \ldots = -N/2j$

với m = 3, N = 5 ta thấy:

$x^p(-2) = x^p(3)$

$x^p(-3) = x^p(2)\ldots$

Việc ta chọn tín hiệu đối xứng quanh gốc toạ độ chỉ là để dễ tính và vẽ. Vì vậy:

$$x^p(k) = \sum_{n=<N>} x_p.e^{-j(2\pi(N)kn}$$

$$= \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j(2\pi/N)kn}$$

3.2.2.

IV. ĐỊNH LÝ LẤY MẪU

Để có thể áp dụng các kỹ thuật xử lý tín hiệu số trong việc xử lý các tín hiệu tương tự thì điều cơ bản đầu tiên là cần chuyển đổi các tín hiệu tương tự thành dãy các số. Quá trình này được thực hiện bằng cách lấy mẫu tín hiệu tương tự theo chu kỳ. Nếu gọi tín hiệu tương tự là $x_a(t)$, x(n) là tín hiệu rời rạc theo thời gian thu được sau quá trình lấy mẫu, T là chu kỳ lấy mẫu thì:

$$x(n) = x_a(nT) \qquad \text{với } -\infty < n < \infty \tag{3.4.1}$$

Quan hệ (3.4.1) mô tả quá trình lấy mẫu trong miền thời gian. Để quá trình lấy mẫu không làm mất mát thông tin của phổ tín hiệu (không gây ra hiện tượng trùng phổ) thì tần số lấy mẫu $F_s = 1/T$ phải có giá trị đủ lớn. Khi điều này được đảm bảo thì tín hiệu tương tự có thể được khôi phục chính xác từ tín hiệu rời rạc theo thời gian.

Nếu $x_a(n)$ là tín hiệu không tuần hoàn với năng lượng hữu hạn, thì phổ của nó có thể được xác định bởi quan hệ của biến đổi Fourier :

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j2\pi Ft}dt \tag{3.4.2}$$

Ngược lại, tín hiệu $x_a(t)$ có thể được khôi phục từ phổ của nó qua biến đổi Fourier ngược:

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi Ft}dt \tag{3.4.3}$$

Ở đây, việc sử dụng tất cả các thành phần tần số trong khoảng :$-\infty < F < \infty$ là cần thiết để có thể khôi phục được tín hiệu $x_a(t)$ nếu tín hiệu này có dải tần vô hạn.

Phổ của tín hiệu rời rạc theo thời gian x(n) nhận được bằng cách lấy mẫu của $x_a(t)$, được biểu diễn qua phép biến đổi Fourier như sau:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{3.4.4}$$

hoặc :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fn} \tag{3.4.5}$$

Ngược lại, dãy x(n) có thể được khôi phục lại từ X(ω) hoặc từ X(f) qua biến đổi ngược:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi fn}df \qquad (3.4.6)$$

Từ quan hệ giữa chu kỳ lấy mẫu *T*, các biến độc lập *t* và *n*:

$$t = nT = \frac{n}{F_s} \qquad (3.4.7)$$

Thay vào (3.4.2), ta suy ra quan hệ tương ứng trong miền tần số của các biến tần số F và f giữa $X_a(t)$ và X(f) và ngược lại:

$$x(n) \equiv x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF \qquad (3.4.8)$$

Từ (3.4.6) và (3.4.8) ta có hệ thức quan hệ:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi fn}df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF \qquad (3.4.9)$$

Khi quá trình lấy mẫu được thực hiện tuần hoàn thì:

$$f = \frac{F}{F_s} \qquad (3.4.10)$$

Khi đó, hệ thức (3.4.9) trở thành:

$$\frac{1}{F_s}\int_{-F_s/2}^{F_s/2} X\left(\frac{F}{F_s}\right)e^{j2\pi n F/F_s}dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF \qquad (3.4.11)$$

Biến đổi biểu thức thuộc vế phải của (3.4.11), ta có:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF \qquad (3.4.12)$$

Thực hiện việc đổi biến trong (3.4.12) và sử dụng tính chất tuần hoàn của hàm mũ:

$$e^{j2\pi n (F-kF_s)/F_s} = e^{j2\pi n F/F_s}$$

sẽ cho ta: $X_a(F)$ trong khoảng tần số $(k\text{-}1/2)F_s$ đến $(k+1/2)F_s$ sẽ hoàn toàn tương ứng với $X_a(F - kF_s)$ trong khoảng $-F_s/2$ đến $F_s/2$. Từ đó, ta có:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(k-1/2)F_s}^{(k+1/2)F_s} X_a(F)e^{j2\pi n F/F_s}dF = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F-kF_s)e^{j2\pi n F/F_s}dF$$
$$= \int_{-F_s/2}^{F_s/2}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F-kF_s)\right]e^{j2\pi n F/F_s}dF \qquad (3.4.13)$$

So sánh (3.4.6) và (3.4.13) ta được:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F-kF_s) \qquad (3.4.14)$$

hoặc:
$$X(f) = F_s\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left[(f-k)F_s\right] \qquad (3.4.15)$$

Các hệ thức (3.4.14) và (3.4.15) đưa ra mối quan hệ giữa phổ $X(F/F_s)$ hoặc $X(f)$ của tín hiệu rời rạc theo thời gian và phổ $X_a(F)$ của tín hiệu tương tự. Thực chất, vế phải của hai biểu thức này là sự lặp lại có chu kỳ của phổ đã được lấy tỷ lệ $X_a(F)$ với chu kỳ F_s.

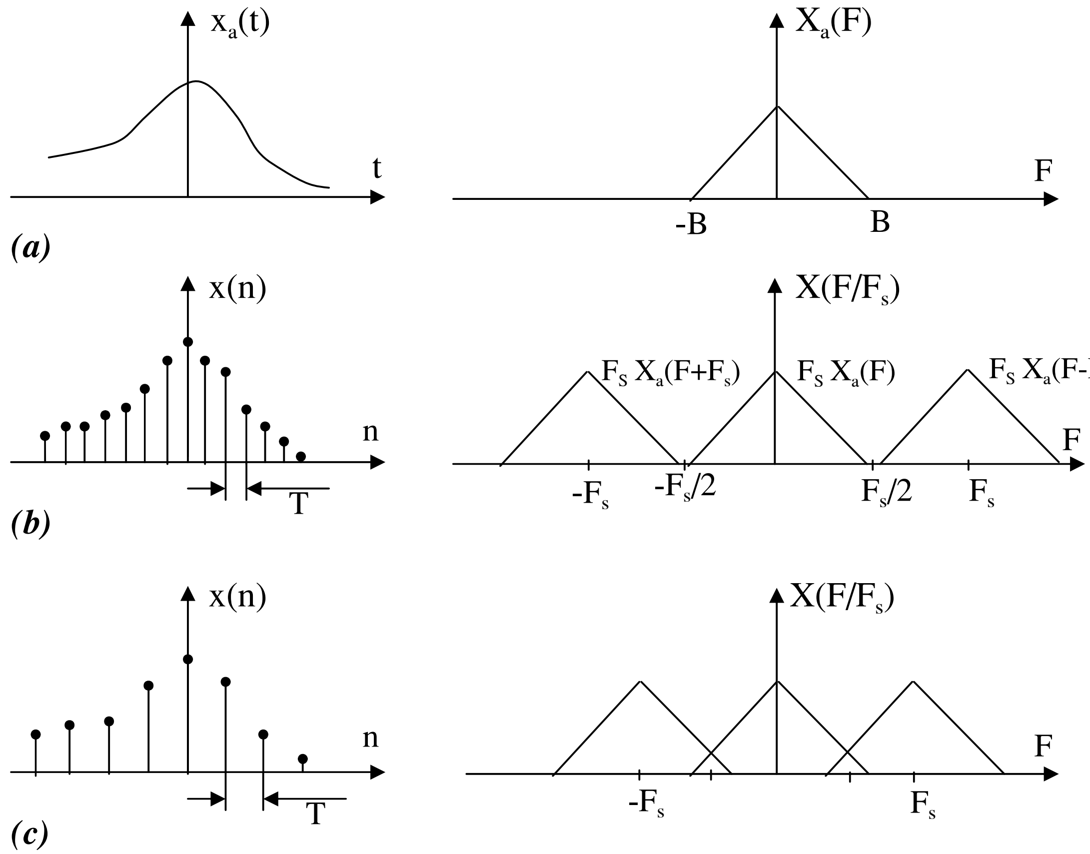
Xét quan hệ (3.4.14) và (3.4.15) với các tần số lấy mẫu có giá trị khác nhau. Để thực hiện điều này, ta xét với ví dụ là một tín hiệu tương tự với bề rộng phổ hữu hạn. Tín hiệu này được mô tả trên hình (3.4a). Phổ của tín hiệu sẽ bằng không khi $|F| \geq B$.

- Nếu chọn tần số lấy mẫu $F_s \geq 2B$ thì phổ $X(F/F_s)$ của tín hiệu rời rạc sẽ có dạng như trên hình (3.4b). Như vậy, nếu tần số lấy mẫu F_s được chọn sao cho $F_s \geq 2B$, với 2B là tần số Nyquist thì:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s X_a(F) \qquad \text{với: } . \qquad (3.4.16)$$

trong trường hợp này hiện tượng trùng phổ sẽ không xảy ra và vì vậy, trong miền giới hạn của tần số cơ bản $|F| \leq F_s/2$ hoặc $|f| \leq 1/2$, phổ của tín hiệu rời rạc sẽ đồng nhất với phổ của tín hiệu tương tự.

- Nếu chọn tần số lấy mẫu $F_s < 2B$ thì trong công thức xác định $X\left(\frac{F}{F_s}\right)$, do có sự lặp lại có chu kỳ của $X_a(F)$ nên sẽ phát sinh hiện tượng trùng phổ, như mô tả trên hình (3.4c). Khi đó phổ $X\left(\frac{F}{F_s}\right)$ của tín hiệu rời rạc theo thời gian sẽ có chứa các thành phần với các tần số nhầm lẫn của phổ tín hiệu tương tự $X_a(F)$, vì vậy việc khôi phục chính xác tín hiệu gốc từ các mẫu sẽ không thể thực hiện được.



Hình 3.4. Mô tả sự lấy mẫu tín hiệu có bề rộng phổ hữu hạn và sự trùm phổ.

Trong trường hợp không có hiện tượng trùng phổ, tín hiệu gốc $x_a(n)$ có thể được khôi phục lại một cách chính xác từ các mẫu x(n):

$$X_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) & |F| \le F_s/2 \\ 0 & |F| > F_s/2 \end{cases} \quad (3.4.17)$$

Theo phép biến đổi Fourier thì:

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi F n/F_s}$$

và biến đổi ngược Fourier sẽ cho ta $x_a(t)$ từ phổ của nó $X_a(F)$:

$$x_a(t) = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

Giả sử F_s= 2B, thay vào các hệ thức trên, ta được:

$$x_a(t) = \frac{1}{F_s}\int_{-F_s/2}^{F_s/2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi F n/F_s}\right] e^{j2\pi Ft} dF = x\frac{1}{F_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-F_s/2}^{F_s/2} e^{j2\pi F(t-n/F_s)} dF$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\frac{\sin(\pi/T)(t-nT)}{(\pi/T)(t-nT)} \qquad (3.4.18)$$

Công thức (3.4.18) có chứa hàm:

$$g(t) = \frac{\sin(\pi/T)t}{(\pi/T)t} = \frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt} \qquad (3.4.19)$$

được dịch bởi các lượng nT, n = 0, ±1, ±2, ±3,… và được nhân với các mẫu tương ứng x_a(nT) của tín hiệu rời rạc. Công thức (3.4.19) được gọi là *công thức nội suy* và được dùng để khôi phục tín hiệu liên tục x_a(t) từ các mẫu, còn hàm g(t) trong (3.4.19) được gọi là *hàm nội suy*. Vì tại ***t = kT*** thì hàm nội suy g(t-kT) sẽ có giá trị bằng không, ngoại trừ *k = n*; Do đó giá trị của x_a(t) tại các thời điểm ***t = kT*** sẽ chính là mẫu x_a(kT). ở tất cả các thời điểm còn lại, giá trị của x_a(t) sẽ bằng giá trị của hàm nội suy sau khi đã lấy tỷ lệ với x_a(nT).

