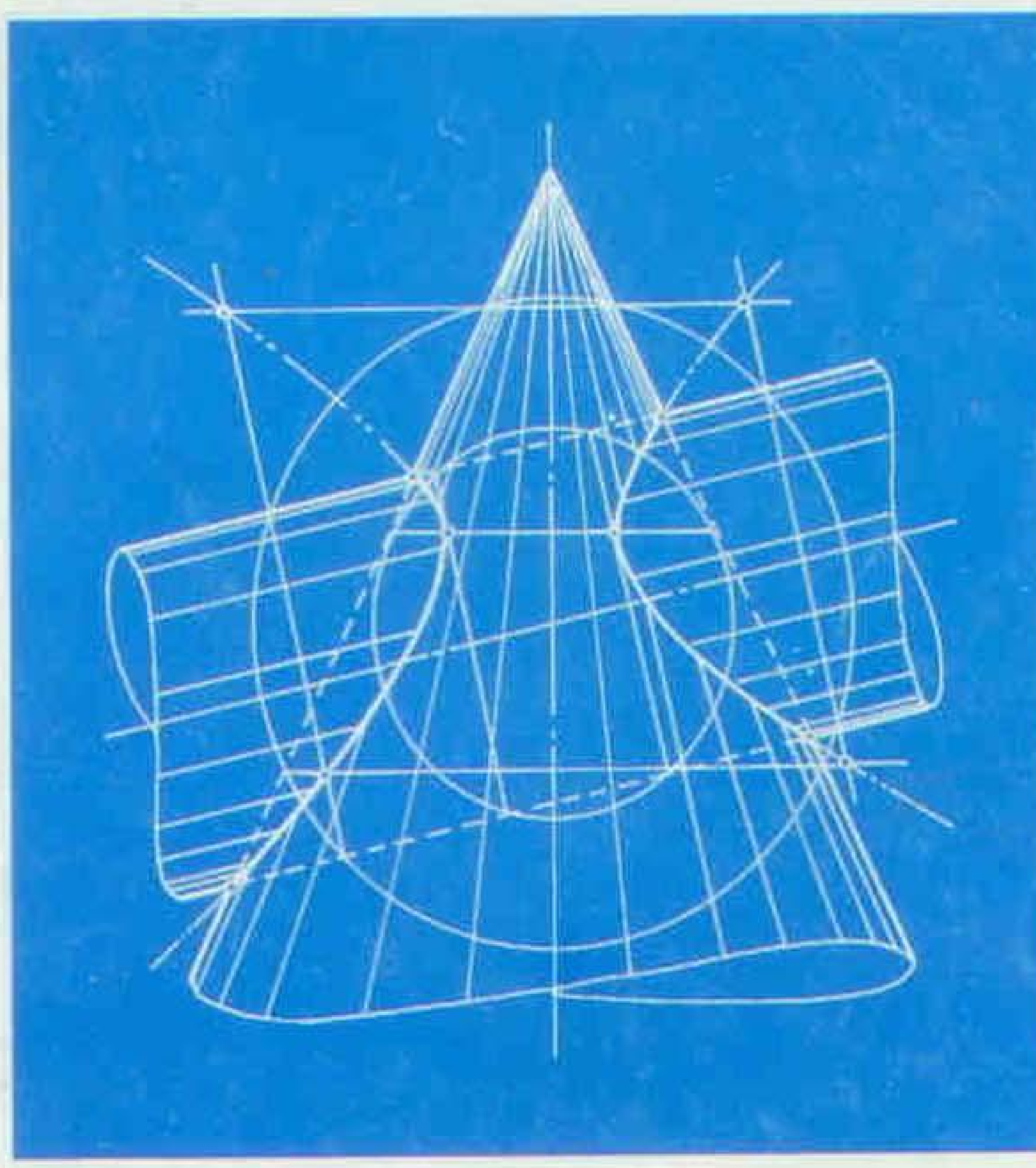
NGUYỄN QUANG CỰ - NGUYỄN MẠNH DŨNG - VŨ HOÀNG THÁI

BÀI TẬP HÌNH HỌC HỌA HÌNH



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách "BÀI TẬP HÌNH HỌC HỌA HÌNH" được biên soạn theo chương trình CCGD của Bộ Giáo dục và Đào tạo, phù hợp với nội dung của giáo trình "Hình học họa hình" (Tập 1) do các tác giả Nguyễn Đình Điện và Đỗ Mạnh Môn biên soạn và do Nhà xuất bản Giáo dục tái bản lần thứ năm năm 1995.

Cuốn sách này được dùng làm tài liệu học tập môn học "Hình học họa hình" cho sinh viên các trường đại học kỉ thuật.

Nội dung của cuốn sách gồm những bài tập của phần "Phép chiếu", phần "Phương pháp hai hình chiếu thẳng góc" và phần "Hình chiếu trục đo".

Để giúp bạn đọc giải các bài toán hình họa được dễ dàng hơn, trong phần I ngoài các đề bài tập, ở đầu mỗi chương chúng tôi có nêu một số ví dụ kèm bài giải và một số điểm mà bạn đọc cần lưu ý., Trong phần II có lời hướng dẫn cách giải một số bài tập để bạn đọc tham khảo. Các hướng dẫn này có tính chất gợi ý, không nên xem đó là hướng giải quyết duy nhất của bài tập. Trong phần III chúng tôi giới thiệu một số bài toán tổng hợp và hệ thống các bài tập lớn nhằm giúp các bạn đọc hệ thống hóa lại các kiến thức của từng chương cũng như của toàn bộ chương trình. Các bài toán tổng hợp có thể giải bằng bất kì phương pháp nào đã được trình bày trong giáo trình "Hình học họa hình".

Việc biên soạn cuốn sách được phân công như sau :

Nguyễn Quang Cự : soạn các chương 1, 2, 3 và phần hướng dẫn tương ứng.

Nguyễn Mạnh Dũng soạn các chương 4, 5, 6, 8, 9 và phần hướng dẫn tương ứng.

Vũ Hoàng Thái soạn các chương 7, 10, 11, 12 và phần hướng dẫn tương ứng.

Phần III do các tác giả soạn chung.

Chủ biên : Nguyễn Quang Cự.

Trong quá trình biên soạn chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến đóng góp của các đồng nghiệp. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn và mong nhận được nhiều ý kiến phê bình của bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong lần tái bản.

CÁC TÁC GIẢ

CÁC KÍ HIỆU DÙNG TRONG SÁCH

Các mặt phẳng hình chiếu :

- Mặt phẳng hình chiếu đứng : $\mathcal{P}^1$
- Mặt phẳng hình chiếu bằng : $\mathcal{P}^2$
- Mặt phẳng hình chiếu cạnh : $\mathcal{P}^3$

Các trục hình chiếu : x, y, z

Các điểm : A, B, C... hoặc 1, 2, 3 ...

Các đường (thẳng hoặc cong) : a, b, c...

Các mặt phẳng : ($\mathcal{P}$), ($\mathcal{Q}$), ($\mathcal{R}$) ...

Các góc phẳng : α, β, γ...

Các mặt cong : $\sum$, σ,Ω...

Hình chiếu của các yếu tố hình học :

- Hình chiếu đứng : dùng chỉ số 1
  Thí dụ : A_1, B_1 ; a_1, b_1 ; $\mathcal{Q}_1$; $\mathcal{R}_1$...
- Hình chiếu bằng : dùng chỉ số 2
  Thí dụ : A_2, B_2 ; a_2, b_2 ; $\mathcal{Q}_2$; $\mathcal{R}_2$ ...
- Hình chiếu cạnh : dùng chỉ số 3
  Thí dụ : A_3, B_3 ; a_3, b_3 ; $\mathcal{Q}_3$, $\mathcal{R}_3$ ...

Các vết của mặt phẳng :

- Vết đứng : v^1. Thí dụ $v^1_{\mathcal{P}}$; $v^1_{\mathcal{Q}}$; $v^1_{\mathcal{R}}$...
- Vết bằng : v^2. Thí dụ $v^2_{\mathcal{P}}$; $v^2_{\mathcal{Q}}$; $v^2_{\mathcal{R}}$...
- Vết cạnh : v^3. Thí dụ $v^3_{\mathcal{P}}$; $v^3_{\mathcal{Q}}$; $v^3_{\mathcal{R}}$...

Vuông góc : $\perp$

Song song : //

Thuộc : $\in$

Giao : $\cap$

Trùng nhau : $\equiv$

Kết quả của sự giao nhau : = Thí dụ : $K = d \cap \mathcal{P}$

(K là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{P}$).

PHẦN I

CÁC THÍ DỤ VÀ ĐỀ BÀI TẬP

CHƯƠNG 1

PHÉP CHIẾU

1.1. Các bài toán về phép chiếu. Có thể chia thành ba dạng chính sau đây :

+ Các bài toán về tính chất của phép chiếu hoặc về hình chiếu của các yếu tố hình học.

+ Các bài toán về xác định phép chiếu.

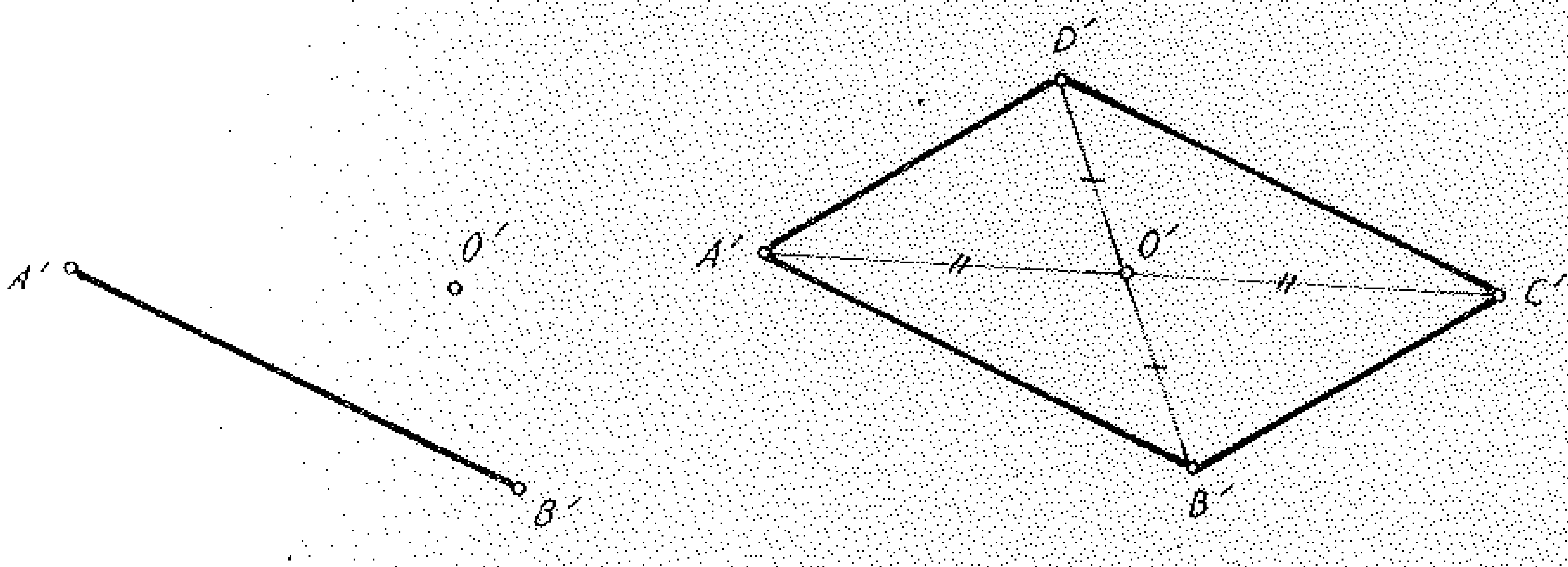
+ Các bài toán được giải bằng cách ứng dụng phép chiếu.

Thí dụ 1 : Cho hình chiếu song song trên một mặt phẳng của tâm O và hai đỉnh A, B của hình bình hành ABCD là O', A' và B', (Hình 1- 1a). Vẽ hình chiếu của hình bình hành trên mặt phẳng đó.

Giải: Vì tâm của hình bình hành chia đôi hai đường chéo của nó và phép chiếu song song bảo tồn tỉ số đơn của 3 điểm thẳng hàng nên dễ dàng vẽ được hình chiếu của hai đỉnh C và D là C' và D' với A'O' = O'C' và B'O' = O'D', (Hình 1- 1b).

Ngoài ra vì phép chiếu song song bảo tồn tính song song của hai đường thẳng nên sau khi vẽ được hình chiếu của đỉnh C là C' theo cách nói trên, có thể suy ra hình chiếu của đỉnh thứ tư là D' bằng cách qua A' và C' lần lượt vẽ các đường thẳng song song với B'C' và B'A'. Giao điểm của hai đường thẳng này là điểm D' cần vẽ.

Thí dụ 2: Cho nguồn sáng S, mặt phẳng nằm ngang $\mathcal{P}$, mặt phẳng nghiêng $\mathcal{Q}$ và một cây sào thẳng đứng AB có B ∈ ($\mathcal{P}$) (Hình 1-2a). Vẽ bóng của cây sào AB đổ lên ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) do nguồn sáng S gây ra biết rằng hình chiếu theo phương thẳng đứng của S lên ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) lần lượt là S_1 và S_2.



a) b)

Hình 1- 1

Giải: Giả thiết rằng ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) là các mặt phẳng không trong suốt, bóng đổ của cây sào AB lên ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) do nguồn sáng S gây ra có thể xem là hình chiếu của AB lên phần thấy của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) từ tâm chiếu S, (Hình 1-2b).

Vì $B \in (\mathcal{P})$ nên hình chiếu của nó trên $(\mathcal{P})$ là $B' \equiv B$. Mặt khác S_1 được xem là hình chiếu của điểm vô tận của AB từ S lên $(\mathcal{P})$. Do đó hình chiếu của AB lên $(\mathcal{P})$ là đoạn B'M' thuộc S_1B', ở đó M' là giao điểm của S_1B' với giao tuyến của $(\mathcal{P})$ và $(\mathcal{Q})$.

Hình chiếu của AB lên $(\mathcal{Q})$ là đoạn M'A', ở đó $A' = SA \cap S_2M'$.

Vậy bóng đổ của sào AB lên $(\mathcal{P})$ và $(\mathcal{Q})$ là đoạn thẳng gẫy khúc A'M'B' trong đó A'M' là bóng của đoạn AM đổ lên $(\mathcal{Q})$ và M'B' là bóng của đoạn MB đổ lên $(\mathcal{P})$.

Thí dụ 3: Cho hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ cắt nhau theo đường thẳng g, 3 điểm A, B, C bất kì thuộc $(\mathcal{P})$ và 3 đường thẳng a, b, c bất kì thuộc $(\mathcal{Q})$, (Hình 1-3a).

Xác định tâm chiếu S sao cho hình chiếu của A, B, C từ S lên $(\mathcal{Q})$ lần lượt thuộc a, b, c.

Giải: Gọi : $H = g \cap a$; $I = g \cap b$ và $K = g \cap c$, (Hình 1-3b).

Xét hai mặt phẳng (A, a) và (B, b). Chúng có hai điểm chung là :

$$L' = a \cap b$$

và $$L = AH \cap BI$$

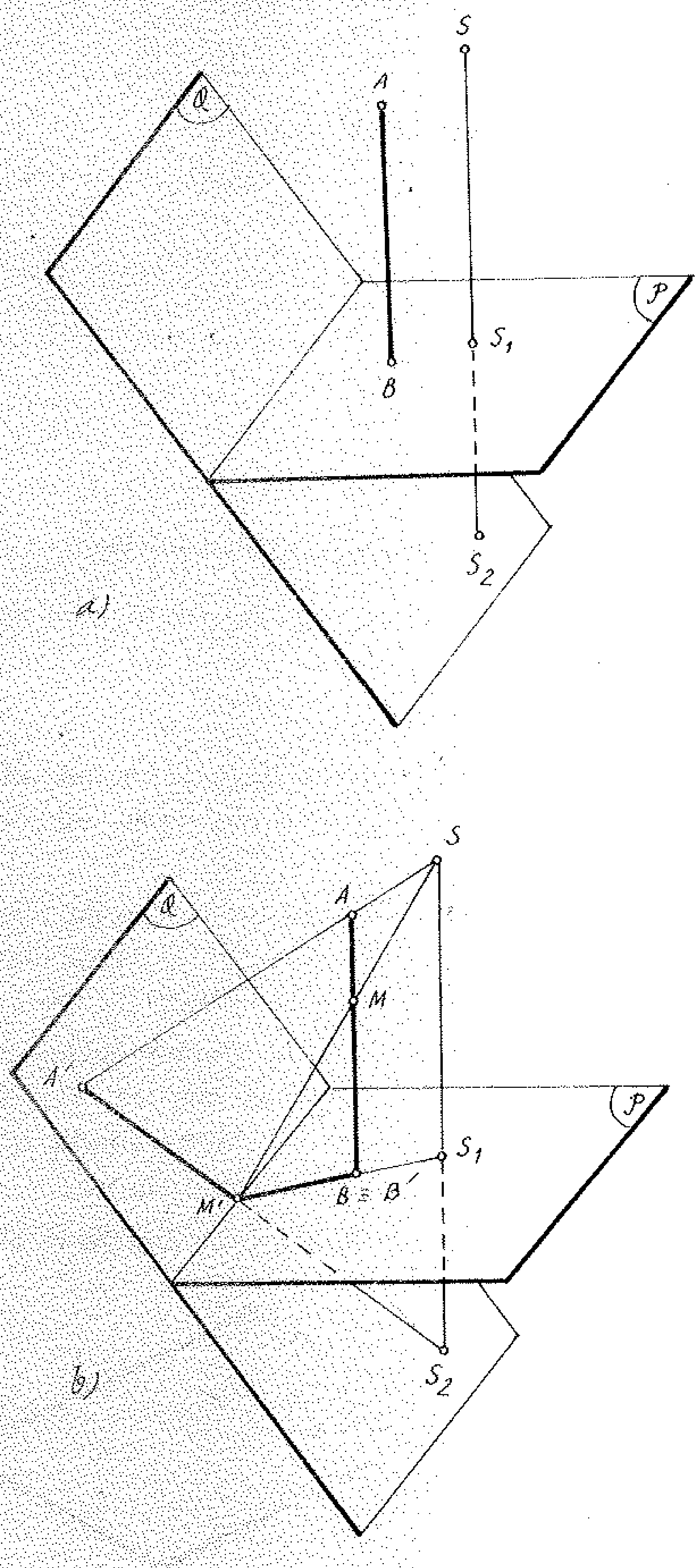
trong đó : $AH = (\mathcal{P}) \cap (A, a)$

$$BI = (\mathcal{P}) \cap (B, b)$$

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (A, a) và (B, b) là đường thẳng LL'. Tương tự như vậy, giao tuyến của hai mặt phẳng (A, a) và (C, c) là đường thẳng NN', trong đó :

$$N' = a \cap c.$$

và $$N = AH \cap CK.$$



Hình 1-2

Hai đường thẳng LL' và NN' cùng thuộc mặt phẳng (A, a), chúng cắt nhau tại điểm S là tâm chiếu cần xác định.

Dễ dàng thấy rằng giao tuyến của hai mặt phẳng (B, b) và (C, c) là MM' cũng đi qua S, nói khác đi S là điểm chung của ba mặt phẳng (A, a), (B, b) và (C, c).

Thí dụ 4: Cho mặt chóp SABC và đường thẳng d, (Hình 1-4). Vẽ giao điểm I của d với mặt bên (SAB) của chóp biết rằng d cắt các mặt (SBC) và (ABC) lần lượt tại K và L.

Giải: Dùng phép chiếu xuyên tâm với tâm chiếu là đỉnh S và mặt phẳng hình chiếu là mặt đáy (ABC) của chóp.

Trong phép chiếu này các mặt bên (SAB) và (SBC) của chóp lần lượt chiếu thành các đoạn thẳng AB và BC ; đường thẳng d chiếu thành d' ≡ K'L', trong đó :

$$K' = SK \cap BC \text{ và } L' \equiv L$$

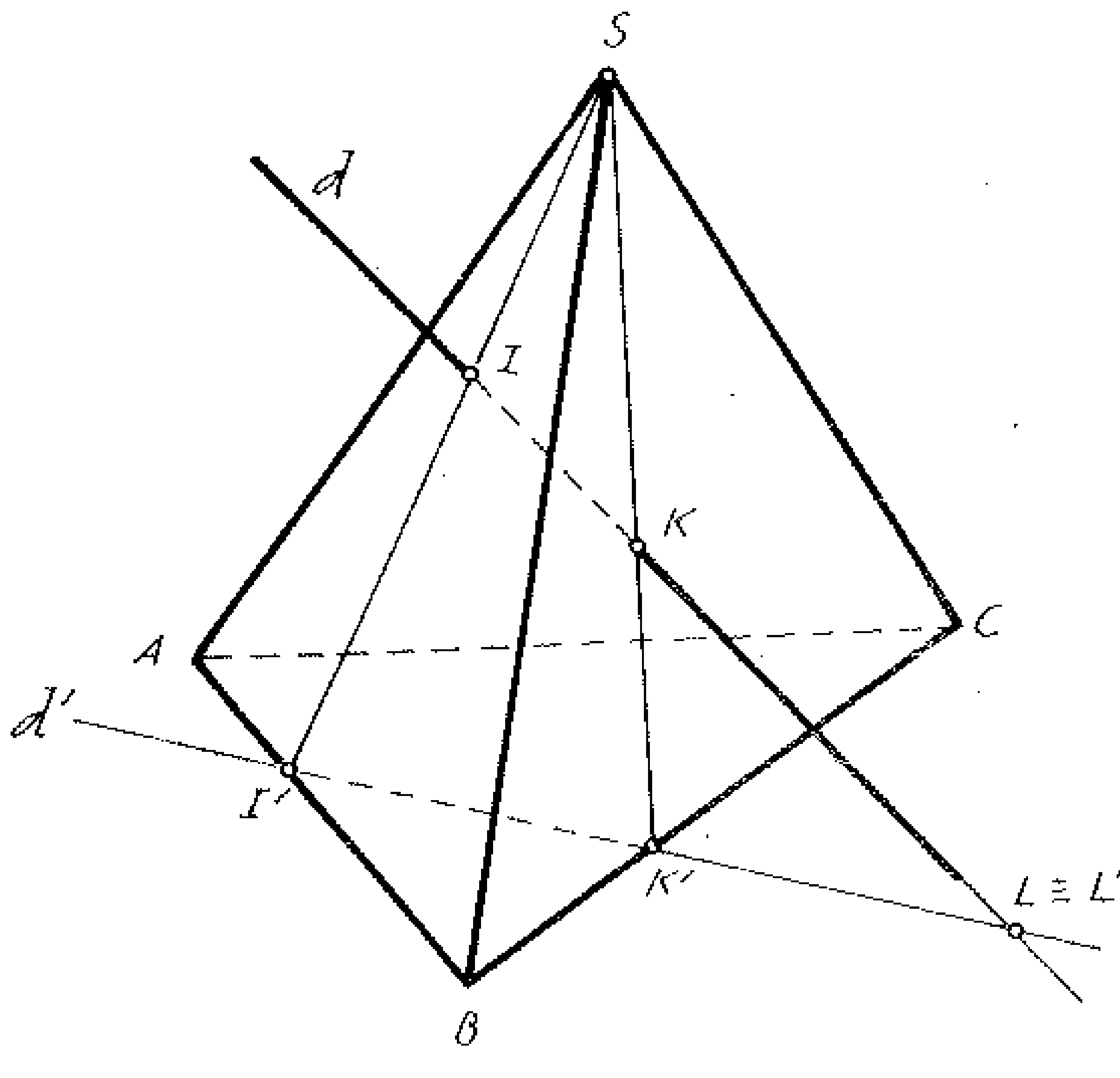
Gọi I' = d' ∩ AB, I' chính là hình chiếu của giao điểm I = d ∩ (SAB).

Bằng phép chiếu ngược lại suy ra điểm I cần vẽ :

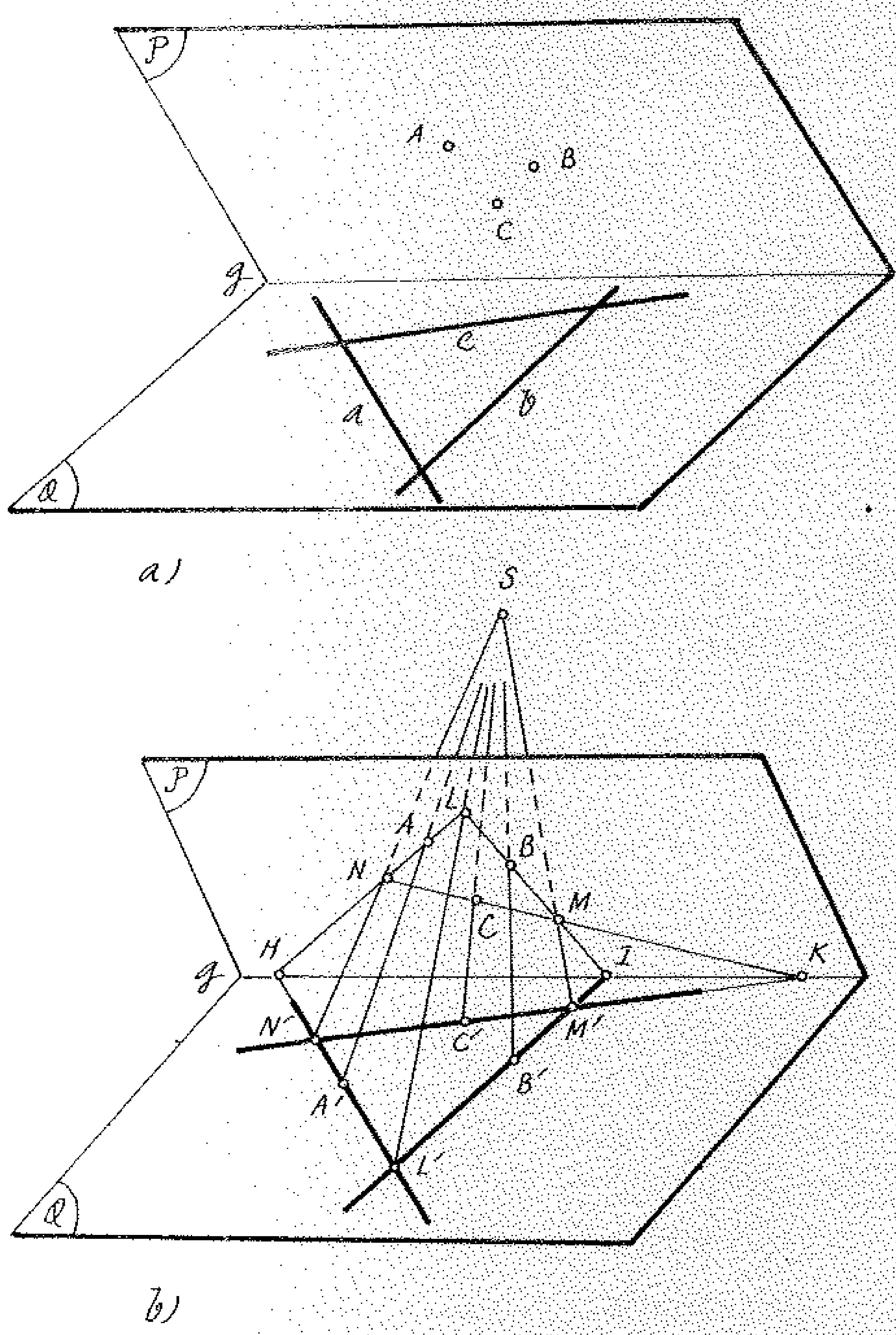
$$I = SI' \cap d.$$

Thí dụ 5: Vẽ giao tuyến của mặt chóp SABC và mặt lăng trụ DEF.HIK, có các đáy ABC và DEF cùng nằm trong một mặt phẳng $\mathcal{P}$ cho biết hình chiếu của đỉnh chóp S theo hướng song song với các cạnh của lăng trụ lên mặt phẳng $\mathcal{P}$ là điểm S', (Hình 1 - 5).

Giải: Có thể vẽ giao tuyến của hai mặt đã cho bằng cách tìm giao điểm các cạnh của mặt này với mặt kia. Các giao điểm đó có thể xác định nhờ phép chiếu song song có hướng chiếu song song với các cạnh bên của lăng trụ và mặt phẳng hình chiếu là mặt phẳng ($\mathcal{P}$) chứa đáy của hai mặt.



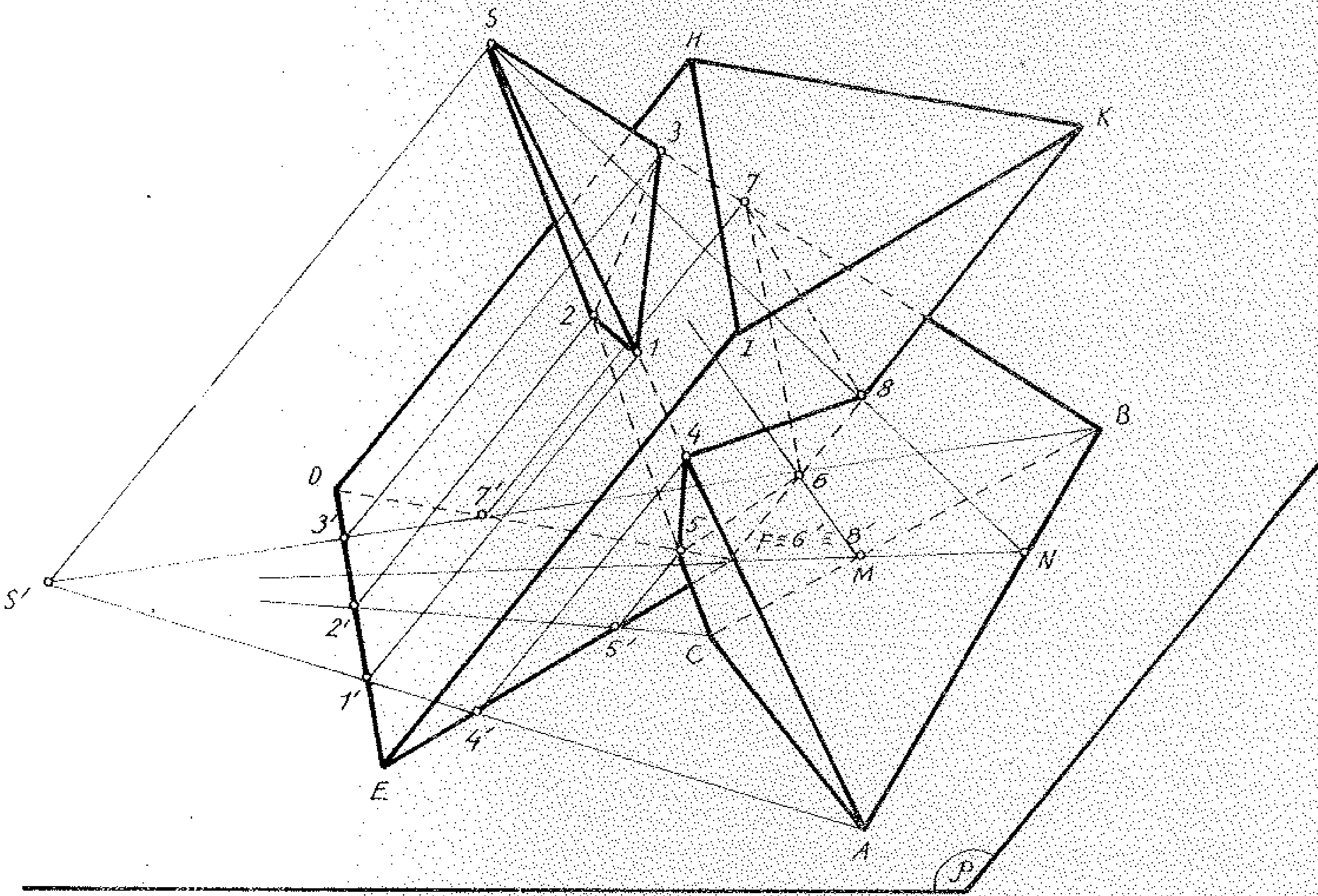
Hình 1-4



Hình 1-3

Trong phép chiếu này ba mặt bên của lăng trụ được chiếu thành ba cạnh của tam giác đáy DEF, ba cạnh bên SA, SB, SC của chóp được chiếu thành các đoạn thẳng S'A, S'B, S'C.

Trên hình 1-5, nhờ hình chiếu trên mặt phẳng đáy chung có thể nhận thấy ngay rằng mặt chóp xuyên vào mặt lăng trụ tại hai mặt bên (EFKI) và (FDHK) và xuyên ra khỏi lăng trụ ở mặt bên (DEIH), trong đó các điểm 1', 2', 3' và 4', 5', 7' là hình chiếu của các giao điểm của ba cạnh bên của chóp với các mặt bên của lăng trụ ; các điểm 6', 8' là hình chiếu của giao điểm của cạnh FK của lăng trụ với các mặt bên của chóp.



Hình 1-5

Bằng phép chiếu song song theo hướng ngược lại ta xác định được các giao điểm 1, 2, 3 và 4, 5, 7 của các cạnh của chóp với các mặt bên của lăng trụ. Để xác định các điểm 6 và 8, ta gắn hình chiếu 6' và 8' của chúng lần lượt vào hình chiếu của các đường thẳng SM và SN thuộc các mặt bên (SBC) và (SAB), ở đó S'M ≡ S'N và đi qua điểm 6' ≡ 8'≡ F.

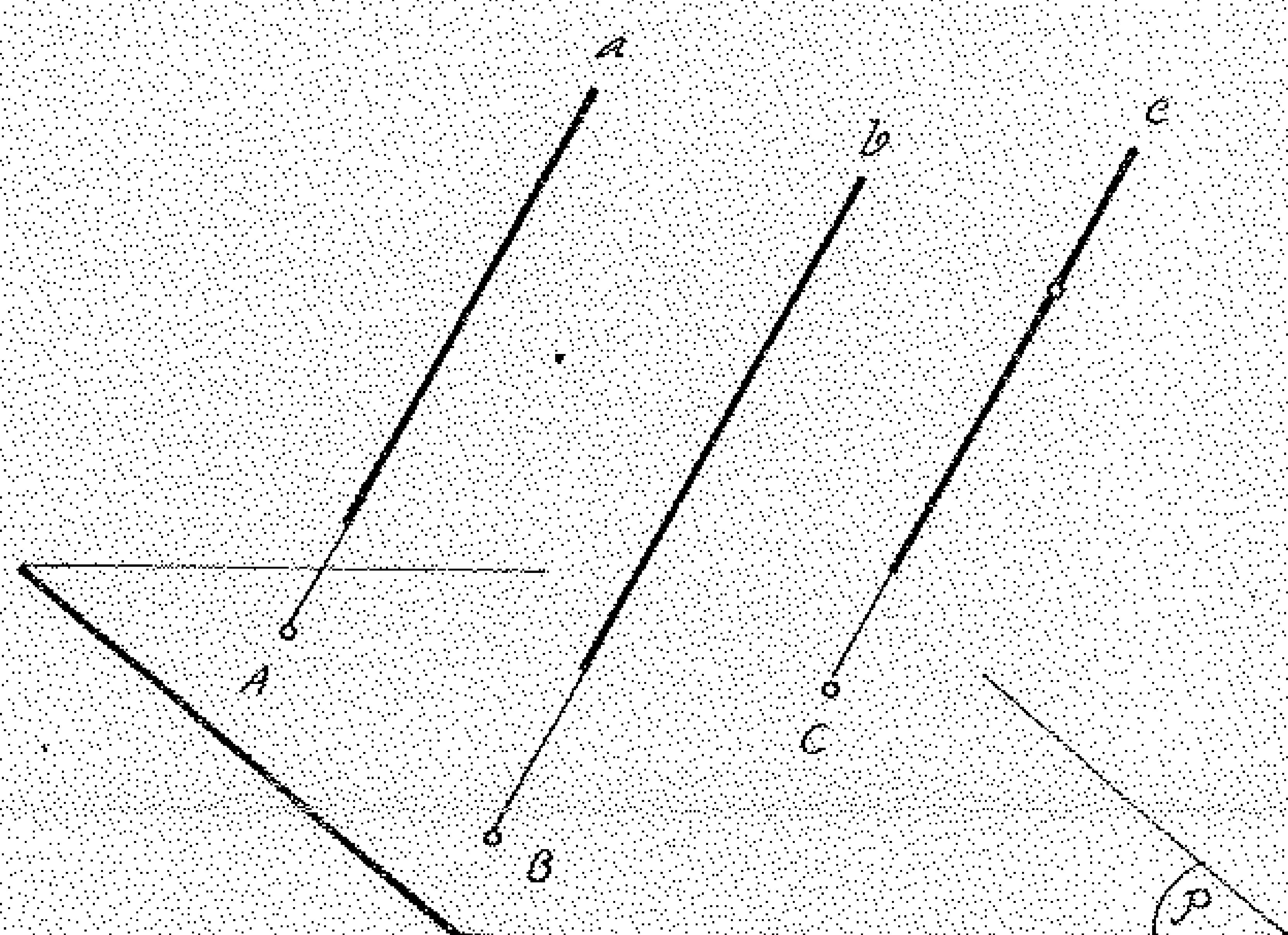
Sau cùng nối các giao điểm đã xác định được bằng các đoạn thẳng với chú ý là chỉ được nối hai điểm cùng thuộc một mặt bên của chóp và một mặt bên của lăng trụ.

1.2 Bài tập

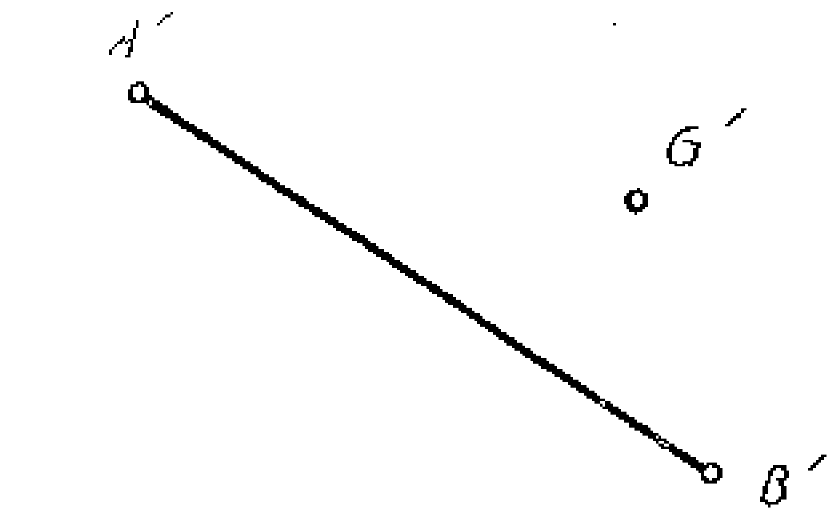
Bài 1 : Cho ba đường thẳng song song a, b, c có giao điểm với mặt phẳng (𝒫) lần lượt là A, B và C ; một điểm S ∈ c, (Hình 1-6).

Vẽ hình chiếu xuyên tâm từ S lên (𝒫) của hai đường thẳng a và b. Với vị trí nào của a, b, c đối với mặt phẳng (𝒫) thì hình chiếu của a và b song song với nhau. Khi nào các hình chiếu của a và b song song nhau ?

Bài 2 : Cho hình chiếu song song trên một mặt phẳng của trọng tâm G và của hai đỉnh A, B của tam giác ABC lần lượt là G', A' và B', (Hình 1-7). Vẽ hình chiếu của đỉnh thứ ba C của tam giác.



Hình 1-6

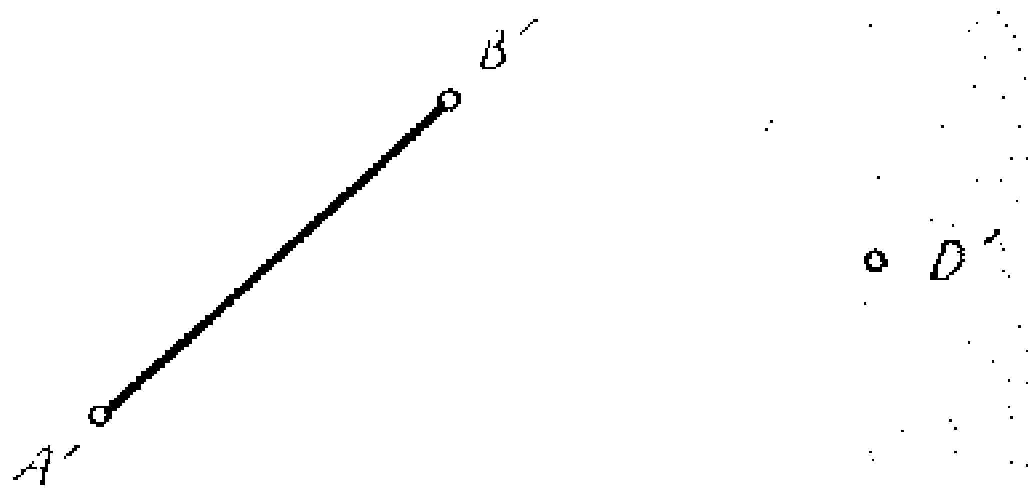


Hình 1-7

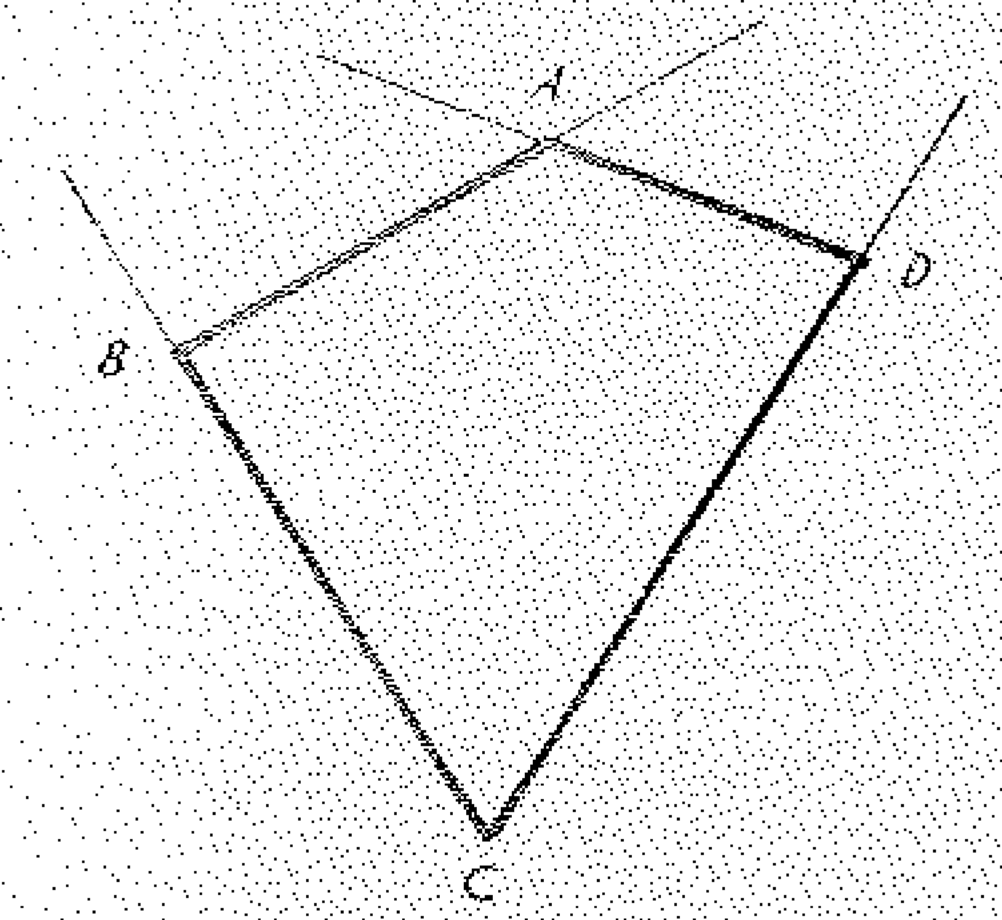
Bài 3 : Cho hình chiếu song song trên một mặt phẳng của ba đỉnh A, B và D của một hình lục giác đều ABCDEF là A', B' và D', (Hình 1-8).

Vẽ hình chiếu của hình lục giác đó trên mặt phẳng đã cho.

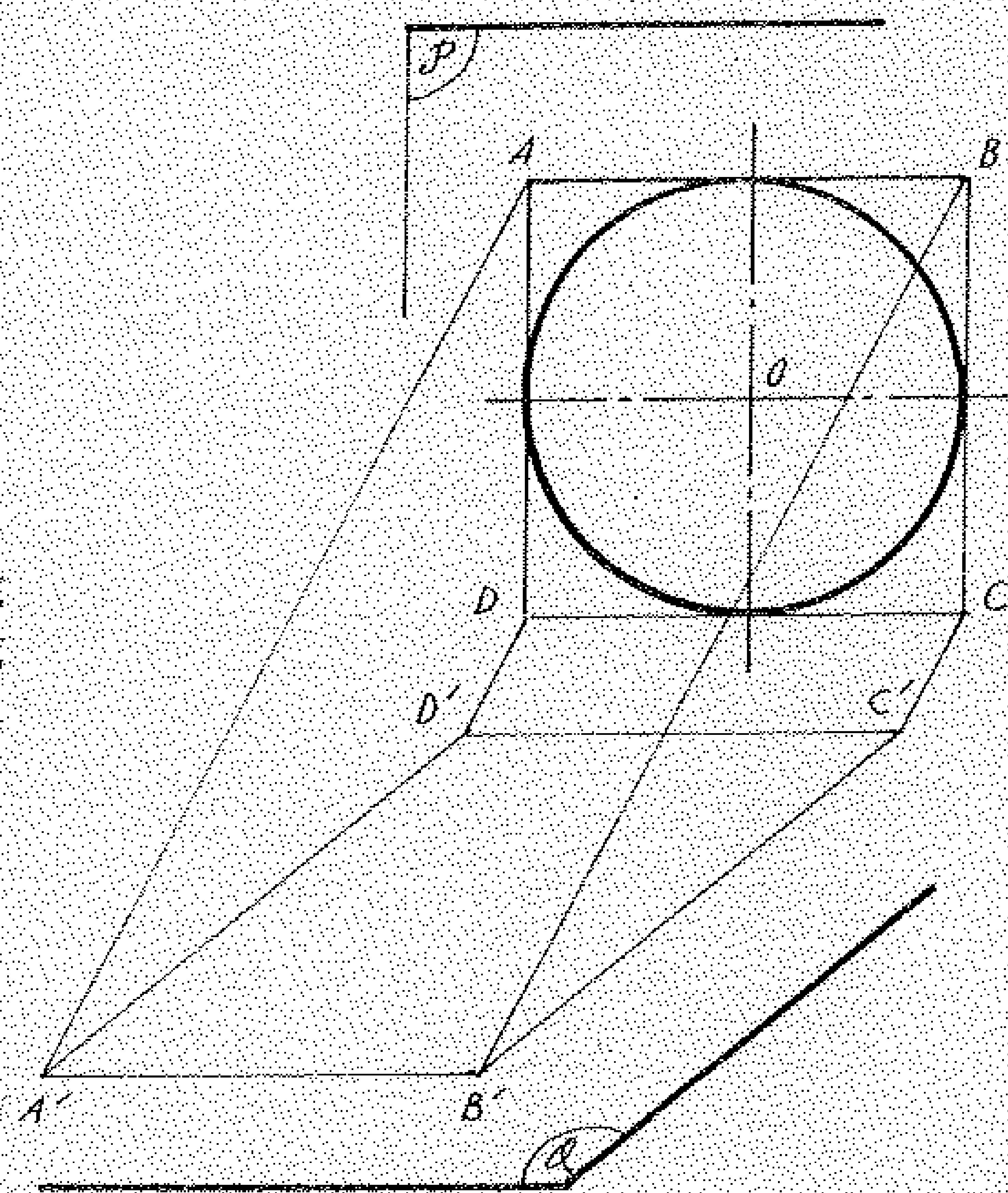
Bài 4: Cho đường tròn tâm O nội tiếp trong hình vuông ABCD nằm trong mặt phẳng $\mathcal{P}$. Vẽ hình chiếu song song của đường tròn đó trên mặt phẳng $\mathcal{Q}$, biết rằng hình chiếu của hình vuông ABCD trên ($\mathcal{Q}$) là hình bình hành A'B'C'D', (Hình 1-9).



Hình 1-8



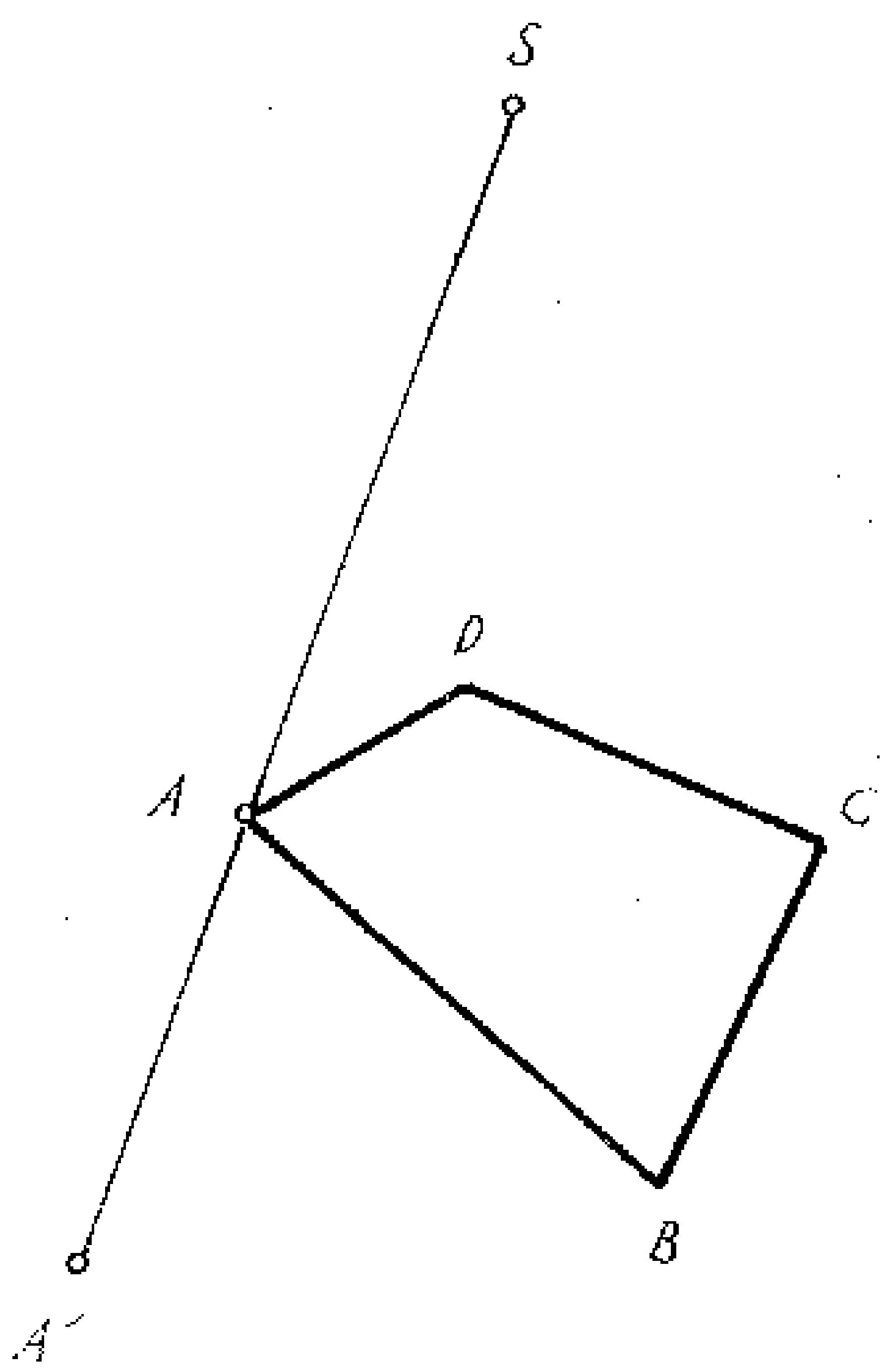
Hình 1-11



Hình 1-9

Bài 5 : Cho tứ giác phẳng ABCD, một điểm S không thuộc mặt phẳng của ABCD và một điểm A' thuộc tia SA, (Hình 1-10).

Coi A' là hình chiếu của điểm A từ tâm chiếu S lên một mặt phẳng $\mathcal{P}$ nào đó. Hãy xác định mặt phẳng $\mathcal{P}$ và vẽ hình chiếu của ABCD từ S lên ($\mathcal{P}$) biết rằng hình chiếu đó là một hình bình hành.



Hình 1-10

Bài 6 : Cho một tứ giác phẳng ABCD, (Hình 1-11). Xác định vị trí của tâm chiếu S và mặt phẳng hình chiếu $\mathcal{P}$ sao cho hình chiếu của ABCD từ S lên ($\mathcal{P}$) là :

a) Một hình bình hành

b) Một hình chữ nhật

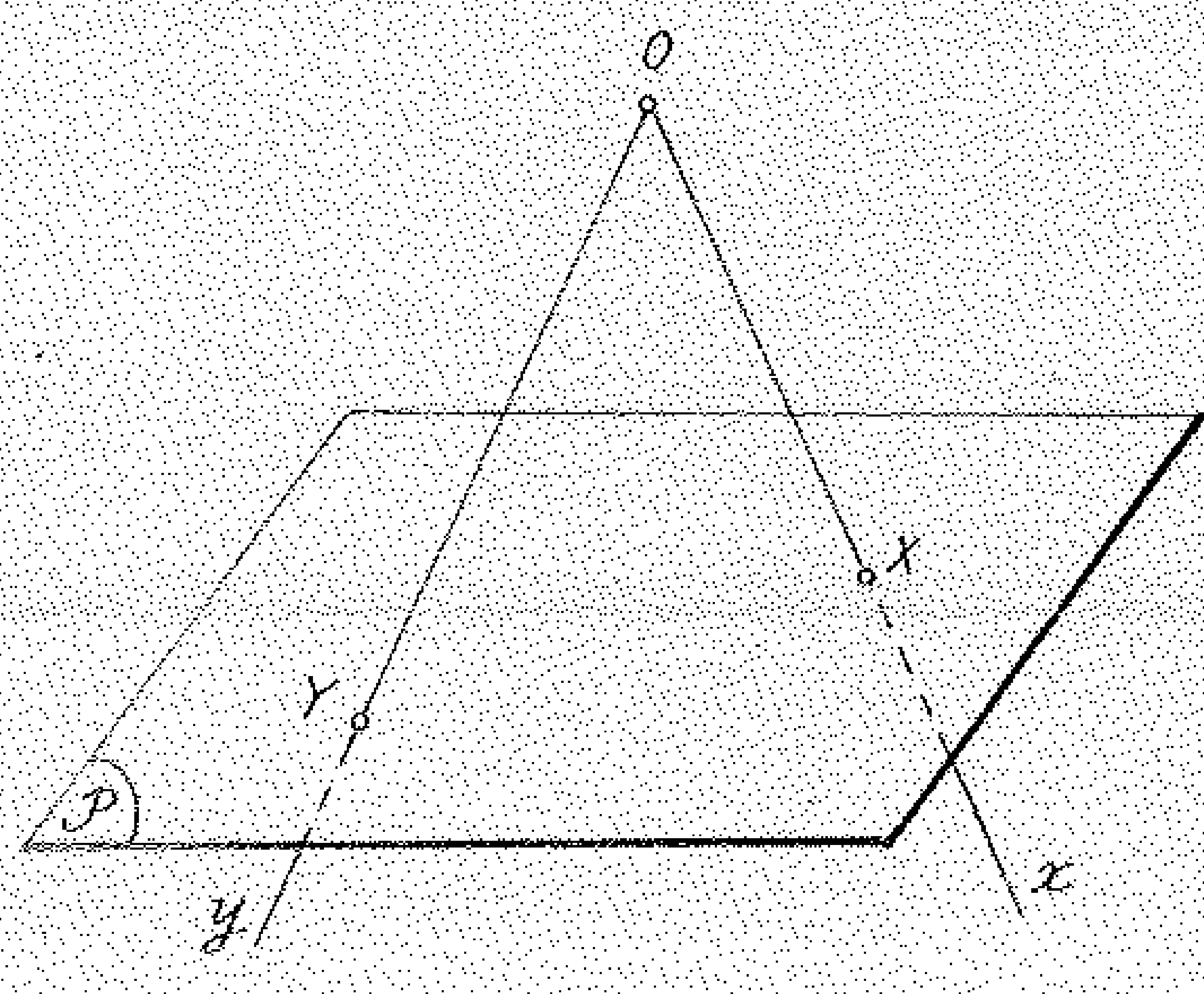
c) Một hình vuông.

Bài 7 : Cho góc $\widehat{xOy}$ và một mặt phẳng $\mathcal{P}$, (Hình 1-12). Xác định hướng chiếu s sao cho hình chiếu song song của góc $\widehat{xOy}$ theo hướng đó lên ($\mathcal{P}$) là một góc vuông.

Cũng câu hỏi như trên nhưng xét trong các trường hợp sau :

a) Góc $\widehat{xOy}$ có một cạnh song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$

b) Góc $\widehat{xOy}$ là một góc vuông có một cạnh song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$.



Hình 1-12

CHƯƠNG 2

BIỂU DIỄN ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

2.1. Điểm

– Hình biểu diễn của một điểm A trong phương pháp hai hình chiếu thẳng góc là cặp điểm (A_1, A_2) nằm trên một đường gióng vuông góc với trục hình chiếu.

– Độ cao của một điểm là khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng hình chiếu bằng. Trên hình biểu diễn, đó là khoảng cách từ hình chiếu đứng của điểm tới trục hình chiếu.

Độ cao của điểm là dương, bằng không hoặc âm tùy theo hình chiếu đứng của nó ở phía trên, thuộc hoặc ở phía dưới của trục hình chiếu.

– Độ xa của một điểm là khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng hình chiếu đứng. Trên hình biểu diễn đó là khoảng cách từ hình chiếu bằng của điểm tới trục hình chiếu.

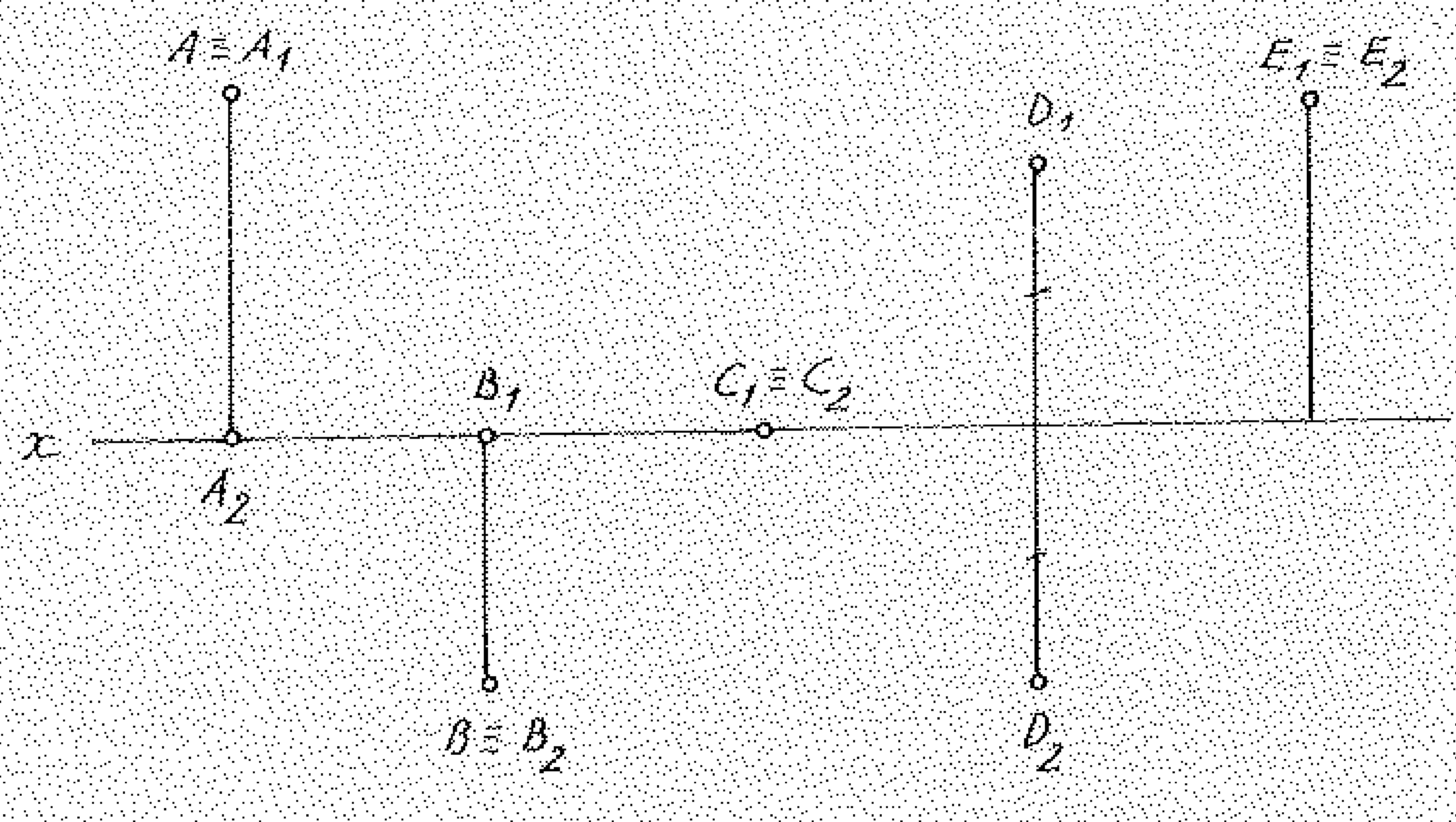
Độ xa của điểm là dương, bằng không hoặc âm tùy theo hình chiếu bằng của nó ở phía dưới, thuộc hoặc ở phía trên của trục hình chiếu.

2.1.1. Các thí dụ

Thí dụ 1: Xác định vị trí so với các mặt phẳng hình chiếu của các điểm A, B, C, D, E cho trên hình 2–1.

Giải : – Điểm A có độ xa bằng O ($A_2 \in x$) và độ cao dương nên A thuộc mặt phẳng hình chiếu đứng, ở phía trên của mặt phẳng hình chiếu bằng.

– Điểm B có độ cao bằng O ($B_1 \in x$) và độ xa dương nên B thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng ở phía trước của mặt phẳng hình chiếu đứng.



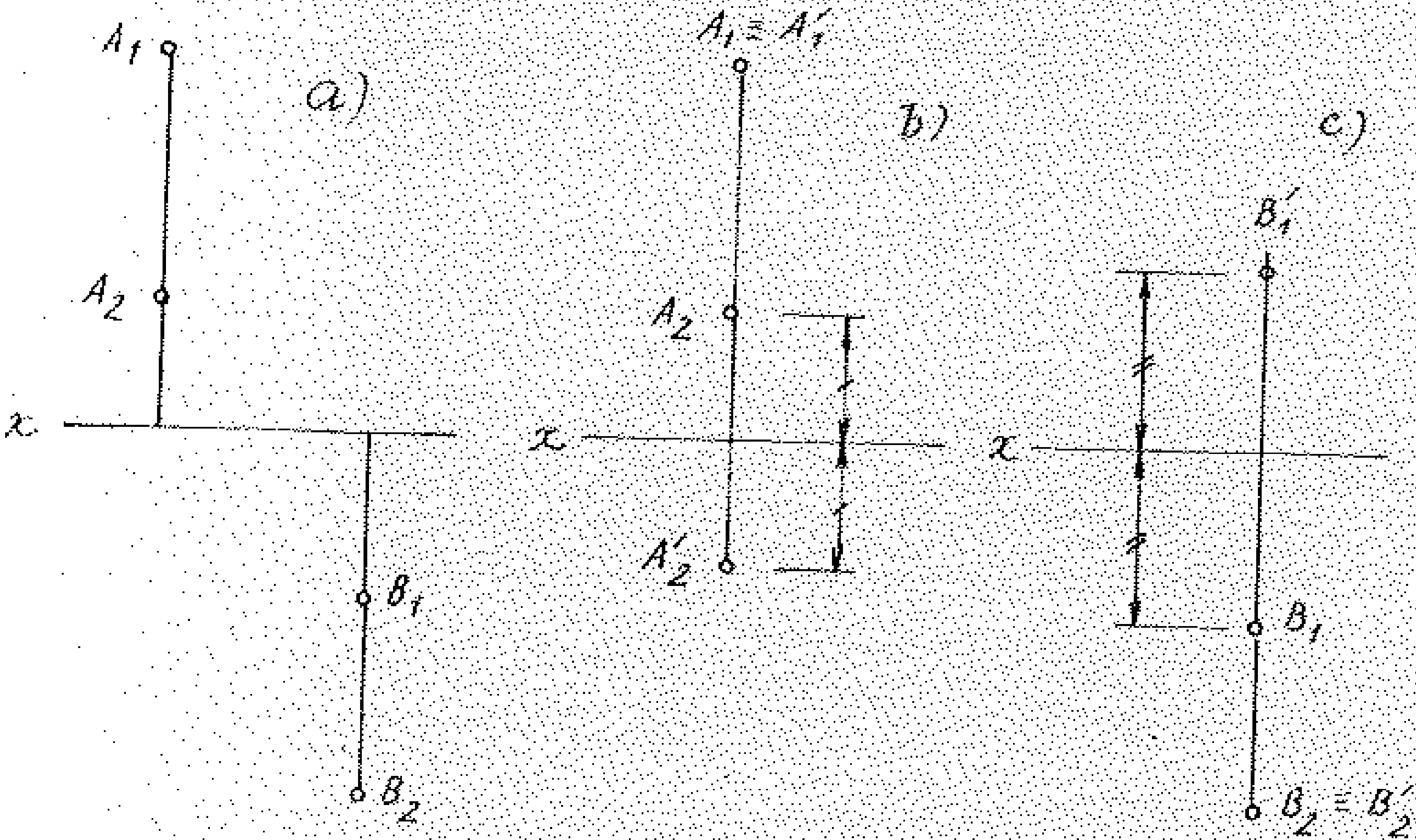
Hình 2–1

– Điểm C có độ xa và độ cao đều bằng O ($C_1 \equiv C_2 \in x$) nên C đồng thời thuộc cả hai mặt phẳng hình chiếu tức là thuộc trục hình chiếu x.

– Điểm D có độ cao và độ xa bằng nhau về trị tuyệt đối và cùng mang dấu dương nên D cách đều hai mặt phẳng hình chiếu và nằm ở góc tư thứ nhất.

– Điểm E có độ cao dương, độ xa âm nhưng bằng nhau về trị tuyệt đối nên E cách đều hai mặt phẳng hình chiếu và nằm ở góc tư thứ hai.

Thí dụ 2: Vẽ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng hình chiếu đứng và điểm B' đối xứng với điểm B qua mặt phẳng hình chiếu bằng, (Hình 2-2a).



Hình 2 - 2

Giải :

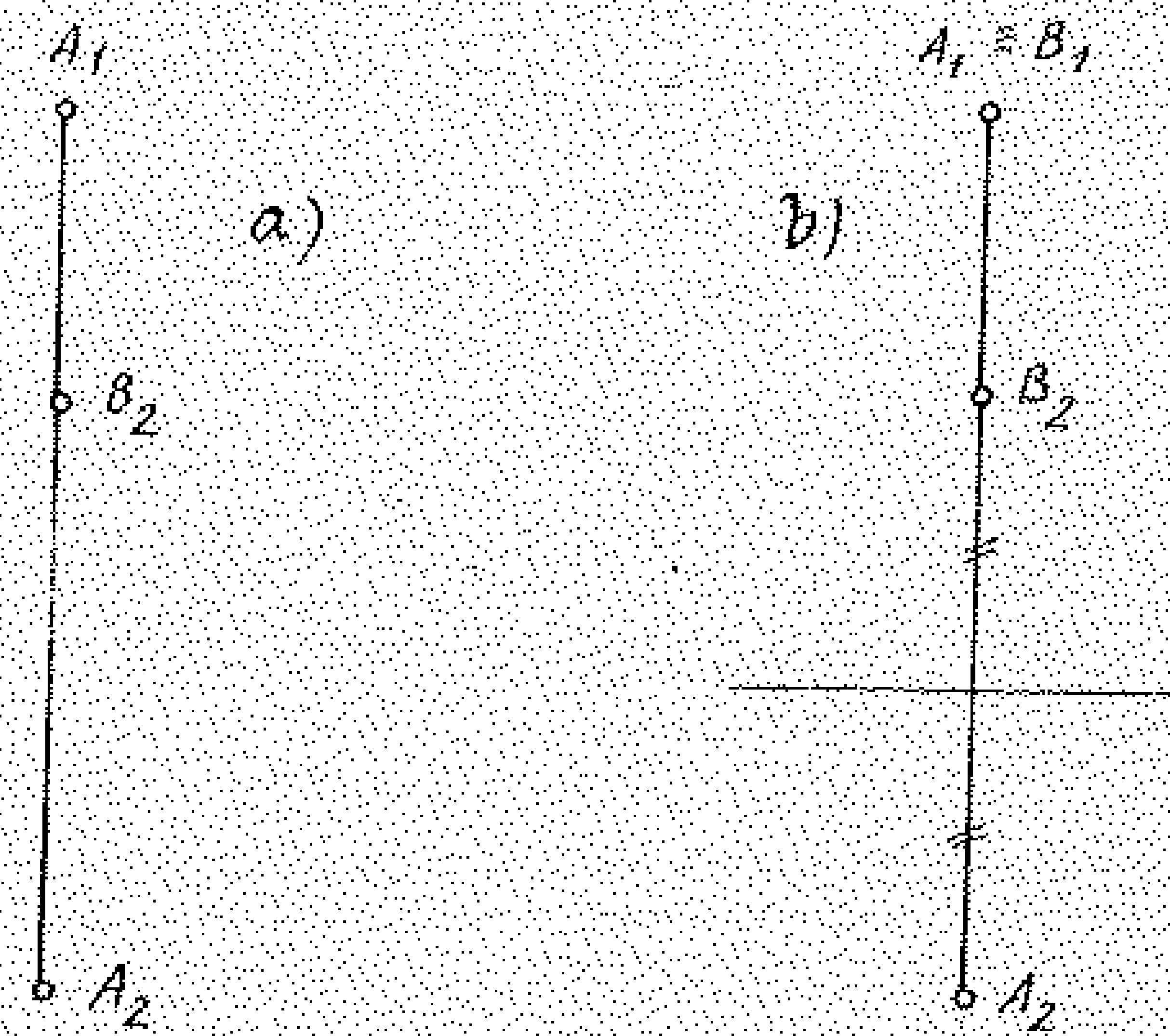
- Vì A và A' đối xứng nhau qua mặt phẳng hình chiếu đứng tức là chúng thuộc một đường thẳng chiếu đứng nên hình chiếu đứng của chúng trùng nhau : $A_1 \equiv A'_1$.

Mặt khác độ xa của chúng bằng nhau về trị tuyệt đối nhưng khác dấu nên hình chiếu bằng của chúng đối xứng nhau qua trục hình chiếu, (Hình 2-2b).

- Vì B và B' đối xứng nhau qua mặt phẳng hình chiếu bằng tức là chúng thuộc một đường thẳng chiếu bằng nên hình chiếu bằng của chúng trùng nhau : $A_2 \equiv A'_2$

Mặt khác độ cao của chúng bằng nhau về trị tuyệt đối nhưng khác dấu nên hình chiếu đứng của chúng đối xứng nhau qua trục hình chiếu, (Hình 2-2c).

Thí dụ 3 : Cho điểm A(A_1, A_2) và hình chiếu bằng B_2 của điểm B, (Hình 2-3a). Xác định trục hình chiếu và vẽ hình chiếu đứng của điểm B biết rằng A và B đối xứng nhau qua mặt phẳng hình chiếu đứng.



Hình 2-3

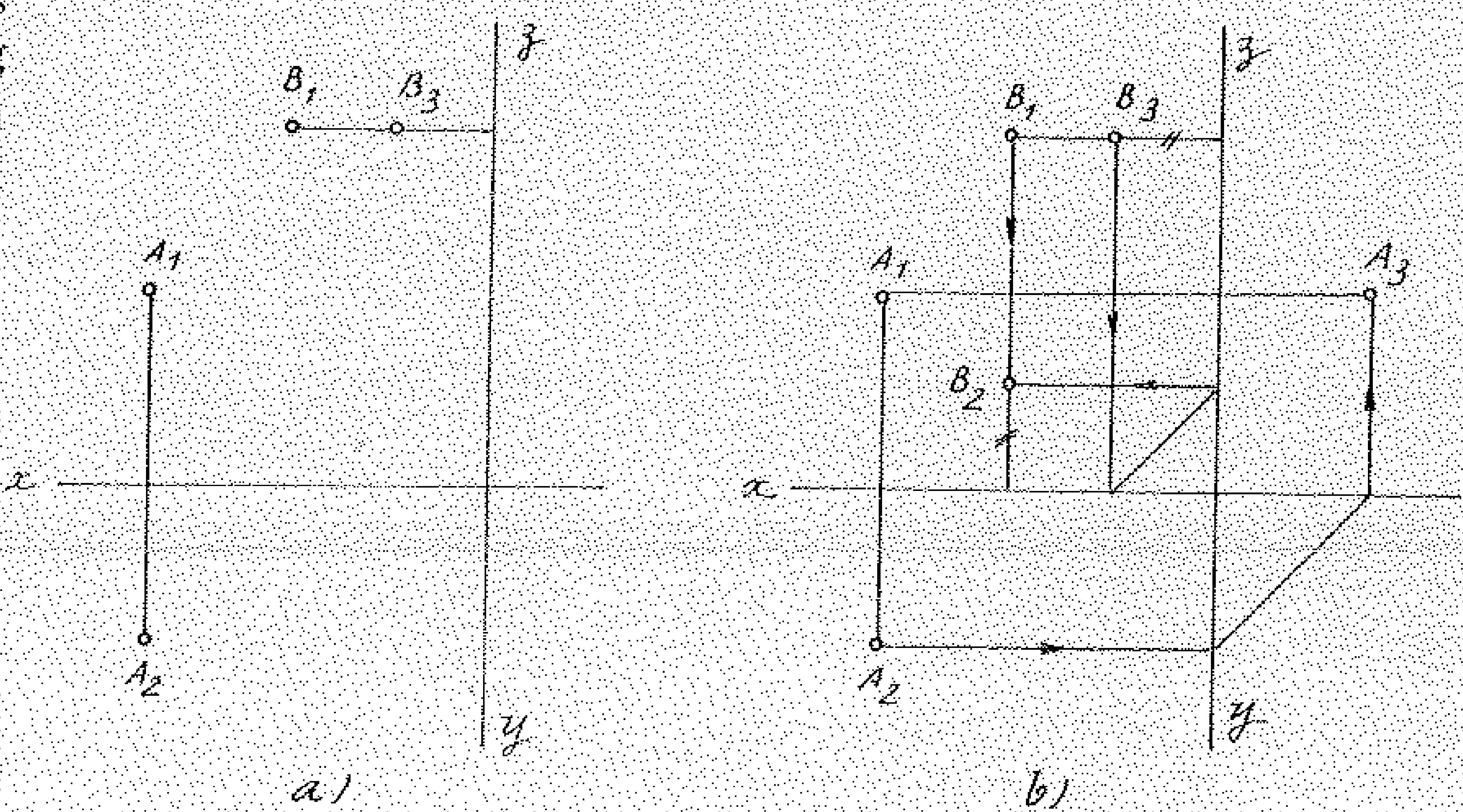
Giải :

- Vì A và B đối xứng nhau qua mặt phẳng hình chiếu đứng, (Hình 2-3b)

- Hình chiếu bằng của A và B đối xứng nhau qua trục hình chiếu, do đó x là trung trực của đoạn thẳng A_2B_2.

- Hình chiếu đứng của A và B trùng nhau : $B_1 \equiv A_1$

Thí dụ 4: Vẽ hình chiếu cạnh của điểm A(A_1, A_2) và hình chiếu bằng của điểm B(B_1, B_3), (Hình 2-4a).



Hình 2-4

Giải :

Nhận xét :

– Hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh của một điểm nằm trên một đường gióng ngang vuông góc với trục hình chiếu z.

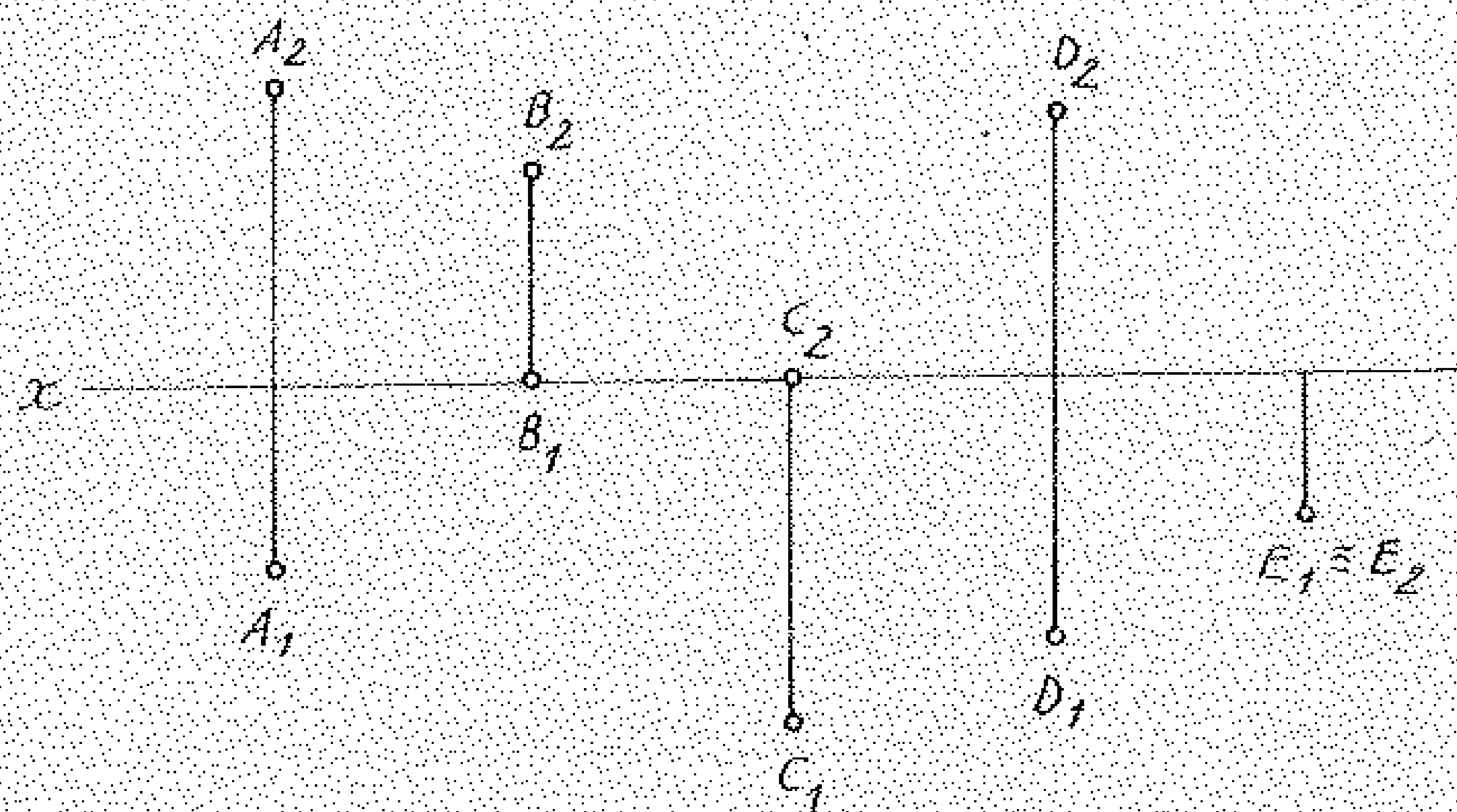
– Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của một điểm nằm trên một đường gióng thẳng đứng vuông góc với trục hình chiếu x.

– Trên hình biểu diễn, độ xa của một điểm bằng khoảng cách từ hình chiếu bằng của nó đến trục x hoặc khoảng cách từ hình chiếu cạnh của nó tới trục z.

Với các nhận xét trên, việc vẽ hình chiếu thứ ba của A và B theo hai hình chiếu đã cho của chúng được thể hiện trên hình 2–4b.

2.1.2. Bài tập

Bài 1 : Xác định vị trí so với các mặt phẳng hình chiếu của các điểm A, B, C, D, E (Hình 2–5).



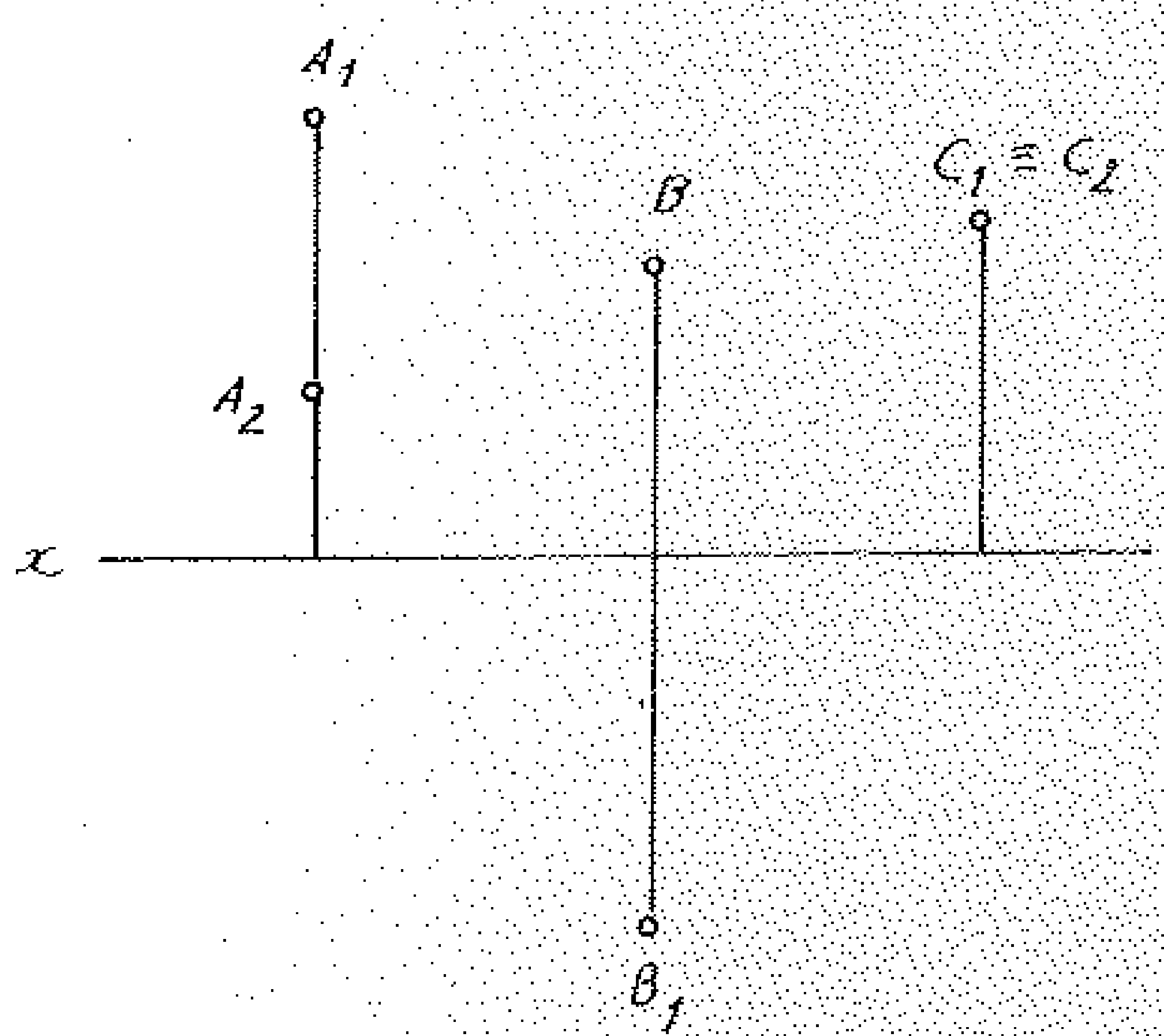
Hình 2–5

Bài 2 : Cho hình biểu diễn của các điểm A, B, C, (Hình 2–6). Vẽ hình biểu diễn của :

– Điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng hình chiếu đứng.

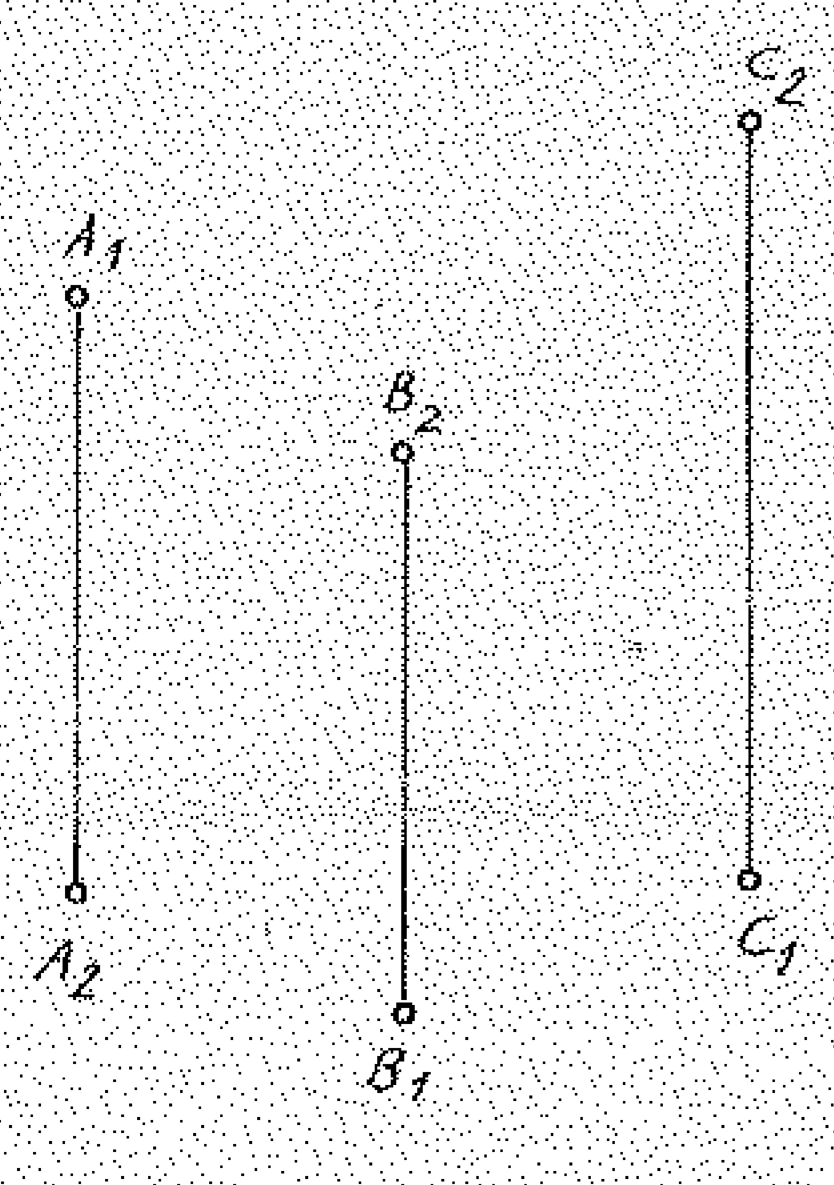
– Điểm B' đối xứng với B qua mặt phẳng hình chiếu bằng.

– Điểm C' đối xứng với C qua trục hình chiếu x.

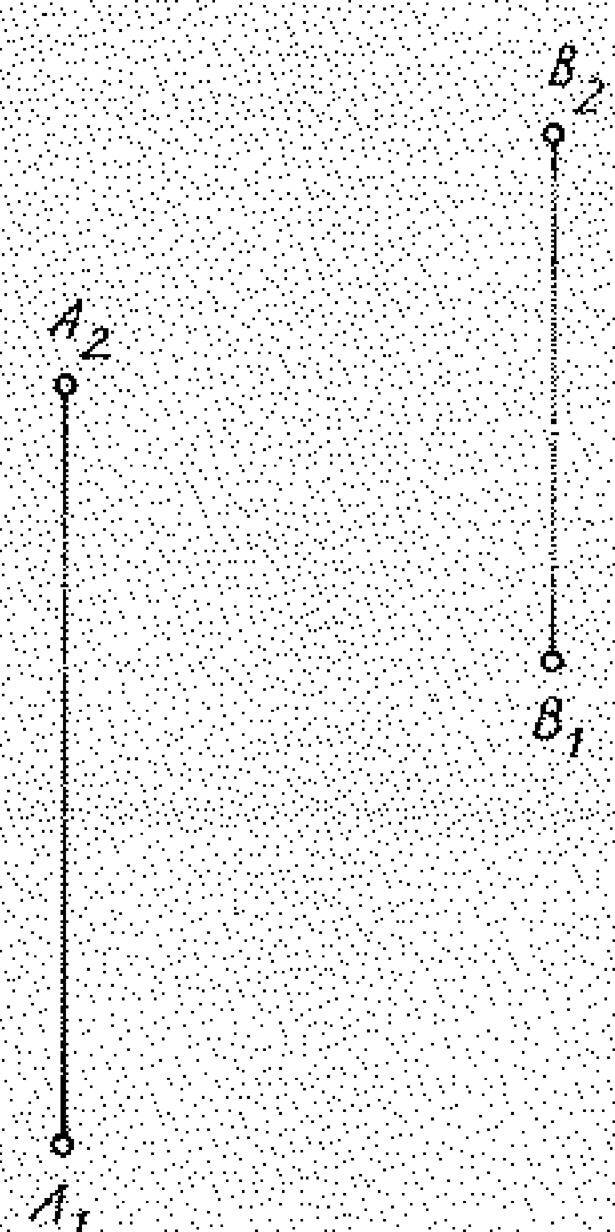


Hình 2–6

Bài 3 : Cho hình biểu diễn của các điểm A, B, C, (Hình 2–7). Xác định vị trí của trục hình chiếu x trong từng trường hợp biết rằng A thuộc mặt phẳng hình chiếu đứng ; B thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng và C thuộc mặt phẳng phân giác góc tư I và III.



Hình 2–7

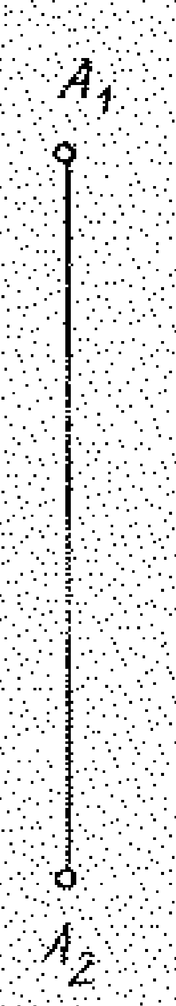


Hình 2–8

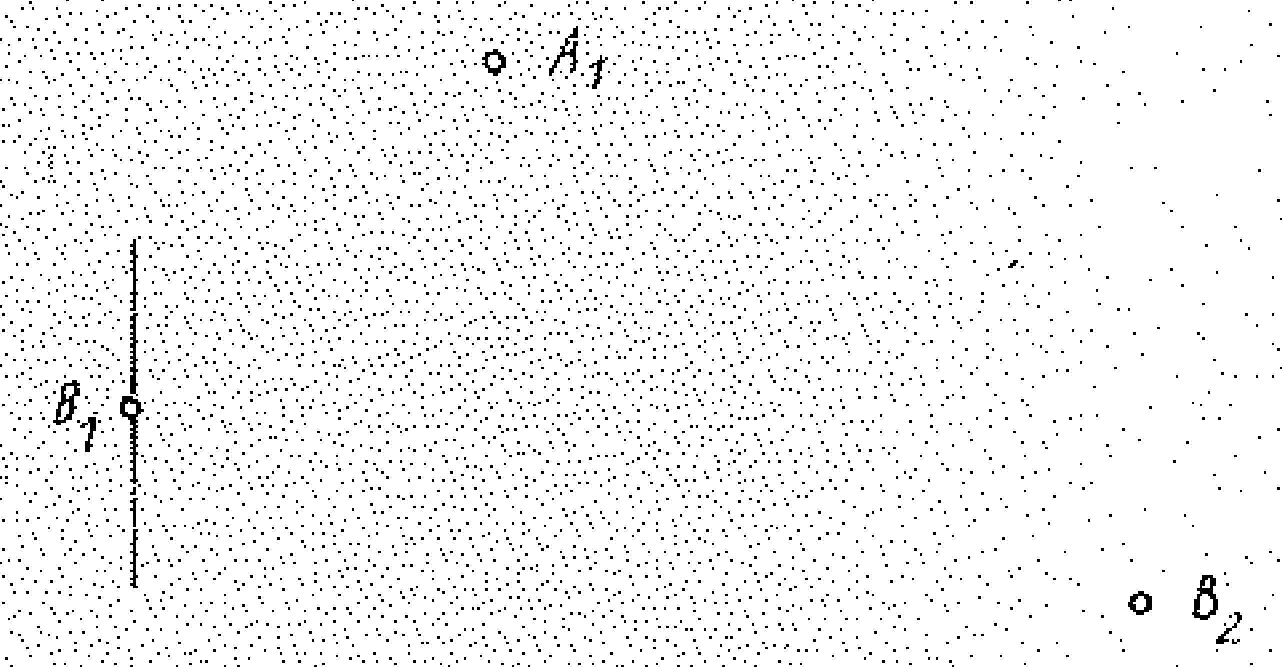
Bài 4 : Cho hình biểu diễn của hai điểm A và B, (Hình 2–8). Xác định vị trí của trục hình chiếu x biết rằng độ cao của A bằng độ xa của B. Chỉ rõ vị trí của A và B so với các mặt phẳng hình chiếu.

Bài 5 : Cho hình biểu diễn của điểm A và hình chiếu đứng của điểm B, (Hình 2–9) trục hình chiếu x và hình chiếu bằng của B biết rằng A và B đều thuộc mặt phẳng phân giác của góc tư I và III.

Bài 6 : Cho hình chiếu đứng của điểm A thuộc mặt phẳng hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của điểm B thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng (Hình 2–10). Xác định trục hình chiếu x và các hình chiếu còn lại của A và B biết rằng độ cao của A bằng độ xa của B và bằng +15mm.



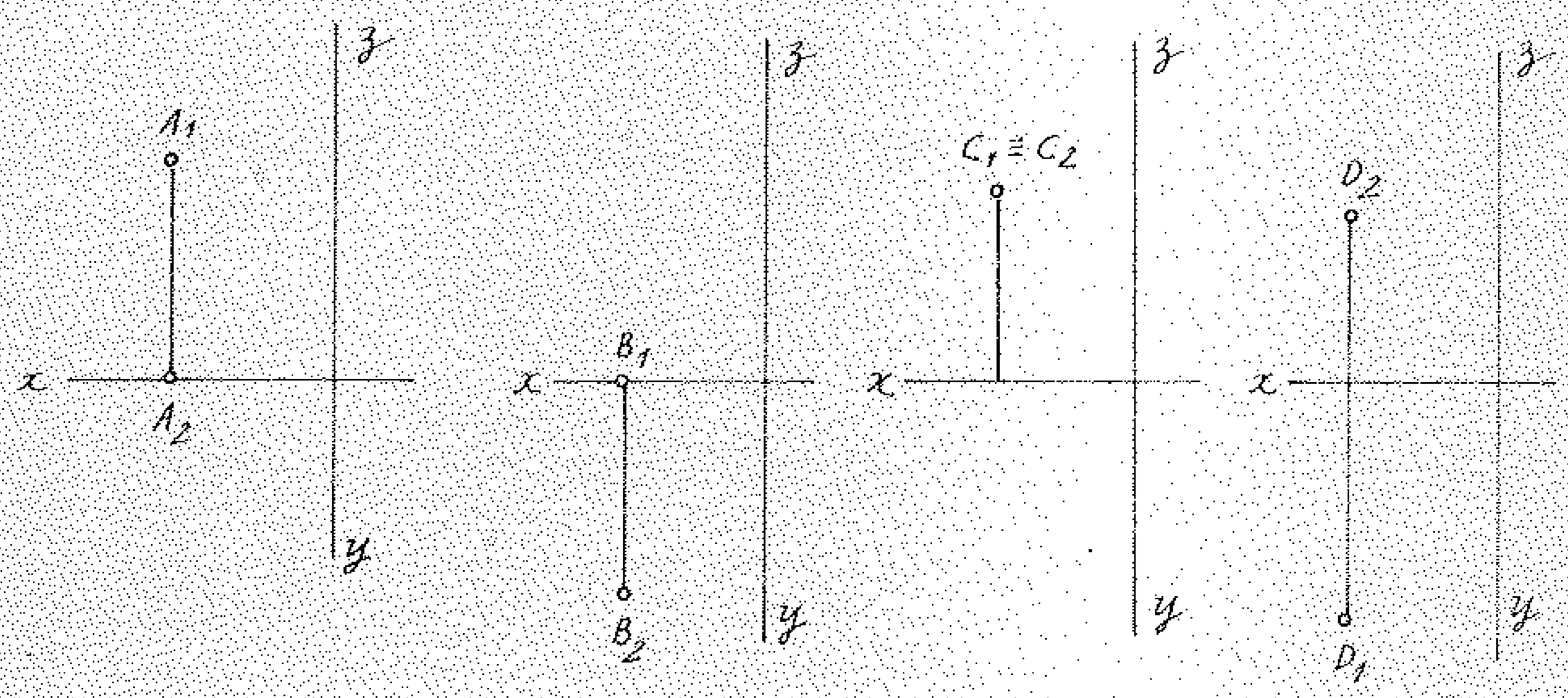
Hình 2-9



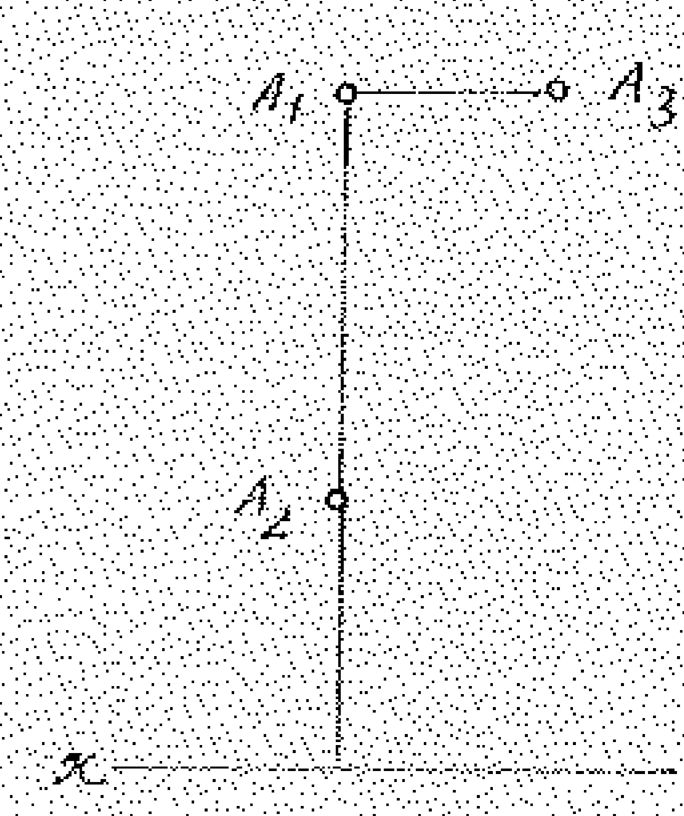
Hình 2-10

Bài 7 : Vẽ hình chiếu cạnh của các điểm A, B, C, D, (Hình 2–11).

Bài 8 : Cho ba hình chiếu của điểm A, (Hình 2–12). Xác định vị trí của trục hình chiếu z.



Hình 2-11



Hình 2-12

2.2. Đường thẳng

Một số điểm cần chú ý :

+ Hình biểu diễn của một đường thẳng a bất kì trong phương pháp hai hình chiếu thẳng góc là một cặp đường thẳng (a_1, a_2) xiên góc bất kì với trục hình chiếu.

+ Nắm vững định nghĩa, hình biểu diễn và tính chất của : đường bằng, đường mặt, đường cạnh, đường thẳng chiếu bằng, đường thẳng chiếu đứng.

+ Biểu diễn sự liên thuộc giữa điểm và đường thẳng.

+ Biểu diễn hai đường thẳng song song ; hai đường thẳng cắt nhau ; hai đường thẳng chéo nhau.

2.2.1. Các thí dụ

Thí dụ 1: Cho các điểm A(A_1, A_2) và C(C_1, C_2) (Hình 2–13a).

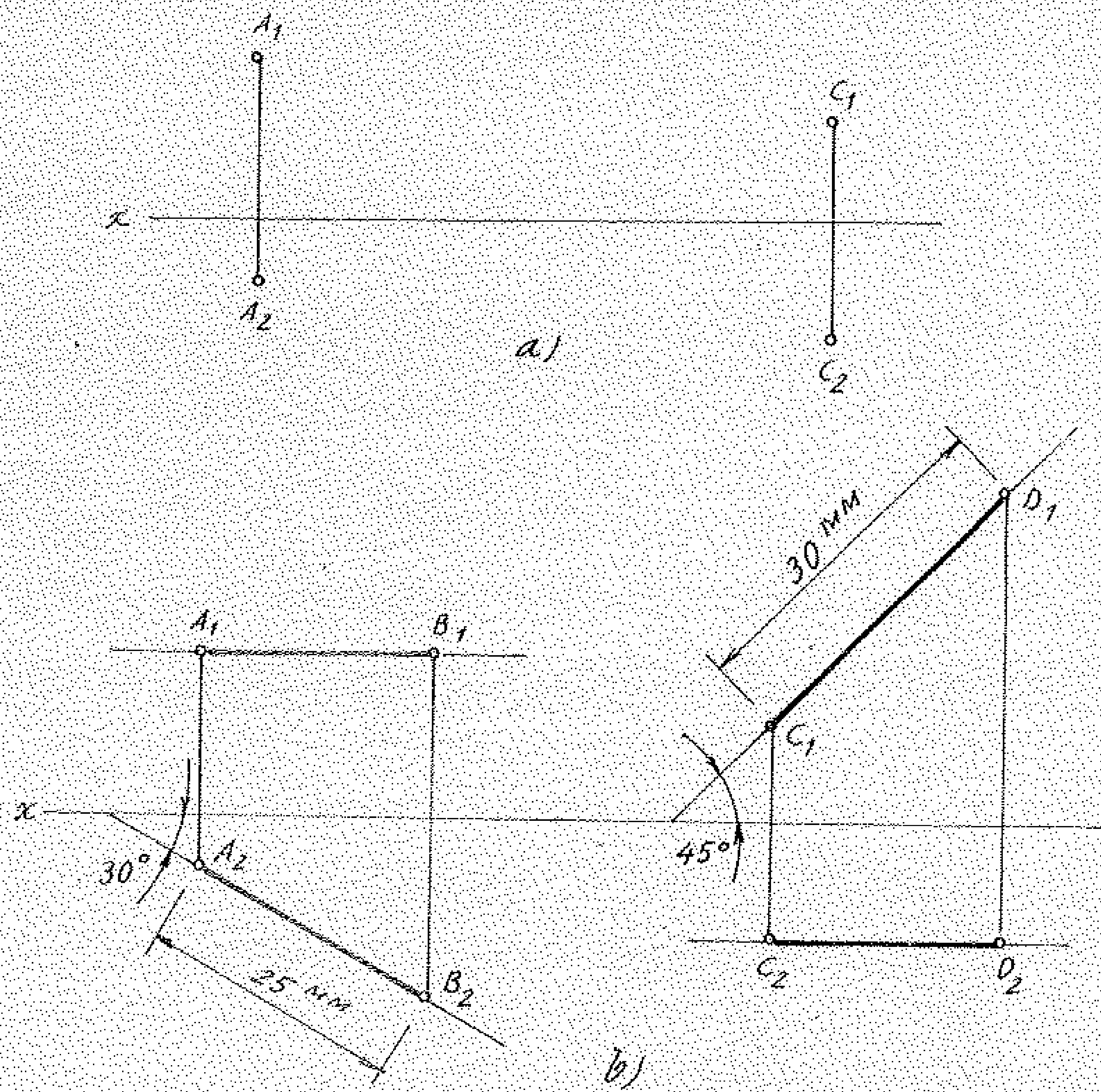
– Qua A vẽ một đoạn thẳng AB song song với mặt phẳng hình chiếu bằng biết rằng AB có chiều dài bằng 25mm và nghiêng với mặt phẳng hình chiếu đứng một góc 30^0.

– Qua C vẽ một đoạn thẳng CD song song với mặt phẳng hình chiếu đứng biết rằng CD có chiều dài bằng 30mm và nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc 45^o.

Giải :

– AB là một đoạn thẳng thuộc một đường bằng : Qua A_1 vẽ đường thẳng song song với trục x. Qua A_2 vẽ một đường thẳng nghiêng với trục x góc 30^o và đặt trên đó một đoạn thẳng A_2B_2 = 25mm. Từ B_2 dễ dàng suy ra B_1 (Hình 2–13b).

– CD là một đoạn thẳng thuộc một đường mặt : Qua C_2 vẽ đường thẳng song song với trục x. Qua C_1 vẽ một đường thẳng nghiêng với trục x góc 45^o và đặt trên đó một đoạn thẳng C_1D_1 = 30mm. Từ D_1 dễ dàng suy ra D_2.

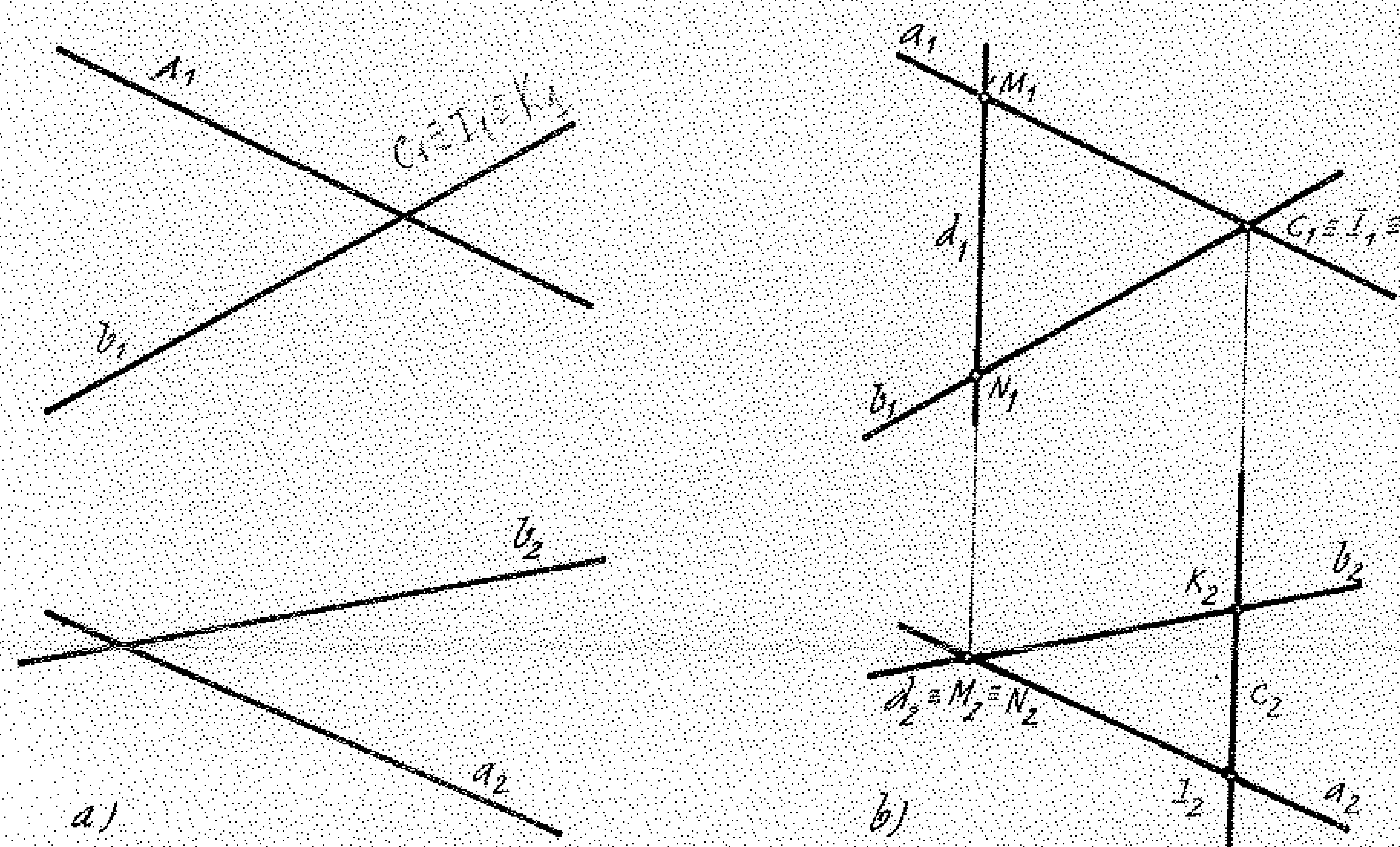


Hình 2–13

Trên hình vẽ chỉ vẽ một trong bốn vị trí của AB và CD, bạn đọc tự suy ra các vị trí còn lại của chúng.