Công thức (3.4.19) dùng để khôi phục tín hiệu liên tục x_a(t) từ các mẫu, được gọi là *công thức nội suy lý tưởng* và là cơ sở của định lý lấy mẫu.

♦ Phát biểu định lý lấy mẫu

Tín hiệu liên tục theo thời gian có bề rộng phổ hữu hạn với tần số cao nhất B(Hz) có thể được khôi phục một cách duy nhất từ các mẫu, nếu quá trình lấy mẫu được thực hiện với tốc độ $F_s \geq 2B$ trên 1 giây.

CHƯƠNG 4
PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC

Phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc, X(f), về mặt lý thuyết cho ta những công thức giải tích gọn và đẹp. Nó được sử dụng rộng rãi khi nghiên cứu các tín hiệu viết được dưới dạng giải tích. Tuy nhiên nó có một số hạn chế khi áp dụng trong thực tế khi chạy chương trìng máy tính. Cụ thể là:

1. Độ dài tín hiệu số(số mẫu tín hiệu đem phân tích) là vô cùng. Trong khi độ dài tín hiệu trong thực tế bao giờ cũng là ***hữu hạn.***

2. Biến độc lập f (tần số) của X(f) là một biến liên tục, trong khi đó việc xử lý tín hiệu trên máy tính bao giờ cũng phải được ***rời rạc*** hoá, số hoá.

Do tầm quan trọng to lớn của phép biến đổi Fourier nên người ta đã tìm cách khắc phục các hạn chế trên bằng cách đưa nó về dạng thích hợp. Đó là phép biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu có ***độ dài hữu hạn*** và có trục tần số cũng được **rời rạc hoá**, thường được gọi một cách ngắn gọn là phép biến đổi Fourier rời rạc, được viết tắt trong tiếng Anh là **DFT**, là một thuật ngữ được dùng phổ biến. Cần phân biệt với tên gọi " phép biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc" mà ta đã nghiên cứu ở chương 3. Ngoài ý nghĩa về mặt lý thuyết, DFT còn đóng vai trò rất quan trọng trong thực tế xử lý tín hiệu số do tồn tại cách tính DFT rất hiệu quả, tốc độ nhanh FFT.

I. LẤY MẪU TRONG MIỀN TẦN SỐ - BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC

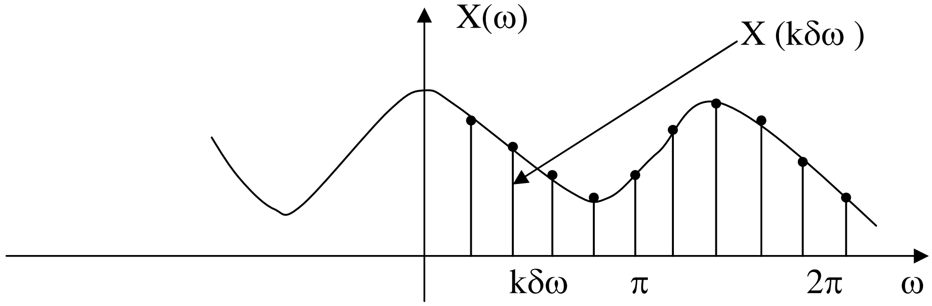
Trước khi nghiên cứu DFT, ta hãy xét việc lấy mẫu của biến đổi Fourier đối với dãy tín hiệu rời rạc theo thời gian không tuần hoàn và từ đó có thể thiết lập được quan hệ giữa biến đổi Fourier đã được lấy mẫu với DFT.

I.1. LẤY MẪU TRONG MIỀN TẦN SỐ VÀ KHÔI PHỤC TÍN HIỆU RỜI RẠC THEO THỜI GIAN

Xét biến đổi Fourier $X(e^{j\omega})$ hay $X(\omega)$ của một tín hiệu không tuần hoàn rời rạc theo thời gian x(n):

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Giả sử tín hiệu X(ω) được lấy mẫu tuần hoàn và khoảng cách lấy mẫu là δω. Vì X(ω) là tuần hoàn với chu kỳ 2π, do vậy chỉ cần xét đến các mẫu được lấy trong miền tần số cơ bản: $0 \le \omega \le 2\pi$ và số lượng mẫu được lấy trong khoảng này là N, thì khoảng cách lấy mẫu là $\delta\omega = 2\pi/N$, (hình 4.1).



Hình 4.1. Lấy mẫu tần số của biến đổi Fourier

Xét giá trị của X(ω) tại $\omega = 2\pi k/N$ ta được:

$$X(\frac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \text{ với k nguyên, k =[0..N-1]} \qquad (4.1.1)$$

Nếu chia tổng (4.1.1) thành một số lượng vô hạn các tổng, trong đó mỗi tổng chứa N phần tử thì ta được:

$$X(\frac{2\pi}{N}k) = \ldots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} +$$

$$+ \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} + \ldots \quad = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Thực hiện việc đổi biến n = n - lN và đổi thứ tự lấy tổng ta được:

$$X(\frac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)\right]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \qquad (4.1.2)$$

Chú ý trong biểu thức trên, đã sử dụng tính chất:

$$e^{-j\frac{2\pi k(n-lN)}{N}} = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}.e^{j2\pi kl} = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Ta thấy tín hiệu: $\quad x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \qquad (4.1.3)$

nhận được do sự xếp chồng của vô số tín hiệu x(n) đặt lệch nhau một chu kỳ N.

Như vậy, $x_p(n)$ là tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ cơ bản là N. Do vậy nó có thể khai triển qua chuỗi Fourier như sau:

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \text{ ,với n nguyên: [0..N-1]} \qquad (4.1.4)$$

với các hệ số: $c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$,với k nguyên: [0..N-1] (4.1.5)

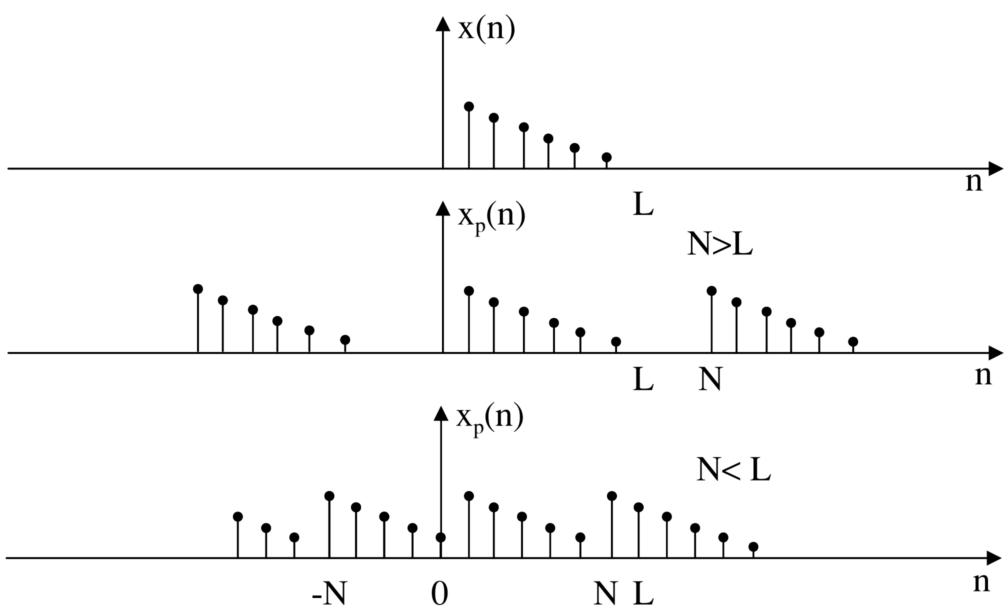
Từ (4.1.2), (4.1.3) và (4.1.5) ta có:

$$c_k = \frac{1}{N} X(\frac{2\pi}{N}k) \qquad (4.1.6)$$

$$\Rightarrow \qquad x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\frac{2\pi}{N}k) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \qquad (4.1.7)$$

Quan hệ (4.1.6) chính là công thức cho phép khôi phục lại tín hiệu tuần hoàn $x_p(n)$ từ các mẫu của phổ X(ω). Tuy nhiên quan hệ này không thể đảm bảo được rằng x(n) hoặc X(ω) có thể khôi phục từ các mẫu hay không. Để đảm bảo điều này, cần phải khảo sát quan hệ giữa x(n) và $x_p(n)$.

Vì $x_p(n)$ là tín hiệu nhận được do sự xếp chồng của các tín hiệu x(n) đặt lệch nhau một chu kỳ N. Vì vậy x(n) có thể được khôi phục từ $x_p(n)$ nếu không có sự "***trùm thời gian***" giữa các thành phần của $x_p(n)$. Điều này đòi hỏi x(n) phải có độ dài hữu hạn L và phải nhỏ hơn chu kỳ N của $x_p(n)$. Hình 4.2 mô tả hai trường hợp của tín hiệu $x_p(n)$ ứng với các trường hợp N > L và N < L.



Hình 4.2. Dãy không tuần hoàn x(n) và dãy mở rộng $x_p(n)$.

Không làm mất tính tổng quát, ta có thể xem x(n) là một dãy có độ dài hữu hạn với các giá trị bằng không ngoài khoảng [0 .. L-1].

Như vậy ta có:

$x(n) = x_p(n), \qquad 0 \le n \le N-1$

Cuối cùng, phổ của tín hiệu không tuần hoàn rời rạc theo thời gian có độ dài hữu hạn L có thể khôi phục một cách chính xác từ các mẫu của nó tại các tần số $\omega_k = 2k\pi/N$ nếu $N \ge L$:

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \end{cases} \qquad (4.1.8)$$

$$\Rightarrow \qquad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\frac{2\pi}{N}k)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \text{ với: } 0 \le n \le N-1 \qquad (4.1.9)$$

và:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\frac{2\pi}{N}k)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}\right]e^{-j\omega n} = \sum_{k=0}^{N-1} X(\frac{2\pi}{N}k)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(\omega-\frac{2\pi k}{N})n}\right]$$

$$(4.1.10)$$

Tổng của các phần tử trong dấu ngoặc vuông của (4.1.10) biểu diễn công thức nội suy được dịch bởi 2πk/N theo tần số. Đặt:

$$p(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{N}\frac{e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}\frac{e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} = \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{N\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\frac{\omega(N-1)}{2}}$$

$$(4.1.11)$$

$$\Rightarrow \qquad X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X(\frac{2\pi}{N}k)p(\omega - \frac{2\pi k}{N}), \; N \ge L \qquad (4.1.12)$$

Như vậy X(ω) có thể được xác định thông qua các mẫu $X(\frac{2\pi}{N}k)$ của nó qua công thức nội suy (4.1.11) và (4.1.12).

II. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC ĐỐI VỚI CÁC TÍN HIỆU TUẦN HOÀN

II.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

a. Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc.

Biến đổi Fourier rời rạc của các dãy tuần hoàn $x_p(n)$ có chu kỳ N được định nghĩa như sau:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad (4.1.13)$$

Đặt: $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ thì ta có: $W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ và $W_N^{-kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ (4.1.14)

$$\Rightarrow \qquad X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) W_N^{kn} \qquad (4.1.15)$$

Đây chính là biểu thức của biến đổi Fourier rời rạc.