Thí dụ 2: Cho hai đường thẳng bất kì a (a_1, a_2) và b(b_1, b_2) (Hình 2–14a). Vẽ đường thẳng chiếu đứng c và đường thẳng chiếu bằng d cắt cả a và b.

Giải :



Hình 2–14

– Gọi I và K lần lượt là giao điểm của đường thẳng chiếu đứng c với a và b. Ta có :

$$I_1 \equiv K_1 \equiv C_1 = a_1 \cap b_1.$$

Hình chiếu bằng của c là c_2 (I_2 K_2) vuông góc với trục x (Hình 2–14b).

– Gọi M và N lần lượt là giao điểm của đường thẳng chiếu bằng d với a và b :

$$M_2 \equiv N_2 \equiv d_2 = a_2 \cap b_2$$

Hình chiếu đứng của d là d_1 (M_1N_1) vuông góc với trục x.

Thí dụ 3: Cho đường thẳng a(a_1, a_2) (Hình 2–15a). Tìm trên a các điểm :

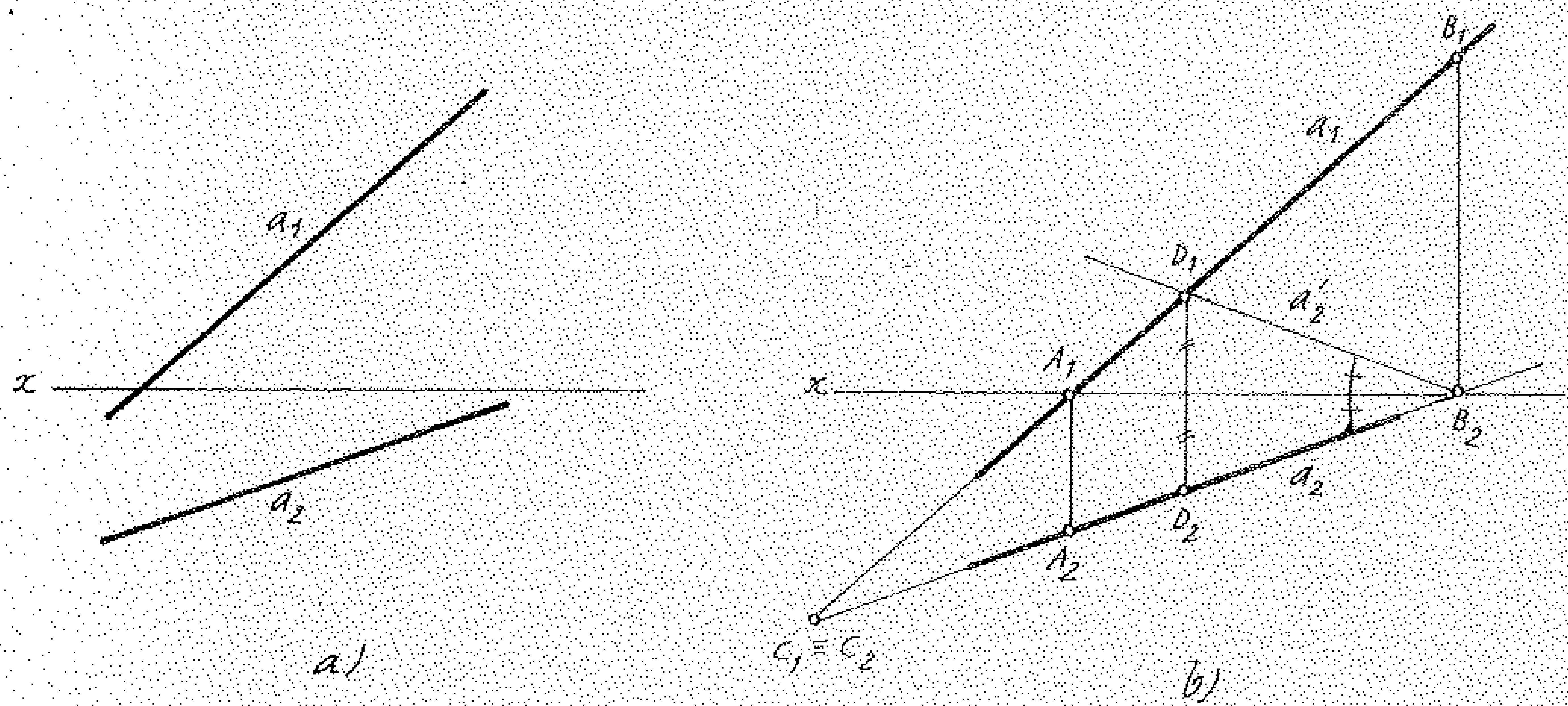
– A có độ cao bằng 0

– B có độ xa bằng 0

– C có hai hình chiếu trùng nhau.

– D có hai hình chiếu đối xứng nhau qua trục x.

Giải :



Hình 2–15

Trước hết nhận xét rằng các điểm A, B, C, D thuộc đường thẳng a nên các hình chiếu của chúng phải thuộc các hình chiếu cùng tên của a.

Ngoài ra (Hình 2–15b) :

– A có độ cao bằng 0 nên $A_1 \in x$, do đó

$$A_1 = a_1 \cap x$$

– B có độ xa bằng 0 nên $B_2 \in x$, do đó

$$B_2 = a_2 \cap x$$

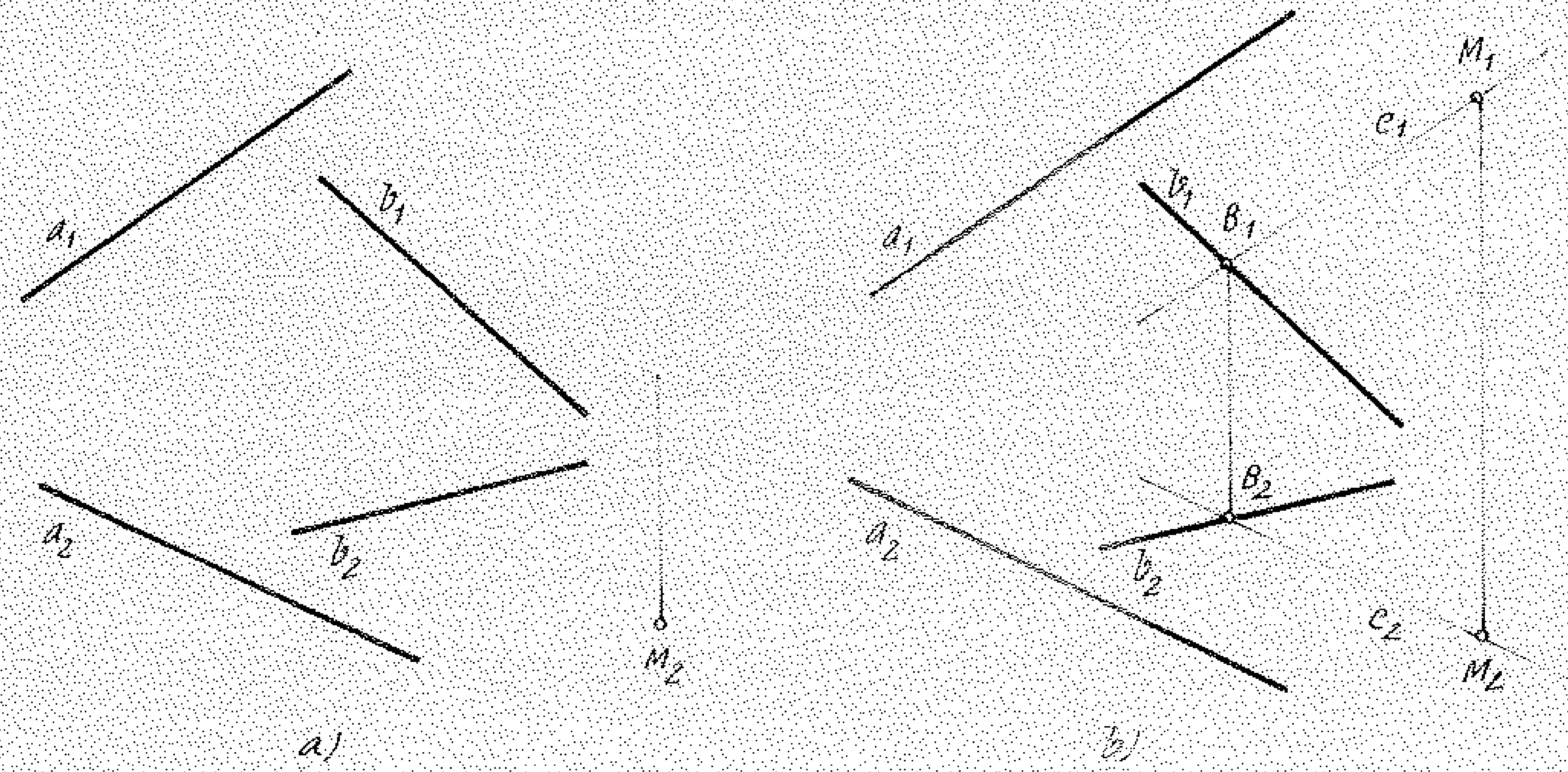
– C có hai hình chiếu trùng nhau nên :

$$C_1 \equiv C_2 = a_1 \cap a_2.$$

– D có hai hình chiếu đối xứng nhau qua trục x. Có thể xác định D như sau : qua điểm $B_2 = a_2 \cap x$ vẽ đường thẳng a'_2 đối xứng với a_2 qua x. Điểm $D_1 = a_1 \cap a'_2$ là hình chiếu đứng của điểm D cần tìm, từ đó suy ra hình chiếu bằng D_2 của D.

Thí dụ 4: Cho hai đường thẳng bất kì a(a_1, a_2), b(b_1, b_2) và hình chiếu bằng của điểm M thuộc một đường thẳng c song song với a và cắt b, (Hình 2–16a). Vẽ hình chiếu đứng của M.

Giải :



Hình 2-16

Nhận xét rằng :

$M \in c$ nên $M_2 \in c_2$; $M_1 \in c_1$.

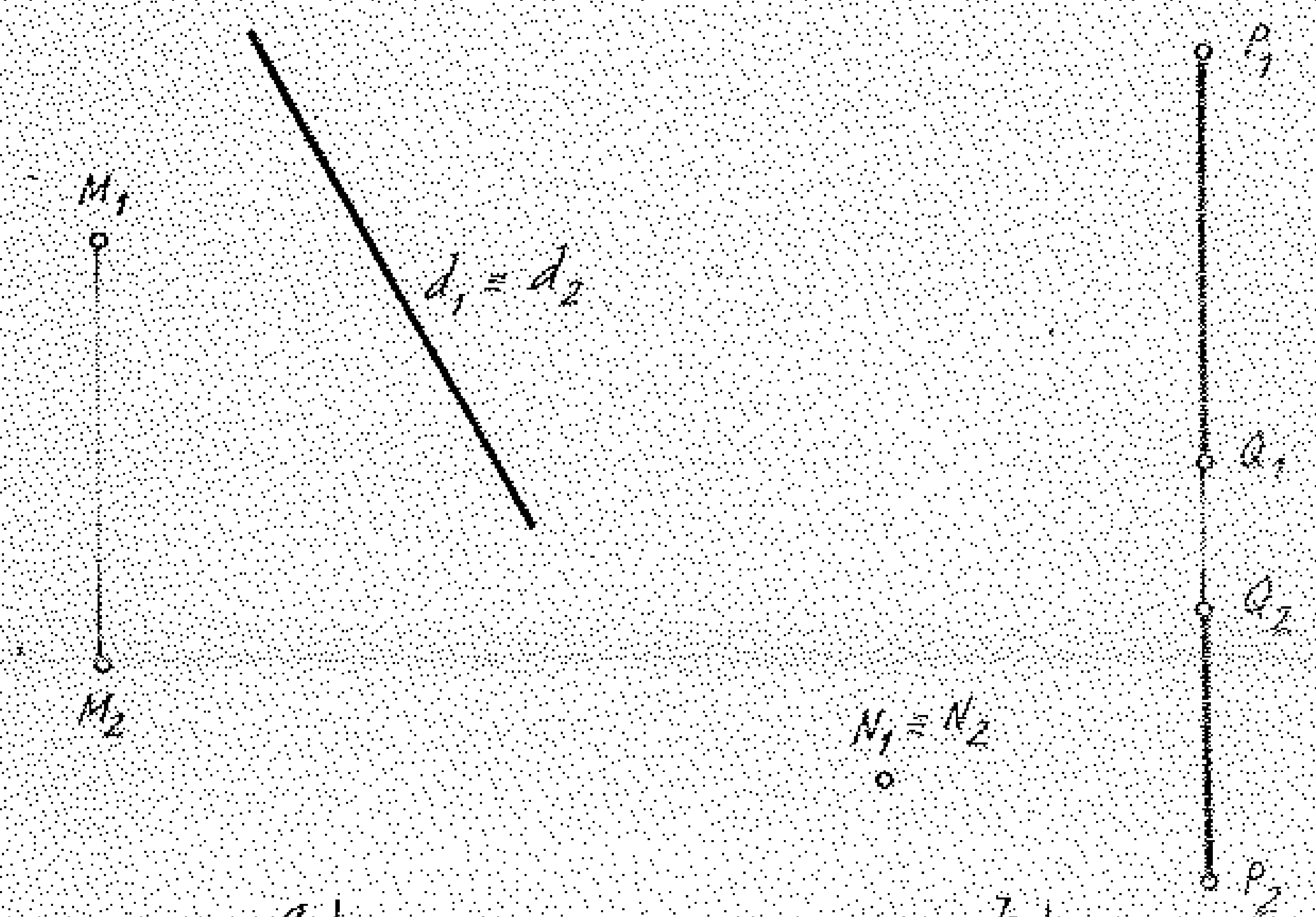
$c \parallel a$ nên $c_2 \parallel a_2$; $c_1 \parallel a_1$

$c \cap b = B$ nên $c_2 \cap b_2 = B_2$ và $c_1 \cap b_1 = B_1$ với $B_2B_1 \perp x$. Vậy ta có thể vẽ hình chiếu đứng M_1 của điểm M như sau (Hình 2-16b).

- Qua M_2 vẽ $c_2 \parallel a_2$
- Gọi $B_2 = C_2 \cap b_2$, từ B_2 suy ra $B_1 \in b_1$
- Qua B_1 vẽ $c_1 \parallel a_1$, từ M_2 suy ra $M_1 \in c_1$

2.2.2 Bài tập

Bài 9 : Qua điểm M vẽ một đường thẳng bằng cắt đường thẳng d (Hình 2-17a), và qua điểm N vẽ một đường thẳng mặt cắt đường cạnh PQ, (Hình 2-17b).



Hình 2-17

Bài 10 : Cho hình chiếu đứng của hai điểm A và B, hình chiếu bằng của hai điểm C và D, (Hình 2-18).

a - Vẽ các hình chiếu còn lại của A, B, C, D biết rằng cả 4 điểm đó cùng thuộc một đường thẳng d.

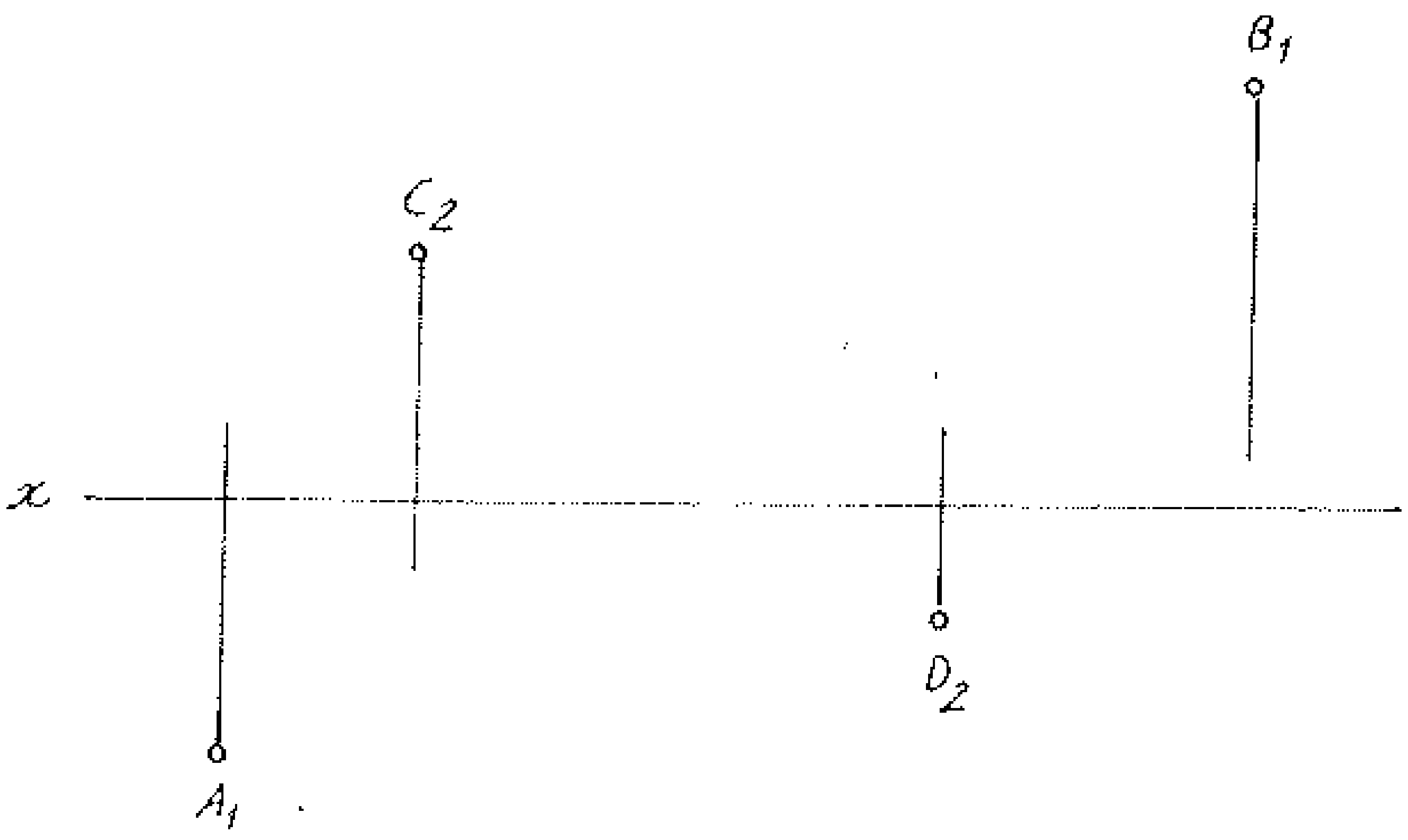
b - Tìm trên đường thẳng d đó :

- Điểm có độ cao bằng 0
- Điểm có độ xa bằng 0
- Điểm có độ cao bằng hai lần độ xa

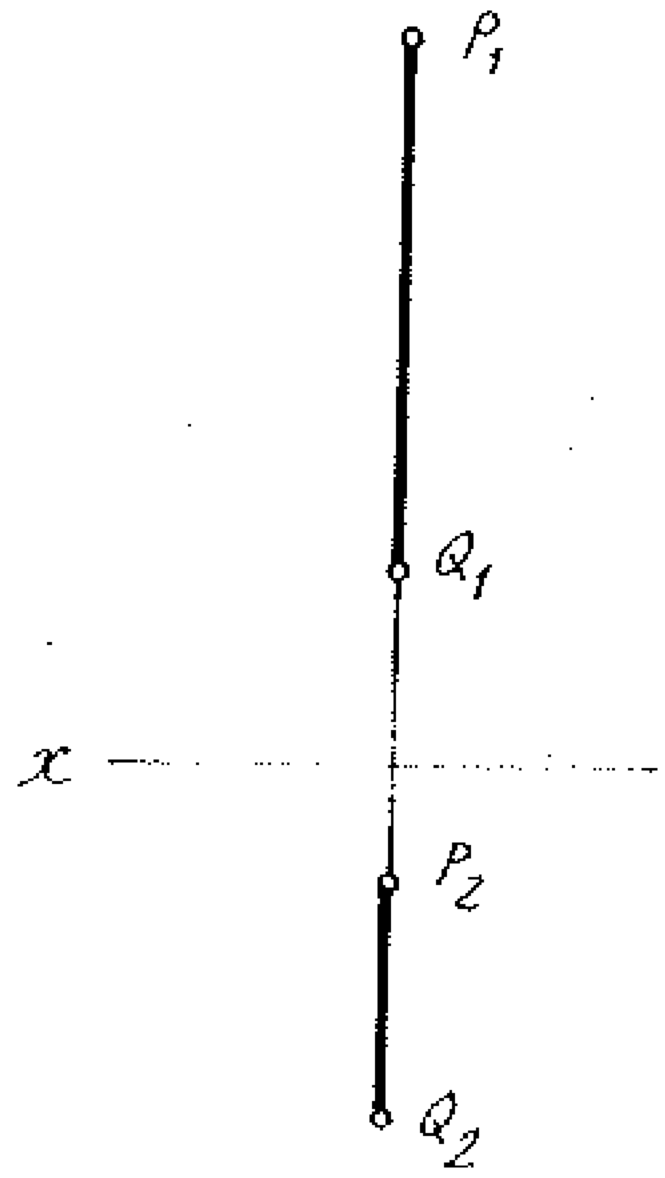
Bài 11 : Cho đường cạnh PQ, (Hình 2-19). Tìm trên đường thẳng đó :

a – Điểm có hai hình chiếu trùng nhau.

b – Điểm có hai hình chiếu đối xứng nhau qua trục hình chiếu x.

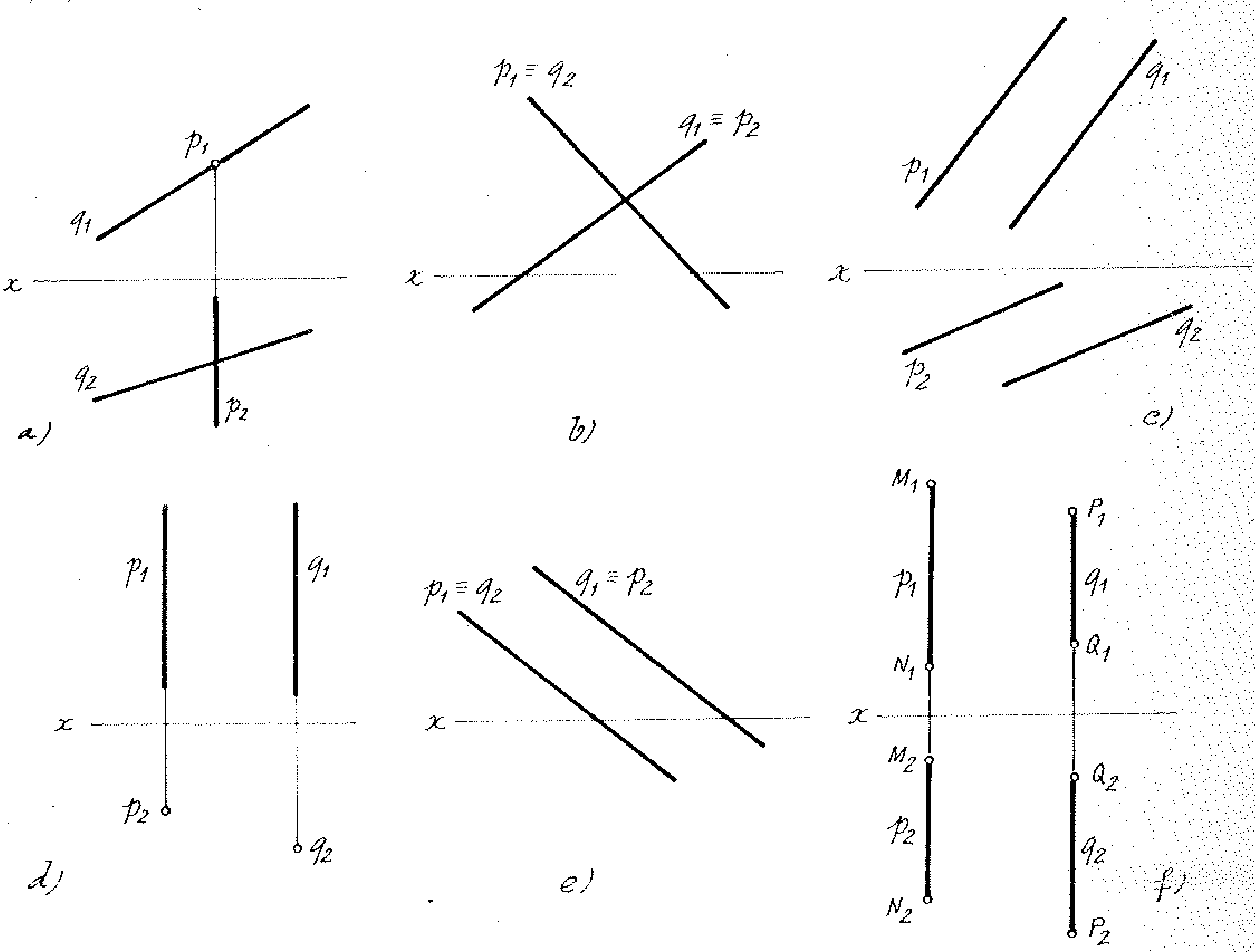


Hình 2-18



Hình 2-19

Bài 12 : Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng p và q (Hình 2-20a, b, c, d, e, f).



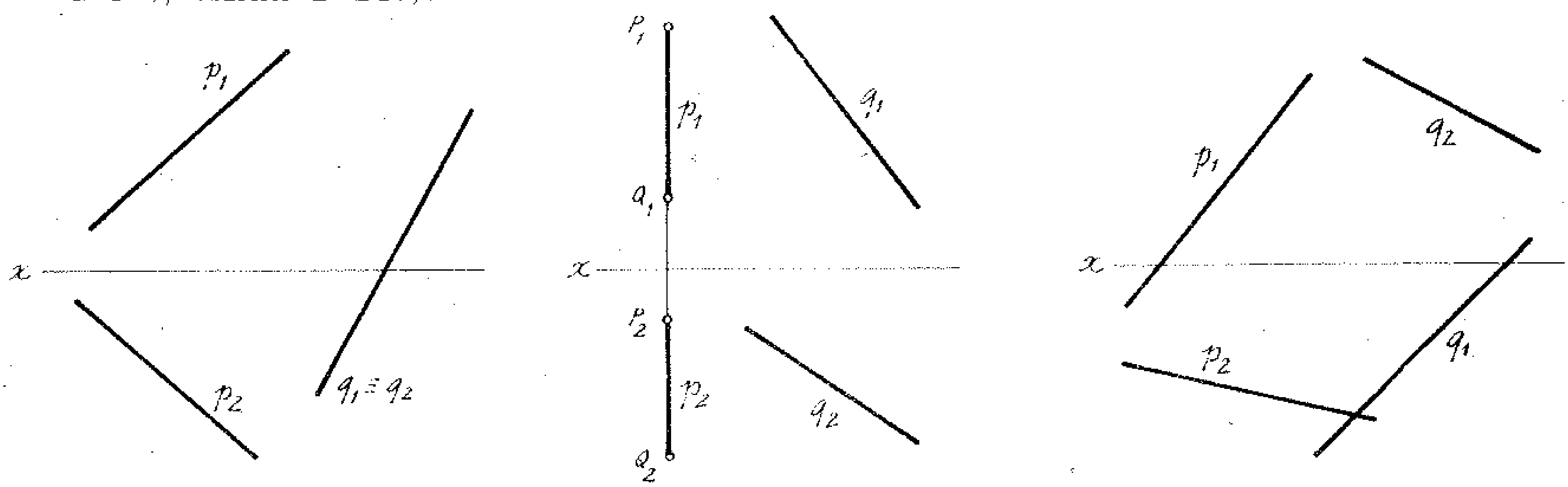
Hình 2-20

Bài 13 : Cho hai đường thẳng p và q, (Hình 2-21). Vẽ một đường thẳng cắt cả p và q và:

a– Song song với mặt phẳng hình chiếu đứng và có độ xa cho trước (Hình 2-21a).

b – Song song với mặt phẳng hình chiếu bằng và có độ cao cho trước (Hình 2–21b).

c – Thuộc mặt phẳng phân giác thứ hai (mặt phẳng phân giác của góc tư II và IV), (Hình 2–21c).



a) b) c)

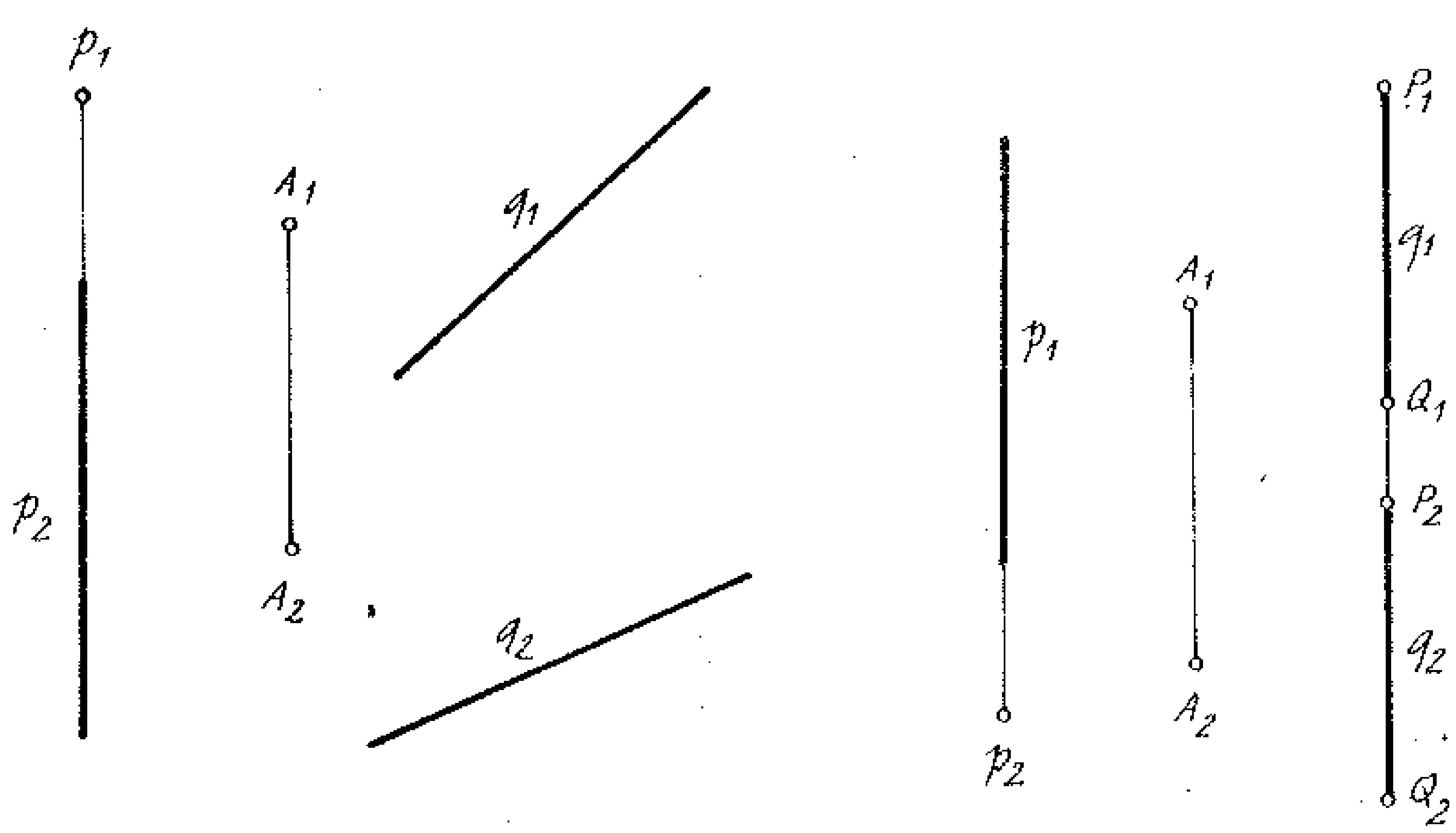
Hình 2–21

Bài 14 : Cho điểm A và hai đường thẳng p, q.

a – Vẽ qua A đường thẳng cắt cả p và q (Hình 2–22a).

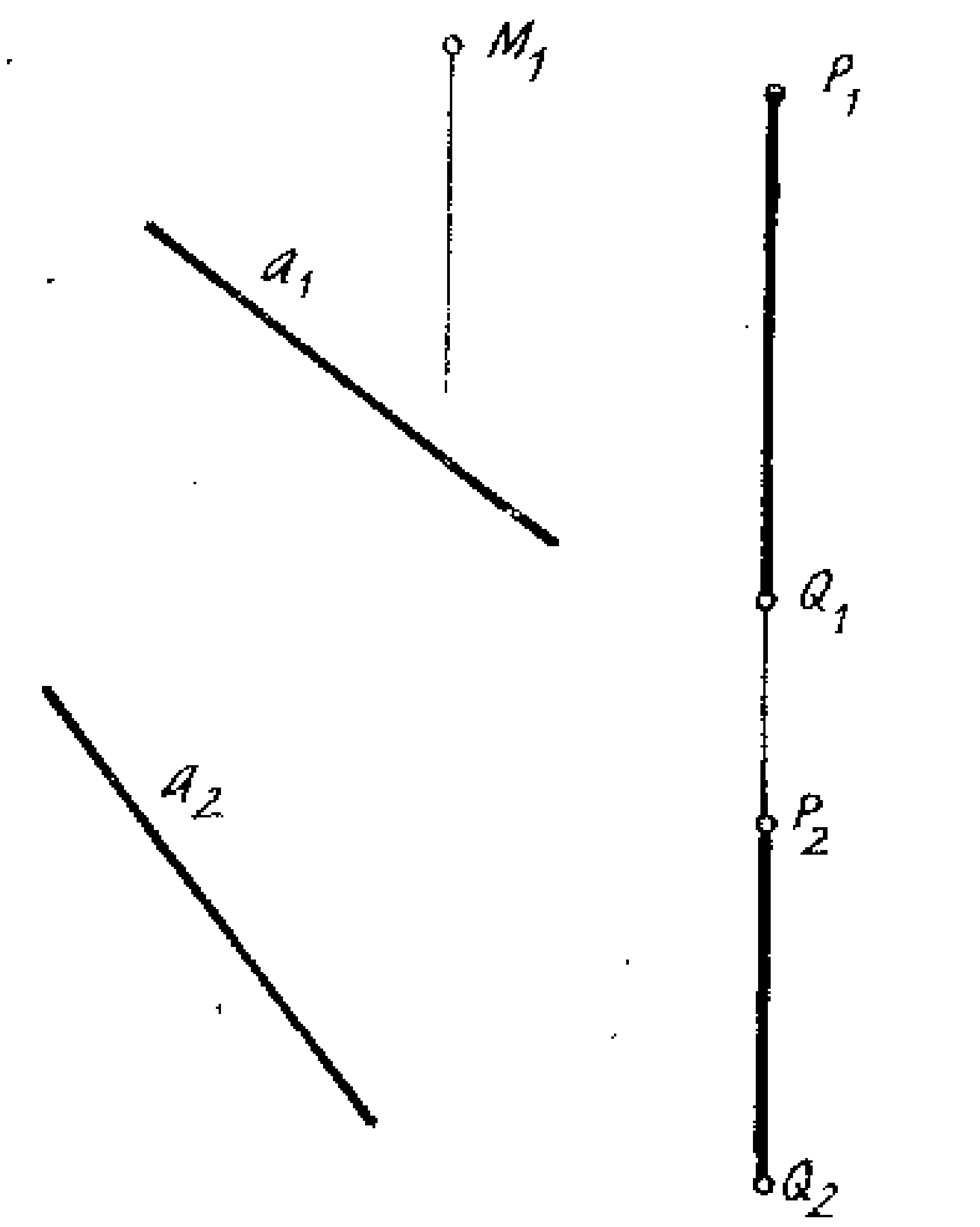
b – Cũng yêu cầu như trên nhưng cho q là một đường thẳng cạnh (Hình 2–22b).

Bài 15 : Cho đường thẳng a, đường thẳng cạnh PQ và hình chiếu đứng của điểm M không thuộc a và PQ, (Hình 2–23). Vẽ hình chiếu bằng của M biết rằng M thuộc một đường thẳng song song với PQ và cắt đường thẳng a.



a) b)

Hình 2–22



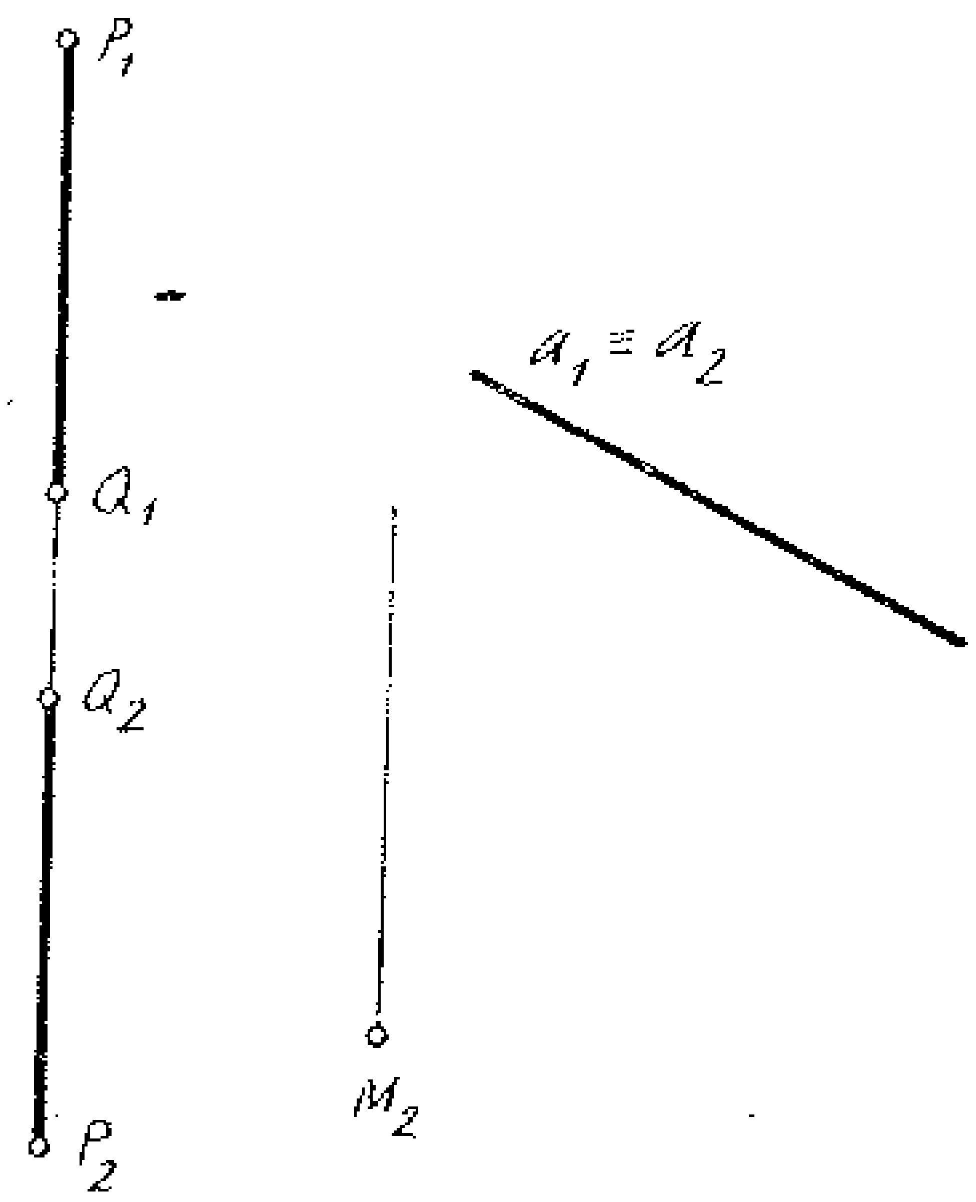
Hình 2–23

Bài 16 : Cho đường thẳng a, đường thẳng cạnh PQ và hình chiếu bằng của điểm M không thuộc a và P.Q, (Hình 2–24). Vẽ hình chiếu đứng của M biết rằng M thuộc một đường thẳng song song với a và cắt đường thẳng cạnh PQ.

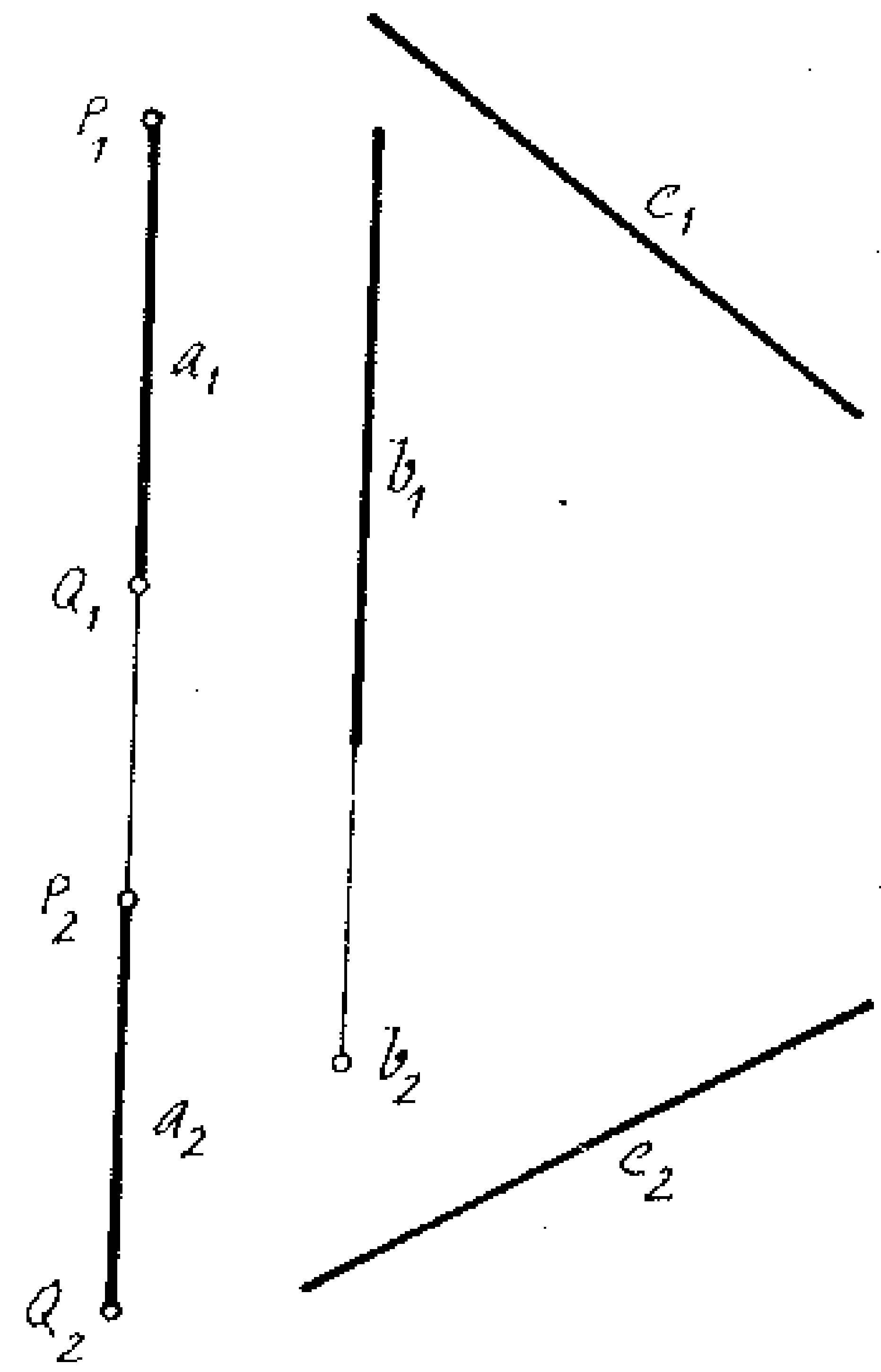
Bài 17 : Cho ba đường thẳng a, b và c trong đó b là đường thẳng chiếu bằng, (Hình .2–25).

a – Vẽ một đường thẳng cắt cả ba đường thẳng a, b, c và song song với mặt phẳng hình chiếu đứng.

b – Vẽ một đường thẳng cắt hai đường thẳng a, b và song song với đường thẳng c.



Hình 2-24

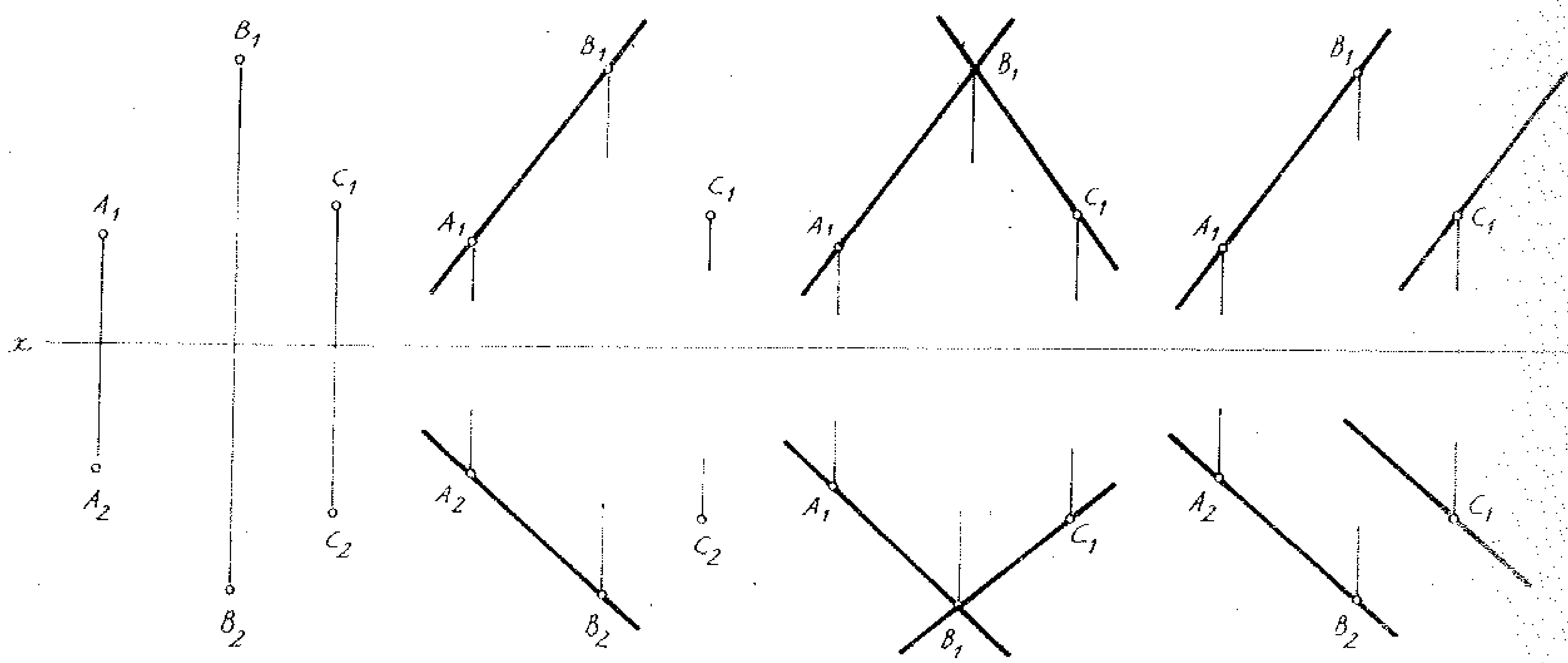


Hình 2-25

2.3. Mặt phẳng

Một số điểm cần chú ý :

– Một mặt phẳng có thể được biểu diễn bằng hình biểu diễn của : ba điểm không thẳng hàng ; một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó ; hai đường thẳng cắt nhau ; hai đường thẳng song song. Từ cách biểu diễn này có thể dễ dàng chuyển sang cách biểu diễn khác (Hình 2-26).



Hình 2-26

Ngoài ra người ta cũng thường biểu diễn mặt phẳng bằng hai vết của nó, đây chỉ là trường hợp riêng của việc biểu diễn mặt phẳng bằng hai đường thẳng cắt nhau hoặc song song.

– Nắm vững định nghĩa, hình biểu diễn và tính chất của các mặt phẳng có vị trí đặc biệt so với các mặt phẳng hình chiếu : mặt phẳng chiếu đứng ; mặt phẳng chiếu bằng ; mặt phẳng bằng và mặt phẳng mặt.

– Nắm vững các điều kiện liên thuộc của điểm và đường thẳng với mặt phẳng.

2.3.1. Các thí dụ

Thí dụ 1: Cho điểm A và đường thẳng a, (Hình 2-27). .

– Qua điểm A dựng một mặt phẳng $\mathcal{Q}$ vuông góc với mặt phẳng **hình chiếu đứng** và nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc 30°.

– Qua đường thẳng a dựng một mặt phẳng $\mathcal{R}$ vuông góc với mặt phẳng **hình chiếu bằng**. Xác định các vết của hai mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và $\mathcal{R}$

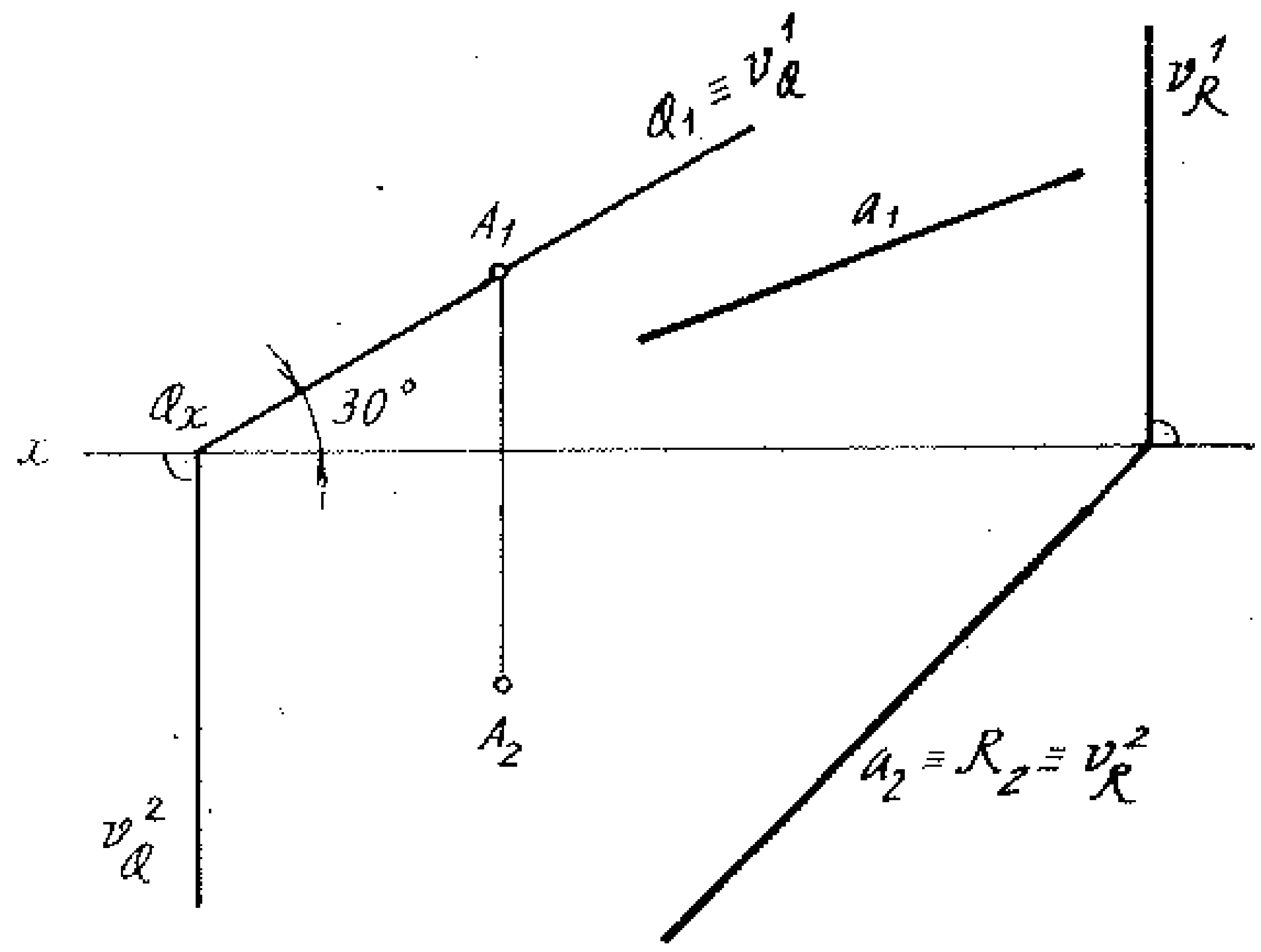
Giải :

– $\mathcal{Q}$ là mặt phẳng chiếu đứng nên hình chiếu đứng $\mathcal{Q}_1$ của nó là một đường thẳng.

Vì $A \in \mathcal{Q}$ nên $A_1 \in \mathcal{Q}_1$.

Vì góc nghiêng $(\mathcal{Q}, \mathcal{P}^2) = 30^{\circ}$ nên $(\mathcal{Q}_1, x) = 30^{\circ}$. Vậy qua A_1 vẽ một đường thẳng $\mathcal{Q}_1$ hợp với trục hình chiếu x một góc 30°, đó là hình chiếu đứng suy biến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ cần vẽ. Vết đứng của $(\mathcal{Q})$ là $v^1_{\mathcal{Q}} \equiv \mathcal{Q}_1$. Vết bằng của $(\mathcal{Q})$ là $v^2_{\mathcal{Q}} \perp x$ và đi qua điểm $\mathcal{Q}_x = v^1_{\mathcal{Q}} \cap x$.

Bài toán có hai nghiệm hình.

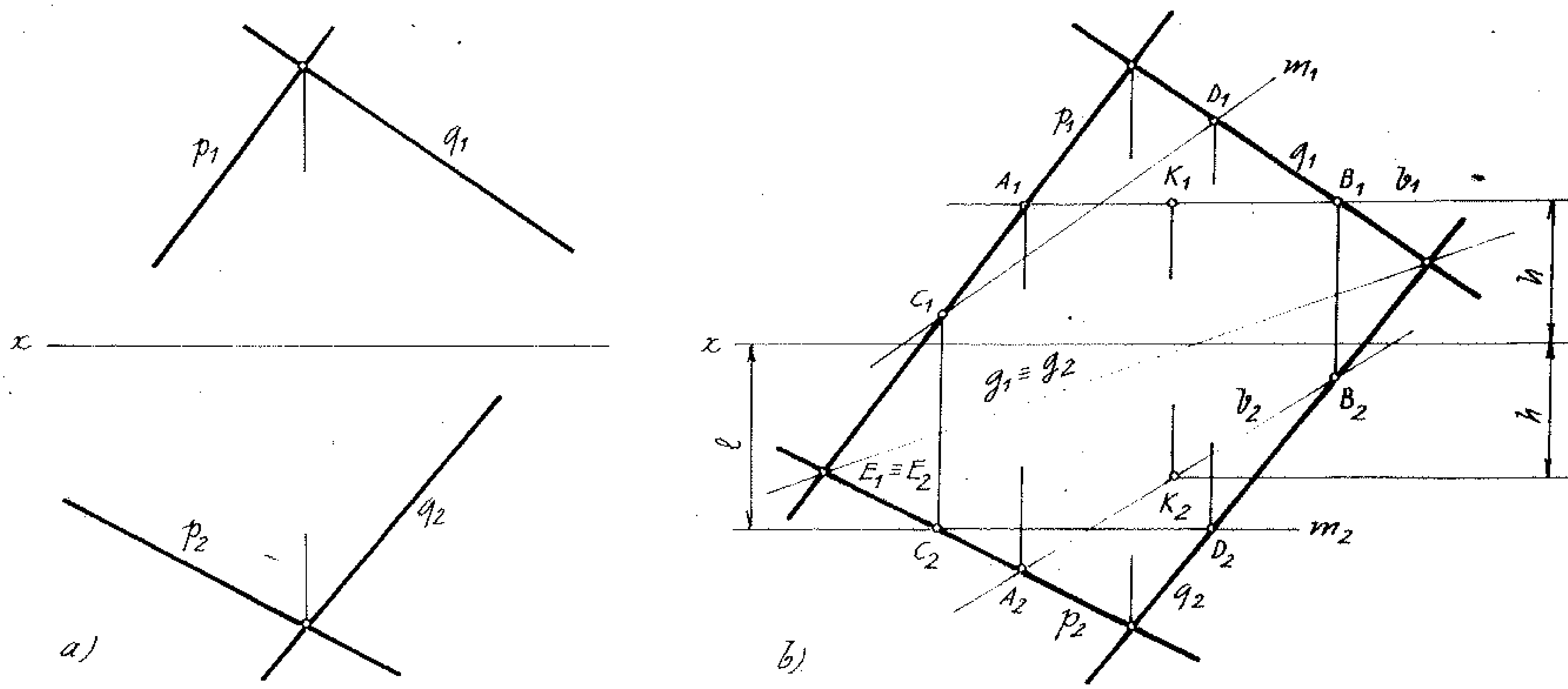


Hình 2-27

– $(\mathcal{R})$ là mặt phẳng chiếu bằng nên hình chiếu bằng $\mathcal{R}_2$ của nó là một đường thẳng. Mặt khác vì $a \in (\mathcal{R})$ nên $a_2 \equiv \mathcal{R}_2$.

Vết bằng của $(\mathcal{R})$ là $v^2_{\mathcal{R}} \equiv \mathcal{R}_2$. Vết đứng của nó là $v^1_{\mathcal{P}} \perp x$ và đi qua điểm $\mathcal{R}_x = v^2_{\mathcal{R}} \cap x$.

Thí dụ 2: Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}(p \cap q)$, (Hình 2-28a). Hãy vẽ trong $(\mathcal{Q})$:



Hình 2-28

– Đường thẳng bằng có độ cao bằng $h > 0$

– Đường thẳng mặt có độ xa bằng $l > 0$

– Đường thẳng có hai hình chiếu trùng nhau

– Điểm có độ cao và độ xa đều bằng h.

Giải : Trên hình 2–28b :

– Gọi b là đường bằng cần vẽ. Vì b có độ cao bằng h nên $b_1 // x$ và cách x về phía trên một khoảng bằng h. Mặt khác vì $b \in (\mathcal{Q})$ nên b phải có hai điểm thuộc ($\mathcal{Q}$), chẳng hạn điểm $A = b \cap p$ và điểm $B = b \cap q$. Từ các hình chiếu đứng $A_1 = b_1 \cap p_1$ và $B_1 = b_1 \cap q_1$ suy ra các hình chiếu bằng $A_2 \in p_2$ và $B_2 \in q_2$. Đường thẳng $b_2 \equiv A_2B_2$ là hình chiếu bằng của đường thẳng bằng b.

– Gọi m là đường thẳng mặt m cần vẽ. Lập luận tương tự như trên, ta vẽ hình chiếu bằng của đường thẳng mặt, đó là $m_2 // x$ và cách x về phía dưới một khoảng bằng l. Từ m_2 suy ra m_1 bằng cách gắn m vào ($\mathcal{Q}$) tại hai điểm, chẳng hạn điểm $C = m \cap p$ và điểm $D = m \cap q$.

– Gọi g là đường thẳng thuộc ($\mathcal{Q}$) và có hai hình chiếu trùng nhau. Có thể xác định g bằng cách tìm điểm có hai hình chiếu trùng nhau của hai đường thẳng thuộc ($\mathcal{Q}$), chẳng hạn p và q rồi nối chúng bằng đường thẳng :

Điểm E với $E_1 \equiv E_2 = p_1 \cap p_2$

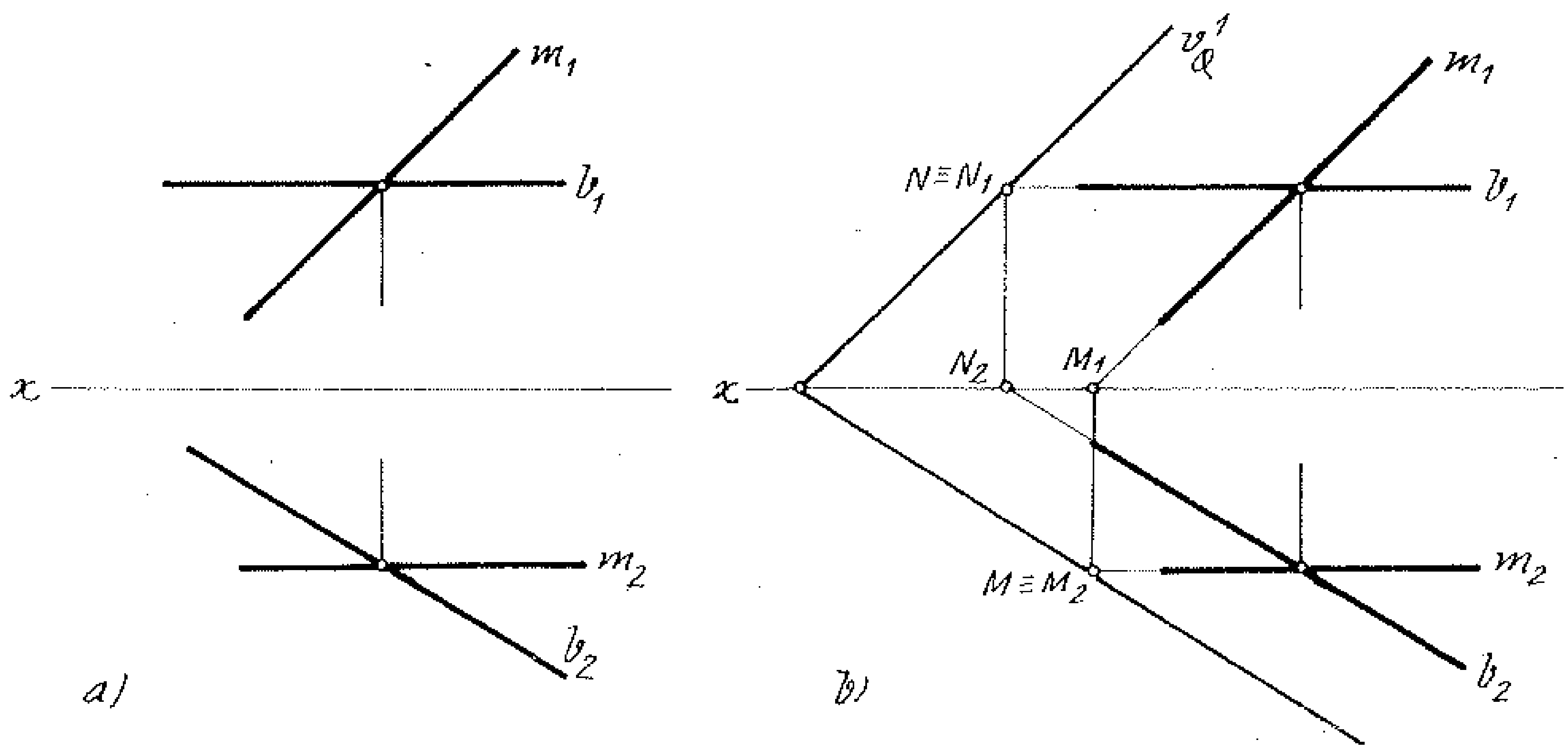
Điểm F với $F_1 \equiv F_2 = q_1 \cap q_2$.

Đường thẳng $g \equiv EF$ là đường thẳng thuộc mặt phẳng phân giác thứ hai $\mathcal{G}$

– Gọi K là điểm thuộc ($\mathcal{Q}$) và có độ cao bằng độ xa và bằng h, đó cũng là điểm thuộc đường thẳng bằng b đã vẽ trên và có độ xa bằng h. Dễ dàng xác định được $K_2 = b_2 \cap b'_1$ với b'_1 là đường thẳng đối xứng với b_1 qua trục x. Từ K_2 suy ra $K_1 \in b_1$.

Cũng có thể xác định $K_1 = b_1 \cap b'_2$ với b'_2 là đường thẳng đối xứng với b_2 qua trục x. Từ K_1 suy ra $K_2 \in b_2$. Bạn đọc tự vẽ hình.

Thí dụ 3. Vẽ các vết của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ $(b \cap m)$ (Hình 2–29a).



Hình 2–29

Giải : Vì b và m lần lượt là đường thẳng bằng và đường thẳng mặt của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ nên hướng của hai vết của ($\mathcal{Q}$) đã biết, do đó chỉ cần tìm một điểm nào đó thuộc một trong hai vết là có thể vẽ được chúng. Chẳng hạn xác định vết đứng N của đường thẳng bằng b, (Hình 2-29b).

Qua điểm $N \equiv N_1$ vẽ vết đứng của ($\mathcal{Q}$) là $v^1_{\mathcal{Q}} \,//\, m_1$. Qua giao điểm $\mathcal{Q}_x = v^1_{\mathcal{Q}} \cap x$ vẽ vết bằng của ($\mathcal{Q}$) là $v^2_{\mathcal{Q}} \,//\, b_2$.

Cũng có thể xác định vết bằng của đường thẳng mặt m rồi vẽ vết bằng và vết đứng của ($\mathcal{Q}$). Bạn đọc tự vẽ hình.

Chú ý :

a – Vết của một mặt phẳng chứa vết cùng tên của các đường thẳng thuộc nó.

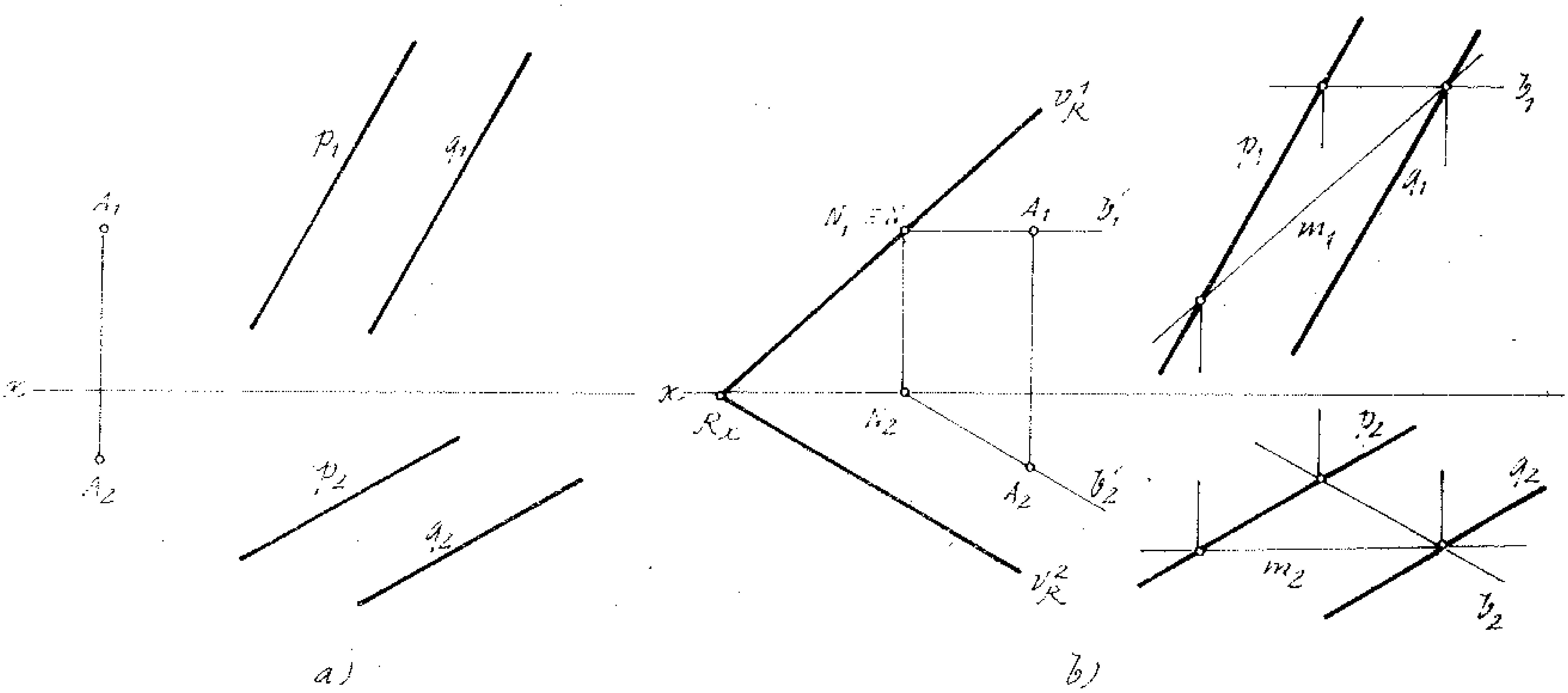
b – Vết đứng của mặt phẳng song song với các đường thẳng mặt của nó.

Vết bằng của mặt phẳng song song với các đường thẳng bằng của nó.

c – Mặt phẳng không song song với trục hình chiếu có hai vết cắt nhau tại một điểm trên trục đó.

Thí dụ 4. Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (p//q) và điểm A không thuộc ($\mathcal{Q}$), (Hình 2 – 30a). Qua A dựng mặt phẳng $\mathcal{R}$ song song với mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Biểu diễn ($\mathcal{R}$) bằng các vết của nó.

Giải :



Hình 2–30

Vì ($\mathcal{R}$) // ($\mathcal{Q}$) nên vết đứng của ($\mathcal{R}$) song song với một đường thẳng mặt của ($\mathcal{Q}$) và vết bằng của ($\mathcal{R}$) song song với một đường thẳng bằng của ($\mathcal{Q}$).

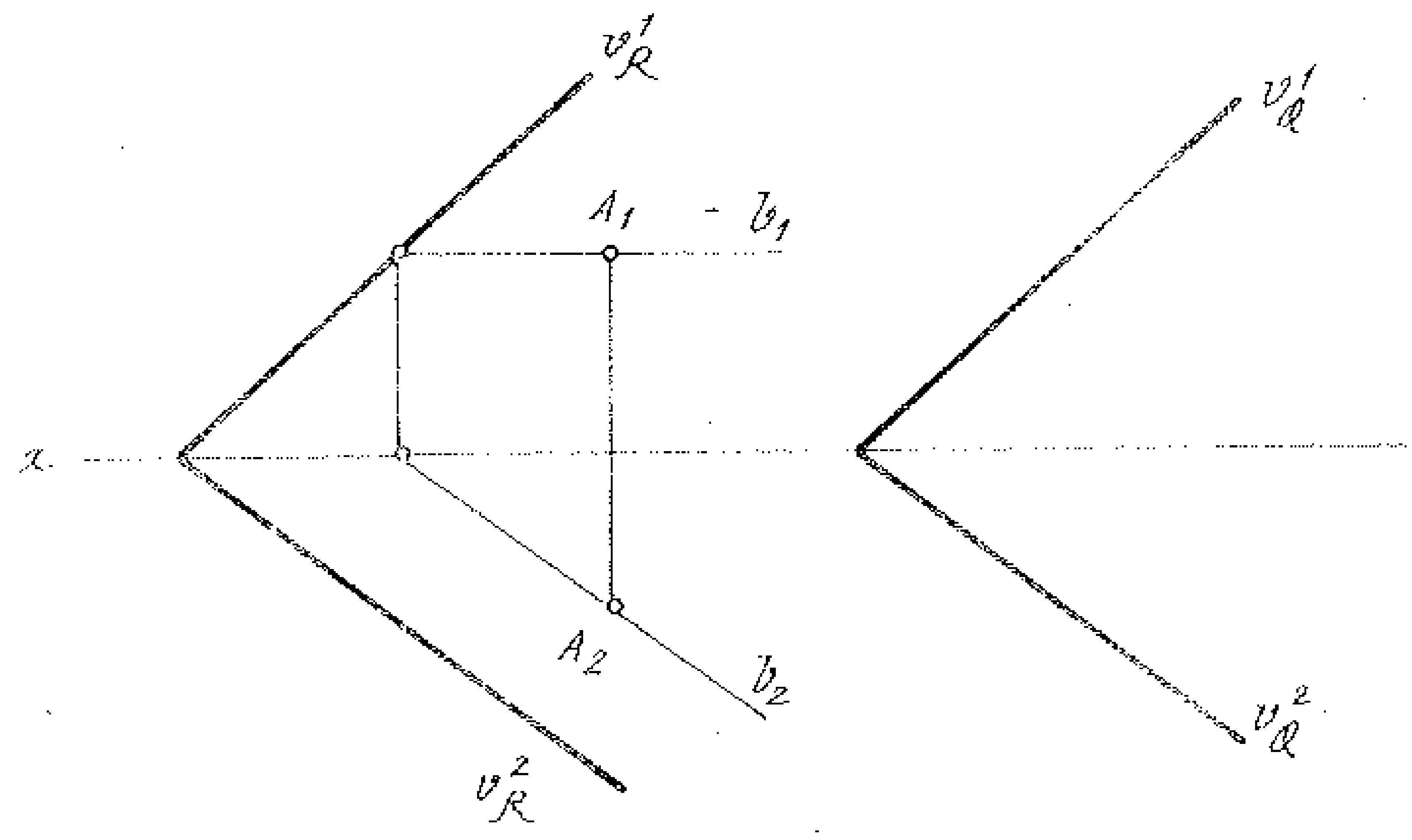
Các vết của ($\mathcal{R}$) có thể xác định như sau (Hình 2-30b).

– Trong mặt phẳng $\mathcal{Q}$ vẽ đường thẳng bằng b và đường thẳng mặt m.

– Qua điểm A vẽ đường thẳng b' // b rồi tìm vết đứng N của b'.

– Qua $N \equiv N_1$ vẽ vết đứng của ($\mathcal{R}$) là $v^1_{\mathcal{R}} \,//\, m_1$ và qua điểm $\mathcal{R}_x = v^1_{\mathcal{R}} \cap x$ vẽ vết bằng của ($\mathcal{R}$) là $v^2_{\mathcal{R}} \,//\, b_2$ (hoặc // b'_2).

Chú ý : Bài toán trở nên đơn giản hơn nếu mặt phẳng $\mathcal{Q}$ được xác định bằng các vết của nó. Khi đó các vết của mặt phẳng $\mathcal{R}$ sẽ song song với các vết cùng tên của $\mathcal{Q}$ (Hình 2–31).



Hình 2–31

2.3.2. Bài tập

Bài 18 : Vẽ hình chiếu bằng của ngũ giác phẳng ABCDE biết hình chiếu đứng của nó và hình chiếu bằng của ba đỉnh A, B, C (Hình 2–32).

Bài 19 : Qua điểm A dựng mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{Q}$ và mặt phẳng chiếu bằng $\mathcal{R}$ biết rằng ($\mathcal{Q}$) và ($\mathcal{R}$) đều song song với đường thẳng a (Hình 2–33). Biểu diễn ($\mathcal{Q}$) và ($\mathcal{R}$) bằng các vết của chúng.

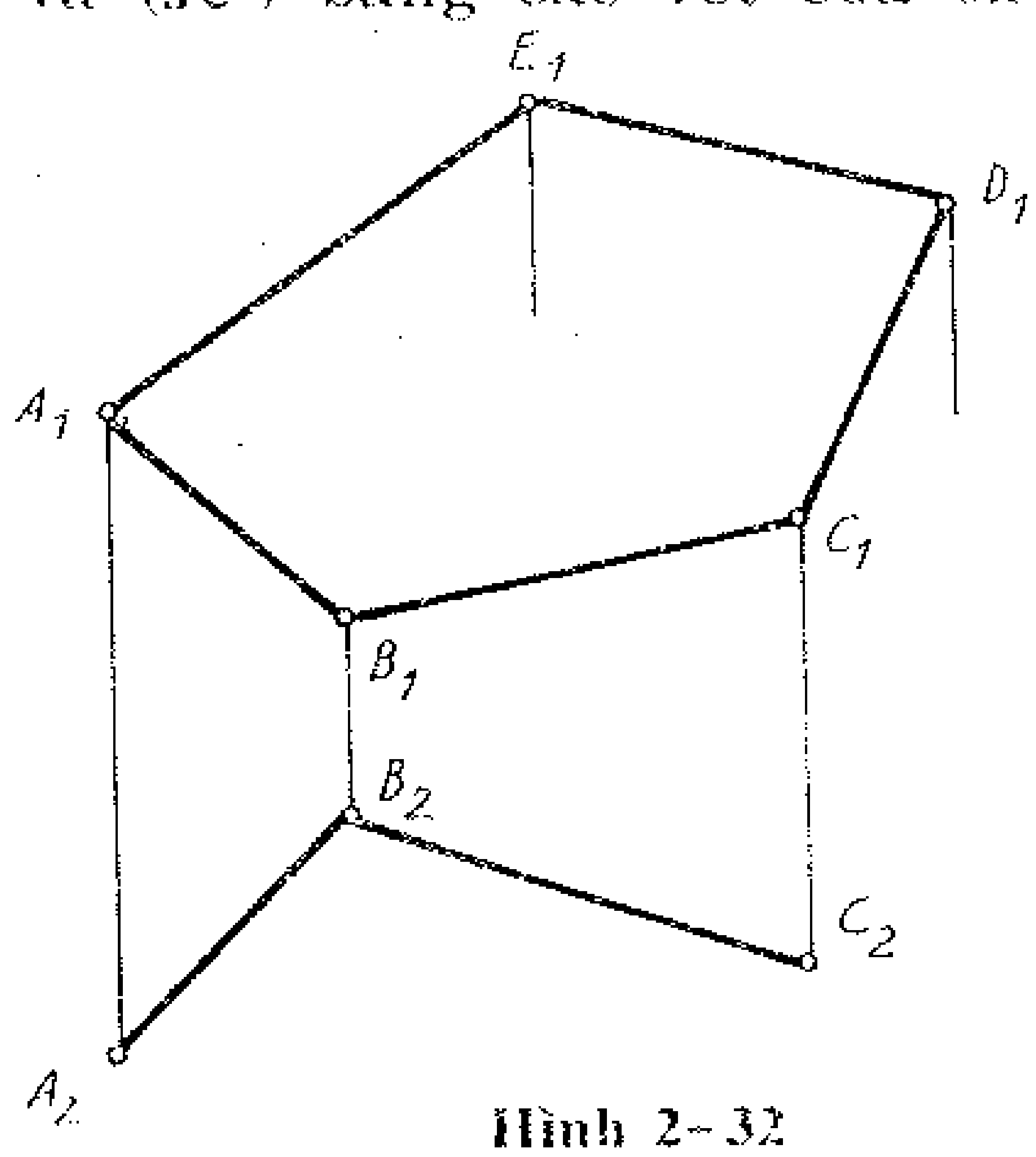
Bài 20 : Qua điểm A vẽ đường thẳng bằng song song với mặt phẳng $\mathcal{Q}$ trong các trường hợp sau.

– $\mathcal{Q}$ (p ∩ q) (Hình 2–34 a)

– $\mathcal{Q}$ (p //q) (Hình 2–34 b)

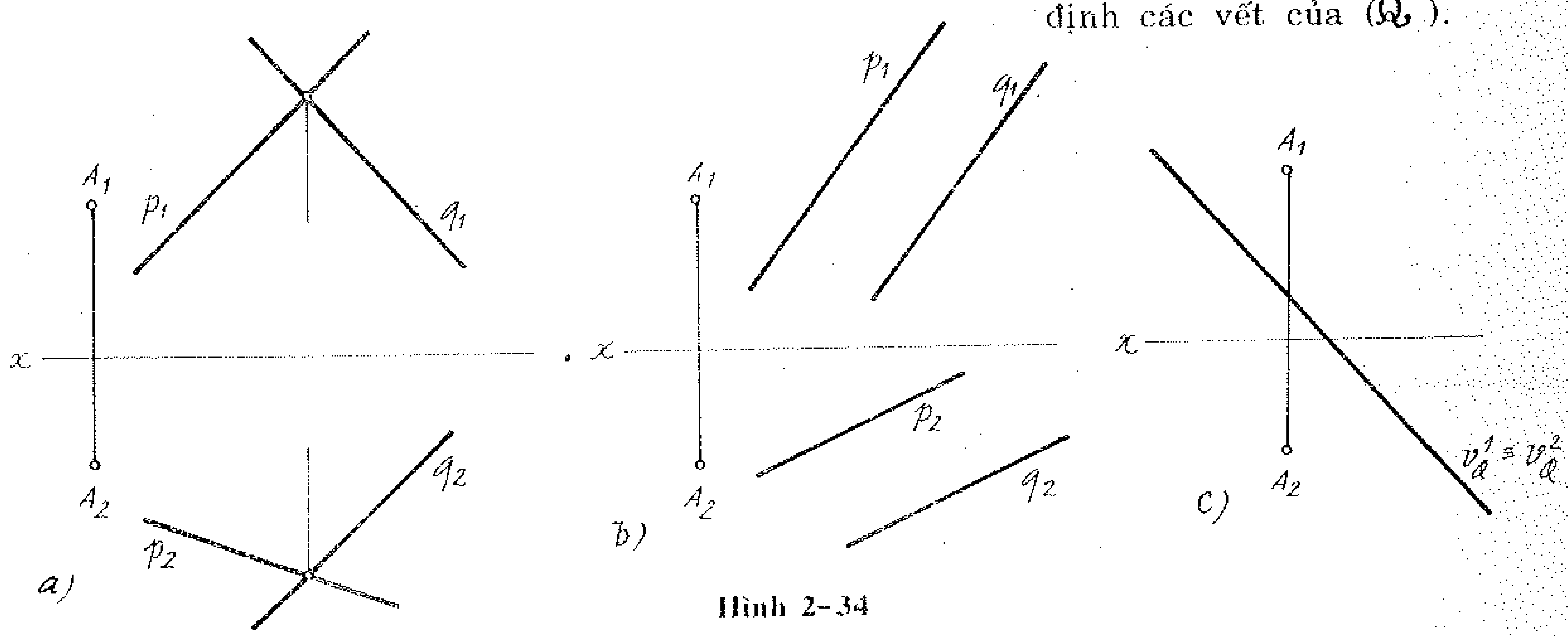
–$\mathcal{Q}$ ($v_{\mathcal{Q}}^1$, $v_{\mathcal{Q}}^2$) (Hình 2–34 c)

Bài 21 : Qua điểm A dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ song song với hai đường thẳng chéo nhau p và q (Hình 2–35 a, b). Xác định các vết của ($\mathcal{Q}$).

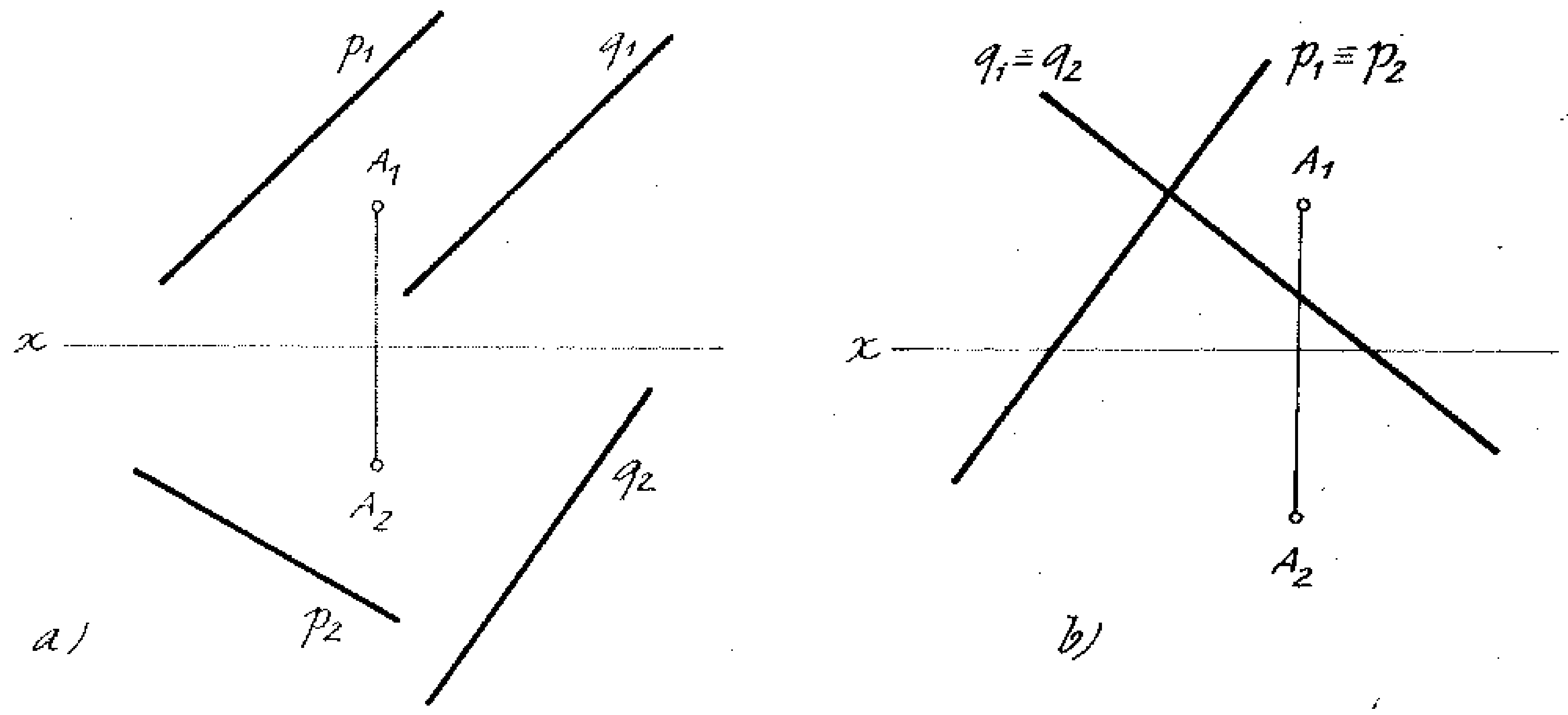


Hình 2–32

Hình 2–33

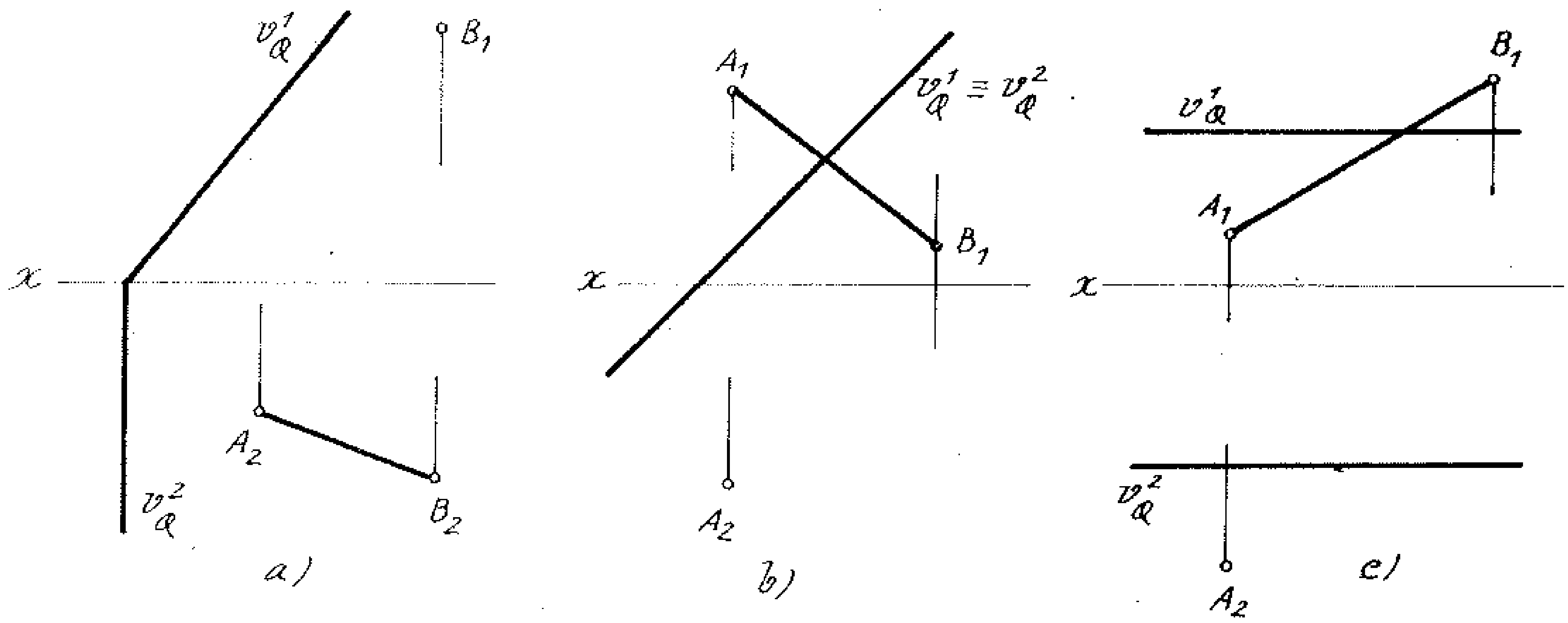


Hình 2–34



Hình 2-35

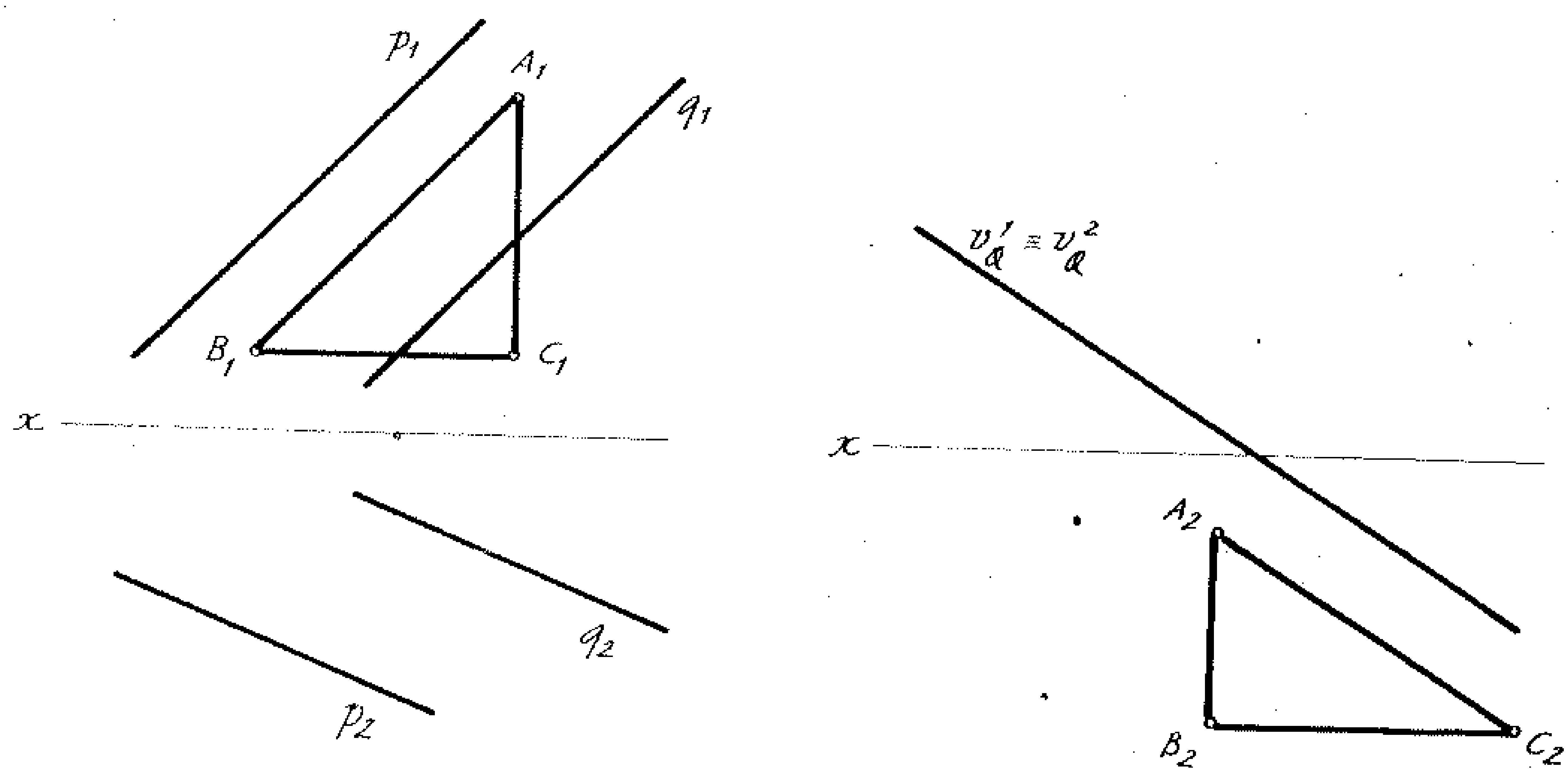
Bài 22 : Vẽ hình chiếu còn thiếu của đường thẳng AB biết rằng AB song song với mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (Hình 2-36 a, b, c).



Hình 2-36

Bài 23 : Vẽ hình chiếu còn lại của tam giác ABC thuộc mặt phẳng $\mathcal{Q}$ trong các trường hợp sau :

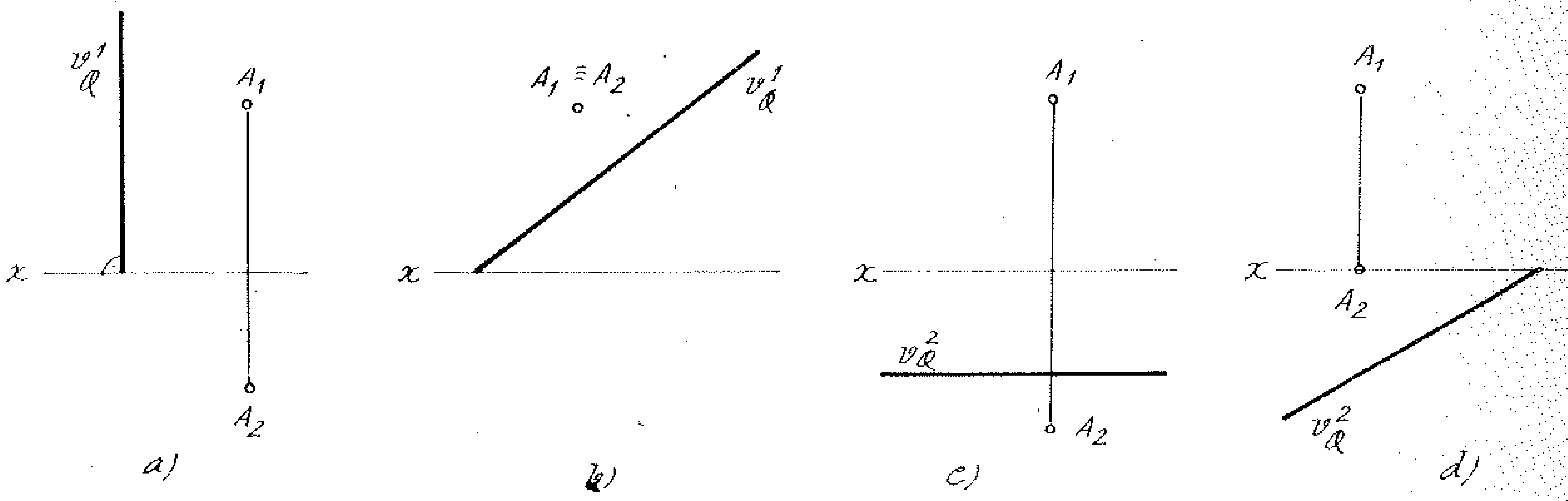
a) $\mathcal{Q}$ (p // q) ; A_1 B_1 // p_1 ; q_1 (Hình 2-37 a).



Hình 2-37

b- $\mathcal{Q}$ ($v^1_{\mathcal{Q}}$; $v^2_{\mathcal{Q}}$; A_2B_2 // $v^2_{\mathcal{Q}}$ (Hình 2-37 b).

Bài 24 : Cho một vết của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và một điểm A thuộc mặt phẳng đó (Hình 2-38a, b, c, d). Vẽ vết còn lại của ($\mathcal{Q}$).



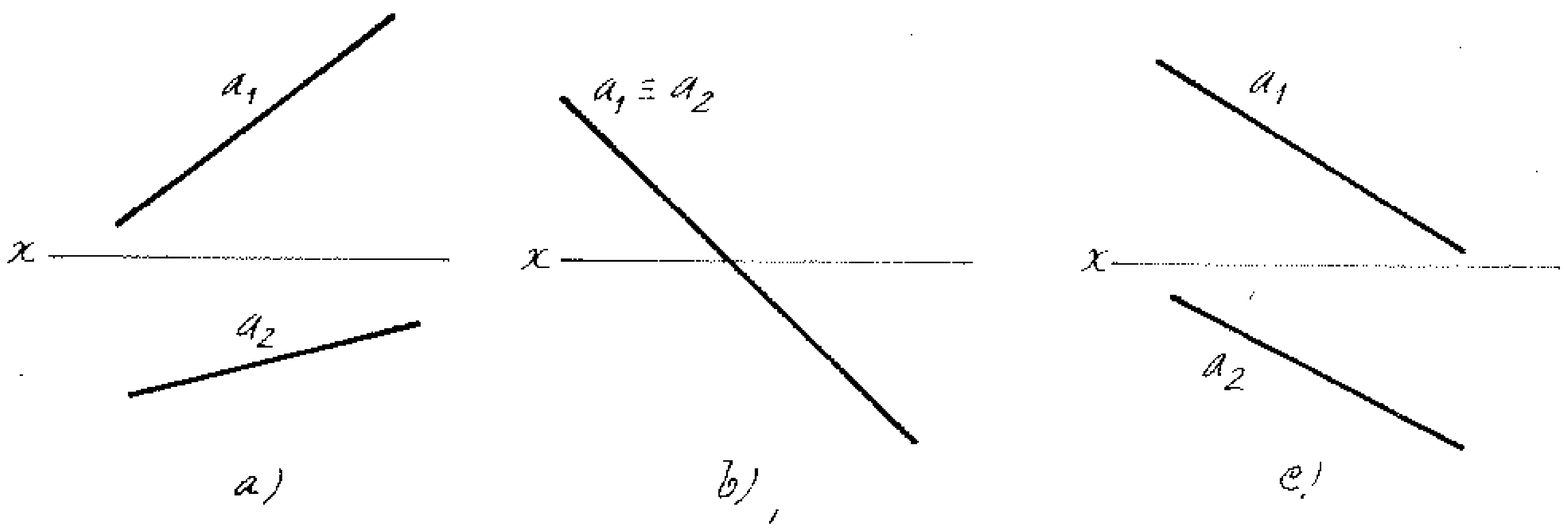
Hình 2-38

Bài 25 : Vẽ các vết của mặt phẳng Q chứa đường thẳng a trong các trường hợp sau :

a- $\mathcal{Q}$ là mặt phẳng chiếu đứng (Hình 2-39 a).

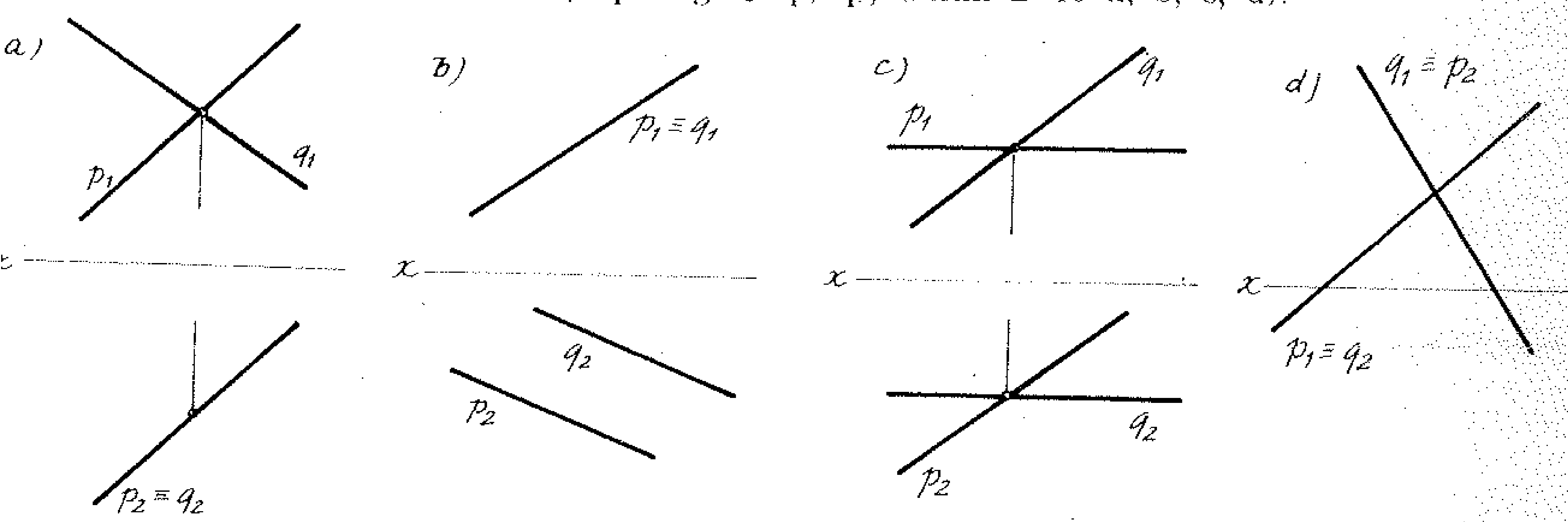
b- $\mathcal{Q}$ là mặt phẳng chiếu bằng (Hình 2-39 b).

c- $\mathcal{Q}$ có hai vết trùng nhau (Hình 2-39 c).



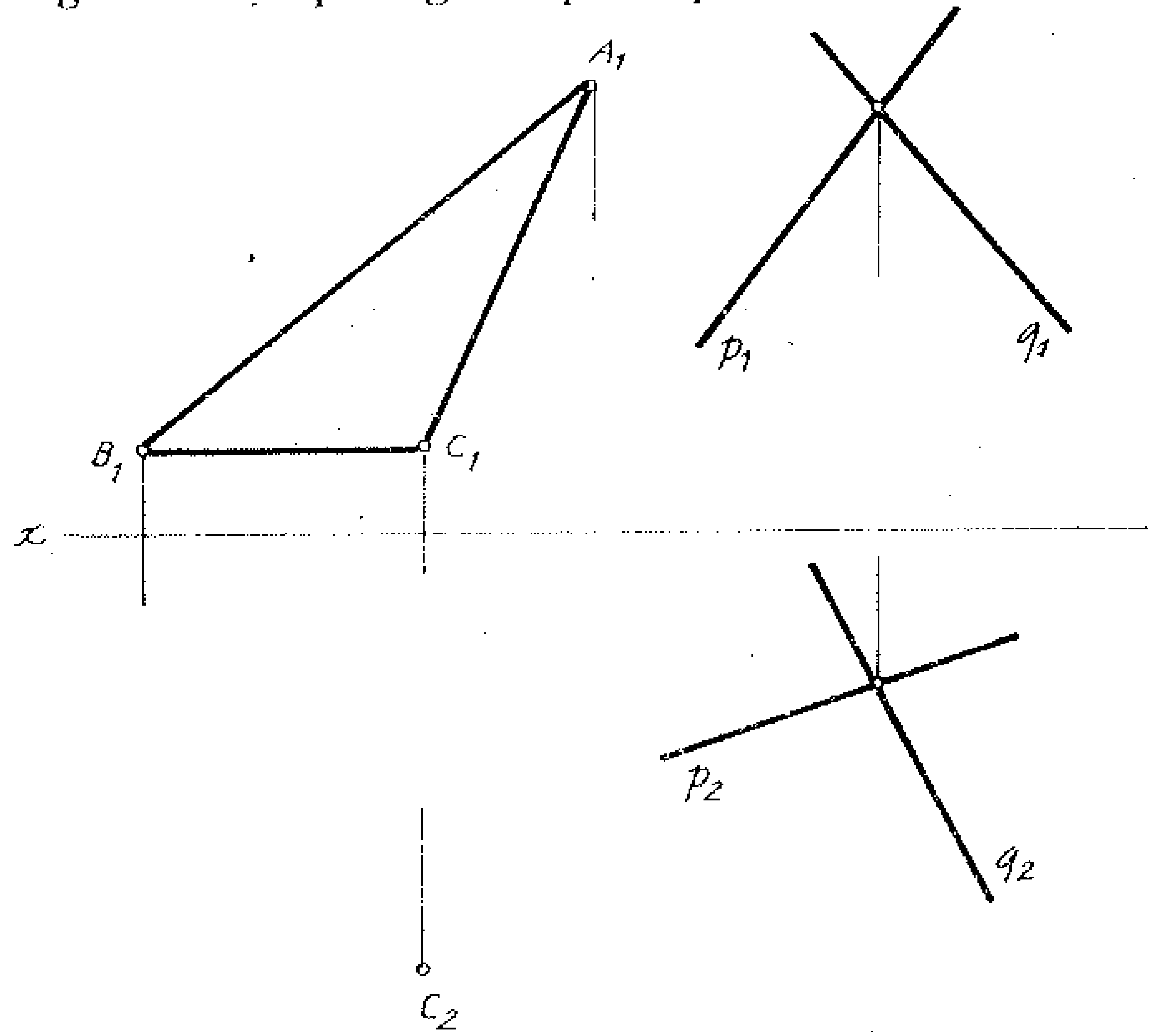
Hình 2-39

Bài 26 : Vẽ các vết của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (p, q), (Hình 2-40 a, b, c, d).

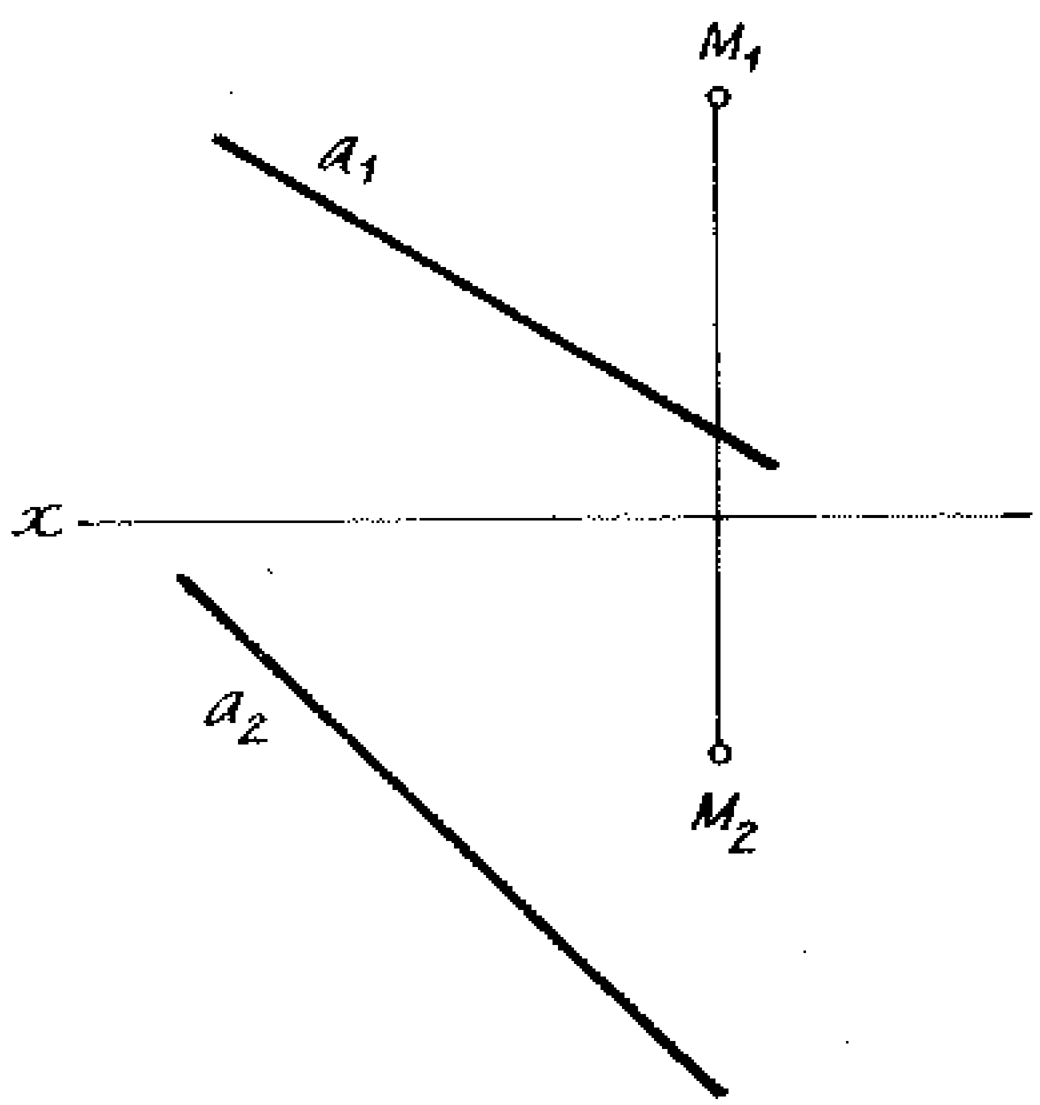


Hình 2-40

Bài 27 : Vẽ hình chiếu bằng của tam giác ABC biết rằng ABC thuộc một mặt phẳng song song với mặt phẳng Q $(p \cap q)$, (Hình 2-41).



Hình 2-41



Hình 2-42

Bài 28 : Qua điểm M vẽ một đường thẳng cắt trục hình chiếu x và đường thẳng a cho trước (Hình 2-42).