Ví du:

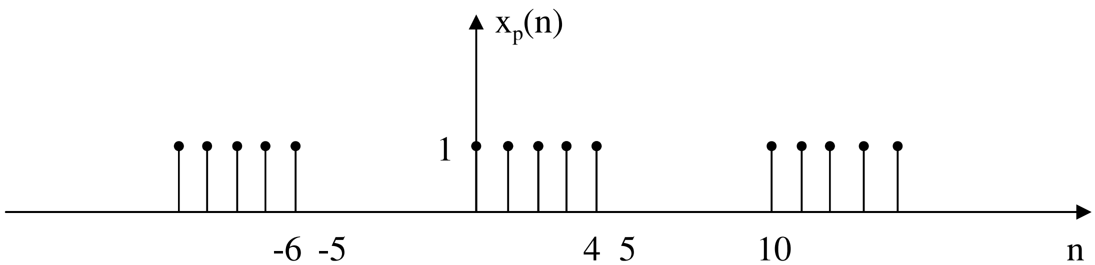
Cho dãy tuần hoàn $x_p(n)$ với chu kỳ N = 10, như sau:

$$x_p(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & 5 \le n \le 9 \end{cases}$$

Tìm $X_p(k)$.

Giải:

Dạng của $x_p(n)$ được biểu diễn như sau:



Hình 4.3. Đồ thị tín hiệu tuần hoàn chu kỳ N=10.

Áp dụng biểu thức (4.1.15) ta có:

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{9} x_p(n) W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k5}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{10}k}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{10}k} e^{-j\frac{\pi}{10}k4}$$

$$= 5e^{-j\frac{\pi}{10}k4} \frac{\sin\frac{\pi}{2}k \Big/ \frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{10}k \Big/ \frac{\pi}{10}k}$$

Đặt:

$$A_p(k) = 5\frac{\sin\frac{\pi}{2}k \Big/ \frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{10}k \Big/ \frac{\pi}{10}k}$$

ta có:

$$X_p(k) = e^{-j\frac{\pi}{10}k4}A_p(k) = |X_p(k)|e^{j\arg[X_p(k)]} = |X_p(k)|e^{j\varphi(k)}$$

ở đây: $\varphi(k) = \arg[X_p(k)]$

$$|X_p(k)| = |A_p(k)|$$

$$\varphi(k) = -\frac{2\pi}{5}k + \frac{\pi}{2}\{1 - \mathrm{Sgn}[A_p(k)]\}$$

b. Định nghĩa biến đổi Fourier ngược.

Biến đổi Fourier ngược được định nghĩa như sau:

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)e^{j\frac{2\pi}{N}k} \qquad (4.1.16)$$

hoặc:

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k)W_N^{-kn} \qquad (4.1.17)$$

II.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC ĐỐI VỚI CÁC TÍN HIỆU TUẦN HOÀN CÓ CHU KỲ N

a. Tính chất tuyến tính.

DFT là một biến đổi tuyến tính, tức là nếu có hai dãy $x_{1p}(n)$ và $x_{2p}(n)$ là các dãy tuần hoàn có cùng chu kỳ N và $x_{3p}(n)$ là tổ hợp tuyến tính của hai dãy trên:

$$x_{3p}(n) = a.x_{1p}(n) + b.x_{2p}(n)$$

thì ta có:

$$DFT[x_{3p}(n)] = X_{3p}(k) = a.X_{1p}(k) + b.X_{2p}(k) \qquad (4.1.18)$$

trong đó: $DFT[x_{1p}(n)] = X_{1p}(k)$ và $DFT[x_{2p}(n)] = X_{2p}(k)$

b. Tính chất trễ.

Nếu $x_p(n)$ là dãy tuần hoàn có cùng chu kỳ N với $DFT[x_p(n)] = X_p(k)$, và dãy $x_p(n + n_0)$ là dãy trễ của $x_p(n)$ cũng là dãy tuần hoàn chu kỳ N thì:

$$DFT[x_p(n+n_0)] = W_N^{-kn_0}X_p(k) \qquad (4.1.19)$$

c. Tính đối xứng

Nếu $x_p(n)$ là dãy tuần hoàn có cùng chu kỳ N với $DFT[x_p(n)] = X_p(k)$ thì:

$$DFT[x^*_p(n)] = X^*_p(-k) \qquad (4.1.20)$$

Chứng minh:

$$DFT\left[x_p^*(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p^*(n) W_N^{kn} = \left\{\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_p^*(n) W_N^{kn}\right]^*\right\}^*$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) W_N^{-kn}\right]^* = X_p(-k)$$

Tương tự ta cũng có:

$$DFT[x^*_p(-n)] = X^*_p(k) \qquad (4.1.21)$$

Chứng minh:

$$DFT\left[x_p^*(-n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p^*(-n) W_N^{kn}$$

đổi biến m = - n ta được:

$$DFT\left[x_p^*(-n)\right] = \sum_{m=0}^{-(N-1)} x_p^*(m) W_N^{-km}$$

do tính tuần hoàn chu kỳ N của $x_p(n)$ và W_N^{-km} nên ta có:

$$DFT\left[x_p^*(-n)\right] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_p(m) W_N^{km}\right]^* = X_p^*(k)$$

Và:

$$DFT\{Re\left[x_p(n)\right]\} = \frac{1}{2}\left[X_p(k) + X_p^*(-k)\right] \qquad (4.1.22)$$

$$DFT\{Im\left[x_p(n)\right]\} = \frac{1}{2j}\left[X_p(k) - X_p^*(-k)\right] \qquad (4.1.23)$$

Chứng minh:

$$x_p(n) = Re[x_p(n)] + j\,.Im[x_p(n)]$$

$$x^*_p(n) = Re[x_p(n)] - j\,.Im[x_p(n)]$$

$$\Rightarrow \qquad Re\left[x_p(n)\right] = \frac{1}{2}\left[x_p(n) + x_p^*(n)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad DFT\{Re\left[x_p(n)\right]\} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_p(n) + x_p^*(n)\right] W_N^{kn} = \frac{1}{2}\left[X_p(k) + X_p^*(-k)\right]$$

và:

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Im}\left[x_p(n)\right] = \frac{1}{2j}\left[x_p(n) - x_p^*(n)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{DFT}\left\{\mathrm{Im}\left[x_p(n)\right]\right\} = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x_p(n) - x_p^*(n)\right]W_N^{kn} = \frac{1}{2j}\left[X_p(k) - X_p^*(-k)\right]$$

d. Tích chập tuần hoàn

Công thức tích chập được trình bày trong chương 1:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$$

được gọi là tích chập tuyến tính. Đối với tích chập này các dãy là bất kỳ. Tuy nhiên ở tích chập tuần hoàn, chiều dài các dãy tuần hoàn là vô cùng nhưng có các chu kỳ lặp lại giống nhau, vì thế tổng chỉ lấy trong một chu kỳ. Và ta có định nghĩa tích chập tuần hoàn như sau:

Tích chập tuần hoàn của hai dãy tuần hoàn $x_{1p}(n)$ và $x_{2p}(n)$ là có cùng chu kỳ N là dãy $x_{3p}(n)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N:

$$x_{3p}(n) = x_{1p}(n)(*)_N x_{2p}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m)x_{2p}(n-m) \qquad (4.1.24)$$

Xét tích chập tuần hoàn trong miền k:

$$X_{3p}(k) = X_{1p}(k).\ X_{2p}(k) \qquad (4.1.25)$$

Chứng minh:

$$X_{3p}(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m)x_{2p}(n-m)\right]W_N^{kn} = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m)\sum_{n=0}^{N-1} x_{2p}(n-m)W_N^{kn}$$

đổi biến: l = n - m, n = l + m và vì $x_{2p}(n)$ là dãy tuần hoàn có chu kỳ N, nên ta có:

$$X_{3p}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m)\sum_{l=-m}^{-m+N-1} x_{2p}(l)W_N^{k(l+m)} = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m)W_N^{km}\sum_{l=0}^{N-1} x_{2p}(l)W_N^{kl}$$

$$= X_{1p}(k)X_{2p}(k)$$

e.Tích của hai dãy

Nếu ta coi tích của hai dãy tuần hoàn $x_{1p}(n)$ và $x_{2p}(n)$ có cùng chu kỳ N là dãy $x_{3p}(n)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N:

$$x_{3p}(n) = x_{1p}(n).x_{2p}(n)$$

thì ta có:

$$X_{3p}(k) = X_{1p}(n)(*)_N X_{2p}(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X_{1p}(m)X_{2p}(k-m) \qquad (4.1.26)$$

Như vậy, tích đại số trong miền n thì tương ứng với tích chập trong miền k.

f. Tương quan tuần hoàn.

Nếu ta có hai dãy tuần hoàn $x_{1p}(n)$ và $x_{2p}(n)$ với cùng chu kỳ N thì hàm tương quan chéo của chúng sẽ được tính toán trên một chu kỳ theo biểu thức sau:

$$r_{x_{1p}x_{2p}}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_{1p}(m)x_{2p}(m-n) \qquad (4.1.27)$$

Như vậy, hàm tương quan chéo của hai dãy cũng là một dãy tuần hoàn với chu kỳ N.

Xét trong miền k:

$$R_{x_{1p}x_{2p}}(k) = X_p(k).X_p(-k) \qquad (4.1.28)$$

III. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC ĐỐI VỚI CÁC DÃY KHÔNG TUẦN HOÀN CÓ CHIỀU DÀI HỮU HẠN

III.1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

Như đã đề cập đến trong phần lấy mẫu trong miền tần số, một dãy x(n) không tuần hoàn và có chiều dài hữu hạn N, ta ký hiệu là $x(n)_N$ sẽ nhận được bằng cách trích ra một chu kỳ N của dãy tuần hoàn $x_p(n)$ có chu kỳ N:

$$x(n)_N = \begin{cases} x_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n < 0, n > N-1 \end{cases}$$

Để nhận được dãy $x(n)_N$ ta có thể sử dụng một dãy chữ nhật:

$$rect_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n < 0, n > N-1 \end{cases}$$

và thực hiện tích:

$$x(n)_N = x_p(n).rect_N(n)$$

Trong miền k, đối với dãy X(k) có thể được xác định như sau:

$$X(k) = \begin{cases} X_p(k) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n < 0, n > N-1 \end{cases}$$

và: $X(k) = X_p(k).rect_N(k)$

Hơn nữa, biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N chỉ tính trong một chu kỳ rồi kết quả đó được tuần hoàn hoá từ - ∞ đến +∞ với chu kỳ N để làm định nghĩa cho biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn N nhưng không được thực hiện tuần hoàn hoá mà chỉ lấy từ 0 đến N-1.

Như vậy, biến đổi Fourier rời rạc (DFT) đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N được định nghĩa như sau:

a. Biến đổi Fourier thuận:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & n < 0, n > N-1 \end{cases} \qquad (4.3.1)$$

b. Biến đổi Fourier ngược:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k < 0, k > N-1 \end{cases} \qquad (4.3.2)$$

Ở đây ta gọi X(k) là phổ rời rạc của tín hiệu x(n), nếu biểu diễn dưới dạng modun và argument ta có:

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$$

$$\varphi(k) = \arg[X(k)] \qquad (4.3.3)$$

trong đó: $|X(k)|$ gọi là phổ rời rạc biên độ và $\varphi(k)$ gọi là phổ rời rạc pha.