CHƯƠNG 3

CÁC BÀI TOÁN VỀ VỊ TRÍ

3.1. Có hai loại bài toán cơ bản về vị trí :

+ Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

+ Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

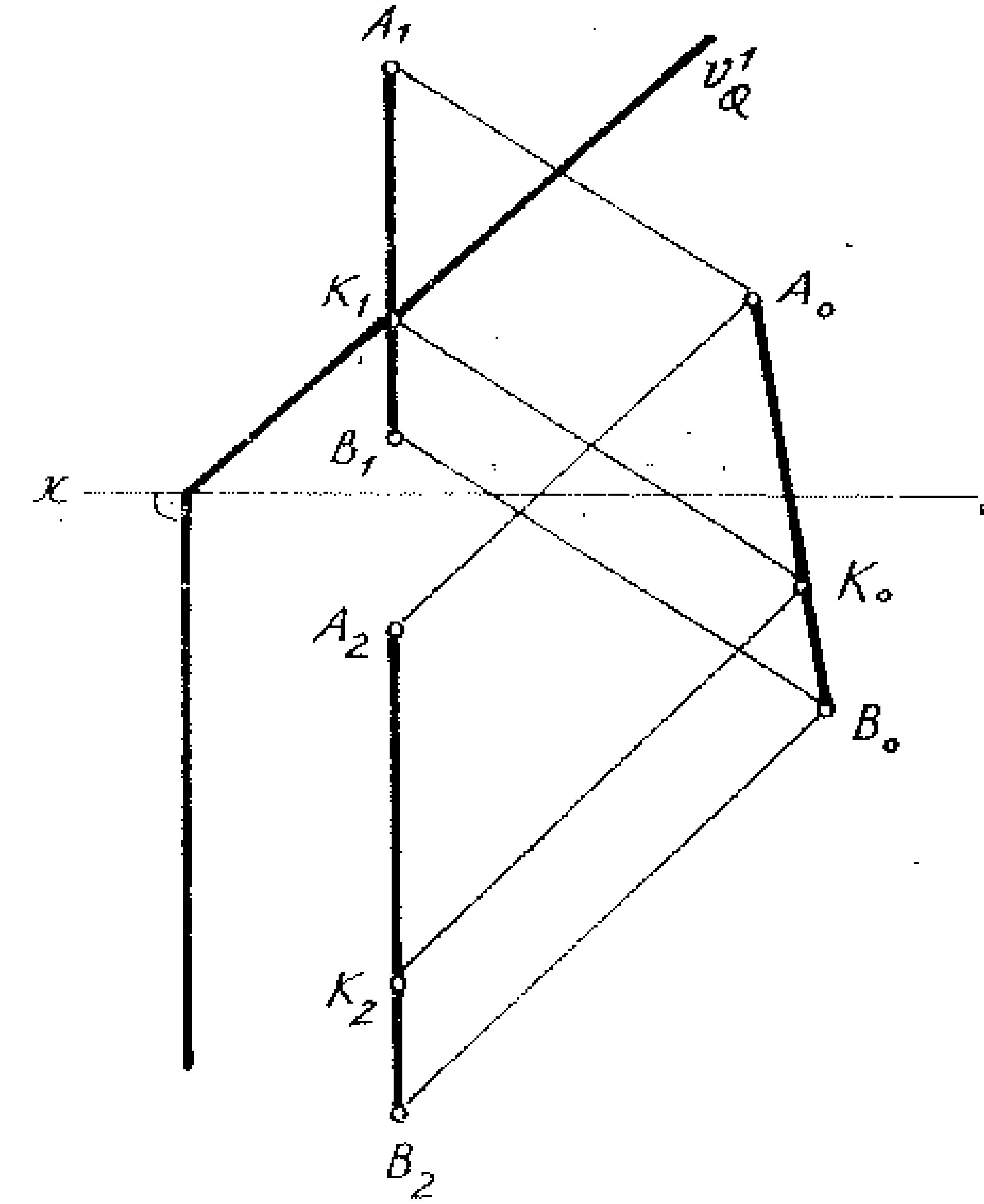
Thí dụ 1: Tìm giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{Q}$, (Hình 3-1).

Giải : Gọi $K = AB \cap \mathcal{Q}$

- Vì ($\mathcal{Q}$) là mặt phẳng chiếu đứng nên

$$K_1 = A_1B_1 \cap v^1_{\mathcal{Q}}$$

- Vì AB là đường thẳng cạnh nên hình chiếu bằng K_2 của K được xác định sao cho $(A_1B_1K_1) = (A_2B_2K_2)$.



Hình 3-1

Cách làm đã được chỉ rõ trên hình vẽ.

Thí dụ 2: Tìm giao điểm của đường thẳng chiếu bằng d và mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (p ∩ q), (Hình 3-2).

Giải : Gọi $K = d \cap (\mathcal{Q})$

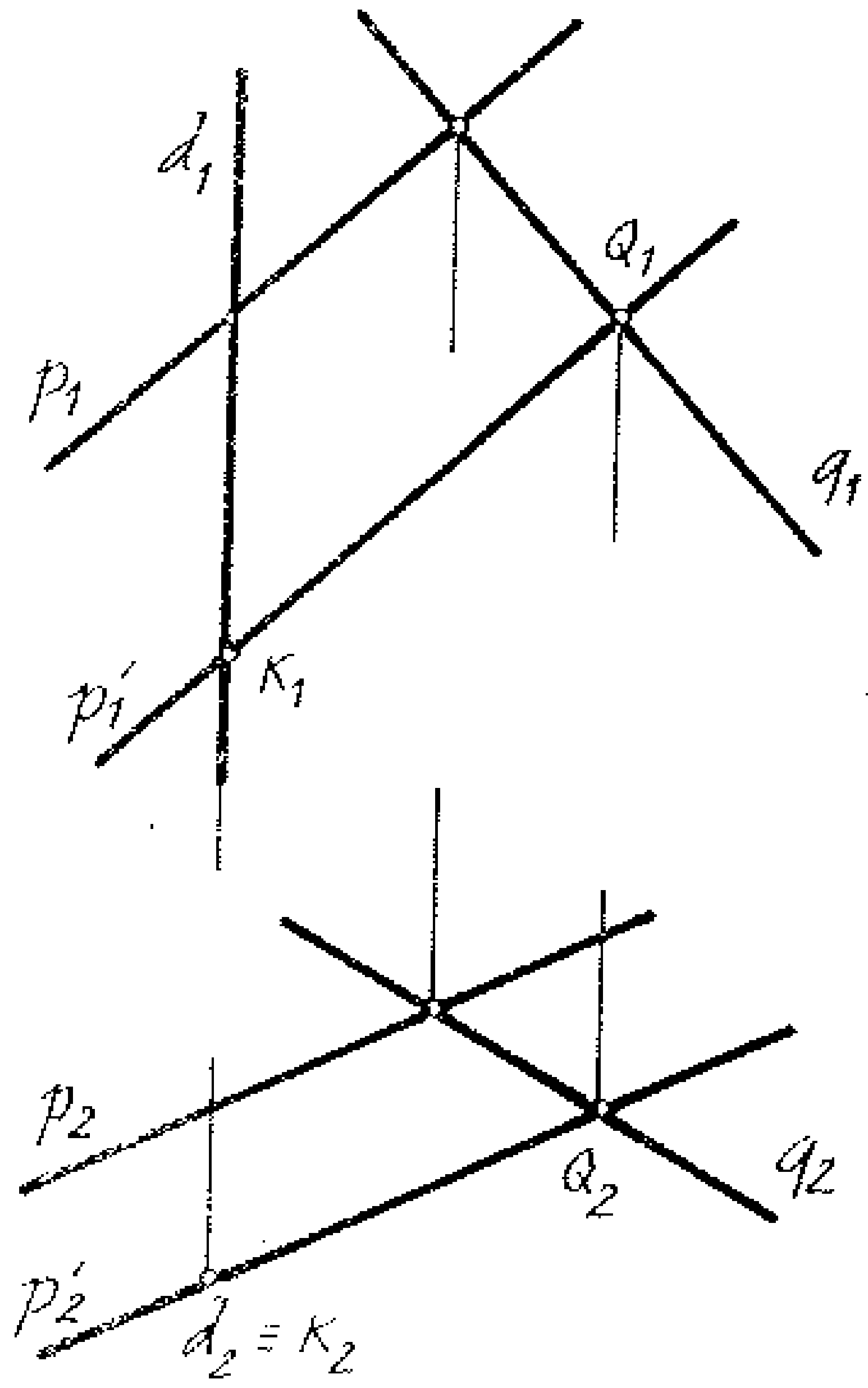
– Vì d là đường thẳng chiếu bằng nên $K_2 \equiv d_2$

– Để xác định K_1 có thể gắn K vào một đường thẳng nào đó thuộc mặt phẳng $\mathcal{Q}$, chẳng hạn đường thẳng p' // p :

Qua $K_2 \equiv d_2$ vẽ $p'_2 \,//\, p_2$, ta có $Q_2 = p'_2 \cap q_2$

Từ Q_2 suy ra $Q_1 \in q_1$. Qua Q_1 vẽ $p'_1 \,//\, p_1$

$K_1 = d_1 \cap p'_1$.



Hình 3-2

Thí dụ 3: Vẽ giao tuyến của hình phẳng ABC với mặt phẳng chiếu bằng $\mathcal{Q}$, (Hình 3-3).

Giải : Gọi $IK = (ABC) \cap (\mathcal{Q})$

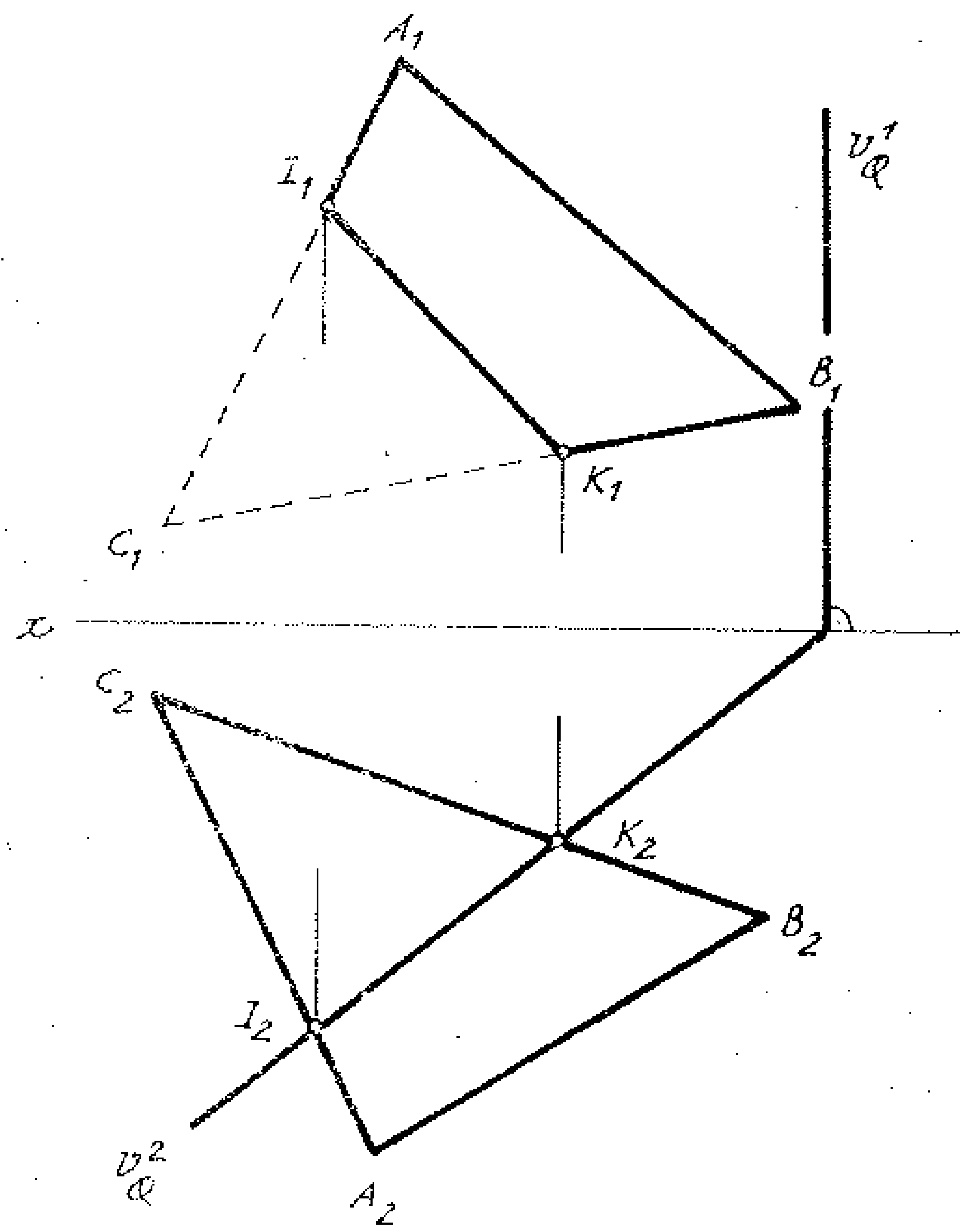
trong đó $I = AC \cap (\mathcal{Q})$ và $K = BC \cap (\mathcal{Q})$

Vì $(\mathcal{Q})$ là mặt phẳng chiếu bằng nên $I_2K_2 \equiv v^2_{\mathcal{Q}}$

trong đó $I_2 = A_2C_2 \cap v^2_{\mathcal{Q}}$; $K_2 = B_2C_2 \cap v^2_{\mathcal{Q}}$

Dễ dàng suy ra hình chiếu đứng I_1K_1 của giao tuyến. Trên hình chiếu đứng cũng chỉ rõ phần thấy và khuất của hình phẳng ABC đối với mặt phẳng $\mathcal{Q}$.

Nhận xét : Qua 3 thí dụ trên ta thấy rằng khi giải bài toán xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng hoặc giao tuyến của hai mặt phẳng, nếu có một yếu tố (đường thẳng hoặc mặt phẳng) ở vị trí vuông góc với một mặt phẳng hình chiếu (đường thẳng chiếu hoặc mặt phẳng chiếu) thì một hình chiếu của giao xác định được ngay trên hình đã cho. Hình chiếu còn lại của giao dễ dàng suy ra được bằng cách dùng các điều kiện liên thuộc của điểm với đường thẳng hoặc mặt phẳng.



Hình 3-3

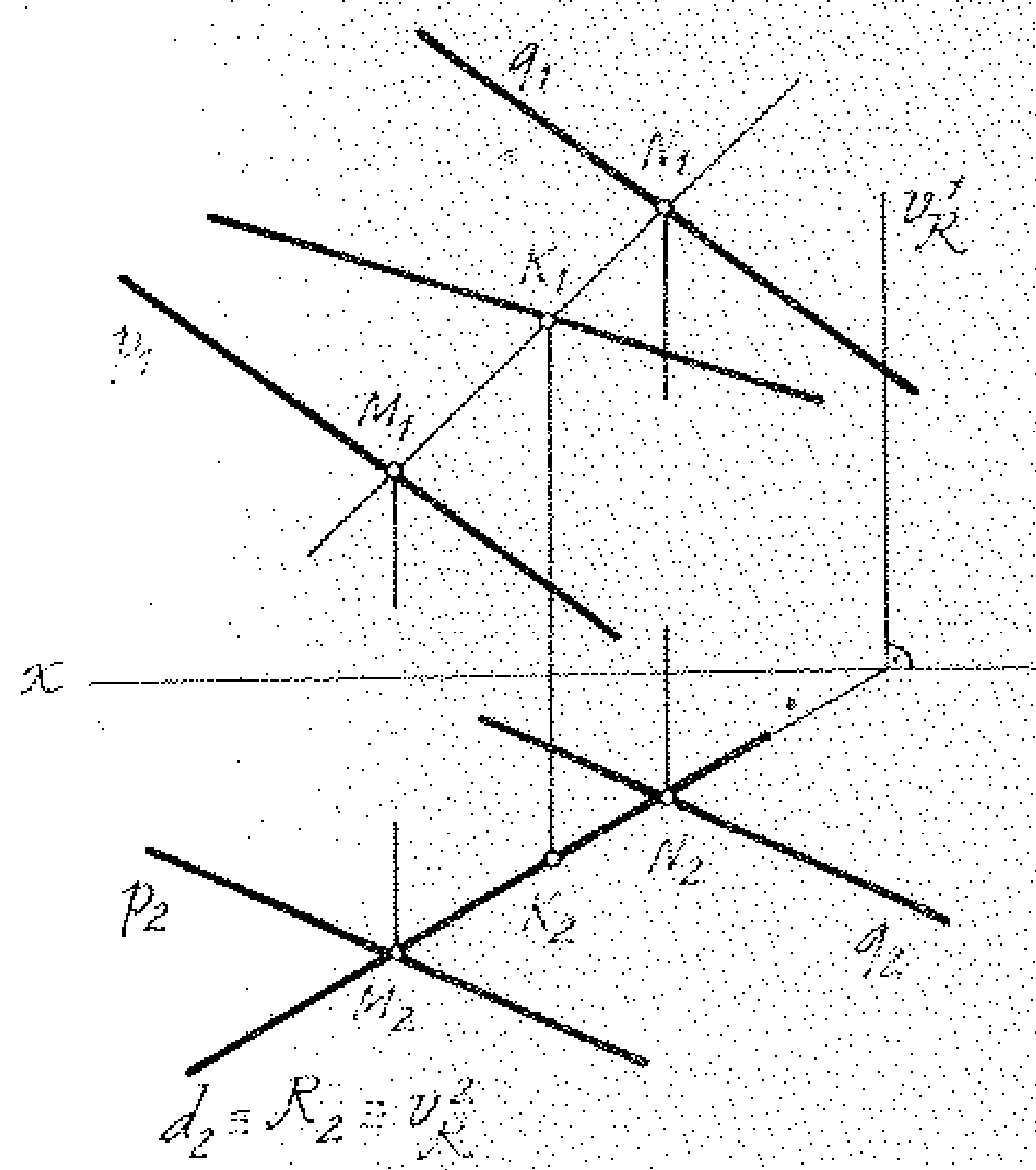
Thí dụ 4: Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (p // q) (Hình 3-4).

Giải : Gọi $K = d \cap (Q)$. Giao điểm K có thể xác định được bằng phương pháp mặt phẳng phụ trợ. Trình tự giải gồm 3 bước :

– Qua d dựng một mặt phẳng phụ trợ $\mathcal{R}$, chẳng hạn là mặt phẳng chiếu bằng : $d_2 \equiv \mathcal{R}_2$ ($\equiv v^2_P$).

– Vẽ giao tuyến MN = ($\mathcal{R}$) ∩ ($\mathcal{Q}$). Cách làm tương tự như ở thí dụ 3.

– Xác định giao điểm K = d ∩ MN với $K_1 = d_1 \cap M_1N_1$ và $K_2 \in d_2$. Điểm K là giao điểm cần tìm của d và ($\mathcal{Q}$).



Hình 3-4

Thí dụ 5: Vẽ giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ (v^1_p, v^2_p) và $\mathcal{Q}$ ($v^1_{\mathcal{Q}}$, $v^2_{\mathcal{Q}}$). (Hình 3-5).

Giải : Để vẽ giao tuyến của hai mặt phẳng, phải xác định 2 điểm chung của chúng và nối lại bằng đường thẳng.

Trong bài toán này điểm chung thứ nhất M của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) là giao điểm của hai vết bằng của hai mặt phẳng đó

$$M \equiv M_2 = v^2_p \cap v^2_{\mathcal{Q}} \text{ ; } M_1 \in x.$$

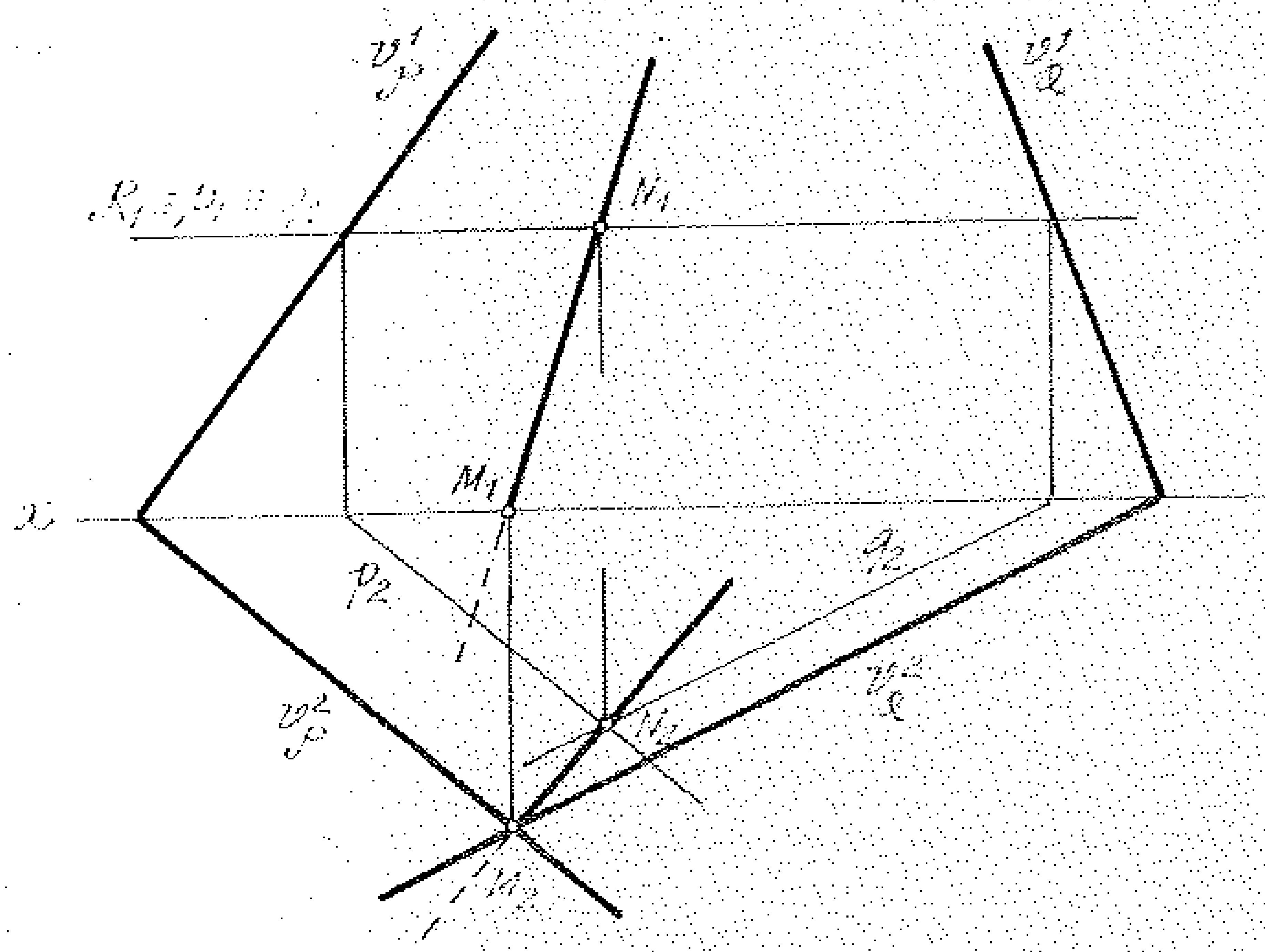
Điểm chung thứ hai N có thể xác định bằng phương pháp mặt phẳng phụ trợ như sau.

– Cắt cả ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) bằng một mặt phẳng $\mathcal{R}$, chẳng hạn là một mặt phẳng bằng. – Vẽ hai giao tuyến phụ :

$$p = (\mathcal{R}) \cap (\mathcal{P})$$

$$q = (\mathcal{R}) \cap (\mathcal{Q})$$

Ở đây p và q lần lượt là đường bằng của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$), do đó : $p_2 \,//\, v^2_p$; $q_2 \,//\, v^2_{\mathcal{Q}}$.



Hình 3-5

– Xác định giao điểm N = p ∩ q, trong đó

$$N_2 = p_2 \cap q_2 \text{ ; } N_1 \in p_1 (\equiv q_1 \equiv \mathcal{R}_1).$$

MN là giao tuyến cần vẽ.

Nhận xét: Khi giải bài toán vẽ giao tuyến của hai mặt phẳng, nếu đã biết hướng của giao tuyến thì chỉ cần xác định một điểm chung của hai mặt phẳng đó là vẽ được giao tuyến.

Trên hình 3-6 cho hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ có các vết đứng v^1_p và $v^1_{\mathcal{Q}}$ song song. Rõ ràng giao tuyến g = ($\mathcal{P}$) ∩ ($\mathcal{Q}$) phải song song với hai vết đứng đó, nói khác đi g là một đường thẳng mặt của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$).

Xác định giao tuyến g như sau.

– Xác định một điểm chung của $(\mathcal{P})$ và $(\mathcal{Q})$:

$$M = v_{\mathcal{P}}^{2} \cap v_{\mathcal{Q}}^{1}$$

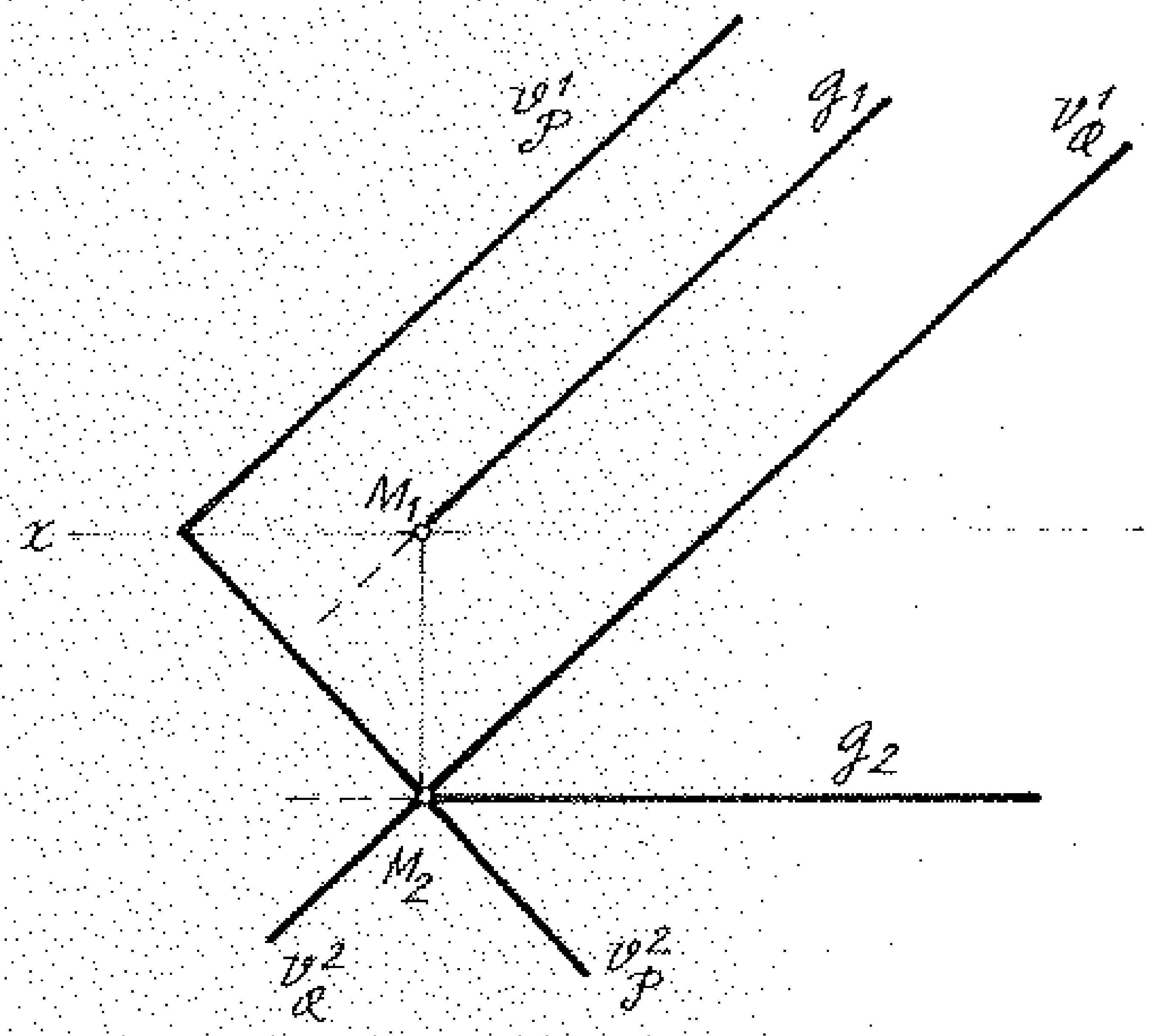
– Qua M vẽ g // $v_{\mathcal{P}}^{1}$ (// $v_{\mathcal{Q}}^{1}$) trong đó :

$$g_2 \,//\, x \text{ và } g_2 \in M_2.$$

$$g_1 \,//\, v_{\mathcal{P}}^{1} \;(//\, v_{\mathcal{Q}}^{1} \text{ và } g_1 \in M_1).$$

Thí dụ 6: Vẽ giao tuyến của hình phẳng ABC và mặt phẳng $\mathcal{Q}$ ($v_{\mathcal{Q}}^{1}$, $v_{\mathcal{Q}}^{2}$). Xét thấy và khuất của ABC so với $(\mathcal{Q})$ trên hai hình chiếu (Hình 3–7).

Giải : Để vẽ giao tuyến của hình phẳng ABC và mặt phẳng Q, ta lần lượt xác định các giao điểm I và K của các cạnh AB và BC thuộc hình phẳng ABC với mặt phẳng Q.



Hình 3–6

Cách làm được tiến hành như ở thí dụ 4 và đã được chỉ rõ trên hình vẽ.

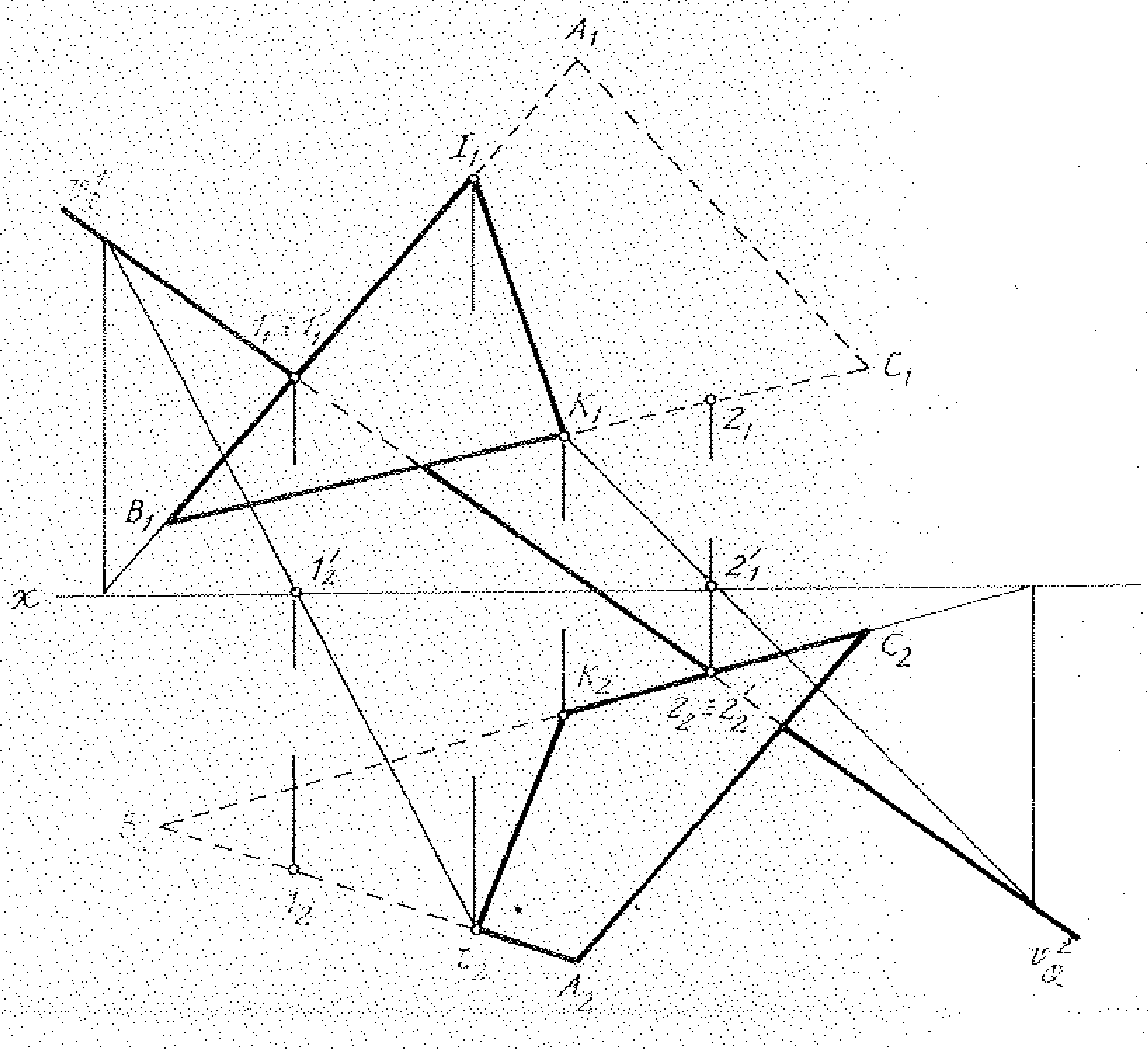
Việc xét thấy khuất của ABC đối với $(\mathcal{Q})$ được tiến hành độc lập trên mỗi hình chiếu.

– Trên hình chiếu đứng: xét hai điểm cùng tia chiếu đứng 1 và 1', trong đó 1 $\in$ AB và 1' $\in$ $v_{\mathcal{Q}}^{1}$.

Điểm 1 có độ xa > 0 ; điểm 1' có độ xa = 0 (vì $1'_2 \in x$), do đó điểm 1 thấy ; điểm 1' khuất. Suy ra phần BIK của ABC thấy trên hình chiếu đứng, phần còn lại ACKI khuất.

– Trên hình chiếu bằng: xét hai điểm cùng tia chiếu bằng 2 và 2' trong đó 2 $\in$ BC và 2' $\in$ $v_{\mathcal{Q}}^{2}$.

Điểm 2 có độ cao > 0 ; điểm 2' có độ cao = 0 (vì $2'_1 \in x$), do đó điểm 2 thấy ; điểm 2' khuất.



Hình 3–7

Suy ra phần ACKI của ABC thấy trên hình chiếu bằng, phần còn lại BIK khuất.

3.2 Bài tập

Bài 1 : Vẽ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{P}$ (Hình 3-8).

a) $\mathcal{P}$ (A, a)

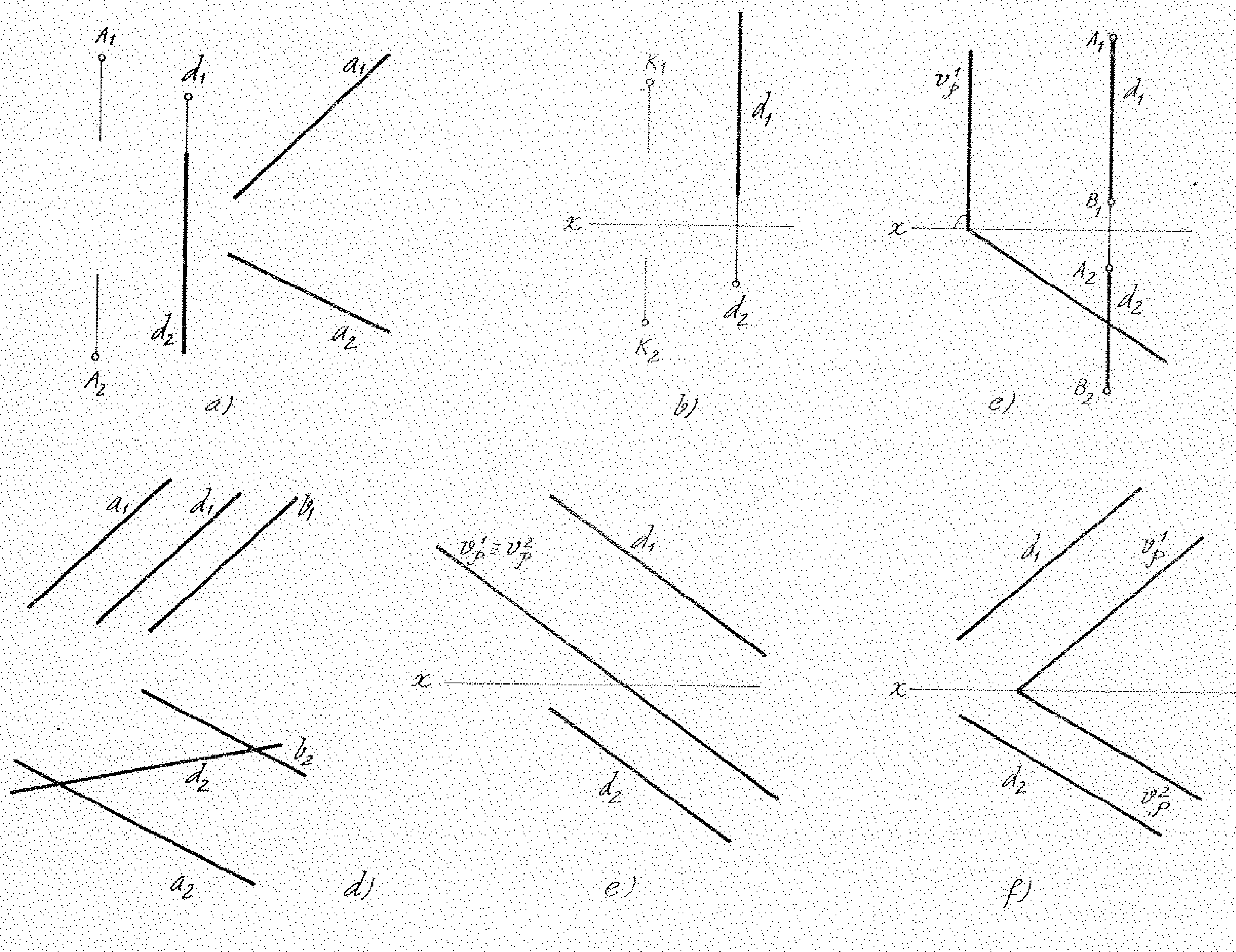
b) $\mathcal{P}$ (K, x)

c) $\mathcal{P}$ ($v_{\mathcal{P}}^1$, $v_{\mathcal{P}}^2$)

d) $\mathcal{P}$ (a // b) ; d_1 // a_1 // b_1

e) $\mathcal{P}$ ($v_{\mathcal{P}}^1 \equiv v_{\mathcal{P}}^2$); d_1 //d_2 // $v_{\mathcal{P}}^1$

f) $\mathcal{P}$ ($v_{\mathcal{P}}^1$, $v_{\mathcal{P}}^2$) ; d_1 // $v_{\mathcal{P}}^1$; d_2 // $v_{\mathcal{P}}^2$



Hình 3-8

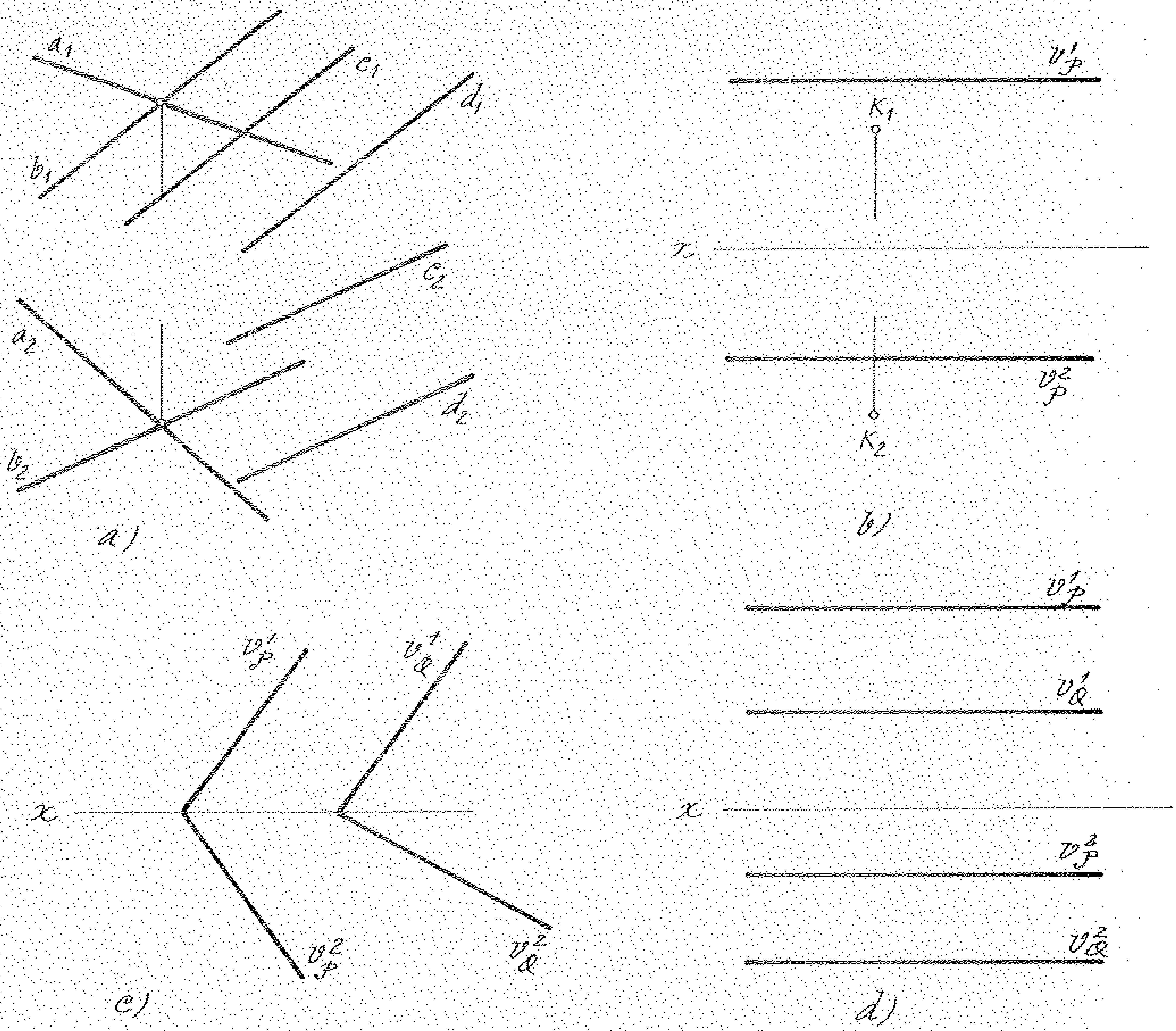
Bài 2 : Vẽ giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ (Hình 3-9).

a) $\mathcal{P}$ (a $\cap$ b) ; $\mathcal{Q}$ (c // d)

b) $\mathcal{P}$ ($v_{\mathcal{P}}^1$, $v_{\mathcal{P}}^2$) ; $\mathcal{Q}$ (K, x)

c) $\mathcal{P}$ ($v_{\mathcal{P}}^1$, $v_{\mathcal{P}}^2$) ; $\mathcal{Q}$ ($v_{\mathcal{Q}}^1$, $v_{\mathcal{Q}}^2$)

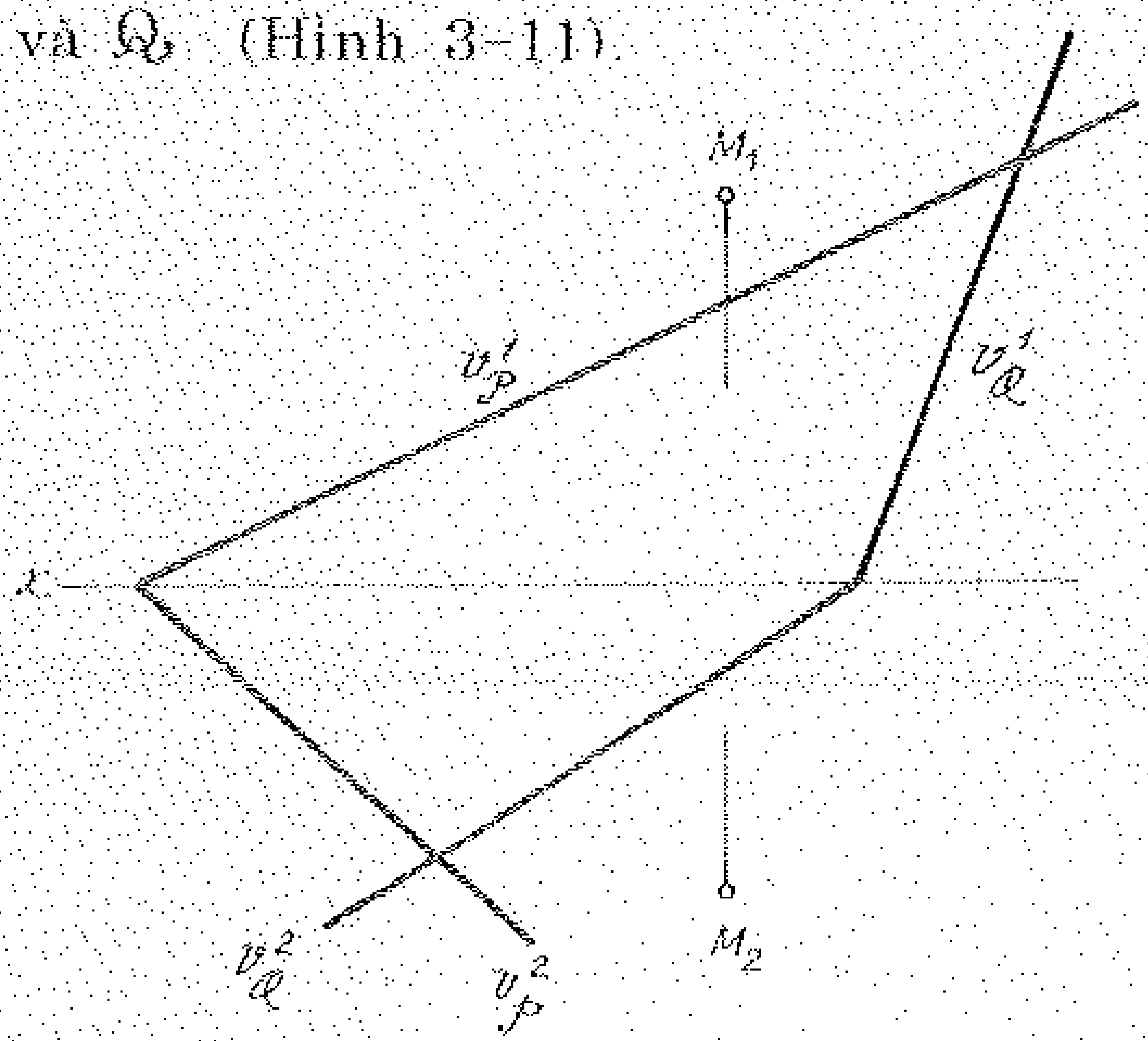
d) $\mathcal{P}$ ($v_{\mathcal{P}}^1$, $v_{\mathcal{P}}^2$) ; $\mathcal{Q}$ ($v_{\mathcal{Q}}^1$, $v_{\mathcal{Q}}^2$)



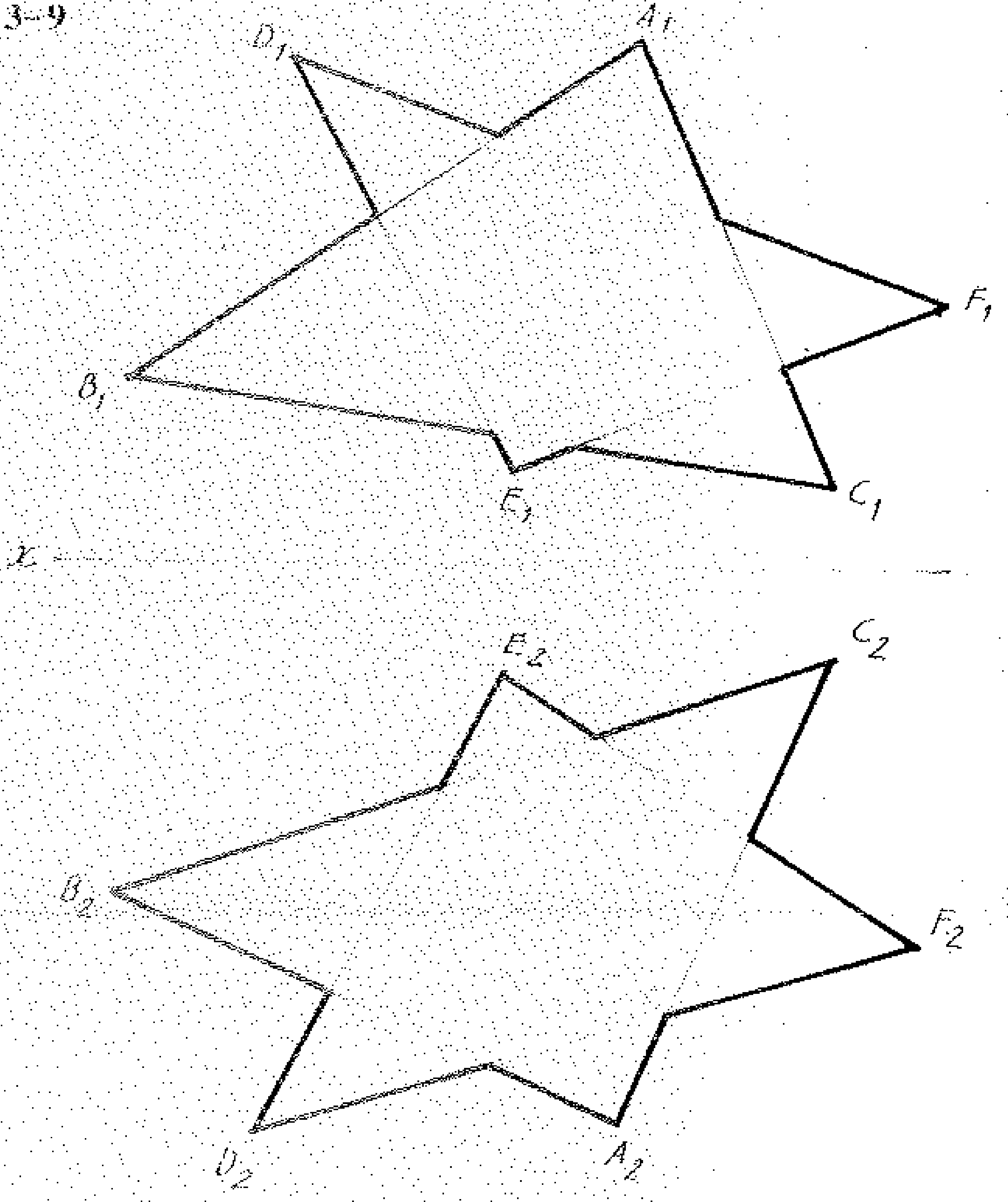
Hình 3-9

Bài 3 : Vẽ giao tuyến của hai hình phẳng. Xét thấy và khuất của chúng trên hai hình chiếu (Hình 3-10).

Bài 4 : Qua điểm M vẽ một đường thẳng song song với hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ (Hình 3-11).



Hình 3-11



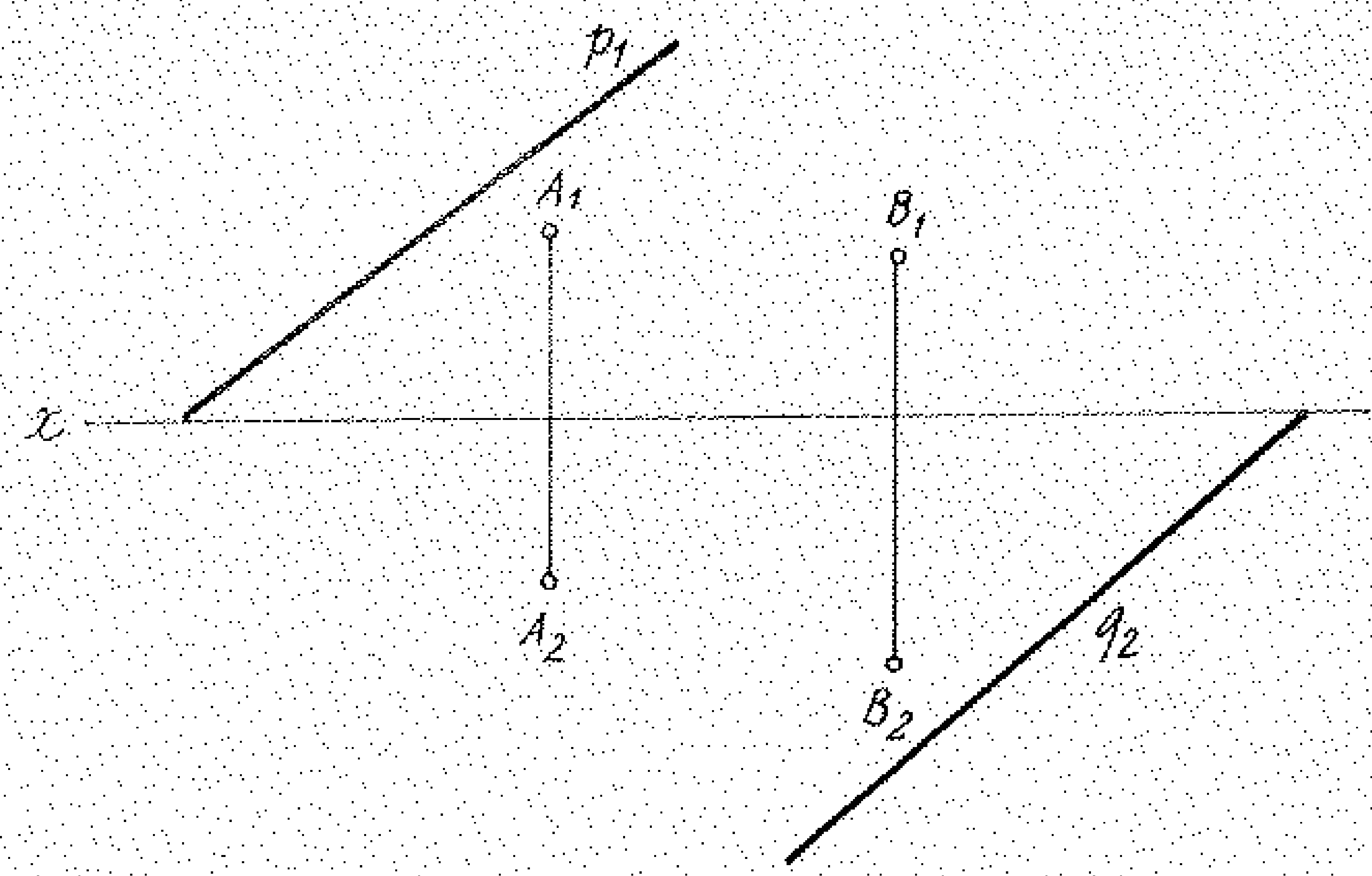
Hình 3-10

Bài 5 : Cho đường thẳng p thuộc mặt phẳng hình chiếu đứng, đường thẳng q thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng và hai điểm A, B, (Hình 3-12). Tìm quỹ tích (tập hợp) của các tâm chiếu S sao cho hình chiếu của A và B từ S lần lượt thuộc p và q.

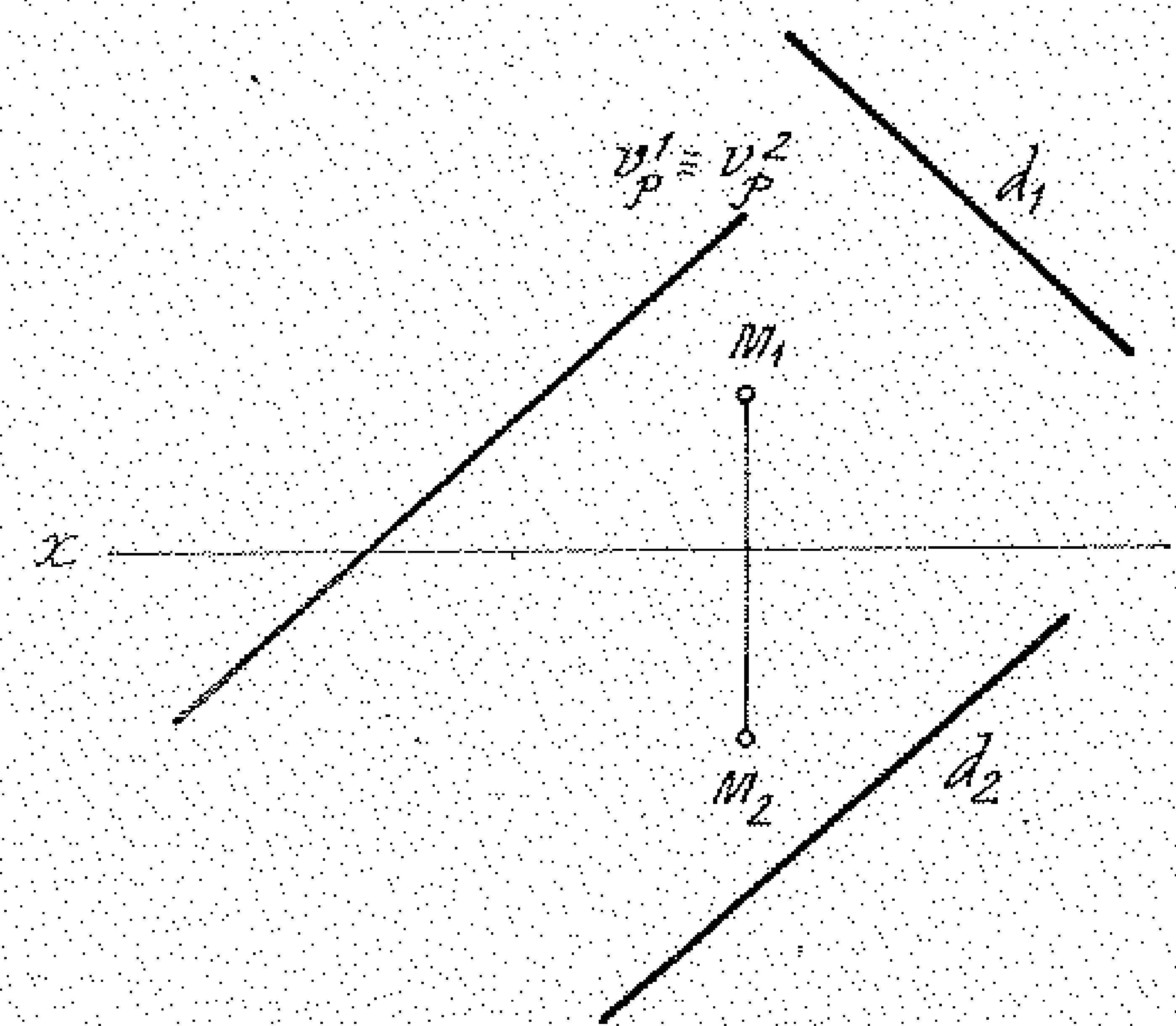
Bài 6 : Qua điểm M vẽ một đường thẳng song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$ và cắt đường thẳng d, (Hình 3 - 13).

Bài 7: Qua điểm M vẽ đường thẳng cắt đường thẳng d và có hai hình chiếu song song nhau, (Hình 3 - 14a); có hai hình chiếu hợp với trục hình chiếu các góc bằng nhau, (Hình 3- 14b).

Bài 8: Cho vết đứng của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$. Vẽ vết bằng của chúng biết rằng ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) cùng song song với đường thẳng d. (Hình 3- 15).

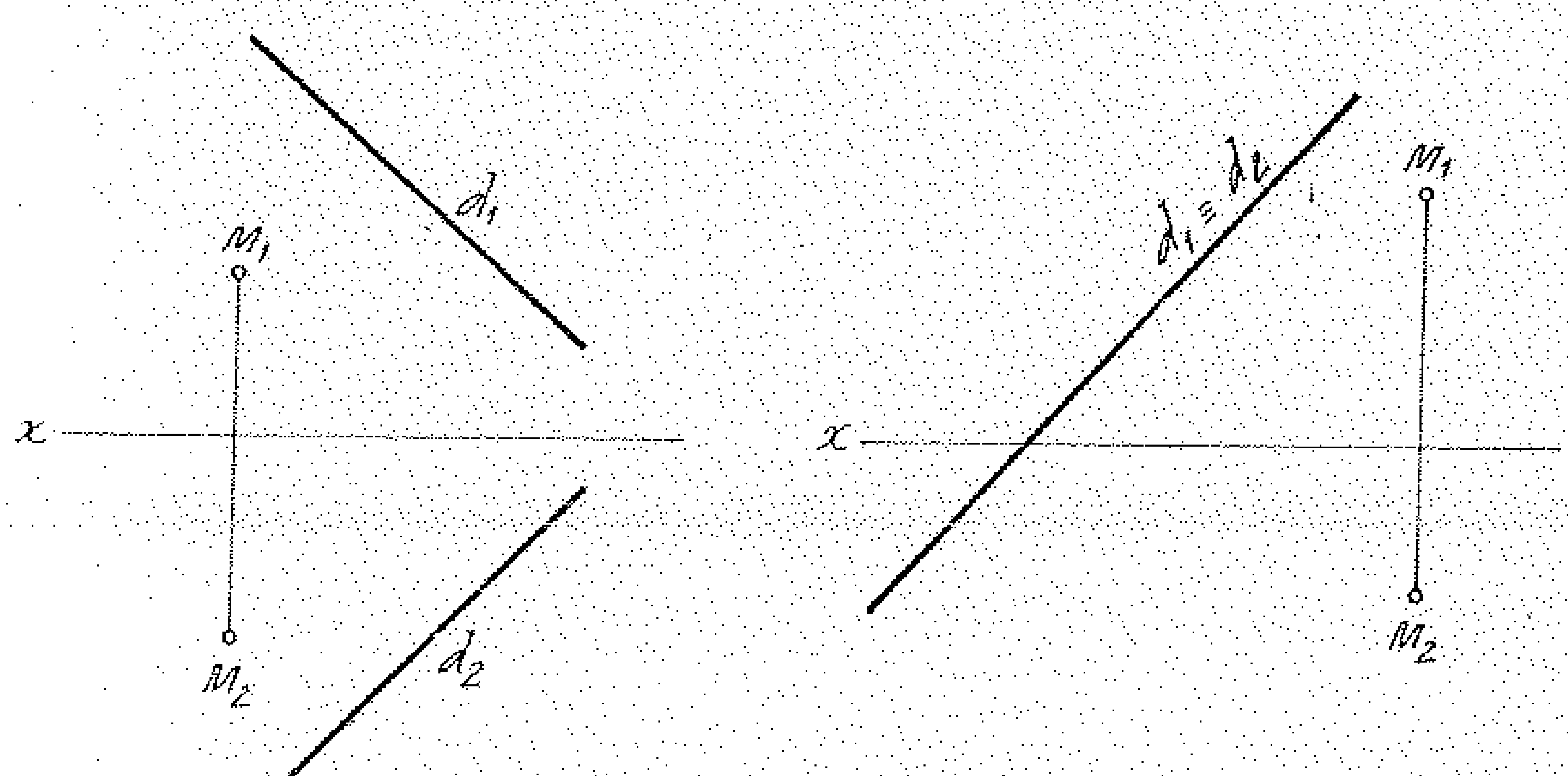


Hình 3-12

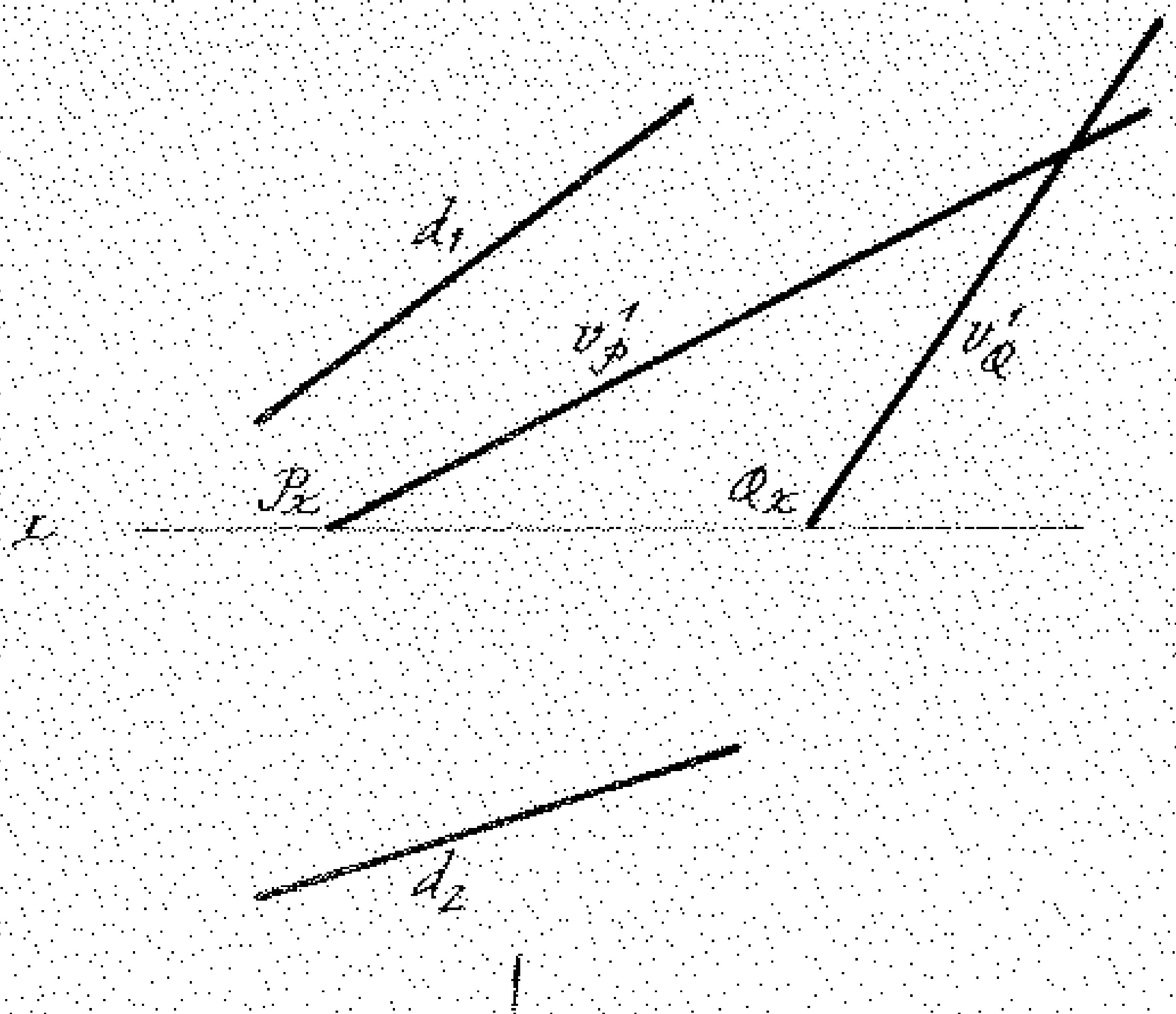


Hình 3-13

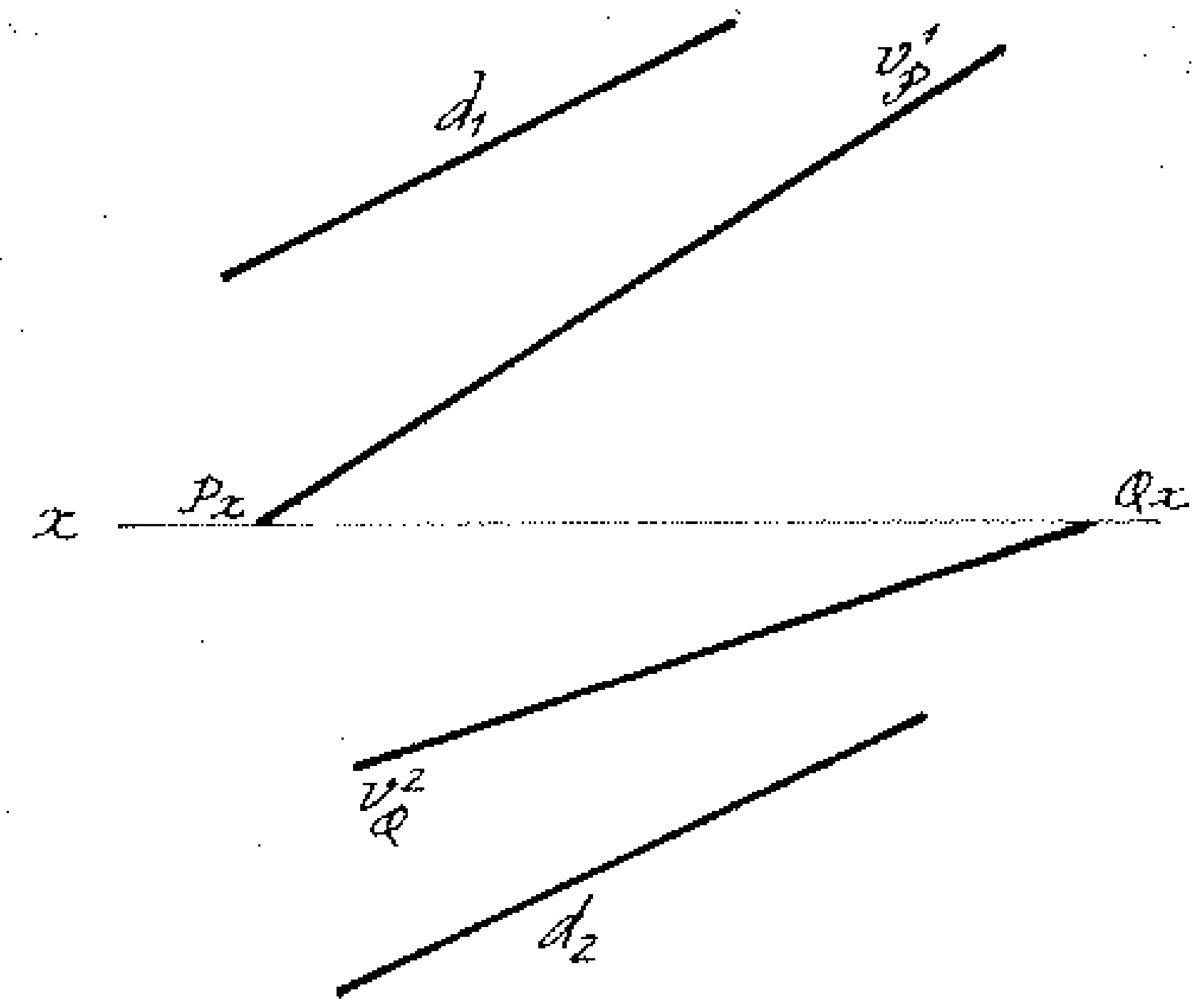
Bài 9: Cho vết đứng của mặt phẳng $\mathcal{P}$, vết bằng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Vẽ giao tuyến của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) biết rằng chúng cùng song song với đường thẳng d, (Hình 3 - 16).



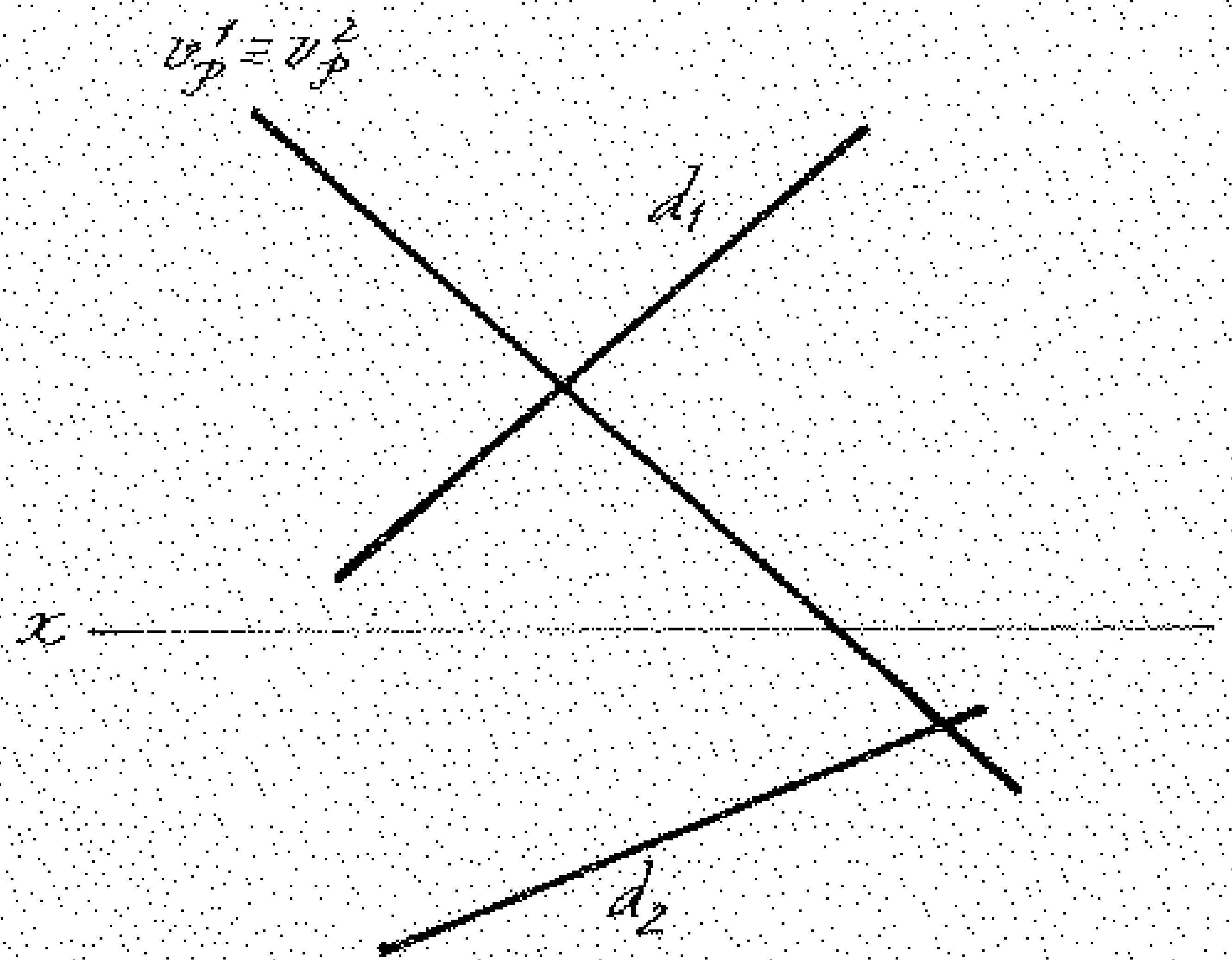
Hình 3 -14



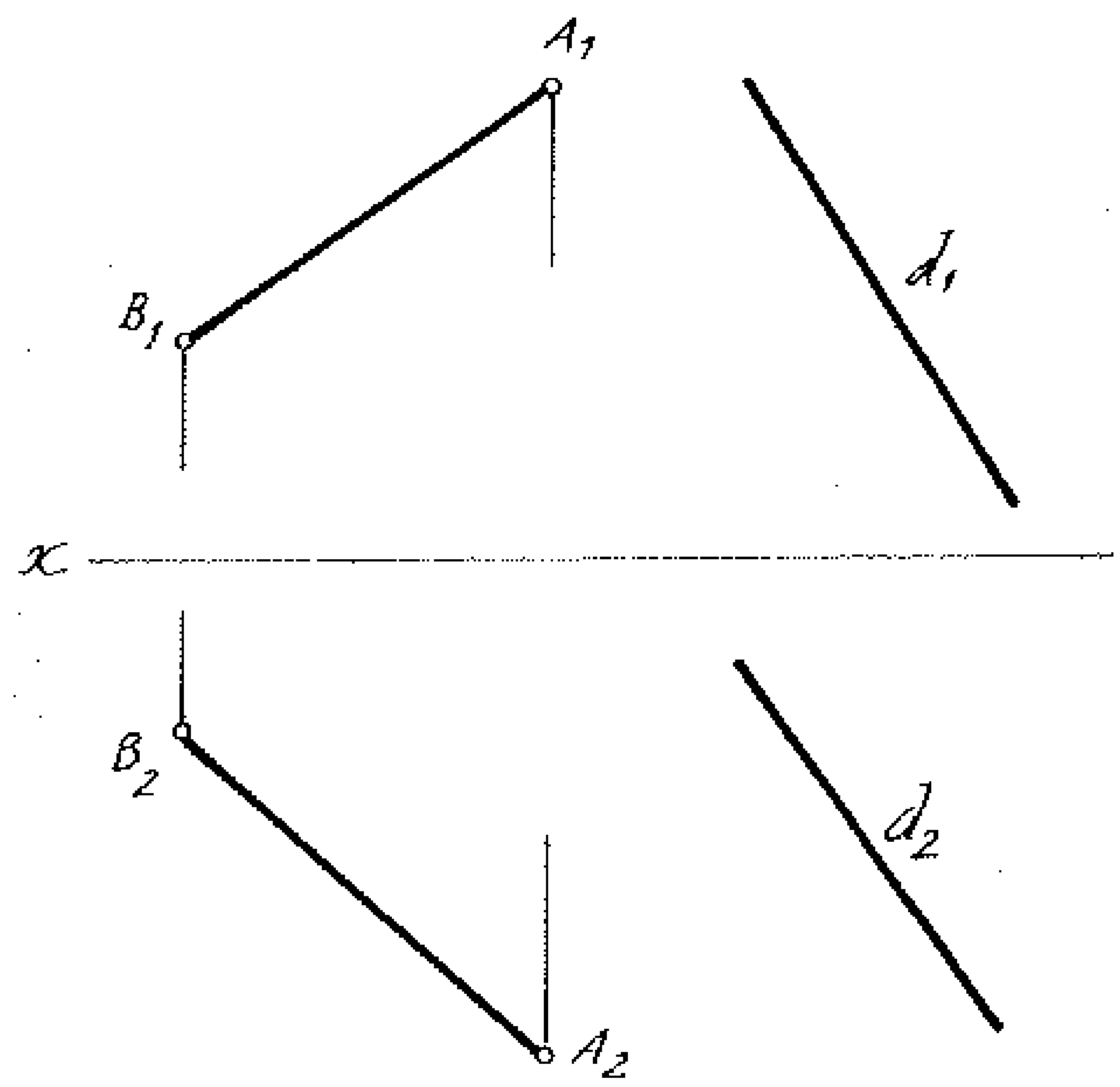
Hình 3- 15



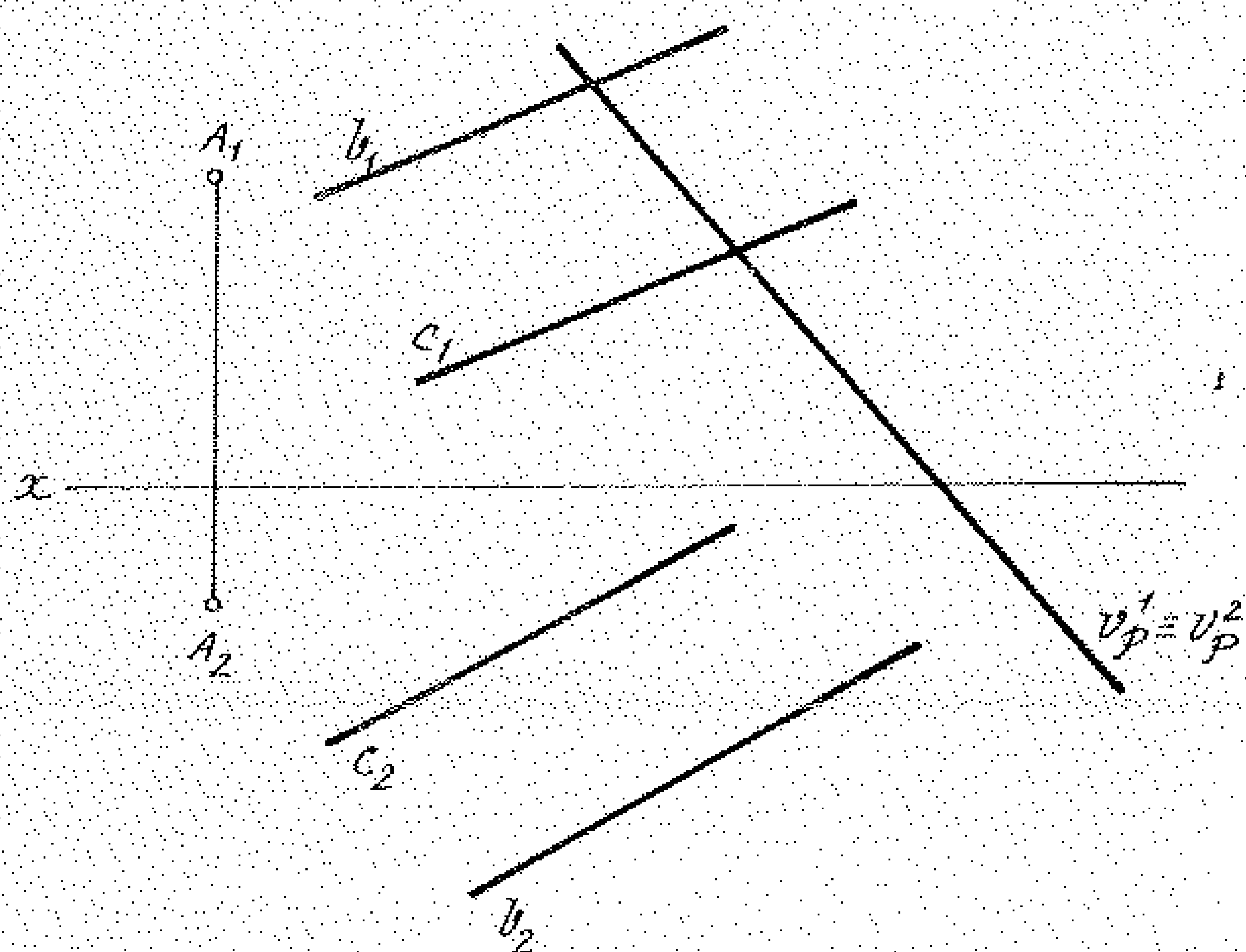
Hình 3 - 16



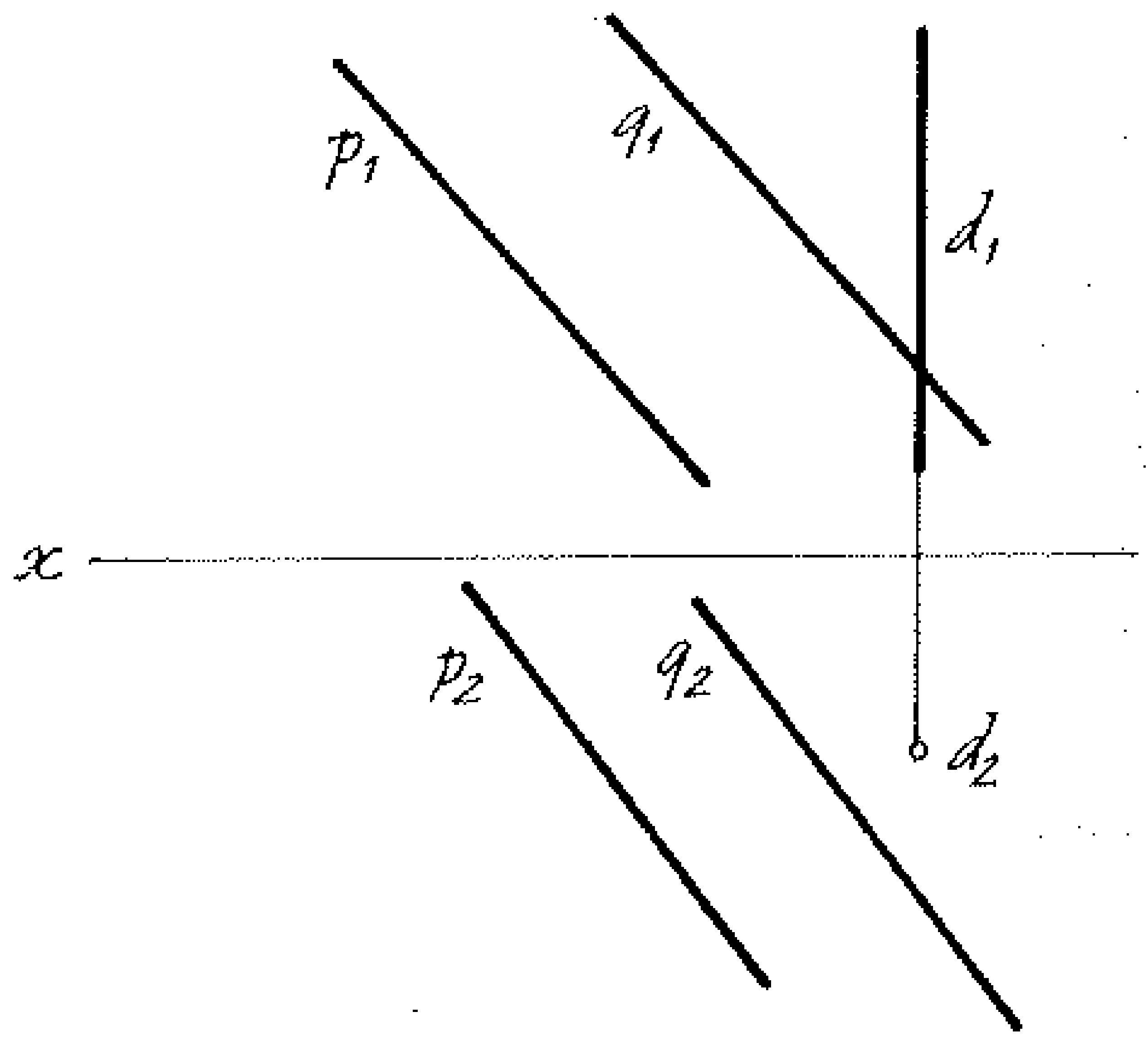
Hình 3- 17



Hình 3 - 18



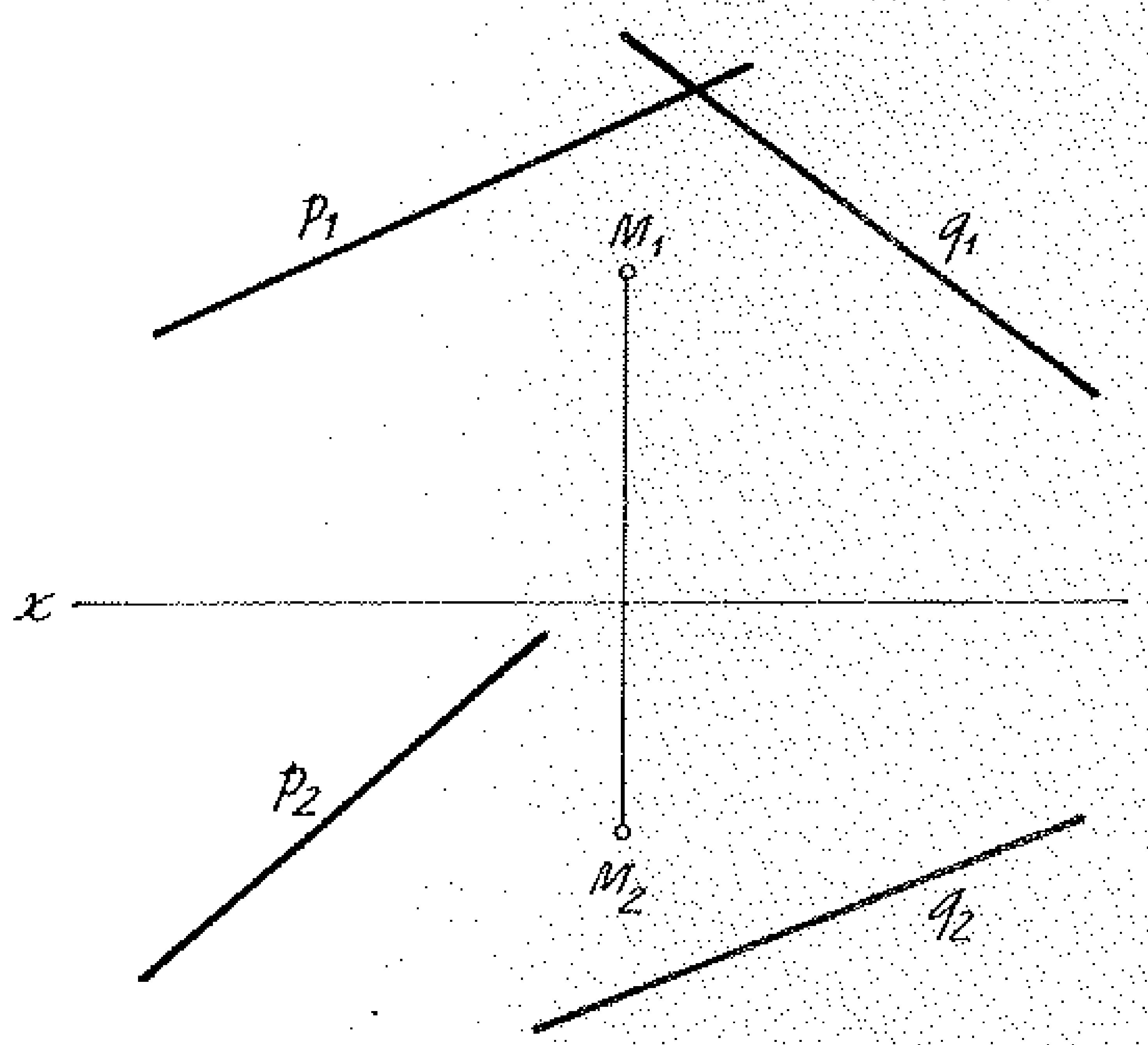
Hình 3- 19



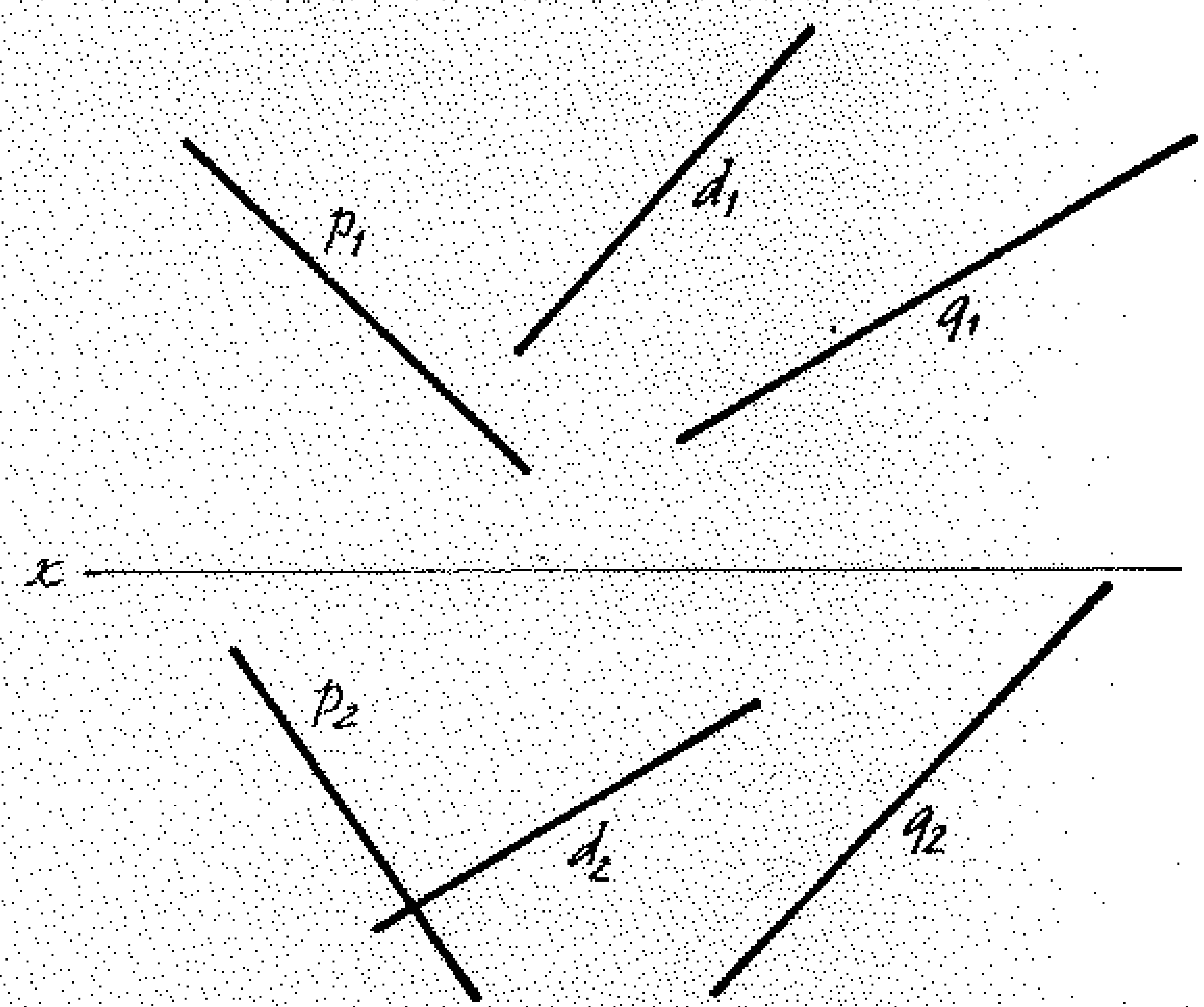
Hình 3 - 20

Bài 10 : Cho đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{P}$ – Dựng qua d một mặt phẳng **$\mathcal{Q}$** sao cho giao tuyến của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) là một đường bằng. Vẽ giao tuyến đó **(Hình 3 – 17).**

Bài 11: Vẽ nốt đỉnh C của tam giác ABC biết rằng mặt phẳng của ABC song song với trục hình chiếu và C thuộc đường thẳng d (Hình 3 – 18).



Hình 3 – 21



Hình 3 – 22

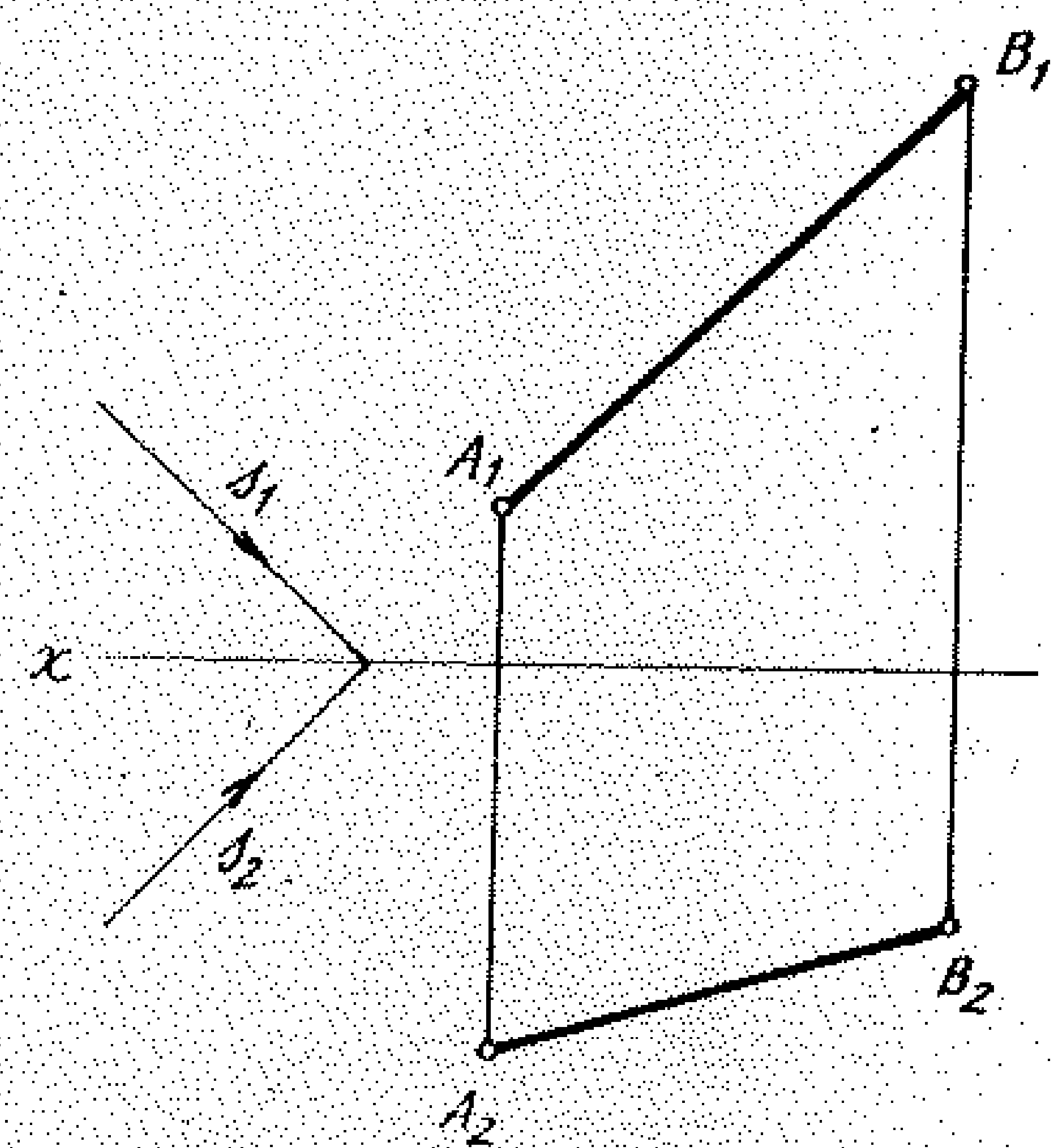
Bài 12 : Dựng tam giác ABC có các đỉnh B và C lần lượt thuộc các đường thẳng b và c và mặt phẳng của ABC song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$ ($v_{\mathcal{P}}^1 \equiv v_{\mathcal{P}}^2$) (Hình 3– 19).

Bài 13 : Vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ (p//q) đường thẳng cắt trục hình chiếu và đường thẳng d (Hình 3– 20).

Bài 14 : Qua điểm M vẽ đường thẳng cắt hai đường thẳng p và q (Hình 3– 21).

Bài 15: Vẽ đường thẳng cắt hai đường thẳng p, q và song song với đường thẳng d (Hình 3 – 22).

Bài 16: Vẽ bóng của đoạn thẳng AB đổ lên hai mặt phẳng hình chiếu cho biết các tia sáng song song với hướng s (Hình 3– 23).



Hình 3 – 23

CHƯƠNG 4

CÁC BÀI TOÁN VỀ LƯỢNG

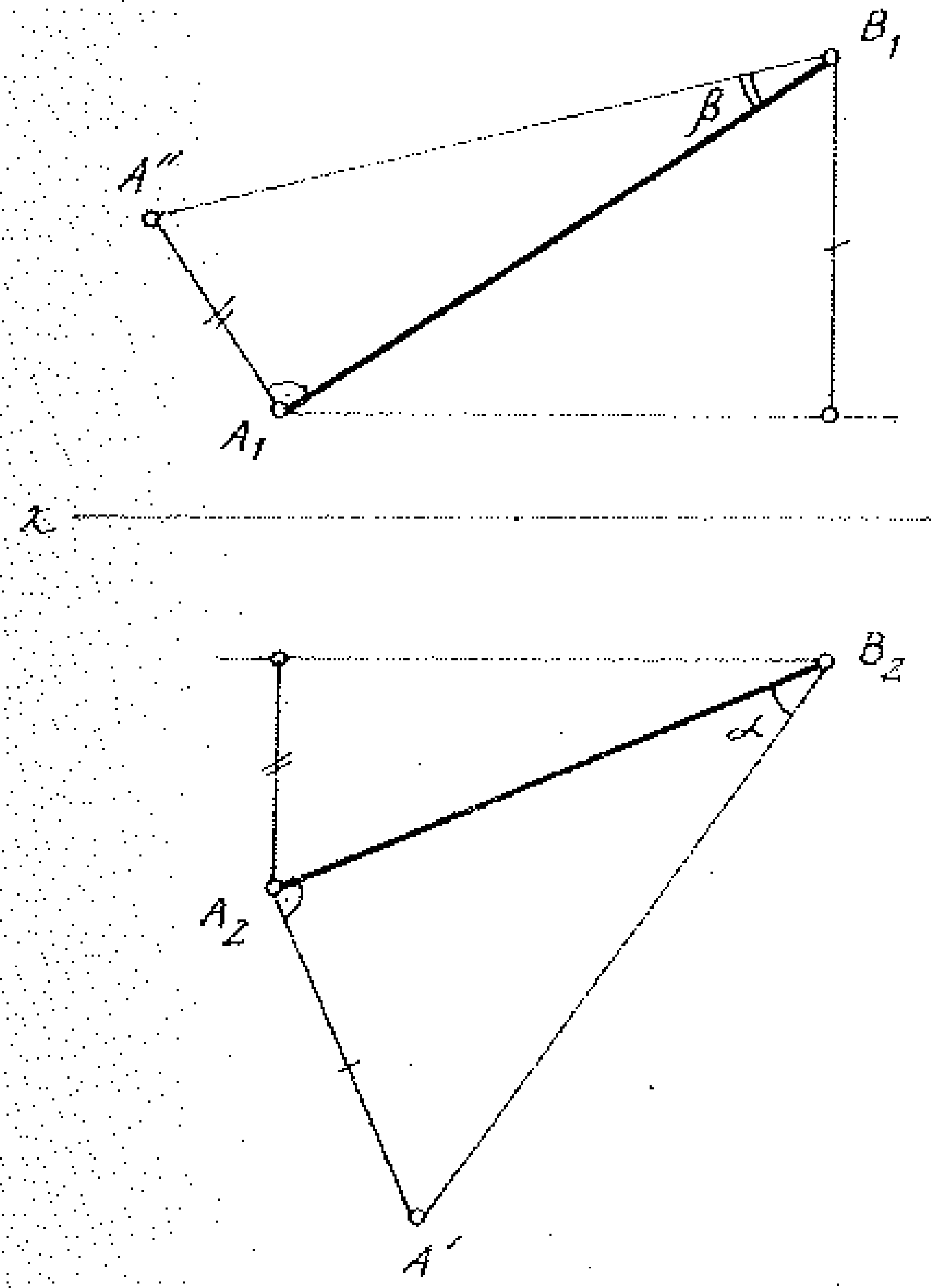
4.1 . Các thí dụ

Thí dụ 1: Xác định độ dài của đoạn thẳng AB và góc nghiêng của nó so với các mặt phẳng hình chiếu, (Hình 4 - 1).

Giải : Dựng tam giác vuông Δ $A'A_2B_2$ có hai cạnh góc vuông lần lượt là hình chiếu bằng A_2B_2 của đoạn AB và hiệu độ cao của hai điểm A, B.

Cạnh huyền của tam giác vuông này là độ dài của đoạn AB. Góc $\alpha = \widehat{A_2B_2A'}$ (kề với A_2B_2) là góc nghiêng của AB với ($\mathcal{P}^2$).

Tương tự, tam giác vuông Δ A'' A_1B_1 (có hai cạnh góc vuông lần lượt là A_1B_1 và hiệu độ xa của A, B) có cạnh huyền A'' B_1 là độ dài của AB và góc $\beta = \widehat{A_1B_1A''}$ (kề với A_1B_1) là góc nghiêng của AB so với ($\mathcal{P}^1$).

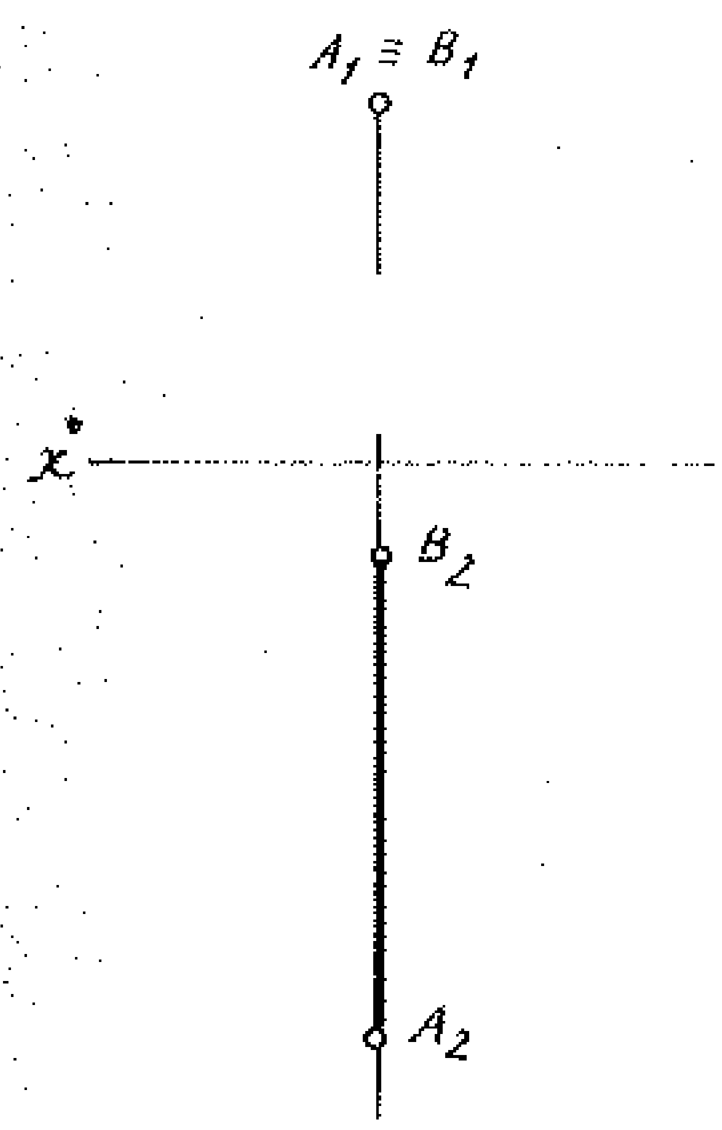


Hình 4 - 1

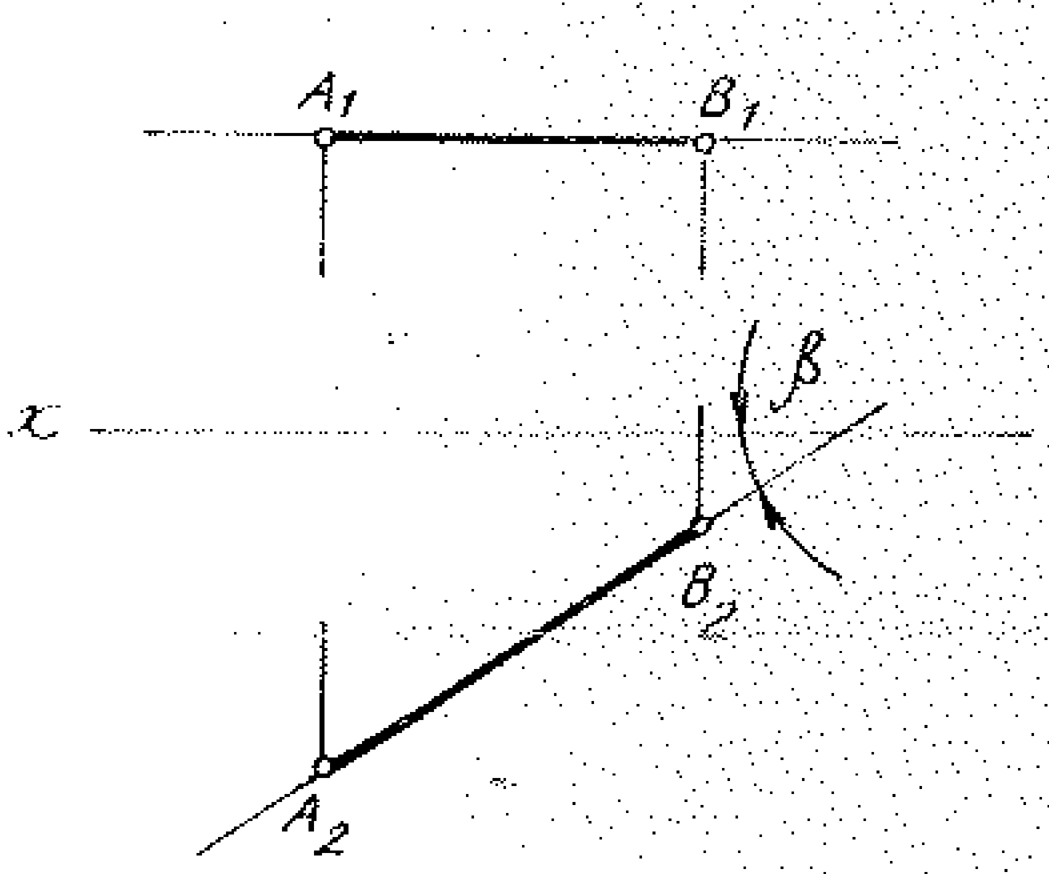
Chú ý: Cần nhớ những trường hợp đặc biệt dưới đây (Hình 4 - 2, Hình 4 - 3, Hình 4 - 4 và Hình 4 - 5).

$$AB \perp \mathcal{P}^1 \longrightarrow \begin{cases} A_2B_2 = AB \\ \alpha \text{ (góc giữa AB và } \mathcal{P}^2) = 0^\circ \\ \beta \text{ (góc giữa AB và } \mathcal{P}^1) = 90^\circ \end{cases}$$

(Hình 4 - 2)



Hình 4 - 2



Hình 4 - 3

$$AB \,//\, (\mathcal{P}^2) \begin{cases} A_2B_2 = AB \\ \alpha = 0^\circ \\ \beta = \text{góc } (A_2B_2, x) \end{cases}$$

(Hình 4 - 3)

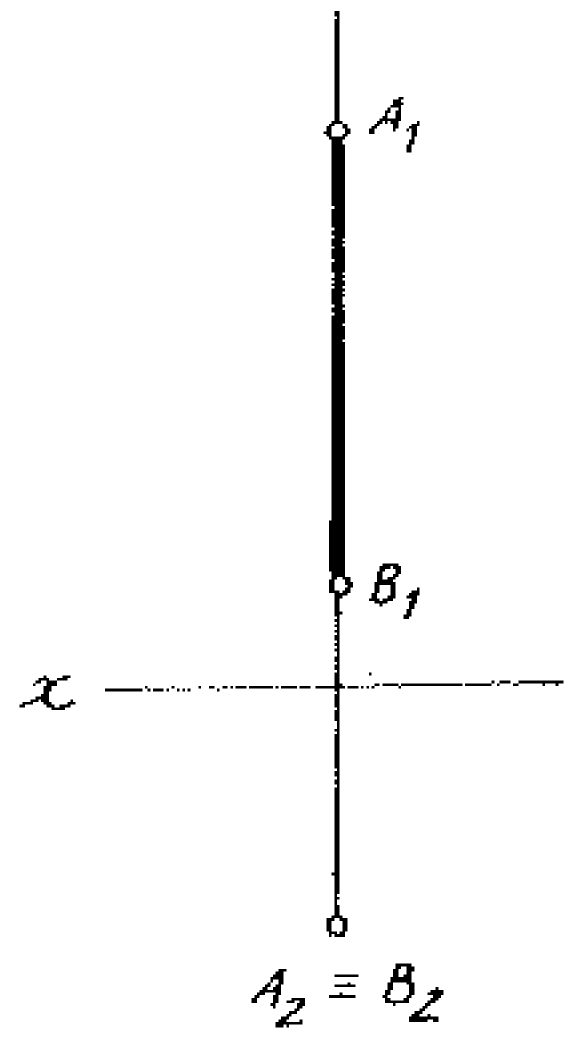
$$AB \perp (\mathcal{P}^2) \begin{cases} A_1B_1 = AB \\ \alpha = 90^0 \\ \beta = 0^0 \end{cases}$$

(Hình 4- 4)

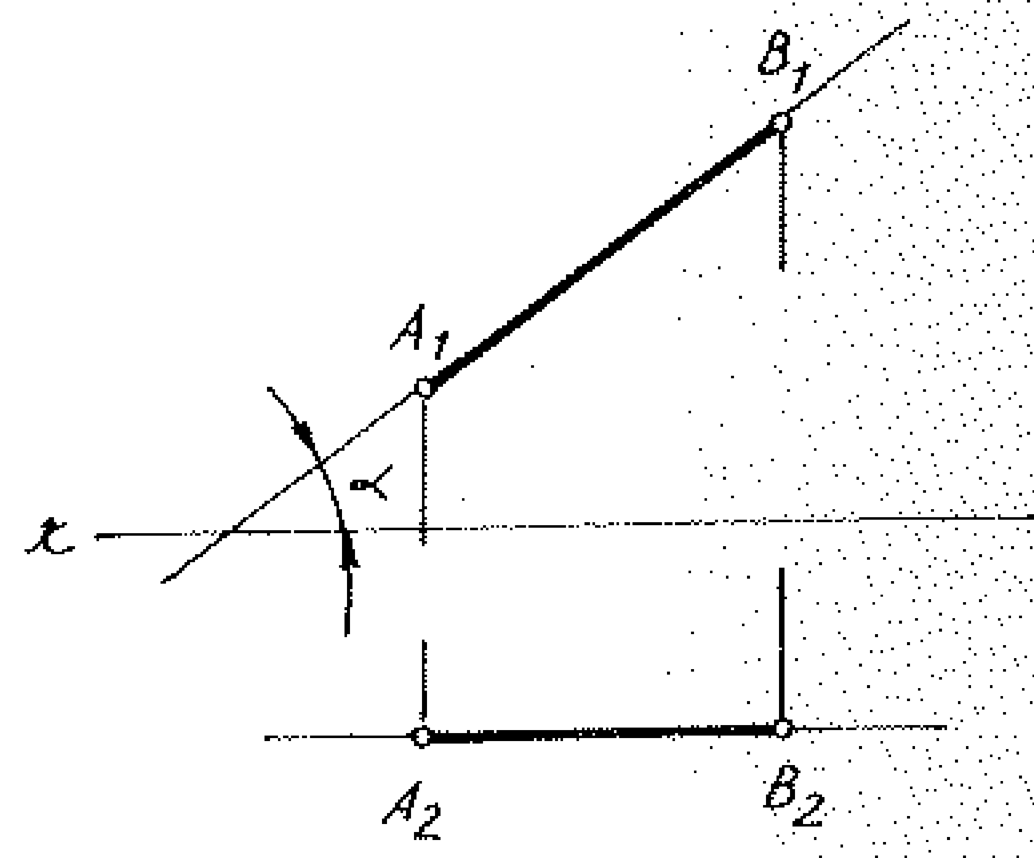
$$AB \,//\, (\mathcal{P}^1) \begin{cases} A_1B_1 = AB \\ \alpha = \text{góc } (A_1B_1, x) \\ \beta = 0^0 \end{cases}$$

(Hình 4 - 5)

Sau này ta có thể dùng các phép biến đổi để đưa AB từ vị trí bất kì về một trong các trường hợp trên.