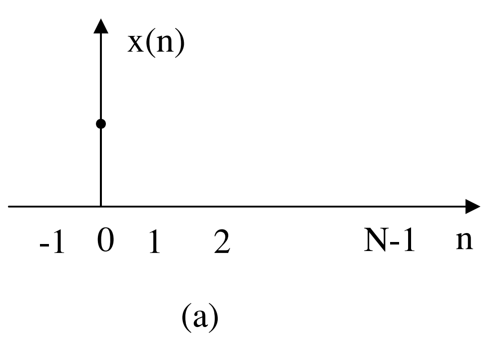
<u>*Ví dụ 1:*</u>

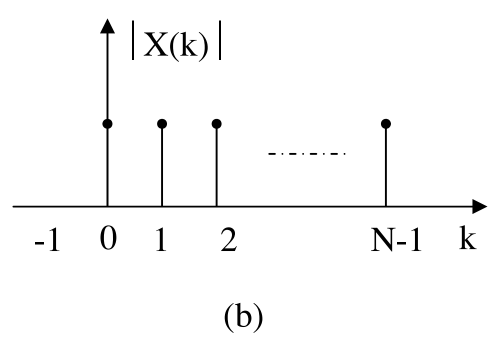
Tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn x(n) sau:

$$x(n) = \delta(n)$$

<u>*Giải:*</u>

Trước hết ta chọn chiều dài của dãy, giả sử là N. Vậy dãy x(n) có dạng:





Hình 4.4. a- Biểu diễn của dãy x(n), b- Biểu diễn của phổ rời rạc biên độ

Khi đó X(k) được tính như sau:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn} = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k < 0, k > N-1 \end{cases}$$

Vậy phổ biên độ rời rạc và phổ pha rời rạc là:

$$|X(k)| = \begin{cases} 1 & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k < 0, k > N-1 \end{cases}$$

$$\varphi(k) = 0.$$

Dạng của $|X(k)|$ được biểu diễn trên hình 4.4b.

Ví du 2:

Tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn x(n) sau, với a < 1:

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \end{cases}$$

Giải:

Theo định nghĩa DFT ta có:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & \end{cases}$$

$\Rightarrow$
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(aW_N^k\right)^n = \frac{1-\left(aW_N^k\right)^N}{1-aW_N^k}$$

Vì:
$$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \Rightarrow W_N^{kN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kN} = e^{-j2\pi k} = 1$$

$\Rightarrow$
$$X(k) = \frac{1-a^N}{1-aW_N^k} = \frac{1-a^N}{1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}} = \frac{\left(1-a^N\right)\left(1-ae^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)}{\left(1-ae^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)\left(1-ae^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)}$$

$$= \frac{\left(1-a^N\right)\left(1-a.\cos\frac{2\pi}{N}k - ja.\sin\frac{2\pi}{N}k\right)}{1+a-2a.\cos\frac{2\pi}{N}k} = |X(k)|e^{j\varphi(\omega)}$$

Vậy:

$$|X(k)| = \sqrt{\{\mathrm{Re}[X(k)]\}^2 + \{\mathrm{Im}[X(k)]\}^2} = \left(1-a^N\right)\frac{\sqrt{\left(1-2a.\cos\frac{2\pi}{N}k+a^2\right)}}{1-2a.\cos\frac{2\pi}{N}k+a}$$

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Re}[X(k)]}{\mathrm{Im}[X(k)]} = \mathrm{arctg}\left[\frac{-a.\sin\frac{2\pi}{N}k}{1-a.\cos\frac{2\pi}{N}k}\right] = -\mathrm{arctg}\left[\frac{a.\sin\frac{2\pi}{N}k}{1-a.\cos\frac{2\pi}{N}k}\right]$$

III.2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC ĐỐI VỚI CÁC DÃY CHIỀU DÀI HỮU HẠN

Trong phần I, cho thấy DFT chính là tập hợp N mẫu $\{X(2\pi k/N)\}$ của biến đổi Fourier $X(\omega)$ của dãy $\{x(n)\}$ với độ dài hữu hạn $L \leq N$. Việc lấy mẫu của $X(\omega)$ được thực hiện tại N tần số cách đều nhau và thông qua N mẫu. Và ta đã có được DFT, IDFT của dãy x(n). Trong phần này ta sẽ xét một số tính chất quan trọng của DFT. Ngoại trừ một số tính chất riêng, về cơ bản các tính chất này cũng giống các tính chất của biến đổi Fourier. Các tính chất của DFT có một vai trò rất quan trọng khi giải quyết các bài toán trong thực tế.

a. Tính chất tuyến tính

DFT là một biến đổi tuyến tính, tức là nếu ta có hai dãy chiều dài hữu hạn $x_1(n)$ và $x_2(n)$ và dãy $x_3(n)$ là tổ hợp tuyến tính của hai dãy này, thì:

$$X_3(k) = a.X_1(k) + b.X_2(k) \qquad (4.3.4)$$

Chú ý: nếu chiều dài của dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ khác nhau thì ta phải chọn chiều dài của dãy $x_3(n)$ như sau:

$$L[x_3(n)] = N_3 = \max[N_1, N_2]$$

và tất cả các $DFT[x_1(n)]$, $DFT[x_2(n)]$ và $DFT[x_3(n)]$ đều phải tính trên N_3 mẫu.

b. Trễ vòng

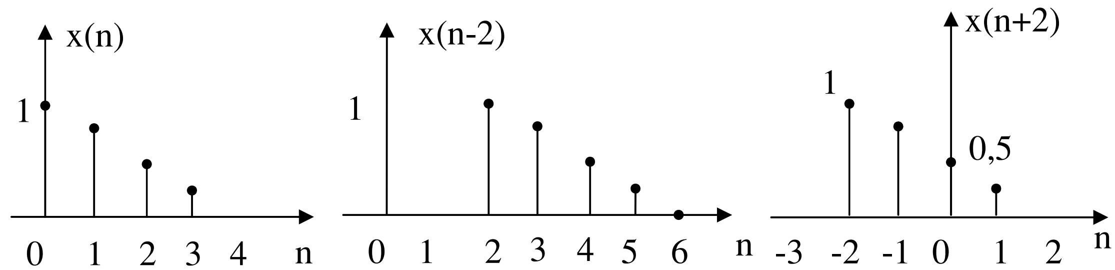
Trước hết ta xét hai ví dụ sau nhằm so sánh trễ tuyến tính và trễ tuần hoàn:

<u>*Ví du 1.*</u> Cho dãy x(n) sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & \end{cases}$$

Tìm trễ tuyến tính x(n-2) và x(n+2)

<u>*Giải:*</u> Ta giải bằng phương pháp đồ thị như hình sau:

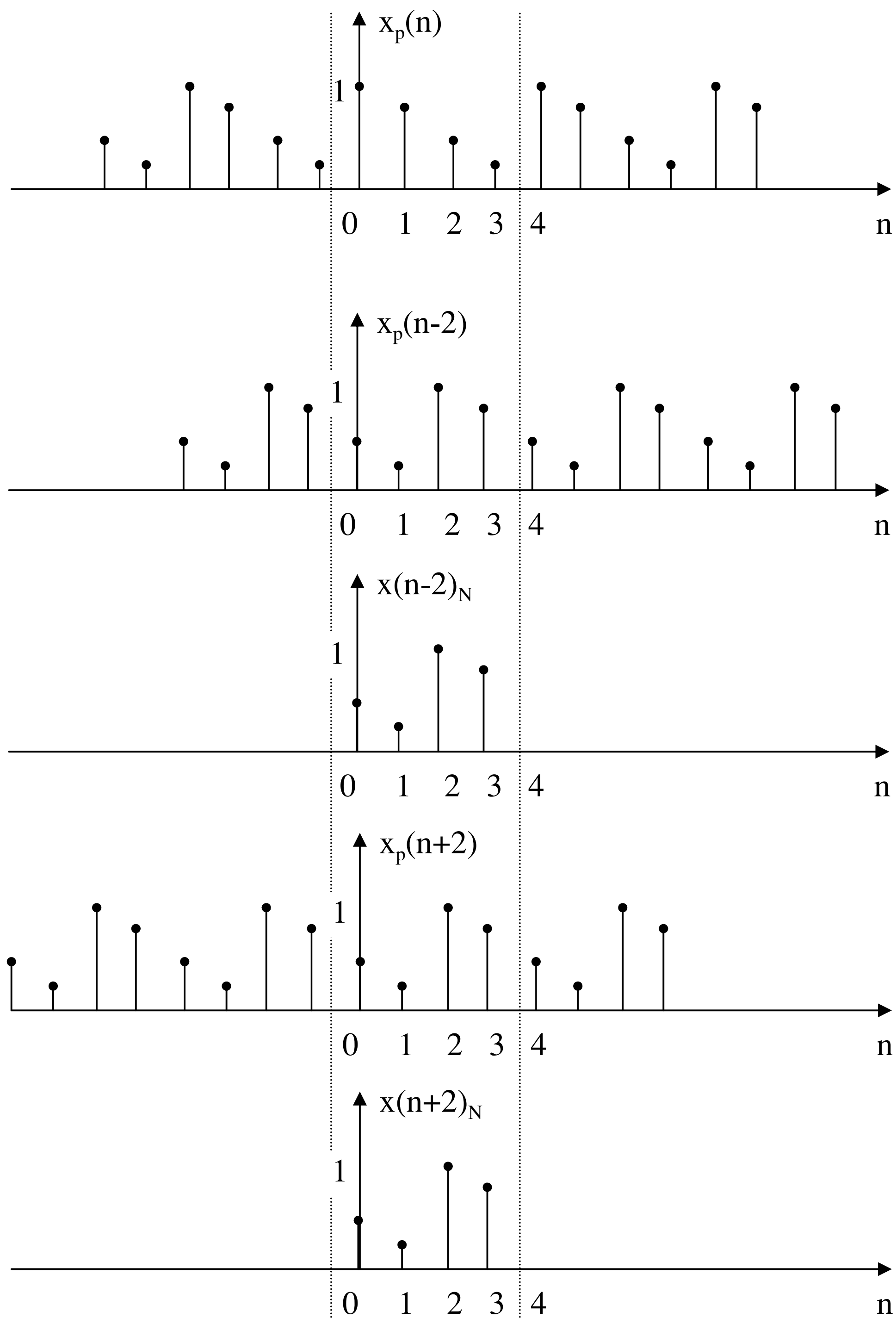


Ví dụ 2. Cho dãy $x_p(n)$ tuần hoàn với chu kỳ N = 4 sau:

$$x_p(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & \end{cases}$$

Tìm trễ tuần hoàn $x_p(n-2)$ và $x_p(n+2)$ sau đó lấy ra một chu kỳ của các dãy này.

Giải: Ta giải bằng phương pháp đồ thị như hình sau:



Ở đây ta dùng các ký hiệu:

$x(n \pm n_0)$: Trễ tuyến tính

$x_p(n \pm n_0)$: Trễ tuần hoàn chu kỳ N

$x(n \pm n_0)_N$: Trễ vòng với chiều dài N

Qua hai ví dụ trên ta thấy:

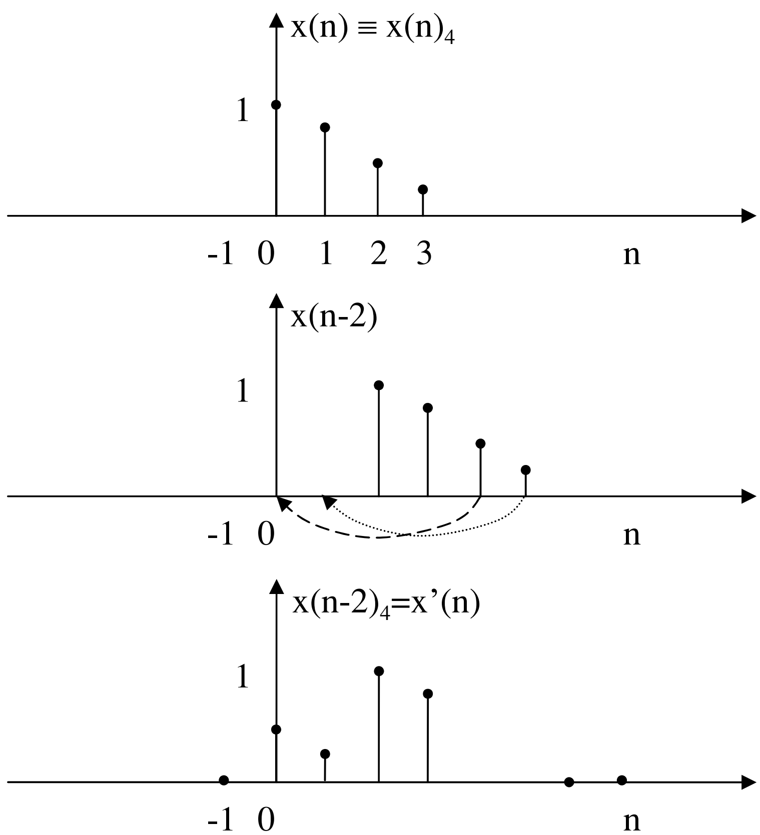
Nếu trích ra một chu kỳ (từ 0 đến N-1) của trễ tuần hoàn chu kỳ N thì ta sẽ được trễ vòng $x(n \pm n_0)_N$, so sánh với trễ tuyến tính $x(n \pm n_0)$ thì ta thấy rằng nếu các mẫu của trễ tuyến tính vượt ra ngoài khoảng [0, N-1] thì nó sẽ vòng vào bên trong khoảng đó để sao cho dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)_N$ xác định trong khoảng [0, N-1] thì trễ vòng của nó $x(n \pm n_0)_N$ xác định trong khoảng [0, N-1] chứ không được vượt ra ngoài khoảng đó.

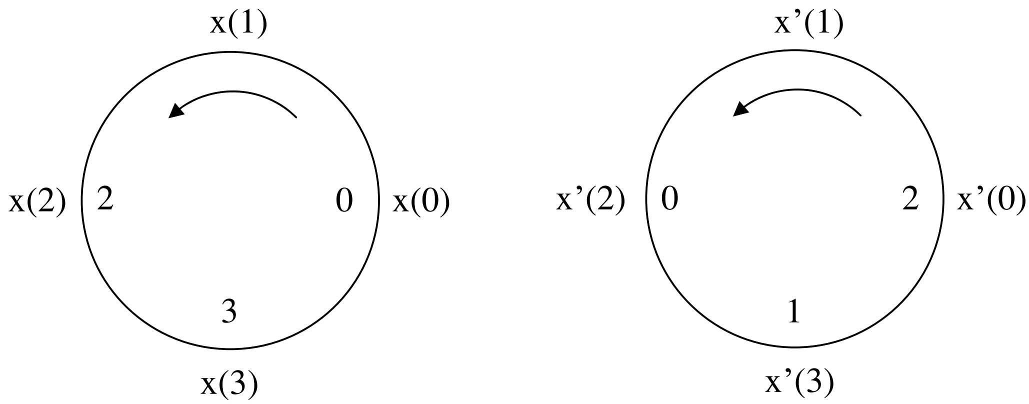
Vậy trễ vòng tương ứng với việc hoán vị vòng các mẫu của dãy $x(n)_N$ trong khoảng [0, N-1] và được biểu diễn như sau:

$$x(n) = x(n)_N = x_p(n).rect_N(n)$$

$$x(n \pm n_0)_N = x_p(n \pm n_0)rect_N(n) \qquad (4.3.5)$$

Bản chất của trễ vòng có thể được minh hoạ như sau:





Để xác định trễ vòng trong miền k, do tính đối ngẫu nên trong miền k trễ vòng cũng có bản chất tương tự như trong miền n, tức là:

$$X(k) = X_p(k).rect_N(k)$$

$$X(k - n_0)_N = X_p(k - n_0).rect_N(k) \qquad (4.3.6)$$

và:

$$DFT\left[x(n - n_0)_N\right] = W_N^{kn_0} X(k) \qquad (4.3.7)$$

trong đó: $DFT[x(n)] \quad = X(k)$

<u>Chứng minh:</u>

Ta có: $DFT\left[x_p(n - n_0)_N\right] = W_N^{kn_0} X_p(k)$

Nếu cả hai vế ta đều lấy ra một chu kỳ [0, N-1]:

$$x(n - n_0)_N = x_p(n - n_0).rect_N(n)$$

$$X(k) = X_p(k\ ).rect_N(k)$$

Vậy ta có: $DFT\left[x(n - n_0)_N\right] = W_N^{kn_0} X(k)$

c. Tính đối xứng

Tính đối xứng của DFT có thể nhận được bằng cách áp dụng phương pháp đã được sử dụng đối với biến đổi Fourier. Trong trường hợp tổng quát, dãy x(n) có chiều dài hữu hạn N và DFT của nó đều có giá trị phức. Khi đó, các dãy này có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$x(n) = Re[x(n)] + j\ .Im[x(n)]$$

và

$$X(k) = Re[X(k)] + j\ .Im[X(k)]$$

$$X^*(k) = X(-k) = Re[X(k)] - j\ .Im[X(k)]$$

Từ các biến đổi Fourier thuận và nghịch (DFT, IDFT) ta có:

$$\mathrm{Re}[X(k)] = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\mathrm{Re}[x(n)]\cos\frac{2\pi kn}{N} + \mathrm{Im}[x(n)]\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (4.3.8)$$

$$\mathrm{Im}[X(k)] = -\sum_{n=0}^{N-1}\left[\mathrm{Re}[x(n)]\sin\frac{2\pi kn}{N} - \mathrm{Im}[x(n)]\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (4.3.9)$$

và

$$\mathrm{Re}[x(n)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\mathrm{Re}[X(k)]\cos\frac{2\pi kn}{N} - \mathrm{Im}[X(k)]\sin\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (4.3.10)$$

$$\mathrm{Im}[x(n)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\mathrm{Re}[X(k)]\sin\frac{2\pi kn}{N} + \mathrm{Im}[X(k)]\cos\frac{2\pi kn}{N}\right] \qquad (4.3.11)$$

• ***Dãy có giá trị thực:***

Nếu x(n) là dãy thực thì ta có:

$$X(N-k) = X^*(k) = X(-k) \qquad (4.3.12)$$

$\Rightarrow$ $|X(N-k)| = |X(k)|$ và Arg[X(N-k)] = - Arg[X(k)]

và x(n) còn được xác định theo (4.3.10), là một dạng khác của IDFT.

• ***Tín hiệu chẵn và thực:***

Nếu x(n) là dãy chẵn và thực, thì ta có:

$$x(n) = x(-n) = x(N-n) \qquad (4.3.13)$$

Từ hệ thức (4.3.10) ta có Im[X(k)] = 0 và do vậy DFT trở thành:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.14)$$

là một dãy chẵn. Do Im[X(k)] = 0 nên IDFT trở thành:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cos\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.15)$$

• ***Tín hiệu lẻ và thực:***

Nếu x(n) là dãy lẻ và thực, thì ta có:

$$x(n) = -x(-n) = -x(N-n) \qquad (4.3.16)$$

Từ hệ thức (4.3.10) ta có Re[X(k)] = 0 và do vậy DFT trở thành:

$$X(k) = -j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.17)$$

là một dãy lẻ, phức thuần tuý. Và do đó, IDFT trở thành:

$$x(n) = -\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{Im}[X(k)]\sin\frac{2\pi kn}{N} = j\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sin\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.18)$$

● ***Dãy phức thuần tuý:***

$$\mathrm{Re}[X(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Im}[x(n)] \sin\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.19)$$

$$\mathrm{Im}[X(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Im}[x(n)] \cos\frac{2\pi kn}{N} \qquad (4.3.20)$$

Nếu Im[x(n)] là lẻ thì Im[X(k)] = 0 và do vậy X(k) là thực thuần tuý. Nếu Im[x(n)] là chẵn thì Re[X(k)] = 0 và do vậy X(k) là phức thuần tuý.

d. Tích chập vòng.

Giả sử $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là hai dãy có độ dài hữu hạn N với các DFT tương ứng là:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j2\pi nk/N} \text{ và } X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j2\pi nk/N}$$

Gọi $X_3(k)$ là tích của hai DFT trên: $X_3(k) = X_1(k).\ X_2(k)$; Là DFT của $x_3(n)$. Ta sẽ tìm quan hệ giữa $x_3(n)$ với $x_1(n)$ và $x_2(n)$.

Biến đổi Fourier ngược của $X_3(k)$ là:

$$x_3(m) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_3(k) e^{j2\pi mk/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} [X_1(k).X_2(k)] e^{j2\pi mk/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j2\pi nk/N}\right]\left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) e^{-j2\pi lk/N}\right] e^{j2\pi mk/N} \qquad (4.3.21)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \sum_{l=0}^{N-1} x_2(l) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(m-n-l)k/N}\right]$$

Trong đó, tổng biểu diễn bởi biểu thức trong ngoặc vuông của (4.3.21) có giá trị:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(m-n-l)k/N} = \begin{cases} N & l = m - n + pN = ((m-n))_N \\ 0 & \text{Other} \end{cases}$$

Thay vào (4.3.21) ta được:

$$x_3(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2((m-n))_N \qquad m = 0,1,2...,N-1 \qquad (4.3.22)$$

Biểu thức (4.3.22) có dạng của một tích chập. Tuy vậy, đây không phải là một tích chập biểu diễn quan hệ giữa đáp ứng và kích thích của hệ thống tuyến tính bất biến. Trong tích chập này, có chứa chỉ số $(m\text{-}n)_N$ đặc trưng cho tính dịch vòng, vì vậy công thức (4.3.22) được gọi là tích chập vòng. Như vậy tích các DFT của hai dãy sẽ tương đương với tích chập vòng của hai dãy trong miền biến số độc lập tự nhiên n.

Ví dụ: Tích tích chập vòng của hai dãy sau:

$$x_1(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 1 \right\} \text{ và } x_2(n) = \left\{ \underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \right\}$$

Giải:

Để tính tích chập vòng của hai dãy, ta sẽ tiến hành qua hai phương pháp sau:

• *PP1:* Sử dụng các phép biến đổi DFT và IDFT.

Ta có:

$$X_1(k) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n) e^{-j2\pi nk/4} = 2 + e^{-j\pi k/2} + 2.e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2}, \quad (k = 0,1,2,3)$$

⇒ $X_1(0) = 6$; $X_1(1) = 0$; $X_1(2) = 2$; $X_1(3) = 0$.

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{3} x_2(n) e^{-j2\pi nk/4} = 1 + 2.e^{-j\pi k/2} + 3.e^{-j\pi k} + 4.e^{-j3\pi k/2}, \quad (k = 0,1,2,3)$$

⇒ $X_2(0) = 10$; $X_2(1) = -2 + j.2$; $X_2(2) = -2$; $X_2(3) = -2 - j.2$.

⇒ $X_3(0) = 60$; $X_3(1) = 0$; $X_3(2) = -4$; $X_3(3) = 0$.

theo định nghĩa biến đổi Fourier ngược ta có:

$$x_3(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} X_3(k) e^{j2\pi nk/4} = \frac{1}{4}(60 - 4e^{-j\pi n}), \quad (n = 0,1,2,3)$$

⇒ $x_3(0) = 14$; $x_3(1) = 16$; $x_3(2) = 14$; $x_3(3) = 16$.