Hình 4 - 4



Hình 4 - 5

Thí dụ 2 : Cho tia Am . Tìm điểm B ∈ Am sao cho đoạn thẳng AB = 40mm (Hình 4 -6).

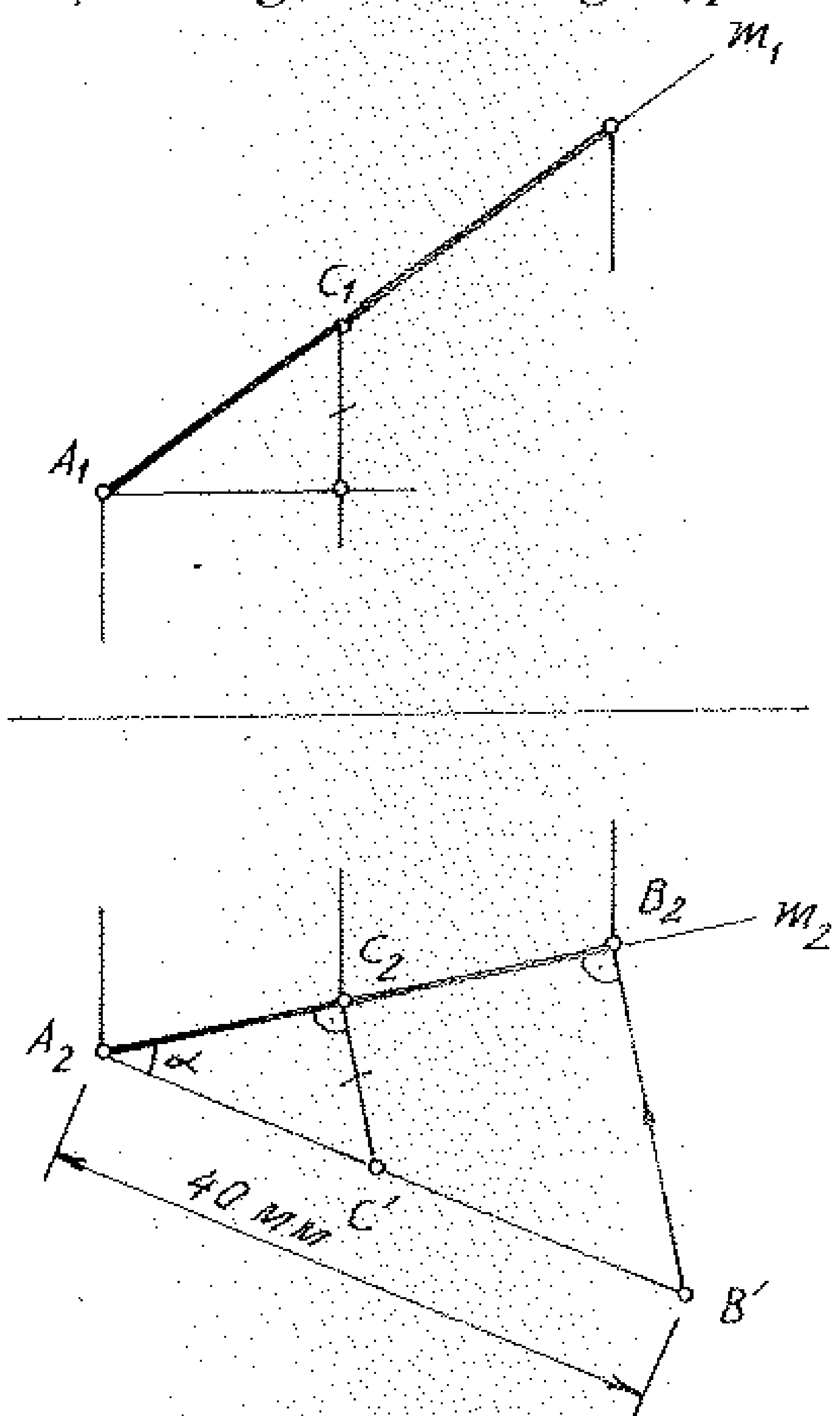
Giải: Lấy một điểm C bất kì trên Am. Dựng tam giác vuông A_2C_2C' (cạnh góc vuông C_2C' bằng hiệu độ cao của hai điểm A, C). Đặt trên tia A_2C' một đoạn $A_2B' = 40$ mm. Dựng tam giác vuông $\Delta A_2B_2B'$.

Có cạnh góc vuông $A_2B_2 \in A_2m_2$. Từ $B_2 \rightarrow B_1 \in A_1m_1$.

Thí dụ 3: Tìm khoảng cách từ điểm A tới đường thẳng d (Hình 4 - 7, Hình 4 - 8 , Hình 4 - 9a, b).

Giải :

Để tìm khoảng cách từ điểm A tới đường thẳng d ta phải dựng đoạn thẳng AH ⊥ d (H ∈ d) và xác định độ dài của đoạn thẳng AH.

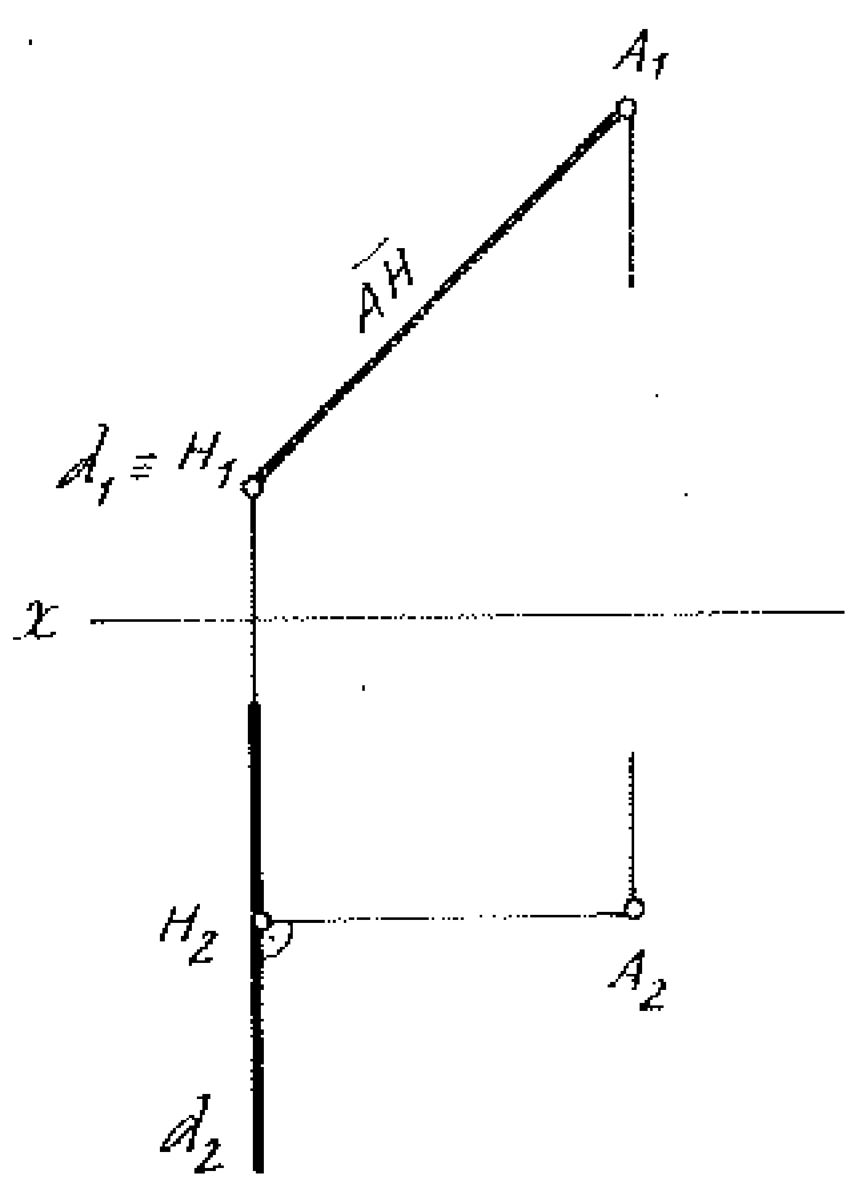


Hình 4 - 6

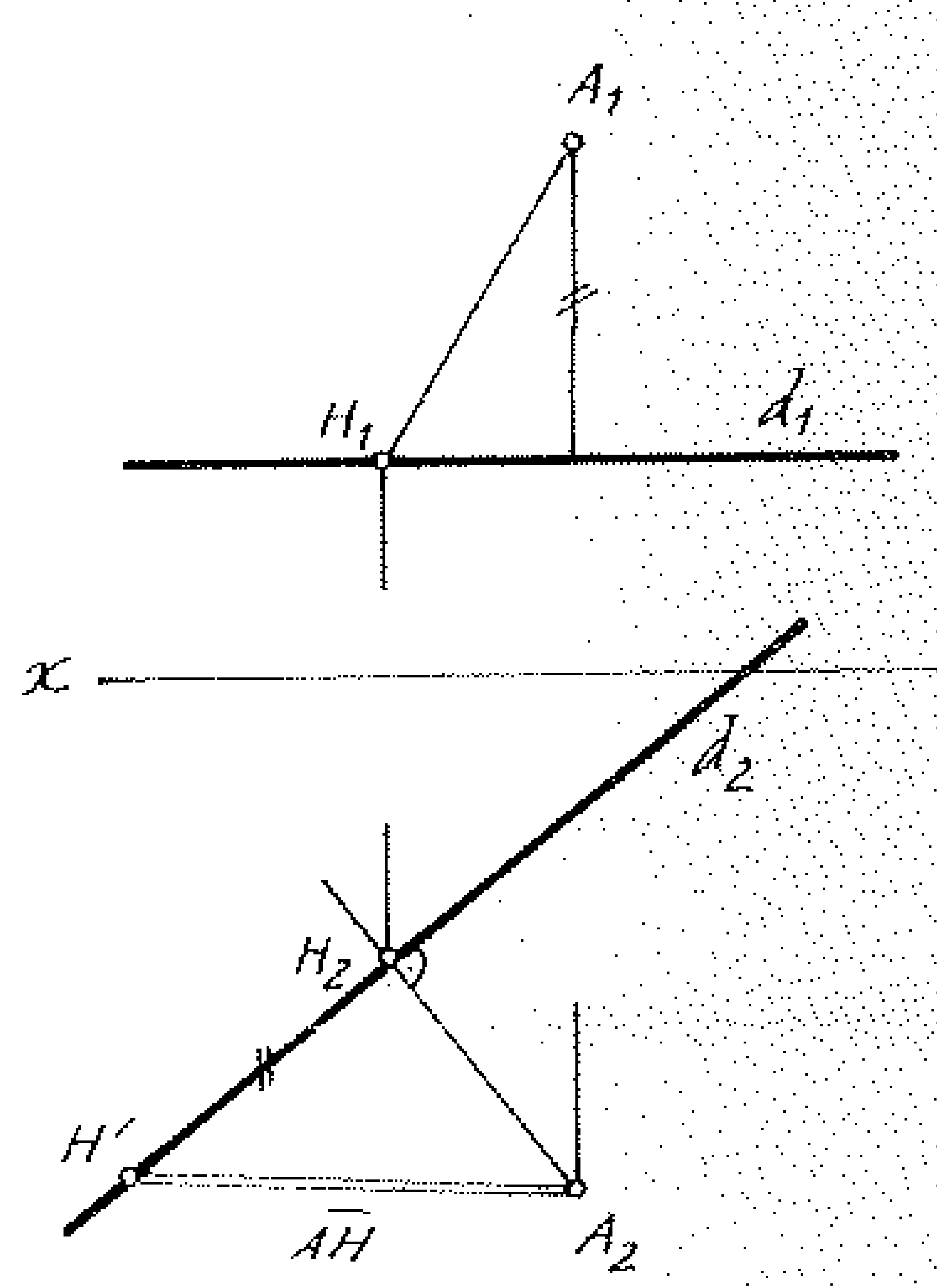
Trên hình 4 - 7 đường thẳng d ⊥ $(\mathcal{P}^1) \rightarrow$ d // $(\mathcal{P}^2) \rightarrow A_2H_2 \perp d_2$. Đoạn thẳng AH // $(\mathcal{P}^1)$ nên A_1H_1 = AH.

Trên hình 4 - 8 đườnng thẳng d// $(\mathcal{P}^2)$ nên $A_2H_2 \perp d_2$. Đoạn thẳng AH có vị trí bất kì nên độ dài của nó (đoạn A_2H') xác định bằng qui tắc tam giác ($\Delta A_2H_2H'$).

Trên hình 4 - 9 , d là đường thẳng bất kì do đó muốn dựng đoạn AH ⊥ d ta phải vẽ qua A một mặt



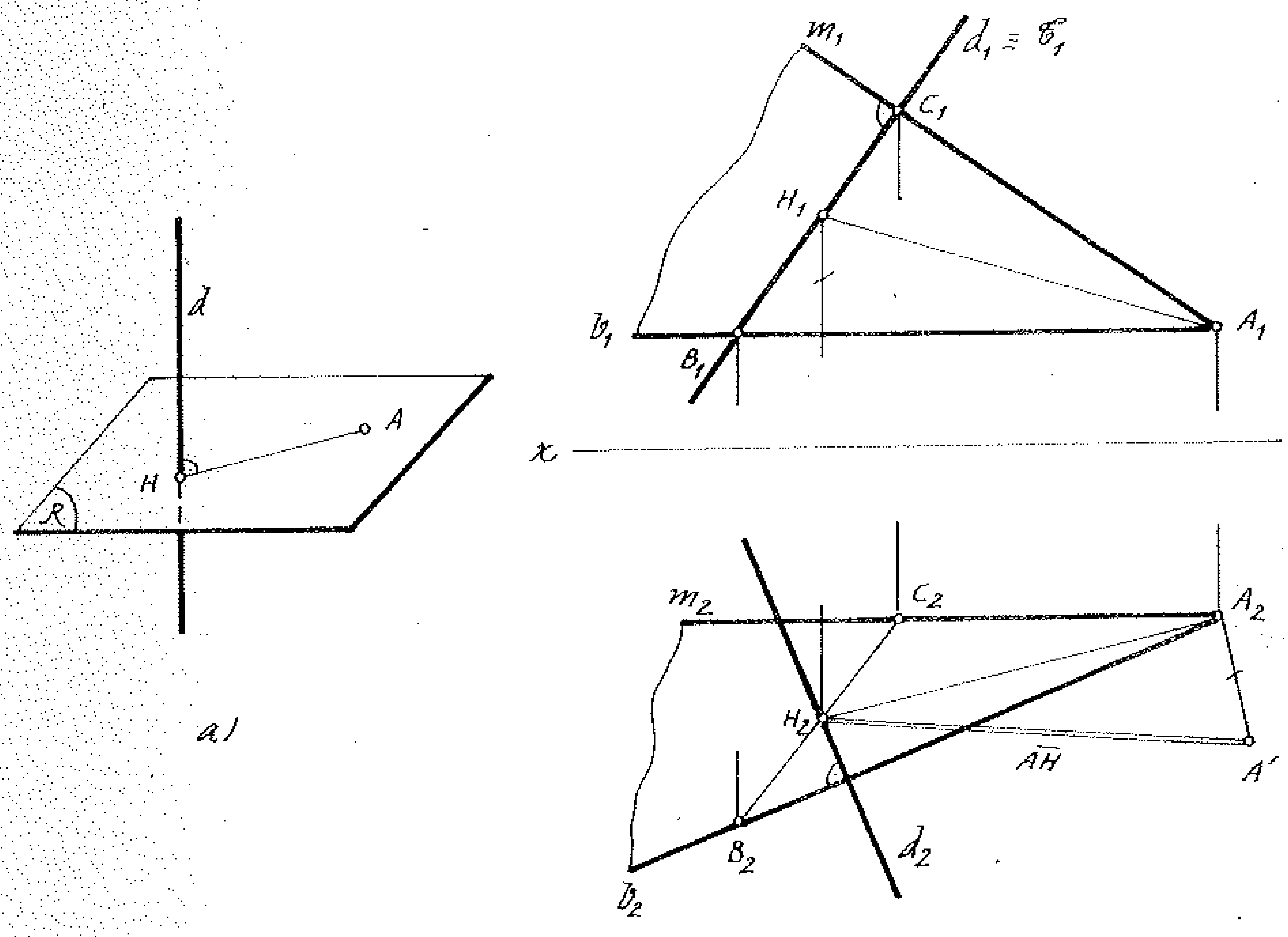
Hình 4-7



Hình 4 -8

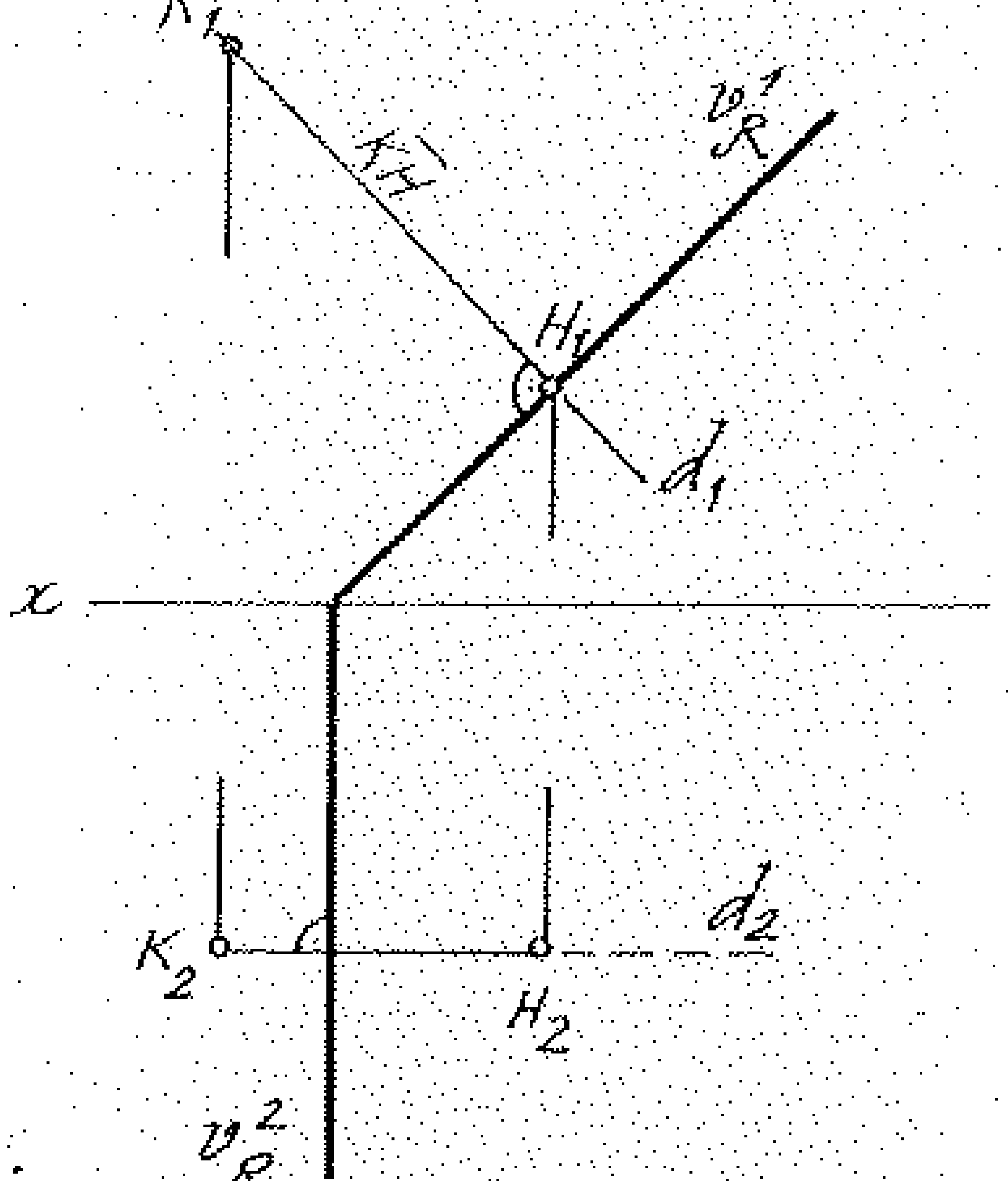
phẳng $\mathcal{R} \perp$ d và tìm giao điểm H = d ∩ ($\mathcal{R}$). Mặt phẳng $\mathcal{R}$ xác định bằng hai đường thẳng qua A và vuông góc với d là đường bằng b ($b_2 \perp d_2$) và đường mặt m ($m_1 \perp d_1$).

Dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\mathcal{C}$ để tìm giao điểm H. Độ dài của đoạn AH = $A'H_2$ (Cạnh huyền của Δ $A'A_2H_2$).



Hình 4 - 9

Thí dụ 4: Tìm khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng $\mathcal{R}$ (p//q), (Hình 4– 10 và Hình 4 – 11).

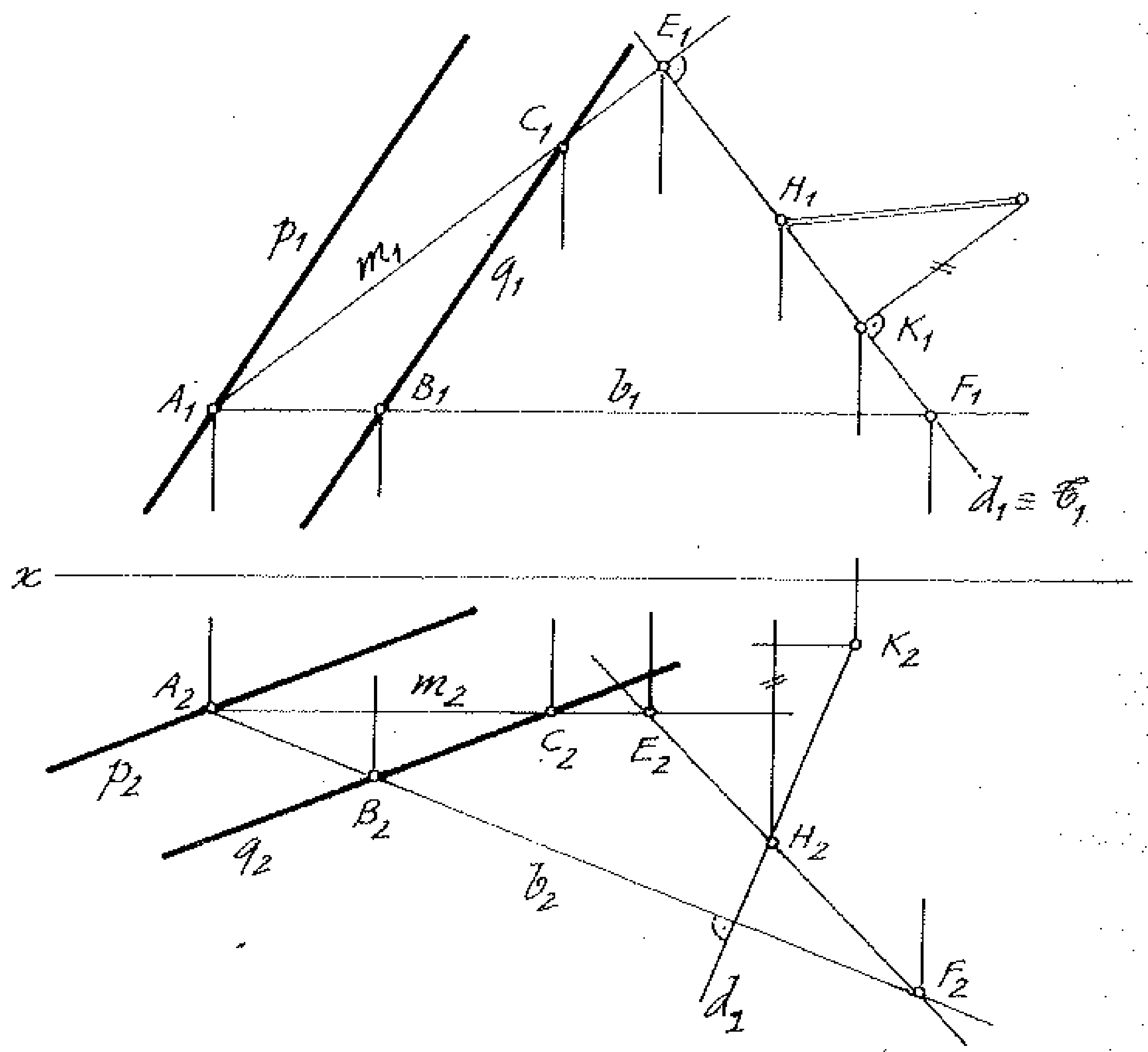


Hình 4 - 10

Để tìm khoảng cách từ điểm K đến mặt phẳng $\mathcal{R}$ ta làm như sau :

– Vẽ một đường thẳng d qua K và vuông góc với ($\mathcal{R}$)

–Tìm giao điểm H = d ∩ ($\mathcal{R}$).



Hình 4 - 11

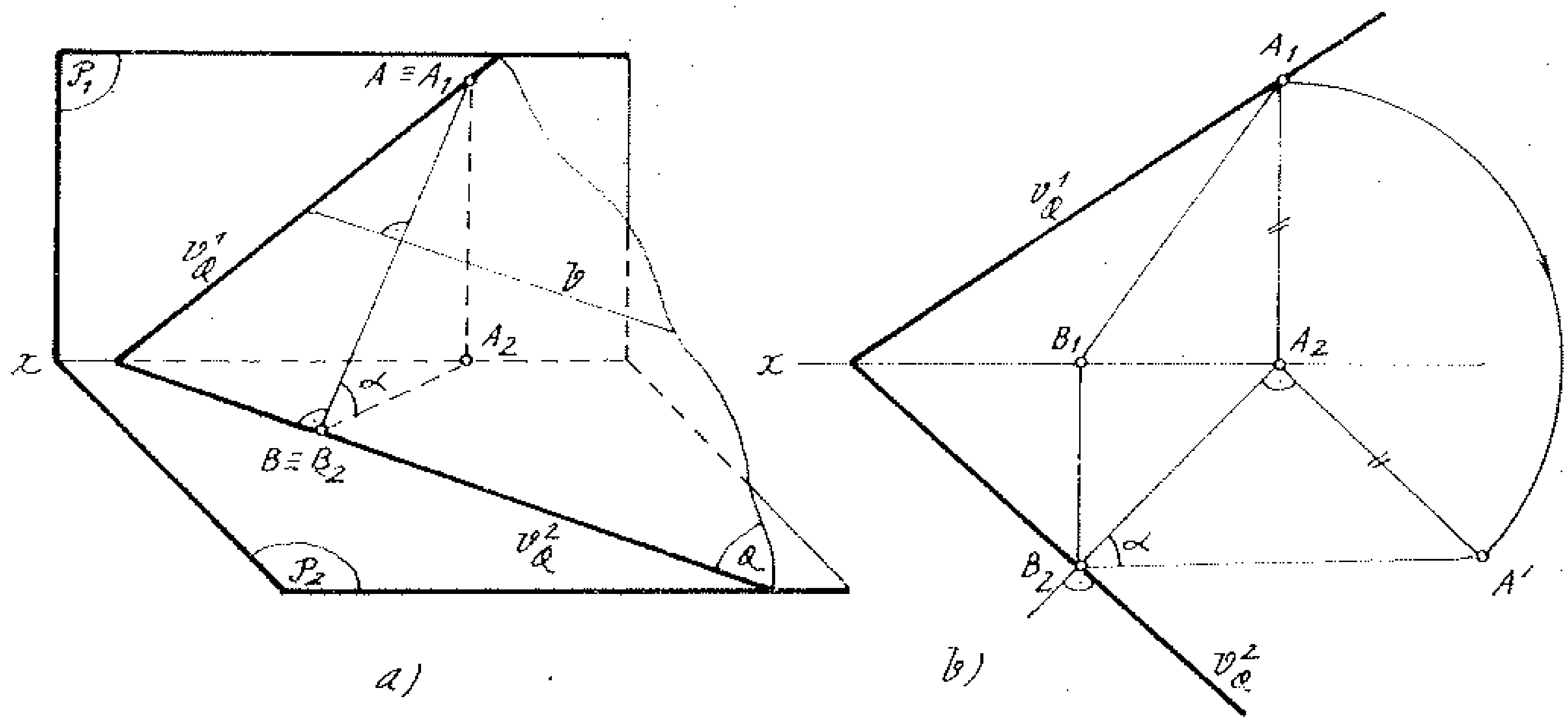
– Xác định độ dài của đoạn KH.

Trên hình 4 – 10 để vẽ đường thẳng d ⊥ ($\mathcal{R}$) ta vẽ $d_1 \perp v_R^1$ và $d_2 \perp v_{R_2}$. Độ dài đoạn KH = K_1H_1, vì KH// ($\mathcal{P}^1$).

Trên hình 4 – 11 để vẽ đường thẳng d ⊥ ($\mathcal{R}$) trước hết phải vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{R}$ một đường bằng b và một đường mặt m. Sau đó vẽ $d_1 \perp m_1$ và $d_2 \perp b_2$. Dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\mathcal{C}$ để xác định giao điểm H = d ∩ $\mathcal{R}$. Độ dài đoạn KH = H_1K'.

Thí dụ 5 : Xác định góc nghiêng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ so với mặt phẳng hình chiếu bằng (Hình 4 – 12a, b).

Giải:



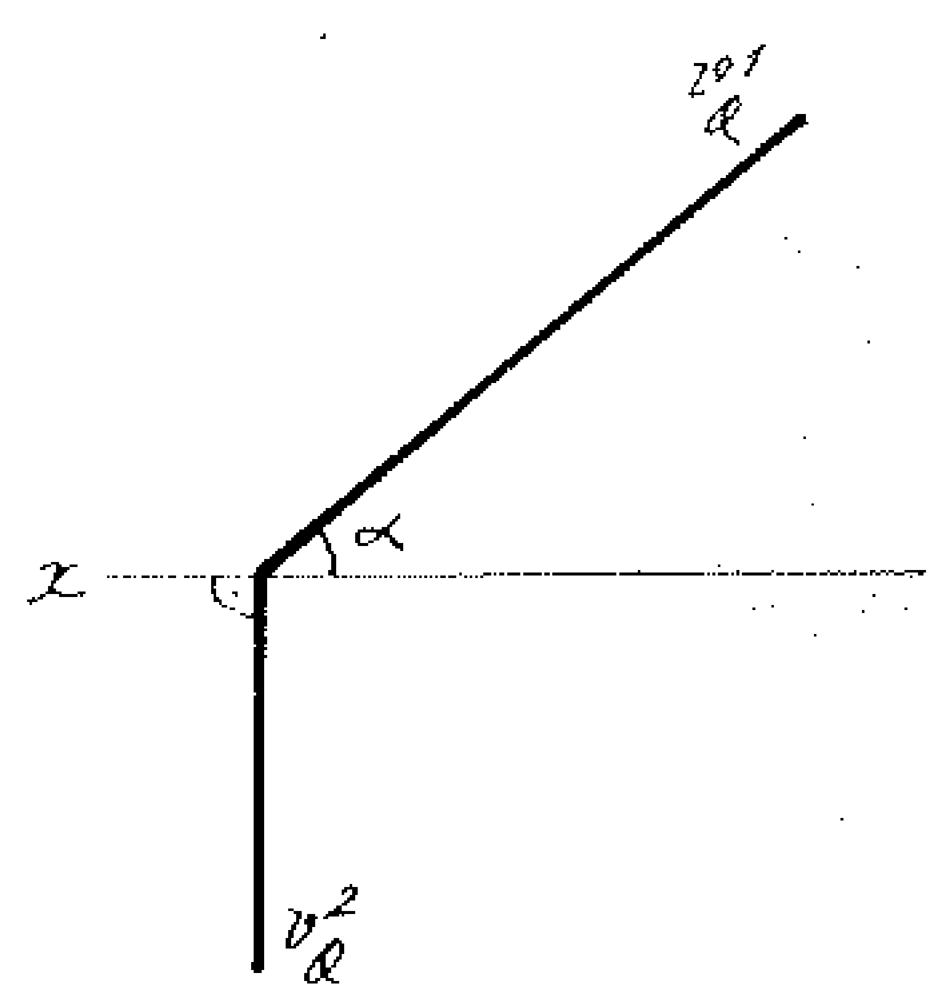
Hình 4 – 12

Vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{Q}$ đường dốc nhất (AB) so với ($\mathcal{P}^2$), AB ⊥ v_Q^2 → $A_2B_2 \perp v_Q^2$. Góc nghiêng của AB với ($\mathcal{P}^2$), (góc $\widehat{A_2B_2A'}$) cũng là góc nghiêng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ so với ($\mathcal{P}^2$).

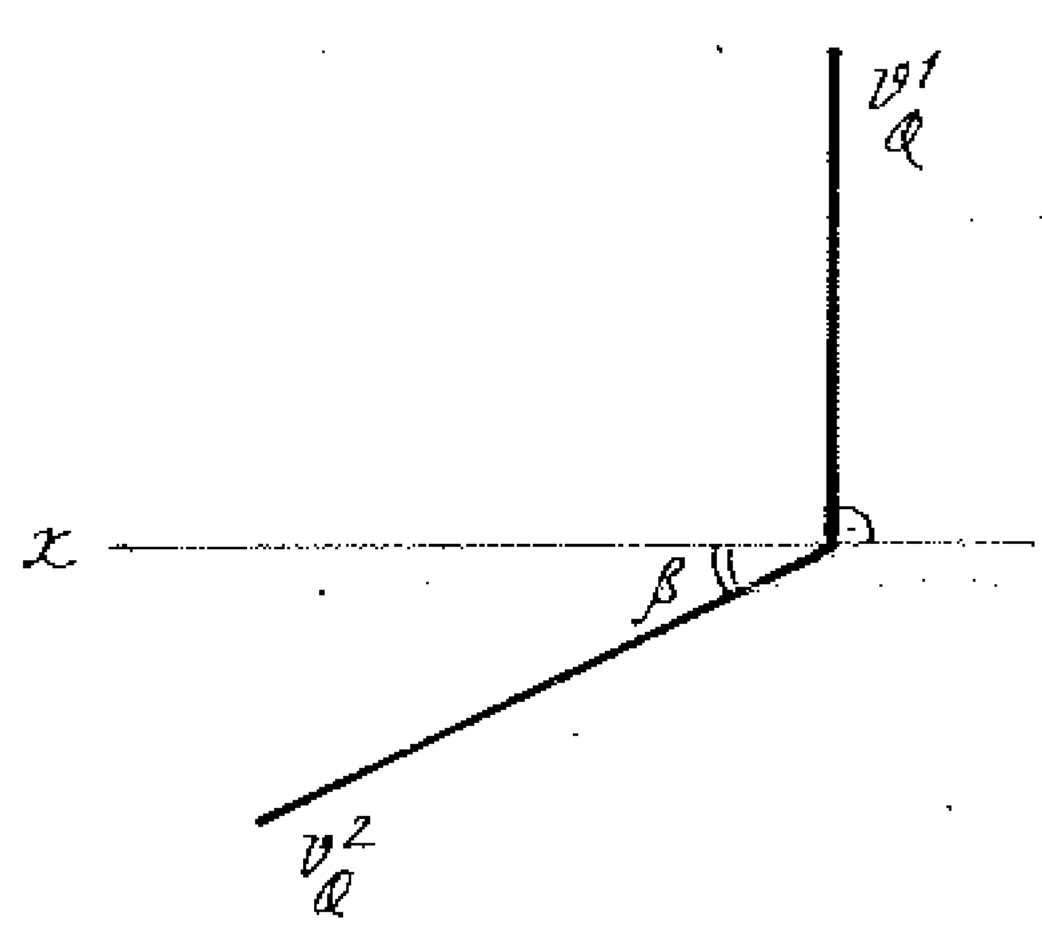
Chú ý : Cần nhớ những trường hợp đặc biệt sau :

– Nếu ($\mathcal{Q}$) ⊥ ($\mathcal{P}^1$) thì góc giữa ($\mathcal{Q}$) và ($\mathcal{P}^2$) bằng góc α hợp bởi v_Q^1 với trục x (Hình 4 – 13).

– Nếu ($\mathcal{Q}$) ⊥ ($\mathcal{P}^2$) thì góc giữa ($\mathcal{Q}$) và ($\mathcal{P}^1$) bằng góc β hợp bởi v_Q^2 và trục x (Hình 4 – 14).



Hình 4 – 13



Hình 4 – 14

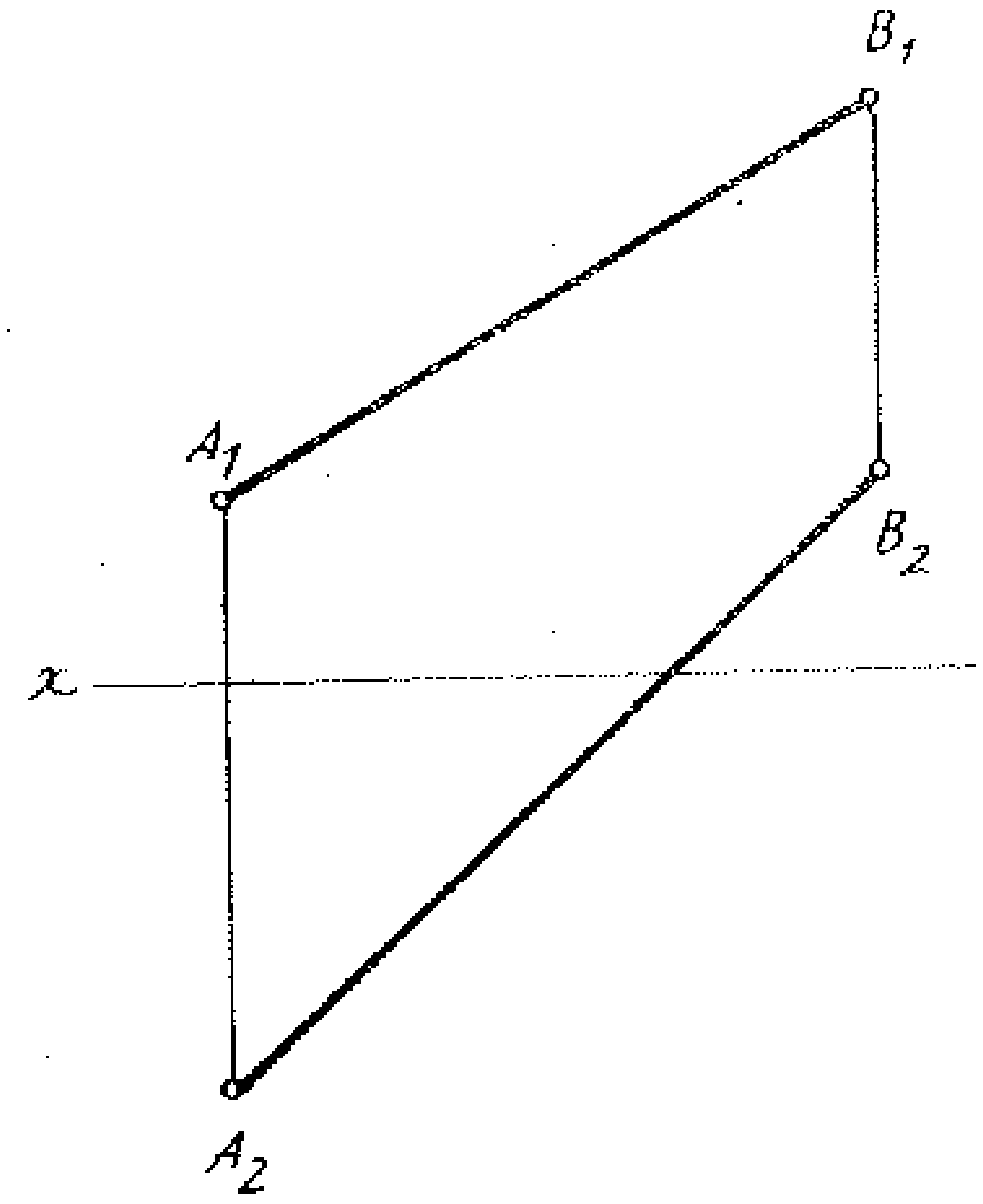
4. 2 Bài tập

Bài 1 : Xác định độ dài của đoạn thẳng AB và góc nghiêng của nó so với các mặt phẳng hình chiếu.

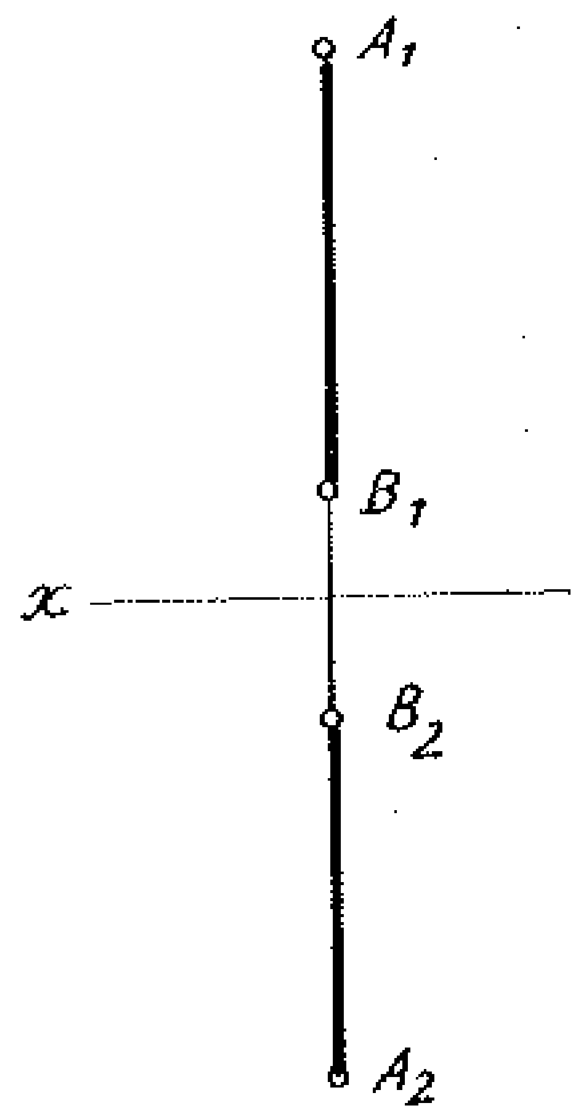
(Hình 4-15 và Hình 4-16)

Bài 2: Cho điểm A

a- Dựng đoạn thẳng AB // ($\mathcal{P}^1$), có độ dài bằng 30mm và nghiêng với ($\mathcal{P}^2$) góc 45°.



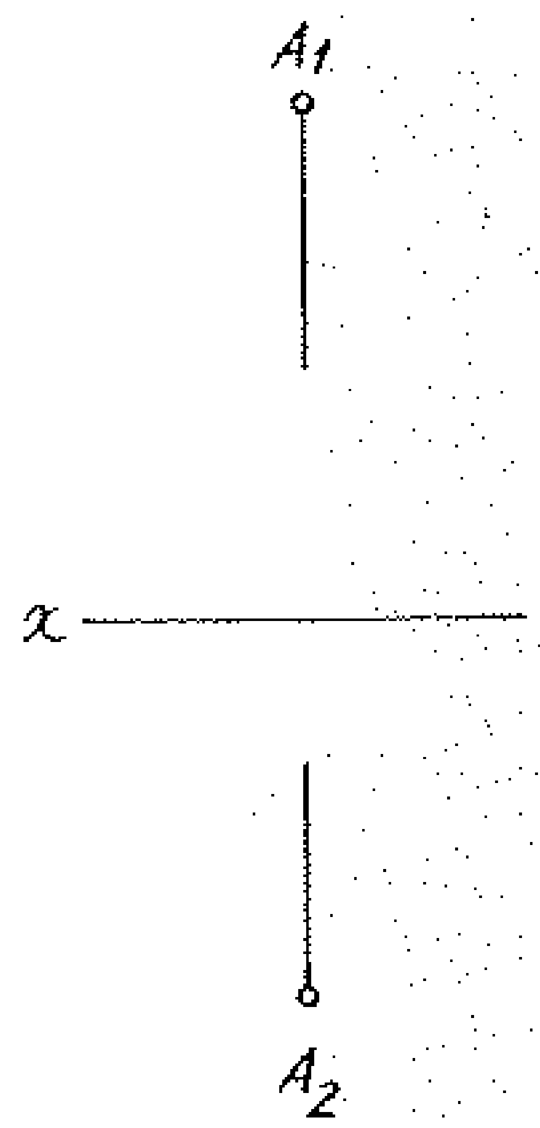
Hình 4 - 15



Hình 4 - 16

b - Cho A cố định , B thay đổi sao cho độ dài của đoạn AB và góc nghiêng của nó so với ($\mathcal{P}^2$) không đổi. Tìm quĩ tích (tập hợp) hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của điểm B,

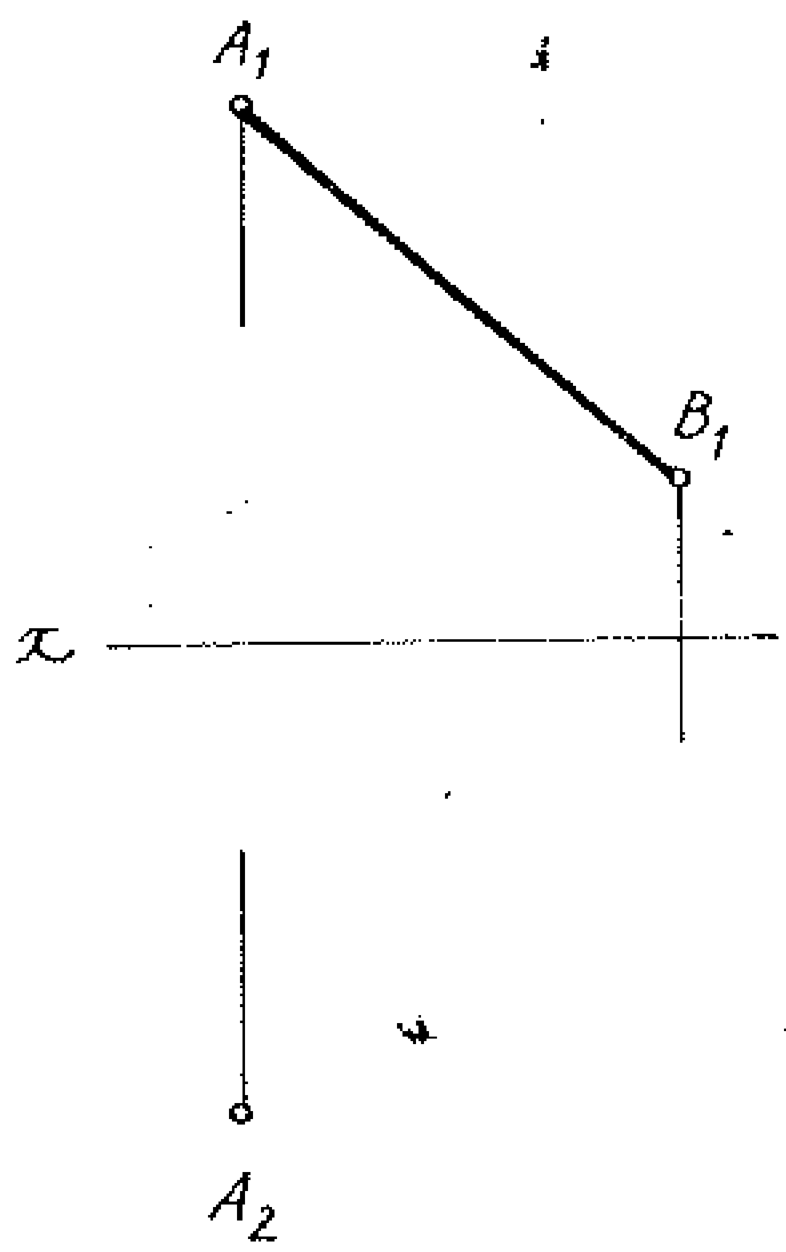
(Hình 4 - 17).



Hình 4 - 17

Bài 3 : Cho điểm A và hình chiếu đứng B_1 của điểm B. Tìm hình chiếu bằng của B biết rằng đoạn thẳng AB có độ dài bằng 40mm.

(Hình 4 - 18).

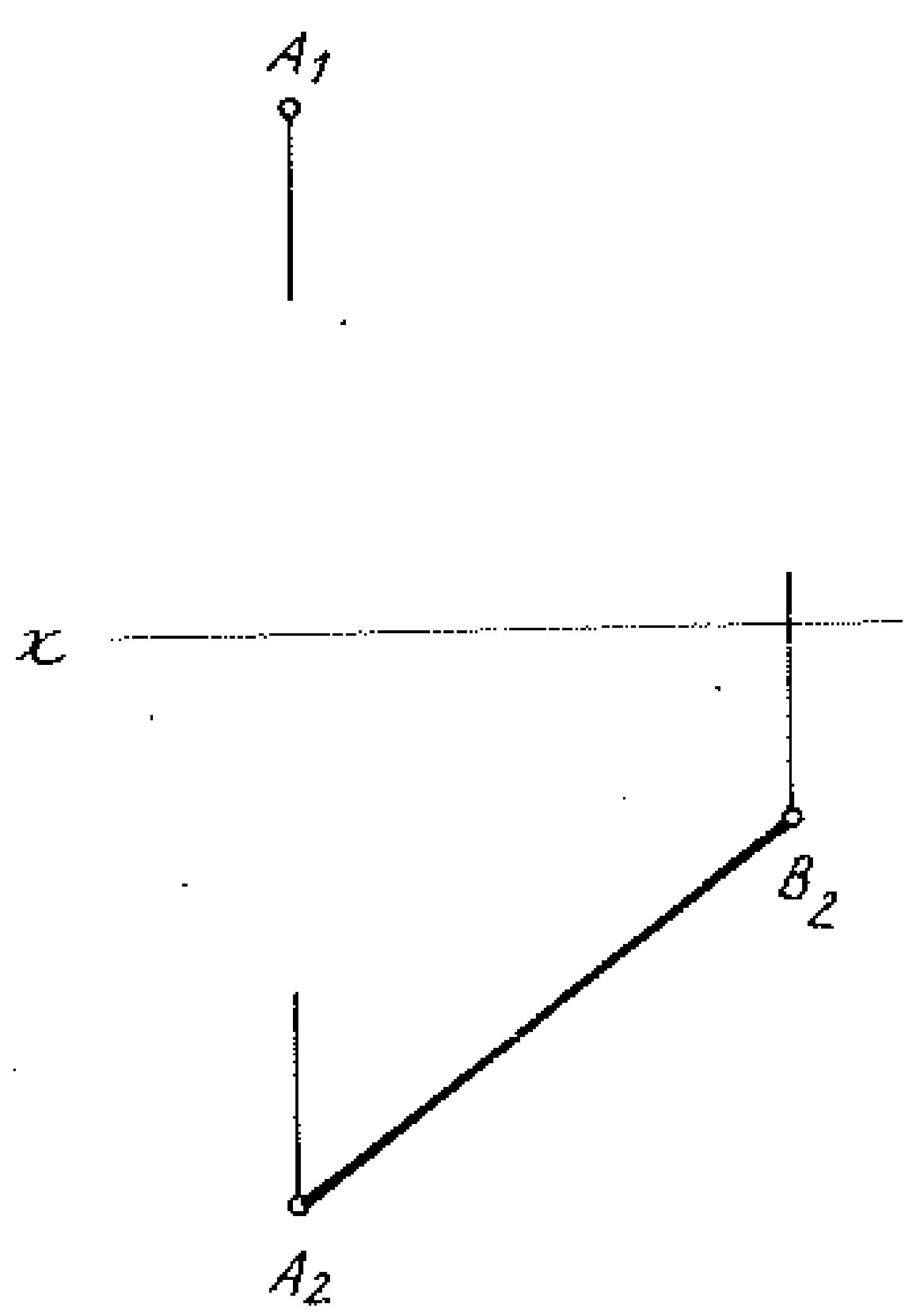


Hình 4 - 18

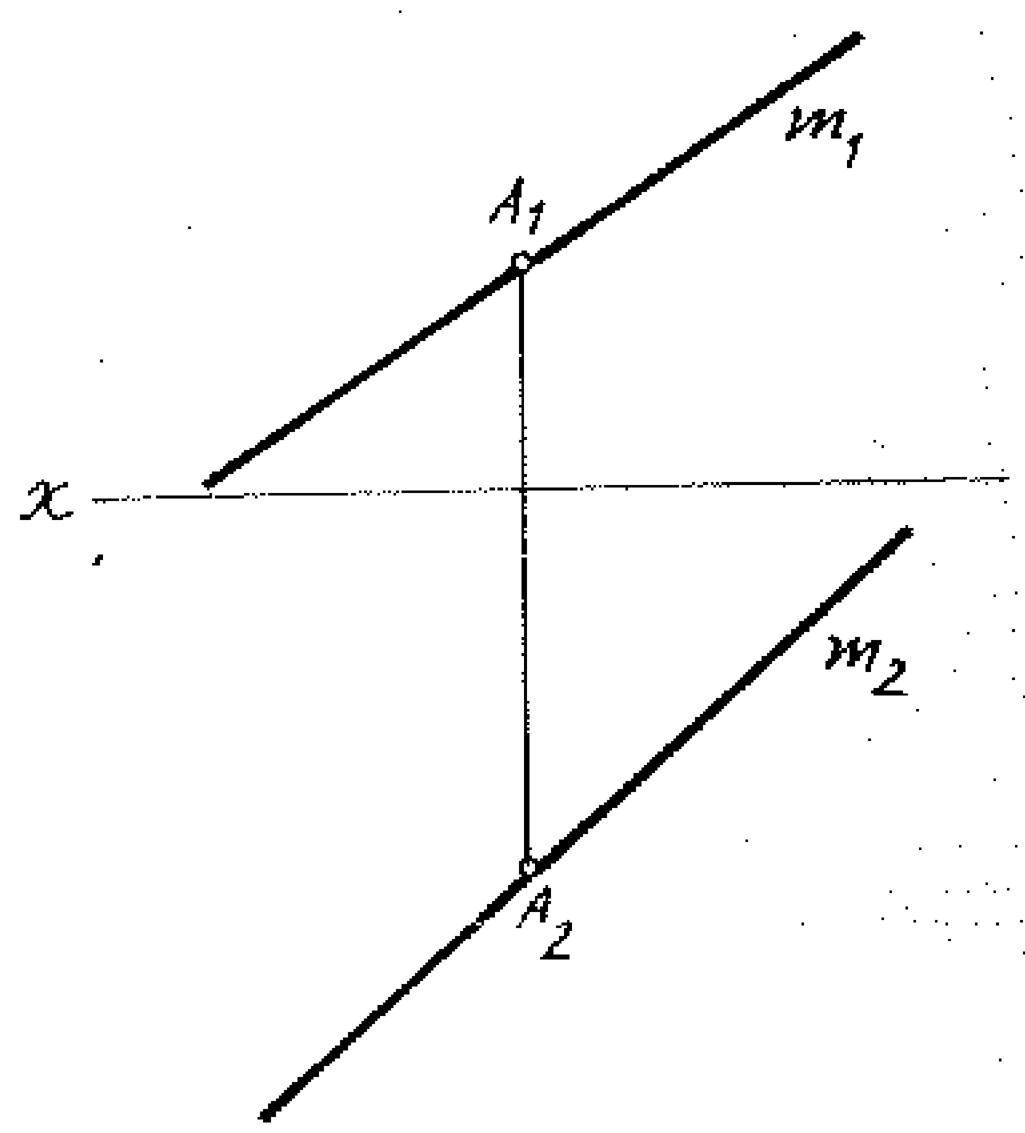
Bài 4: Cho điểm A và hình chiếu bằng B_2 của điểm B. Tìm hình chiếu đứng B_1 của B biết rằng AB nghiêng với ($\mathcal{P}^1$) một góc bằng 30° (Hình 4 - 19).

Bài 5: Cho đường thẳng m và một điểm A $\in$ m. Tìm điểm B $\in$ m sao cho độ dài của đoạn thẳng AB bằng 30 mm (Hình 4 - 20).

Bài 6 : Biết cạnh AB (AB// $\mathcal{P}^2$) và hình chiếu đứng $A_1B_1C_1D_1$ của hình chữ nhật ABCD. Vẽ hình chiếu bằng của ABCD, (Hình 4 - 21).



Hình 4 - 19



Hình 4 - 20

Bài 7 : Biết cạnh AB và hình chiếu đứng của tia Ad chứa cạnh AD của hình vuông ABCD. Vẽ các hình chiếu của ABCD (Hình 4 – 22).

Bài 8 : Cho điểm A và đường mặt m. Dựng tam giác vuông cân ABC sao cho cạnh huyền BC nằm trên đường thẳng m (Hình 4–23).

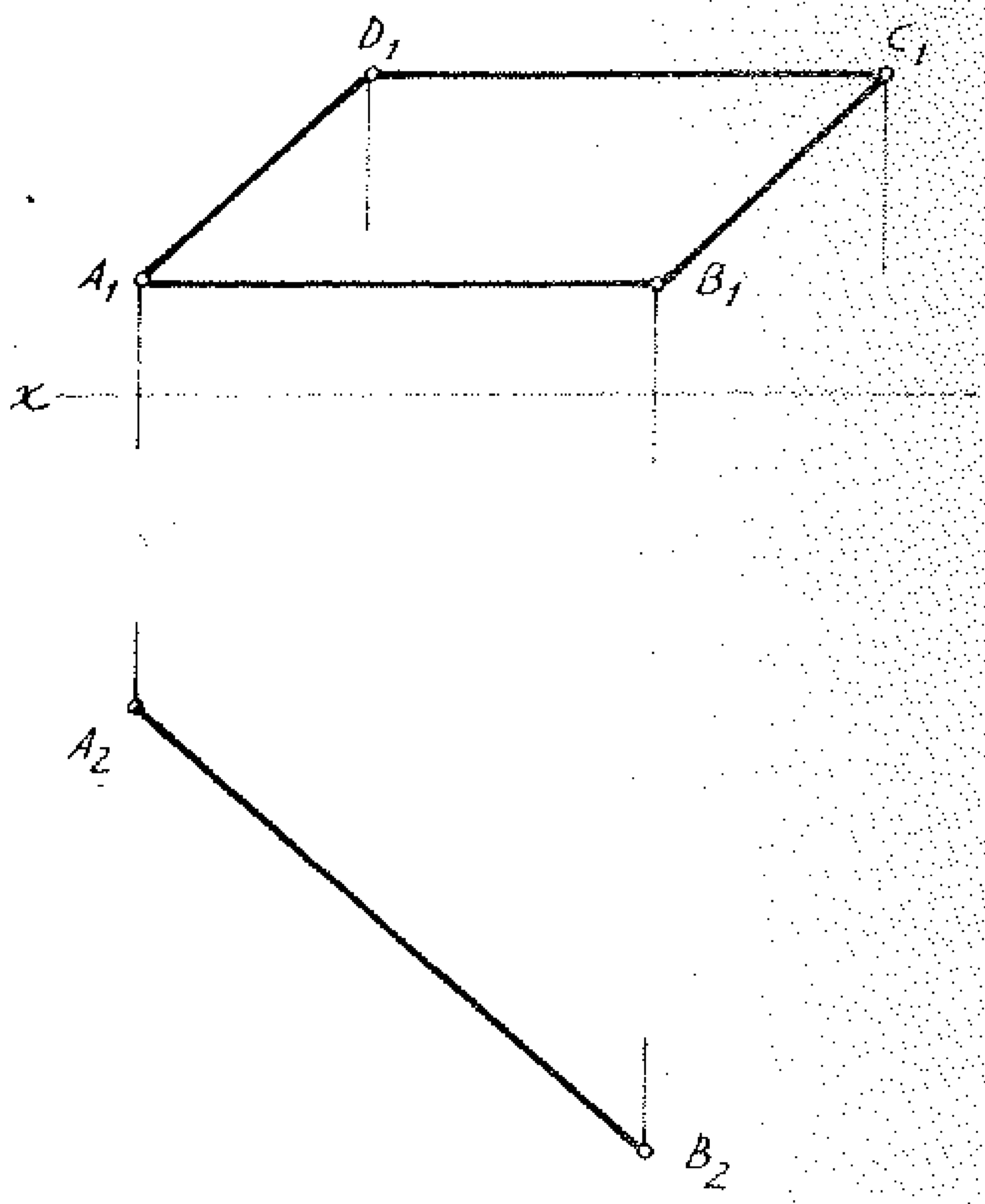
Bài 9 : Cho điểm A và hình chiếu bằng t_2 của đường thẳng t. Tìm hình chiếu đứng của t biết rằng t ⊥ $\mathcal{P}^1$ và khoảng cách từ A đến t là 30mm (Hình 4–24).

Bài 10 : Tìm khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng t:

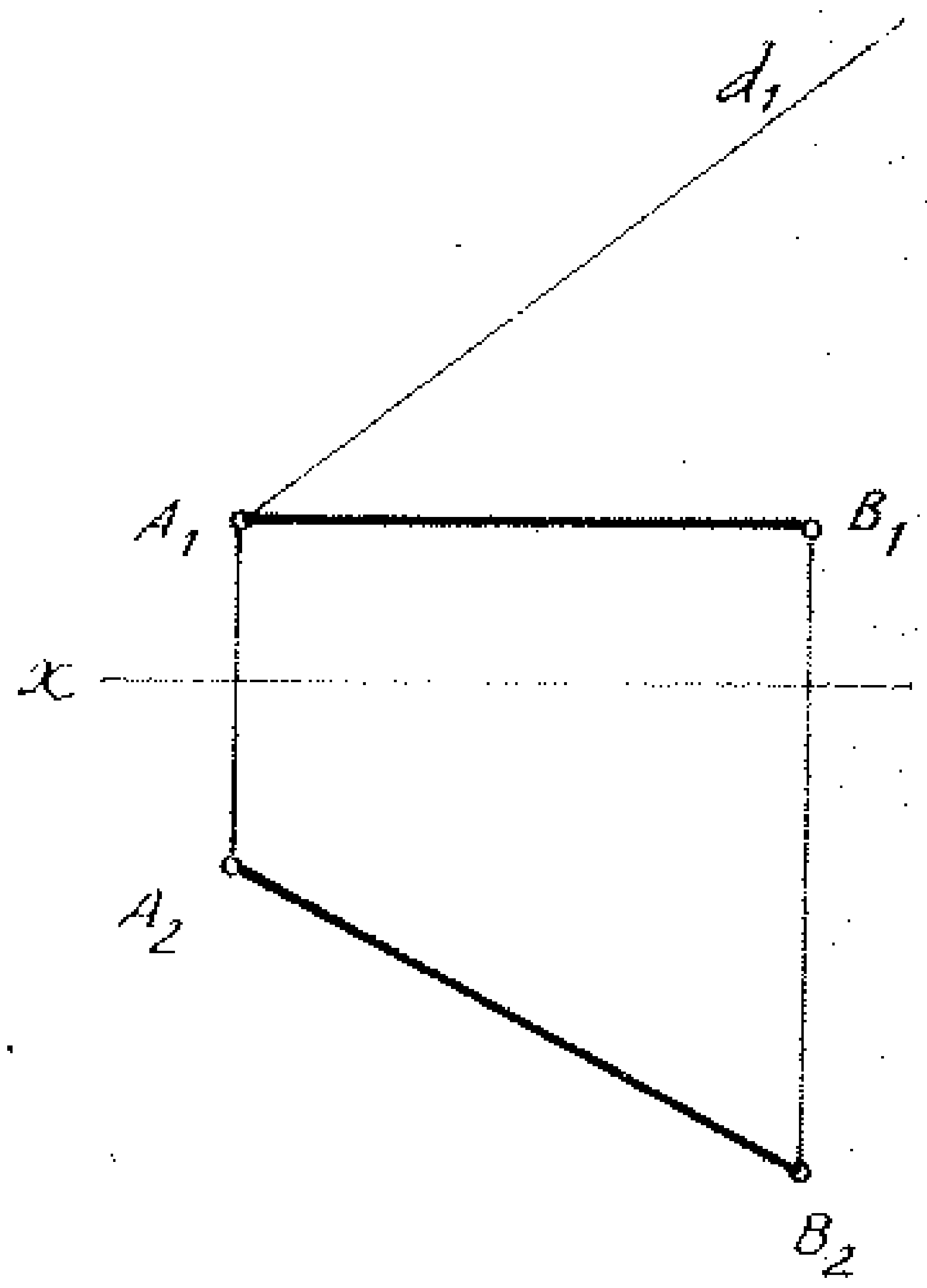
a– t là đường bằng (Hình 4–25)

b– t là đường mặt (Hình 4–26)

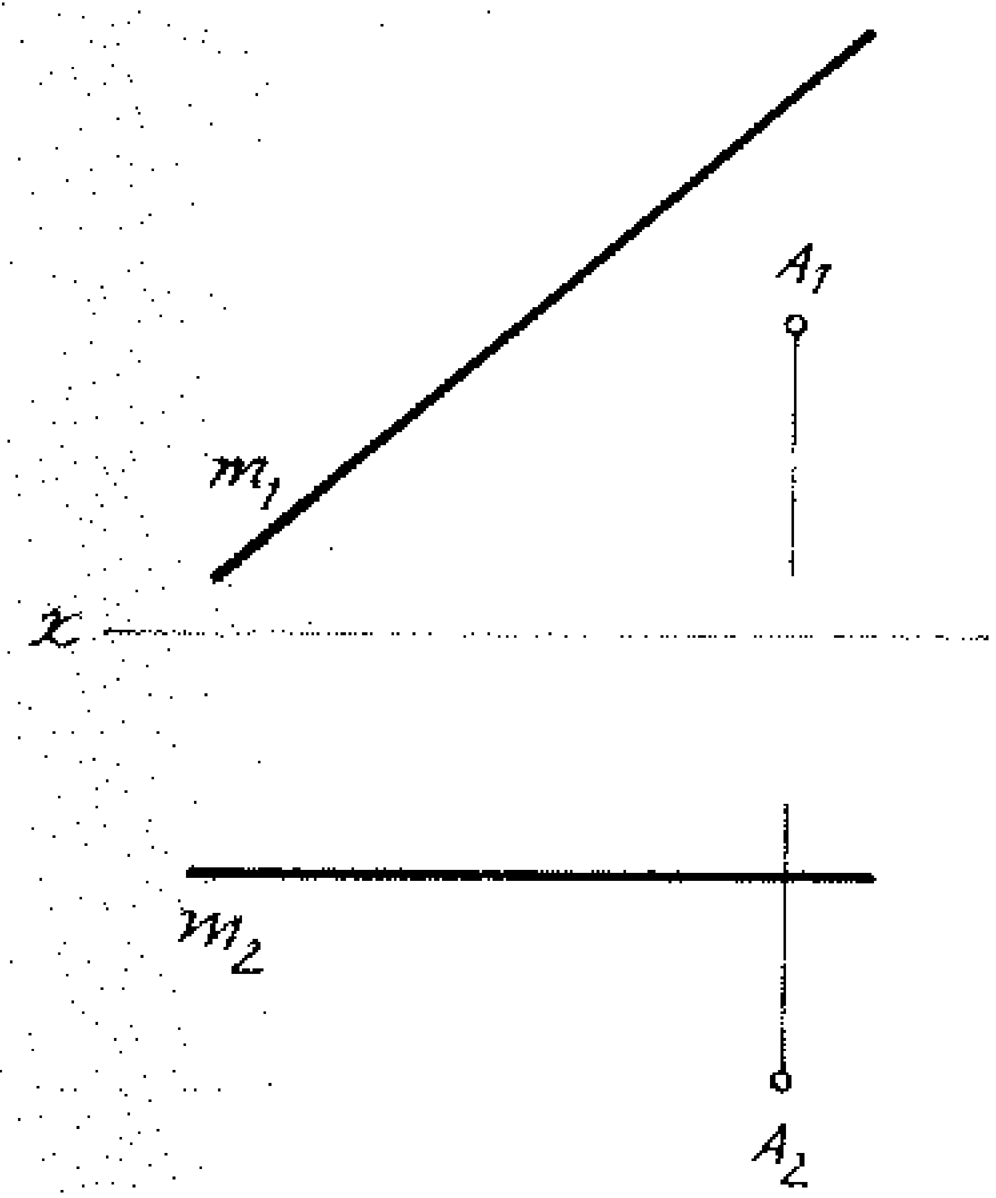
c– t là đường thẳng bất kì (Hình 4–27)



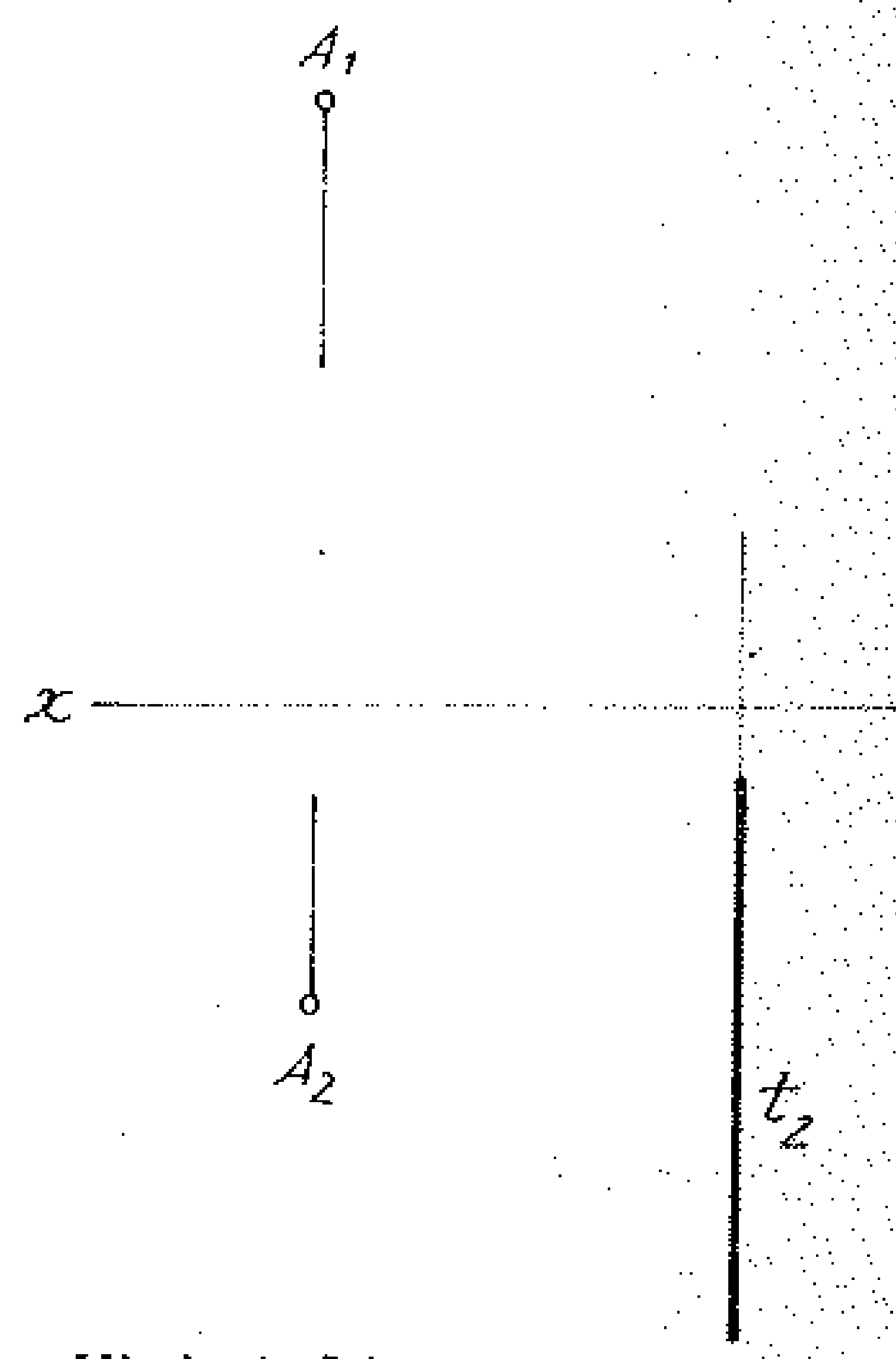
Hình 4 – 21



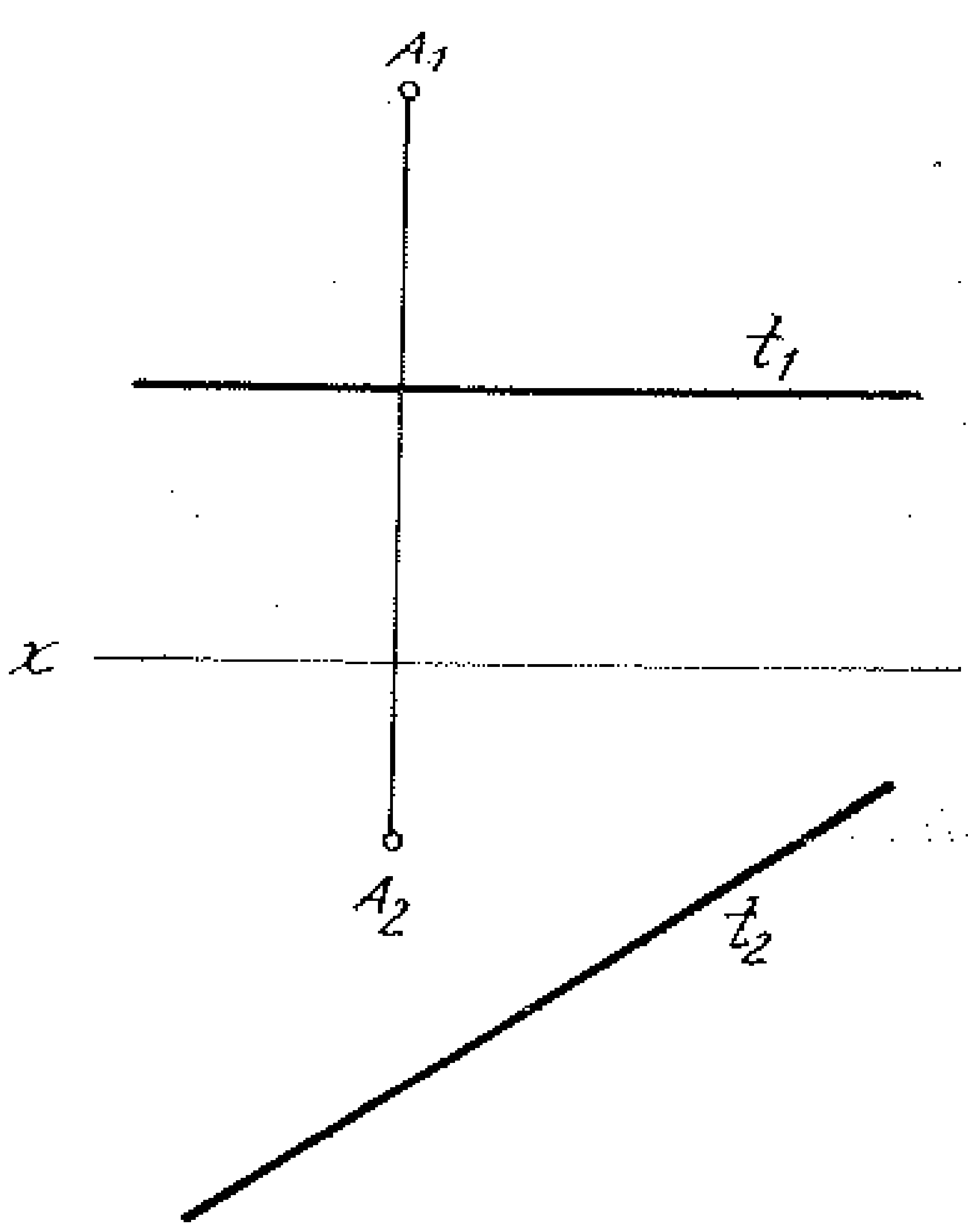
Hình 4–22



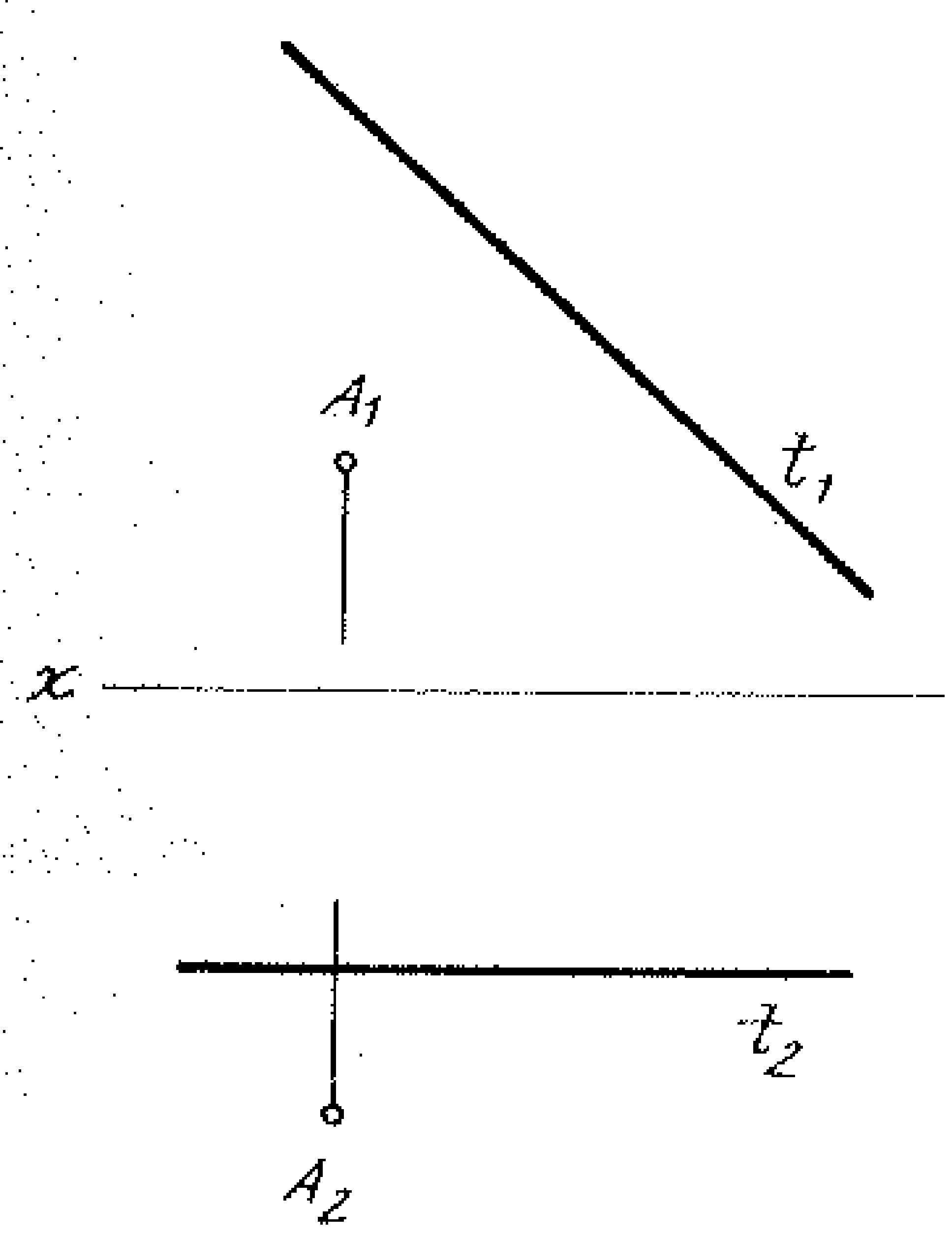
Hình 4–23



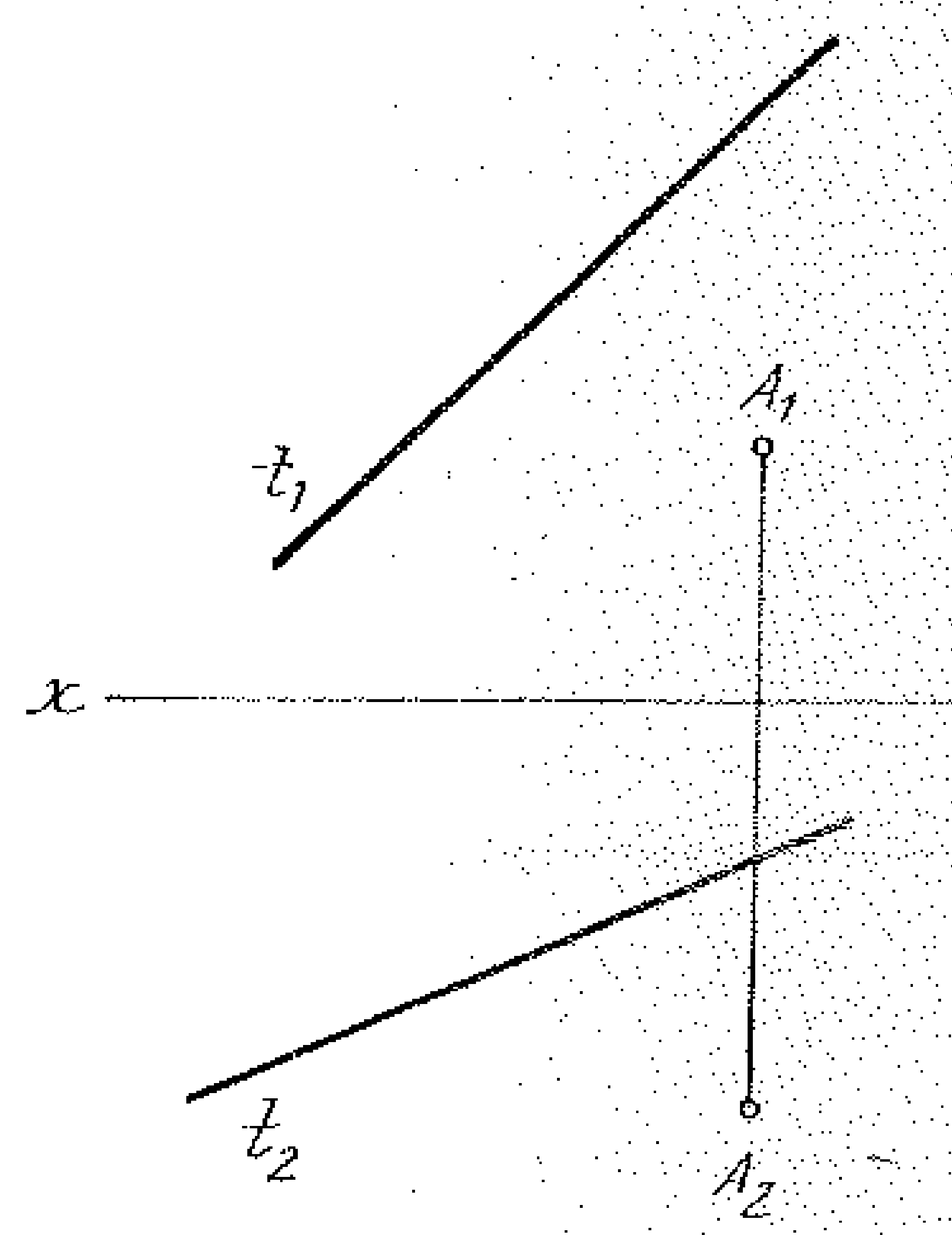
Hình 4–24



Hình 4–25



Hình 4–26



Hình 4–27

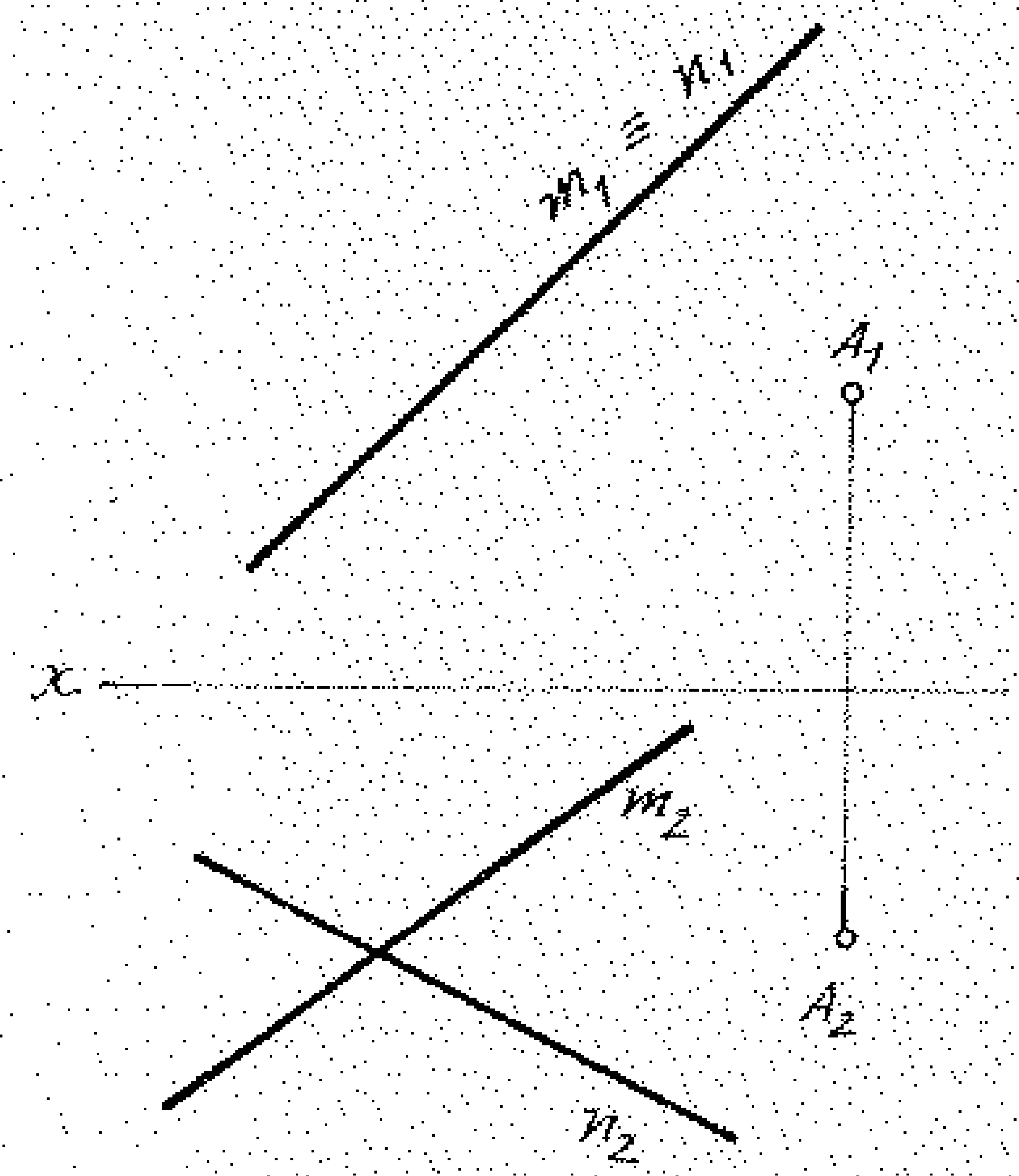
Bài 11 : Tìm khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\mathcal{Q}$

a) $\mathcal{Q}$ (m x n), (Hình 4-28)

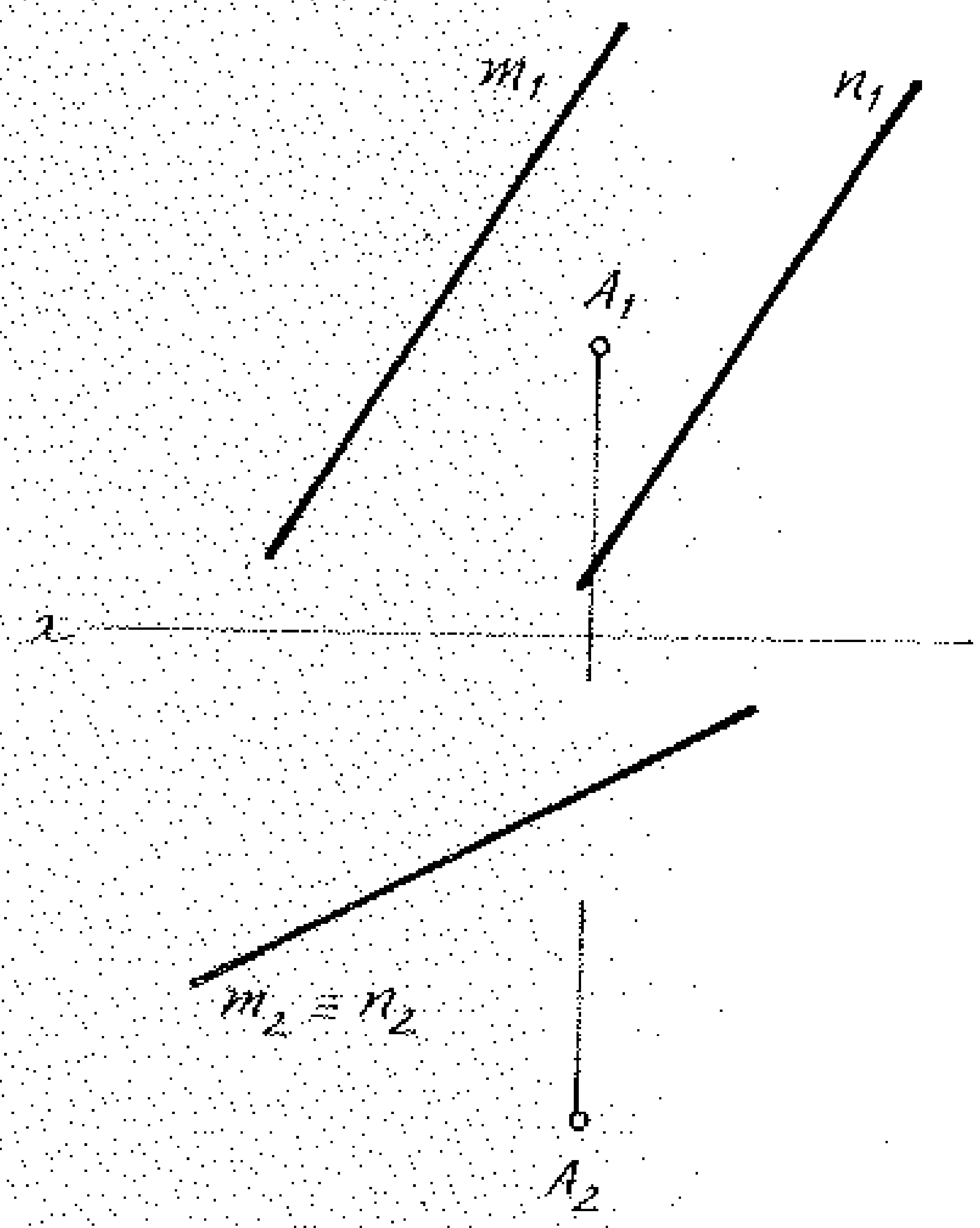
b) $\mathcal{Q}$ (m // n), (Hình 4-29)

c) $\mathcal{Q}$ ($v^1_Q \equiv v^2_Q$), (Hình 4-30)

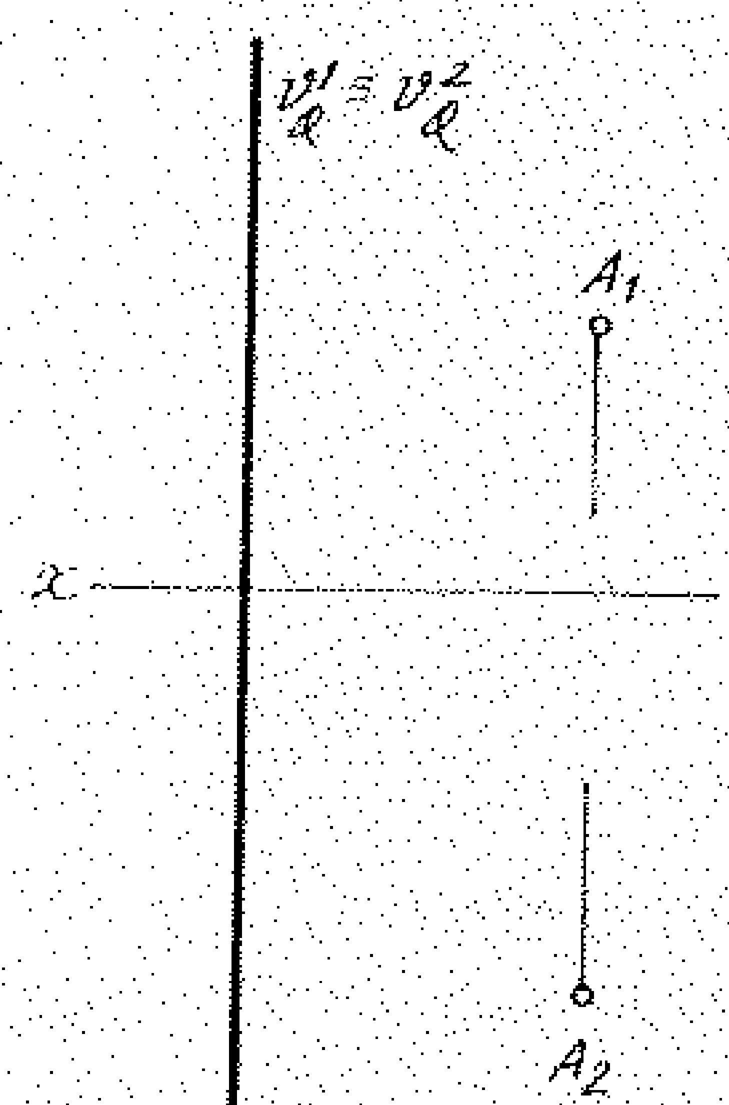
d) $\mathcal{Q}$ ($v^1_Q \times v^2_Q$), (Hình 4-31)



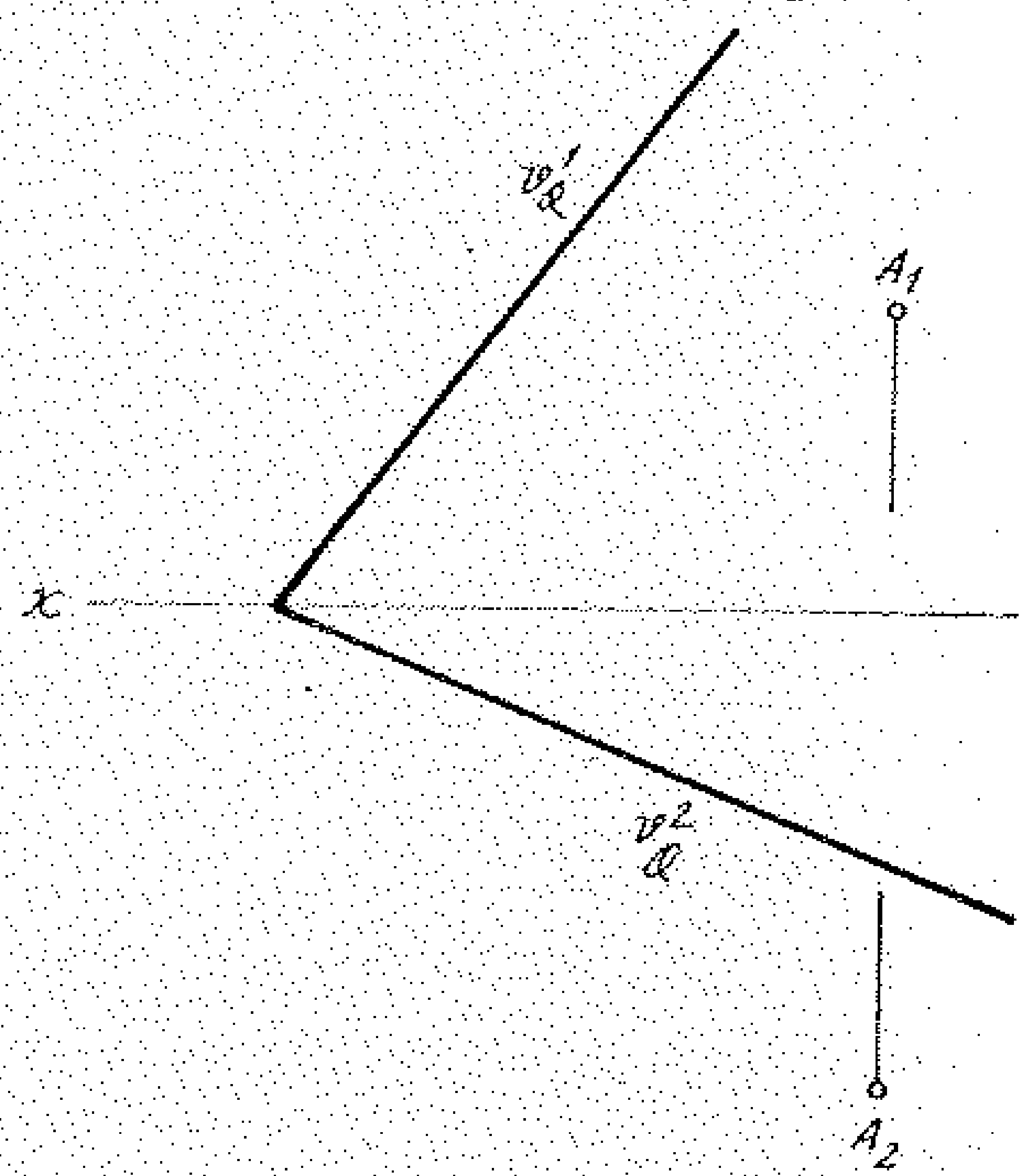
Hình 4-28



Hình 4-29



Hình 4-30



Hình 4-31

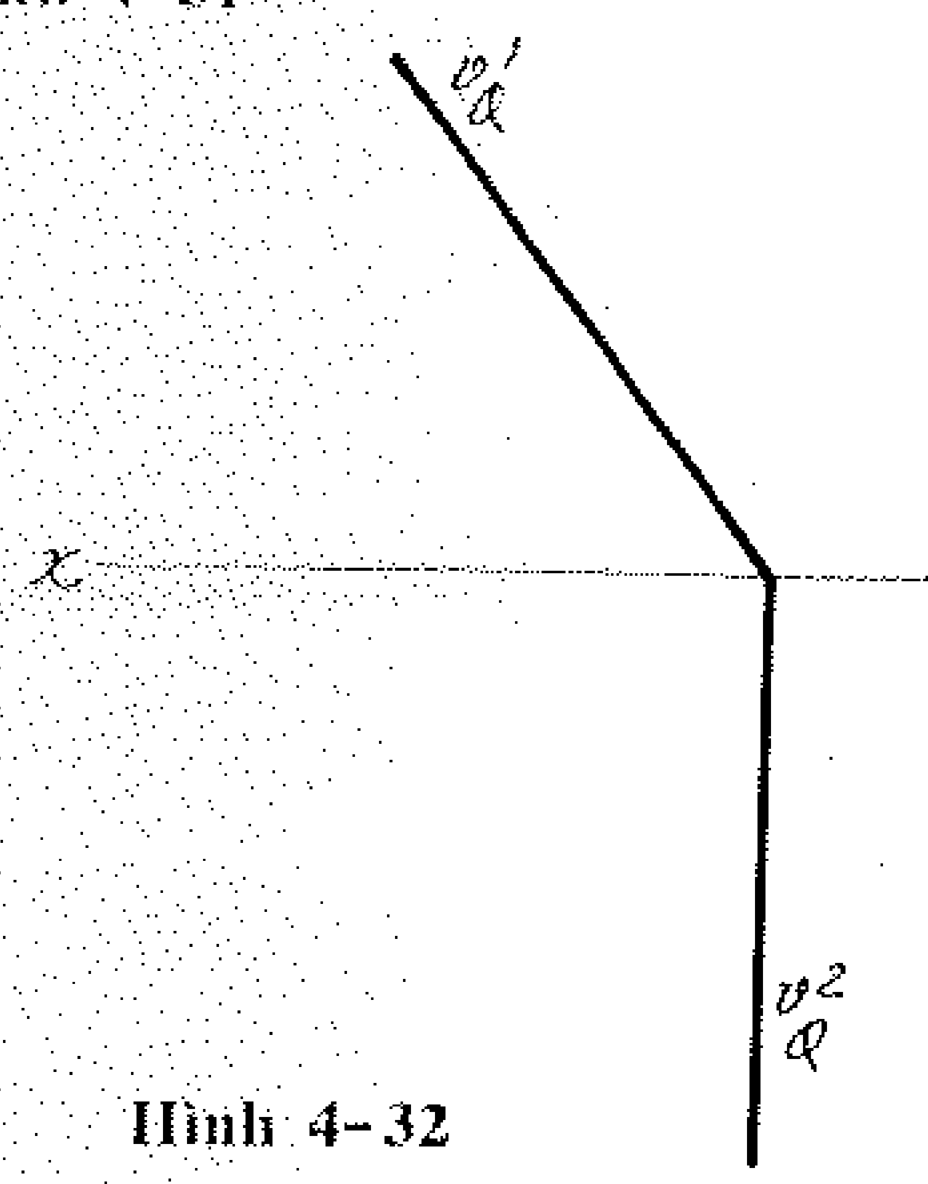
Bài 12 : Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Dựng mặt phẳng song song và cách $\mathcal{Q}$ 30mm:

a) $\mathcal{Q} \perp \mathcal{P}^1$, (Hình 4-32)

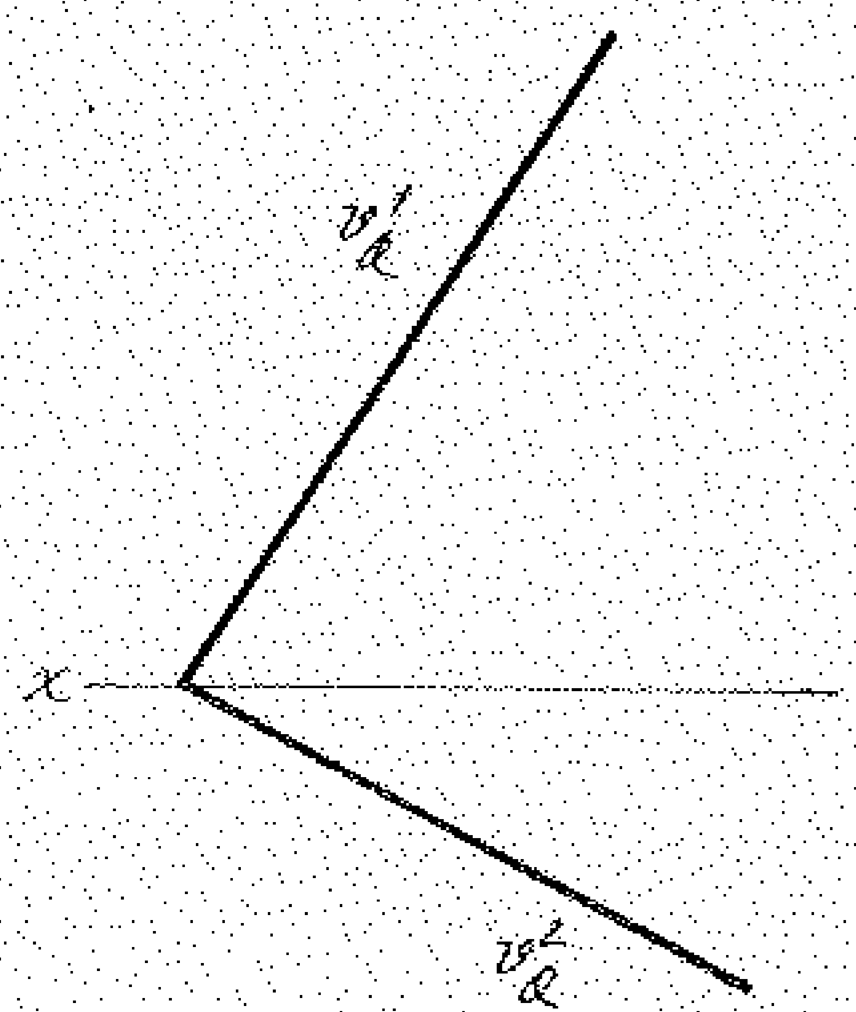
b) $\mathcal{Q}$ ($v^1_Q \times v^2_Q$), (Hình 4-33)

c) $\mathcal{Q}$ (A, B, C), (Hình 4-34)