• *PP2:* Mô tả các mẫu của từng dãy thông qua các điểm trên hai vòng tròn khác nhau. Cách mô tả này như thể hiện trên hình 4.5a, chiều dương được quy ước là ngược chiều kim đồng hồ.

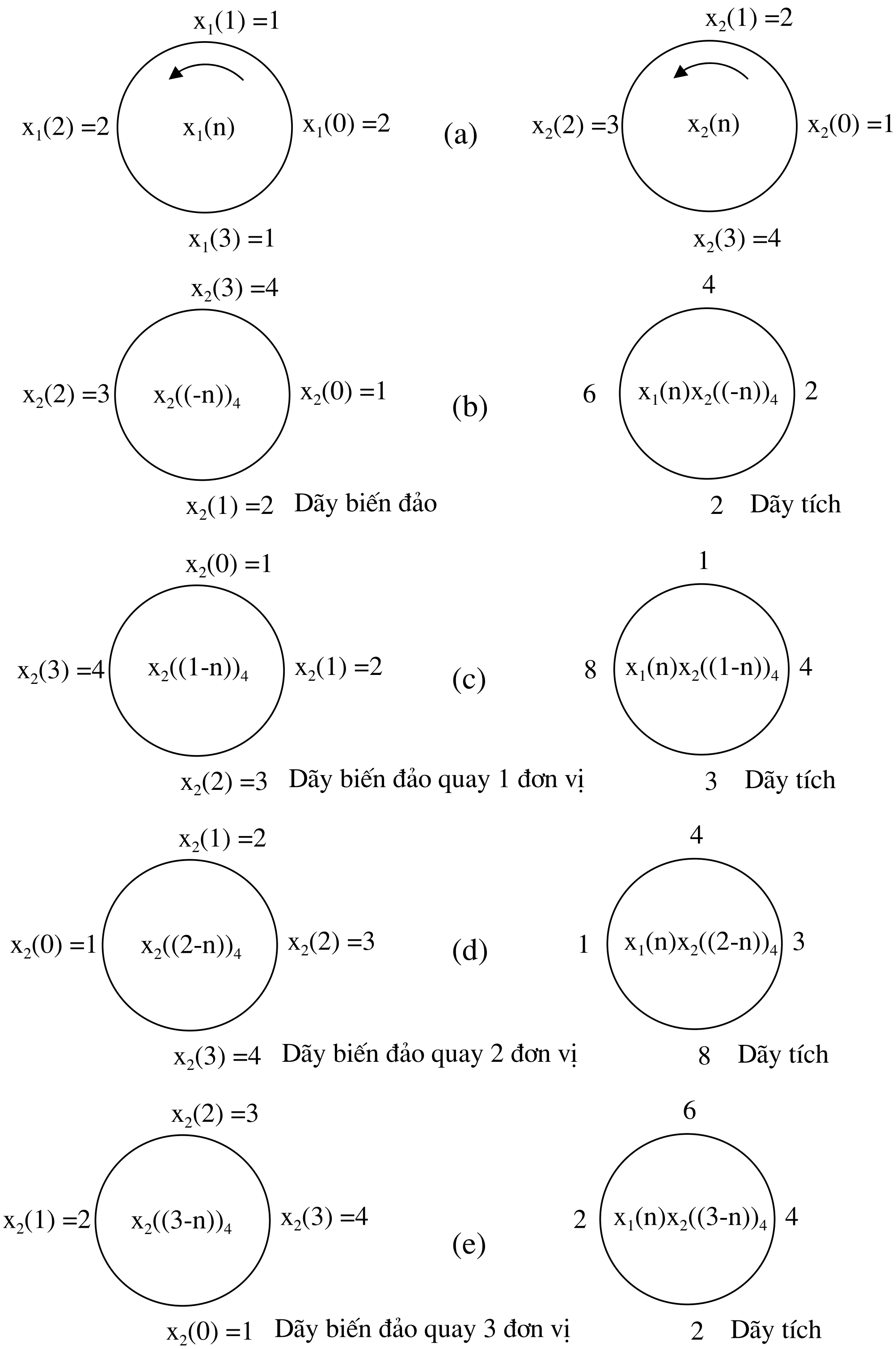
+. Với m = 0, ta có: $$x_3(0) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n) x_2((-n))_4$$

Hình 4.5b mô tả vị trí các mẫu của dãy biến số đảo $x((-n))_4$ trên đường tròn. Các vị trí này nhận được bằng cách vẽ các điểm mẫu theo chiều âm; và ta nhận được: $x_3(0) = 14$.

+. Với m = 1, ta có: $$x_3(0) = \sum_{n=0}^{3} x_1(n) x_2((1-n))_4$$

Dãy $x_2((1\text{-}n))_4$ nhận được bằng cách quay các điểm của $x_2((\text{-}n))_N$ đi một đơn vị thời gian theo chiều dương, hình 4.5c mô tả vị trí các mẫu của dãy biến số đảo $x_2((1\text{-}n))_4$ trên đường tròn, và nhận được: $x_3(1) = 16$.

Tương tự, (các hình 4.5d và e) ta cũng xác định được các giá trị các mẫu còn lại: $x_3(2) = 14$ và $x_3(3) = 16$.



Hình 4.5. Tích chập vòng của hai dãy.

IV. HIỆU ỨNG HẠN CHẾ ĐỘ DÀI TÍN HIỆU ĐỂ PHÂN TÍCH FOURIER

Ta đã biết rằng một tín hiệu có độ dài hữu hạn N có thể được biểu diễn một cách đầy đủ thông qua phép biến đổi Fourier rời rạc DFT. Tuy vậy, khi các tín hiệu có độ dài quá lớn hoặc vô hạn thì việc xác định biến đổi Fourier rời rạc của nó là không thể thực hiện được. Trong trường hợp này, ta cần lấy một đoạn thích hợp nhất của tín hiệu với một độ dài cho phép để thực hiện biến đổi DFT. Khi đó rõ ràng rằng phương pháp DFT chỉ cho ra một kết quả xấp xỉ của tín hiệu. Ở đây, ta xem xét vấn đề hạn chế độ dài của tín hiệu và các hiệu ứng phát sinh do việc sử dụng phương pháp DFT đối với dãy đã được hạn chế về độ dài.

Nếu tín hiệu cần phân tích là tín hiệu tương tự thì trước tiên tín hiệu này cần được chuyển qua bộ lọc để loại bỏ các nhiễu (hoặc các thành phần của tần số không cần thiết) và sau đó được lấy mẫu với tần số $F_s \geq 2B$, với B là độ rộng của dải thông. Như vậy tần số cao nhất của hài thành phần có chứa tín hiệu khi lấy mẫu là $F_s/2$. Để có thể hạn chế độ dài của tín hiệu đã được lấy mẫu, giả sử chỉ xét tín hiệu trong một khoảng thời gian hữu hạn $T_0 = NT$, trong đó N là số lượng mẫu và T là khoảng thời gian giữa hai lần lấy mẫu (chu kỳ lấy mẫu). Khoảng thời gian lấy mẫu này về nguyên tắc sẽ hạn chế độ phân giải về tần số; nghĩa là nó sẽ hạn chế khả năng phân biệt đối với các thành phần tần số mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $1/T_0 = 1/NT$ trong miền tần số.

Giả sử rằng $\{x(n)\}$ là tín hiệu cần phân tích. Có thể thấy việc giới hạn độ dài của dãy $\{x(n)\}$ với N mẫu trong khoảng $n_0 \leq n \leq n_0 + N-1$, sẽ tương đương với việc nhân tín hiệu này với một hàm cửa sổ với độ dài N *(để đơn giản, từ đây ta coi $n_0 = 0$, khi đó các kết quả với $n_0 <> 0$ sẽ nhận được bằng cách áp dụng tính chất trễ và dịch chuyển. Và khi đó khoảng xác định của N mẫu sẽ là: $0 \leq n \leq N-1$).* Nghĩa là:

Trong đó $x_N(n) = x(n)w(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

Việc nhân tín hiệu với hàm cửa sổ theo thời gian tương đương với việc lấy tích chập phổ của tín hiệu x(n) với phổ của cửa sổ:

$$X_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega'})W(e^{j(\omega-\omega')})d\omega' = X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

trong đó: $X_N(e^{j\omega})$, $X(e^{j\omega})$ và $W(e^{j\omega})$ là các biến đổi Fourier tương ứng của x_N

Với tín hiệu $x_N(n)$, chúng ta có thể áp dụng DFT vì nó có chiều dài hữu hạn. Các hệ số $X_N(e^{j\omega})$ của DFT lúc này sẽ biểu diễn gần đúng cho các mẫu của $X(e^{j\omega})$. Để đánh giá mức độ xấp xỷ, chúng ta phải đánh giá tích chập trên đây, theo từng kiểu cửa sổ quan sát.

Vấn đề thứ hai là số lượng mẫu N được chọn như thế nào và vị trí cửa sổ đặt ở đâu (tức là tìm n_0), cũng như mức độ ảnh hưởng của hàm cửa sổ đã chọn.

Để chọn vị trí cửa sổ, ta phải cần biết cụ thể thêm về tín hiệu cần phân tích. Nói chung, nguyên tắc chọn vị trí cửa sổ (chọn n_0) sao cho cửa sổ bao trùm lên phần quan trọng của tín hiệu và bỏ qua những đoạn tín hiệu có biên độ nhỏ không đáng kể.

Ví dụ tín hiệu có dạng:

$$x(n) = a^{|n|} \text{ với } |a| < 1$$

thì các mẫu có biên độ lớn tập trung ở gốc toạ độ. Bởi vậy cửa sổ cần đặt xung quanh gốc toạ độ.

a. Hàm cửa sổ chữ nhật

Hàm cửa sổ chữ nhật được biểu diễn như sau:

$$w_R(n) = \mathrm{Rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Trong miền tần số, ta có:

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin\omega\frac{N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

b. Cửa sổ tam giác

Trong miền n, cửa sổ tam giác được định nghĩa như sau:

$$w_T(n) = \begin{cases} \dfrac{2n}{N-1} & 0 \le n \le \dfrac{N-1}{2} \\ 1 - \dfrac{2n}{N-1} & \dfrac{N-1}{2} \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Trong miền tần số, ta có:

$$W_T(e^{j\omega}) = \frac{2}{N-1} e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \frac{\sin\left[\dfrac{\omega\frac{N-1}{2}}{2}\right]}{\sin\dfrac{\omega}{2}}$$

c. Cửa sổ Hanning và Hamming

Trong miền n, cửa sổ Hanning và Hamming được định nghĩa như sau:

$$w_H(n) = \begin{cases} \alpha - (1-\alpha)\cos\dfrac{2\pi n}{N-1} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

- Nếu α = 0,5 ta có cửa sổ Hanning như sau:

$$w_{Han}(n) = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5\cos\dfrac{2\pi n}{N-1} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

- Nếu α = 0,54 ta có cửa sổ Hamming như sau:

$$w_{Ham}(n) = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46\cos\dfrac{2\pi n}{N-1} & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Và trong miền tần số, ta có:

$$W_H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left[\alpha \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}} + \frac{1-\alpha}{2} \frac{\sin\left(\omega\frac{N}{2} - \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right)} + \frac{1-\alpha}{2} \frac{\sin\left(\omega\frac{N}{2} + \frac{N\pi}{N-1}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N-1}\right)} \right]$$

Bởi vì thông qua DFT ta có thể biểu diễn một dãy với độ dài hữu hạn trong miền tần số qua các tần số rời rạc, do đó DFT có thể được sử dụng như một công cụ tính toán trong việc phân tích các hệ thống tuyến tính và đặc biệt cho các bộ lọc tuyến tính. Tuy nhiên không thể tínhChúng ta đã biết rằng, khi một hệ thống với đáp ứng tần số $H(\omega)$ được kích thích bởi tính hiệu đầu vào có phổ là $y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$. Dãy đầu ra y(n) được xác định từ phổ của nó thông qua biến đổi ngược Fourier .tuyvậy, khi tính toán ,có thể thấy vấn đề nảy sinh khi sử dụng các phương pháp trong miền tần số là cả $X(\omega)$, $H(\omega)$ và $Y(\omega)$ đều là các hàm liên tục của biến ω vì vậykhông thể sử dụng máy tính số để xử lý bởi ví máy tính chỉ có thể lưu trữ và thực hiện các việc tính toán trên các giá trị rời rạc của tần số .

Có thể thấy DFT rất thích hợp với việc tính toán trên máy tính số và có thể được sử dụng để thực hiện việc lọc tuyến tính trong miền tần số .Mặc dù chúng ta đưa ra các thủ tucf tính toán trong miền thơì gian như tổng chập ,tuy vậy trong miền tần số các phương pháp dựa trên DFT lại tỏ ra hieeuj quả hơn nhiều so với phương pháp tổng chập trong miền thời gian dợ tồn tại một loạt thuật toán mới hiệu quả hơn .Các thuật toán này được gọi là biến đổi nhanh Fourier(*FFT*) và sẽ được trình bày trong chương 5.

4.3.1 Sử dung DFT trong lọc tuyến tính

Mặc dù tích của hai DFT sẽ tương đương với tổng chập vòng của hai dãy tương ứng được biểu diễn trong miền thời gian, nhưng có thể thấy công thức của tổng chập vòng lại không dùng được trong trương hợp cần xác định đầu ra của bộ lọc tuyến tính khi đầu vào chịu sự tác động của tín hiệu. Trong trường hợp này cần phải tìm một phương pháp nào đó trong miền tần số tương đương với tổng chập tuyến tính.

Giả sử x(n) là dãy có độ dài hữu hạn Lvà được tác động lên bộ lọc tuyến tính với độ dài M. Không làm mất tính tổng quát ta có thể giả sử :

$x(n)=0 \qquad n<0$ và $n\geq L$

$h(n)=0 \qquad n\leq 0$ và $n\leq M$

ở đây h(n) là đáp ứng xung của bộ lọc FIR có thể được xác định thông qua tổng chập của x(n) và h(n):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

Bởi vì x(n) và h(n) là các dãy với dộ dài hữu hạn do vậy tổng chập của chúng cũng có độ dài hữu hạn. Cụ thể độ dài là L + M-1.

Trong miền tần số, công thức tương đương với **4.3.1** sẽ là :

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$$

Nếu dãy y(n) được biểu diễn một cách duy nhất trong miền tần số bằng cách lấy phổ Y(n) tại các tần số rời rạc phân biệt nhau thì số lượng các mẫu này phải bằng hoặc lớn hơn L + M-1. Như vậy để có thể biểu diễn y(n) một cách duy nhất trong miền tần số thì cần phảI sử dụng DFT với độ dài N≥M+L-1.

Sau khi lấy mâũ ta có:

$$Y(k)\equiv Y(\omega)\big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k=0,1,,\dots,N-1$$

$$Xk)H\omega)\big|_{\omega=2\pi k/N}, \quad k=0,1,,\dots,N-1$$

Và $$Y(k)=X(k)H(k), \quad k=0,1,,\dots,N-1 \quad \textbf{(4.3.3)}$$

Trong công thức **(4.3.3)** thì X(k) và Y(k) là các DFT - N điểm của các dãy tương ứng x(n) và y(n) có độ dài hữu hạn nhỏ hơn N do vậy ta chỉ cần thêm các mẫu không vào các dãy để tăng độ dài của chúng lên N .Việc tăng độ dài của các dãy sẽ không ảnh hưởng đến phổ liên tục X(ω) và Hω) của chúng bởi vì các dãy này là các dãy tuần hoàn. Tuy vậy, bằng cách này (sử dụng DFT-N điểm) số lượng mẫu dùng để biểu diễn các dãy trong miền tần số đã vượt quá số lượng nhỏ nhất (L hoặc M).

Bởi vì DFT với độ dài M+L-1 điểm của dãy đầu ra y(n) trong miền tần số suy ra rằng có thể xác định được {y(n)} thông qua IDFT sau khi đã xác định tính của các DFT – N điểm X(k) và H(k). Như vậy giống như điều đã khẳng định trong phần 4.2.2 có thể kết luận rằng tổng chập vòng N điểm của x(n) và h(n) sẽ tương đương với tổng chập tuyến tính của hai dãy này. Nói một cách khác,bằng cách tăng độ dài của hai dãy x(n) và h(n) lên N điểm thông qua việc đưa thêm các không và tính tổng chập vòng trên các dãy mới ta sẽ nhận được kết quả giống với trường hợp sử dụng tổng chập tuyến tính. Từ đây suy ra với các mẫu không được thêm vào thì DFT có thể được sử dụng để thực hiện việc lọc tuyến tính.

Ví dụ 4.3.1: Sử dụng IDFT và DFT hãy xác định đáp ứng của bộ lọc tuyến tính.

H(n) = {1,2,3}

Khi tín hiệu vào là:

X(n) = {1,2,2,1 }

Giải: dãy đầu vào có độ dài L=4 và đáp ứng xung có độ dài M=3. Tổng cập tuyến tính của hai dãy này sẽ cho kết quả với độ dài là N=6. Suy ra rằng, độ dài của các DFT cần sử dụng ít nhất phảI bằng 6.

ở đây, để đơn giản ta sẽ sử dụng các DFT – 8 điểm. DFT – 8 điểm của x(n) sẽ là:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7} x(n)e^{-j2\pi kn/8} = 1 + 2E^{-j\pi k/4} + 2e^{-j\pi k/2} + 2e^{-j3\pi k/4}, \quad k=0,1,\ldots 7$$

Từ đây suy ra:

$X(0) = 6$ $\qquad X(1)= \frac{2+\sqrt{2}}{2} - j\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)$

$X(2) = -1-j$ $\qquad X(3) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} - j\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)$

$X(4) = 0$ $\qquad X(5) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} - j\left(\frac{4-3\sqrt{2}}{2}\right)$

$X(6) = -1+j$ $\qquad X(7) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} + j\left(\frac{4+3\sqrt{2}}{2}\right)$

DFT – 8 điểm của h(n) là:

$$H(k)= \sum_{n=0}^{7} h(n)e^{-j2\pi kn/8} = 1 + 2E^{-j\pi k/4} + 3e^{-j\pi k/2}$$

Suy ra:

$H(0) = 6$ $\quad H(1) = + \sqrt{2}$ -j $(3+\sqrt{2})$

$H(2) = -2-j2$ $\quad H(3) =1- \sqrt{2}$ +j $(3 -\sqrt{2})$

$H(4) = 2$ $\quad H(5) =1- \sqrt{2}$ -j $(3 -\sqrt{2})$

$H(6) =-2 + j2$ $\quad H(7) = 1+ \sqrt{2}$ +j $(3+\sqrt{2})$

Tích của 2 DFT vừa tính trên sẽ cho Y(k) và do vậy:

$Y(0) = 36$ $\quad Y(1) = - 14.07 - 17.48$ $\quad Y(2) = j4$

$Y(3) = 0.07 +j0.515$ $\quad Y(4) = 0$ $\quad Y(5) = 0.07 - j.0515$

$Y(6) = -j4$ $\quad Y(7) = - 14.07 + j17.48$

Cuối cùng IDFT - 8 điểm:

$$Y(n) = \sum_{n=0}^{7} Y(k)e^{j2\pi kn/8}, \quad n= 0,1,\ldots 7$$

sẽ cho kết quả là: y(n) = {1,4,9.11,8,3,0,0}

Do dãy y(n) chỉ có sáu phần tử nên các giá trị đầu sẽ bị loại bỏ. Hai phần tử này có giá trị bằng không bởi vì ta đã sử dụng độ dài của các DFT là 8 điểm và quá mức cần thiết 2 điểm.

Mặc dầu tích của hai DFT tương ứng với tổng chập vòng trong miền thời gian, tuy nhiên ta cũng thấy rằng việc đưa thêm vào các dãy x(n) và h(n) với một số lượng đủ các mẫu có giá trị không đã làm cho tổng chập vòng có cùng kết quả với tổng chập tuyến tính. Trong trường hợp lọc Fi của ví dụ 4.3.1 thì tổng chập vòng 6 điểm của các dãy:

h(n) = {1,2,3,0,0,0,} (4.3.4)

x(n) = {1,2,2,1,0,0,} (4.3.5)

sẽ cho dãy đầu ra:

y(n) = {1,4,9.11,8,3} (4.3.6)

giống với dãy nhân được bằng tổng chập tuyến tính.

Một điều rất quan trọng cần lưu ý là khi độ dài của các DFT nhỏ hơn L + M - 1 thì kết quả nhân được sẽ có sự sai lệch so với kết quả đúng.

Ví dụ dưới đây sẽ đề cập đến vấn đề này:

Ví dụ 4.3.2: Hãy xác định dãy y(n) bằng cách sử dụng các FT - 4 điểm đối với ví dụ 4.3.1

Giải: DFT -4 điểm của h(n) là:

$$H(k) = \sum_{n=0}^{3} h(n)e^{-j2\pi k/4}$$

$H(k) = 1 + 2e^{-j\pi k}/2 + 3e^{-j\pi k}$, k= 0,1,2,3

Suy ra:

H(0) =6   H(1) = -2 –j2   H(2) = 2   H(3) = -2 + j2

DFT-4 điểm của x(n) là:

$X(k) = 1 + 2e^{-j\pi k/2} + 2e^{-j\pi k} + 3e^{-j\pi k/2}$, k= 0,1,2,3

Từ đây suy ra:

Y(n) = {9,7,9,11}

Kết quả này cũng giống với kết quả nhận được nếu ta sử dụng tổng chập vòng 4 điểm của h(n) và h(n).

Nếu so sánh kết quả của y'(n) nhận được từ DFT-4 điểm với dãy y(n) nhận được bằng cách sửdụng DFT-8 điểm (thực chất chỉ cần 6 điểm) thì ta sẽ thấy các kết quả này có sự sai lệch như đã đề cập trong phần 4.2.2. Cụ thể có thể tìm thấy quan hệ sau:

y'(0) = y(0) + y(4) =9

y'(5) = y(1) + y(5) =7

Trong 4 giá trị tìm được của y'(n) thì chỉ hai giá trị đầu là sai lệch so với các giá trị tương ứng của y(n).

Như vậy có thể thấy nếu x(n) là dẫy hữu hạn với độ dàI L, h(n) là dãy hữu hạn có độ dàI M (giả sử L>M) thì khi sử dụng các DFT và IDFT sẽ có M-1 giá trị đầu bị sai lệch so với giá trị đúng và cần phảI loại bỏ. Đây là một kết luận rất quan trọng còn được sử dụng về sau.

4.3.2. Lọc các dãy số có độ dàI dữ liệu lớn

Trong thực tế, thông thường bài toán lọc tuyến tính của tín hiệu thường có dữ liệu đầu vào x(n) với độ dài rất lớn. Điũu này lại càng đúng đối với một vài ứng dụng xử lý tín hiệu trong thời gian thực có liên quan đến việc theo dõi và phân tích tín hiệu. Khi tín hiệu có độ dài quá lớn thì rõ ràng việc sử dụng máy tính trong quá trình xử lý theo phương pháp DFT cũng gặp phảI một số khó khăn:

Việc xử lý có thể đòi hỏi một dung lượng bộ nhứ rất lớn trong khi bộ nhớ của máy tính là có hạn.

- Thời gian tính toán quá lớn vượt hẳn thời gian cho phép.

Để có được một số mẫu đầu tiên thì phải đợi cho đến khi kết thúc tất cả quán trình tính toán.

Để khắc phục các nhược điểm này, tín hiệu đâù vào có

độ dàI lớn cần phải được phân thành các đoạn khác nhau với độ dài nhất định trước khi thực hiện việc xử lý. Bởi vì bộ lọc làtuyến tính do vậy việc xử lý các dãy tín hiệu này có thể được tiến hành ở mỗi thời điểm khác nhau thông qua DFT. Các tín hiệu đầu ra này sau đó được kết hợp với nhau để có thể nhận được đầu ra tương đương với trường hợp bộ lọc được tác động bởi một tín hiệu đầu vào duy nhất.

Dựa vào việc phân tín hiệu đầu vào thành các đoạn có kích thước vừa phảI, có hai phương pháp DFT hay được sử dụng đối với bộ lọc FIR tuyến tính với tín hiệu vào có độ dài quá lớn. Phương pháp thứ nhất được gọi là phương pháp đặt kề nhau, phương pháp thứ hai được gọi là phương pháp xếp chồng. Trong cả hai phương pháp ta sẽ giả sử bộ lọc FIR có độ dài là M, dãy đầu vào được chia thành các dãy con với độ dài mỗi dãy là L. ở đây không làm mất tính tổng quát, giả sử rằng L>>M.

4.3.2.1. Phương pháp đặt kề nhau

Theo phương pháp này, độ dài của mỗi đoạn dữ liệu đầu vào sẽ là N = L+ M – 1, độ dài của DFT và IDFT được sử dụng sẽ là N. Như vậy độ dài của các đoạn dữ liệu đầu vào đã được tăng từ L lên L+ M -1. Trong trường hợp này, có thể xem x(n) như là tổng của các dãy thành phần đặt kề nhau M-1 điểm và mỗi dãy chứa M-1 điểm cuối cùng của dãy trước và L điểm dữ liệu mới. Riêng dãy đầu tiên sẽ được bổ sung thêm M-1 mẫu không đầu tiên. Như vậy, các dãy dữ liệu thành phần của x(n)sẽ là:

$x_1(n) = \{0, 0,..., 0, x(0), x(1),..., x(L-1)\}$ (4.3.7)

$x_2(n) = \{x(L - M + 1),..., x(L-1), x(L),..., x(2L-1)\}$ (4.3.8)

$x_3(n) = \{x(2L-M + 1),..., x(2L-1), x(2L),..., x(3L-1)\}$ (4.3.9)

và v.v..

DFT - N điểm sẽ được tính đối với mỗi dãy thành phần. Độ dài đáp ứng xung của bộ lọc FIR cũng được tăng thêm L-1 mẫu không và DFT –N điểm của dãy sẽ được tính và lưu trữ lại. Tích của hai DFt –N điểm $\{H(k)\}$ và $\{X_m(k)\}$ đối với mỗi dãy dữ liệu sẽ cho kết quả:

$Y'_m(k) = H(k)\, X_m(k)$, k= 0,1,...,N-1 (4.3.10)

IDFT - N điểm sẽ cho kết quả:

$y'_m(n) = y'_m(0)\; y'_m(1) \ldots\; y'_m(M-1)\; y'_m(M), \ldots\; y'_m(N-1)$ (4 .3.11)

Bởi vì DFT và IDFT được sử dụng ở đây chỉ có độ dài của chuỗi đầu vào cho nên theo kết luận trong 4.3.1, M-1 điểm đầu tiên của dãy kết quả này sẽ bị loại bỏ. L điểm cuối cùng của dãy $Y'_m(n)$ sẽ hoàn toàn trùng với các giá trị tương ứng được tính theo tổng chập tuyến tính, nghĩa là:

$y'_m(n) = y_m(n)$, n = M,M+1, ..., N-1 (4.3.12)

Việc phân đoạn dữ liệu đầu vào và sắp xếp các khối dữ liệu đầu ra tương ứng với chúng để nhân được dãy dữ liệu đầu ra kết quả được mô tả trên hình 4.10.

4.3.2.2. Phương pháp cộng xếp chồng

Theo phương pháp này, kchs thước của mỗi dãy thành phần là L điểm và độ dài của Dft và IDFt là N = L+M-1. Đối với mỗi dãy thành phần này ta đưa thêm

M-1 mẫu không và tính DFT –N điểm. Như vậy các dãy thành phần được biểu diễn như sau:

$$x_1(n) = \{x(0), x(1),..., x(L-1), 0,0,...,0\} \quad (4.3.13)$$

$$x_2(n) = \{x(L), x(L+1),..., x(2L-1), 0,0,...,0\} \quad (4.3.14)$$

$$x_3(n) = \{x(2L), ..., x(3L-1), 0,0,...,0\} \quad (4.3.15)$$

và v.v.. Hai DFT – N điểm được nhân với nhau để nhận được:

$$Y_m(k) = H(k)\, X_m(k), \quad k = 0,1,...,N-1 \quad (4.3.16)$$

DFTlà phương pháp gián tiếp để tính đầu ra của bộ lọc tuyến tính và cho đến thời điểm này có thể thấy phương pháp tương đối phức tạp do một loạt các thao tác cần phải được thực hiện như dãy đầu vào cần phải được chuyển đổi sang miền tần số thông qua DFt, nhân kết quả nhận được với DFt của bộ lọc FIR và sau đó để nhận được kết quả cuối cùng lại phải thực hiện biến đổi ngược IDFT sang miền thời gian. Mặc dù vậy phương pháp này lại cho phép sử dụng một thuật toán rất hiệu quả (biến đổi nhanh Fourier). So với việc xử lý trực tiếp bộ lọc FIR trong miền thời gian, các thuật toán biến đổi nhanh chỉ đòi hỏi rất ít các phép toán để có thể nhân được dãy đầu ra và dây chuyền chính là nguyên nhân chủ yếu dẫn đến việc sử dụng rộng rãi phương pháp DFt trên thực tế. Các thuật toán biến đổi nhanh Fourier sẽ được giới thiệu trong chương VI

4.4. PHÂN TÍCH TÍN HIỆU TRONG MIỀN TẦN SỐ BẰNG DFT

Ta đã biết rằng một tín hiệu có độ dài hữu hạn N có thể được biểu diễn một cách đầy đủ thông qua phép biến đổi Fourier rời rạc DFt. Tuy vậy, khi các tín hiệu có độ dài quá lớn hoặc vô hạn thì việc xác định biến đổi Fourier rời rạc của nó là không thể thực hiện được. Trong trường hợp này, ta cần lấy một đoạn thích hợp nhất của tín hiệu với một độ dài cho phép để thực hiện biến đổi DFT. Khi đó rõ ràng rằng phương pháp DFt chỉ cho ra một kết quả xấp xỉ của tín hiệu. ậ đây, ta xem xét vấn đề hạn chế độ dài của tín hiệu và các hiệu ứng nải sinh do việc sử dụng phương pháp DFT đối với dãy đã được hạn chế về độ dài.

Nếu tín hiệu cần phân tích là tín hiệu tương tự thì trước tiên tín hiêu này cần được chuyền qua bộ lọc để loại bỏ các nhiễu (hoặc các thành phần của tần số không cần thiết) và sau đó được lấy mẫu với tần số $F_s \geq 2B$, với B là độ rộng của dải thông. Như vậy tần số cao nhất của hai thành phần có chứa tín hiệu khi lấy mẫu là $F_s/2$. Để có thể hạn chế độ dài của tín hiệu đã được lấy mẫu, giả xử chỉ xét tín hiệu trong một khoảng thời gian hữu hạn $T_0 = LT$, trong đó L là lượng mẫu và T là khoảng thời gian gữa hai lần lấy mẫu (chu kỳ lấy mẫu). Khoảng thời gian lấy mẫu này về nguyên tắc sẽ hạn chế độ phân giải về tần số ; nghĩa là nó sẽ hạn chế khả năng phân biệt đối với các thành phần tần số mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $1/T_0 = 1/LT$ trong miền tần số.

Giả sử rằng {x(n)} là tín hiệu cần phân tích. Có thể thấy việc giới hạn độ dài của dãy {x(n)} với L mẫu trong khoảng $0 \leq n \leq L-1$ sẽ tương đương với việc nhân tín hiệu này với một hàm cửa sổ hình chữ nhật (gọi tắt là hàm cửa sổ) với độ dài L. Nghĩa là:

$$X(n) = x(n)\,\omega(n)$$

Trong đó $\omega(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

Hãy xét một trường hợp đơn giản khi dãy x(n) là dãy tín hiệu hình sin:

X(n)=

IV. TÍCH CHẬP NHANH (TÍCH CHẬP PHÂN ĐOẠN)

a. Tổng quan

Để ứng dụng DFT vào việc tính tích chập không tuần hoàn, tức tích chập tuyến tính, trước hết cần phân biệt hai trường hợp:

Trường hợp thứ nhất khi các dãy chập với nhau có chiều dài gần bằng nhau và ngắn.

Trường hợp thứ hai là khi các dãy chập với nhau và có chiều dài khác xa nhau.

Trường hợp thứ nhất chính là trường hợp đã được nghiên cứu ở phần trên. Nhưng trong thực tế, ta thường gặp trường hợp thứ hai. Việc tính toán DFT của dãy có chiều dài quá lớn sẽ bị hạn chế bởi vấn đề dung lượng bộ nhớ của máy tính điện tử và thời gian tính toán không đảm bảo. Hơn nữa, để có được mẫu đầu tiên của kết quả ta phải đợi đến khi kết thúc quá trình tính toán.

Để giải quyết các vấn đề trên, chúng ta phải chia quá trình tính toán ra thành nhiều giai đoạn. Có hai phương pháp gồm các nội dung chính:

- Chia dãy thành nhiều dãy con.
- Chập từng dãy con một
- Tổ hợp các kết quả thành phần.

Giả sử dãy x(n) có chiều dài N, dãy h(n) có chiều dài M và N >> M. Khi đó chậph của x(n) và h(n) là y(n) sẽ có chiều dài N+ M - 1. Nếu N rất lớn thì ta không thể dùng DFT để tính trực tiếp tích chập này được. Vì thế, nếu muốn dùng DFT ta phải phân dãy x(n) ra làm nhiều đoạn nhỏ.

b. Phương pháp 1: Cộng xếp chồng

Giả sử ta cần tính tích chập tuyến tính

y(n) = x(n)*h(n)

L[x(n)] = N, L[h(n)] = M và N >> M.

Dãy x(n) được coij là tổng của các dãy thành phần $x_i(n)$, mà $L[x_i(n)] = N_1$. Tức là:

$$x(n) = \sum_i x_i(n) \tag{4.4.1}$$

với
$$x_i(n) = \begin{cases} x(n) & iN_1 \le n \le (i+1)N_1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} y(n) = h(n) * x(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\left[\sum_i x_i(n-m)\right] \\ &= \sum_i \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x_i(n-m) = \sum_i h(n) * x_i(n) = \sum_i y_i(n) \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

khi đó, $y_i(n) = h(n)*x_i(n)$ gọi là tích chập phân đoạn, đây là tích chập tuyến tính, nếu dùng DFT thì mỗi tích chập phân đoạn này ta phải tính DFT với chiều dài N_1+M-1. Tức là ta phải tính tích chập vòng với chiều dài $2(N_1+M-1)$: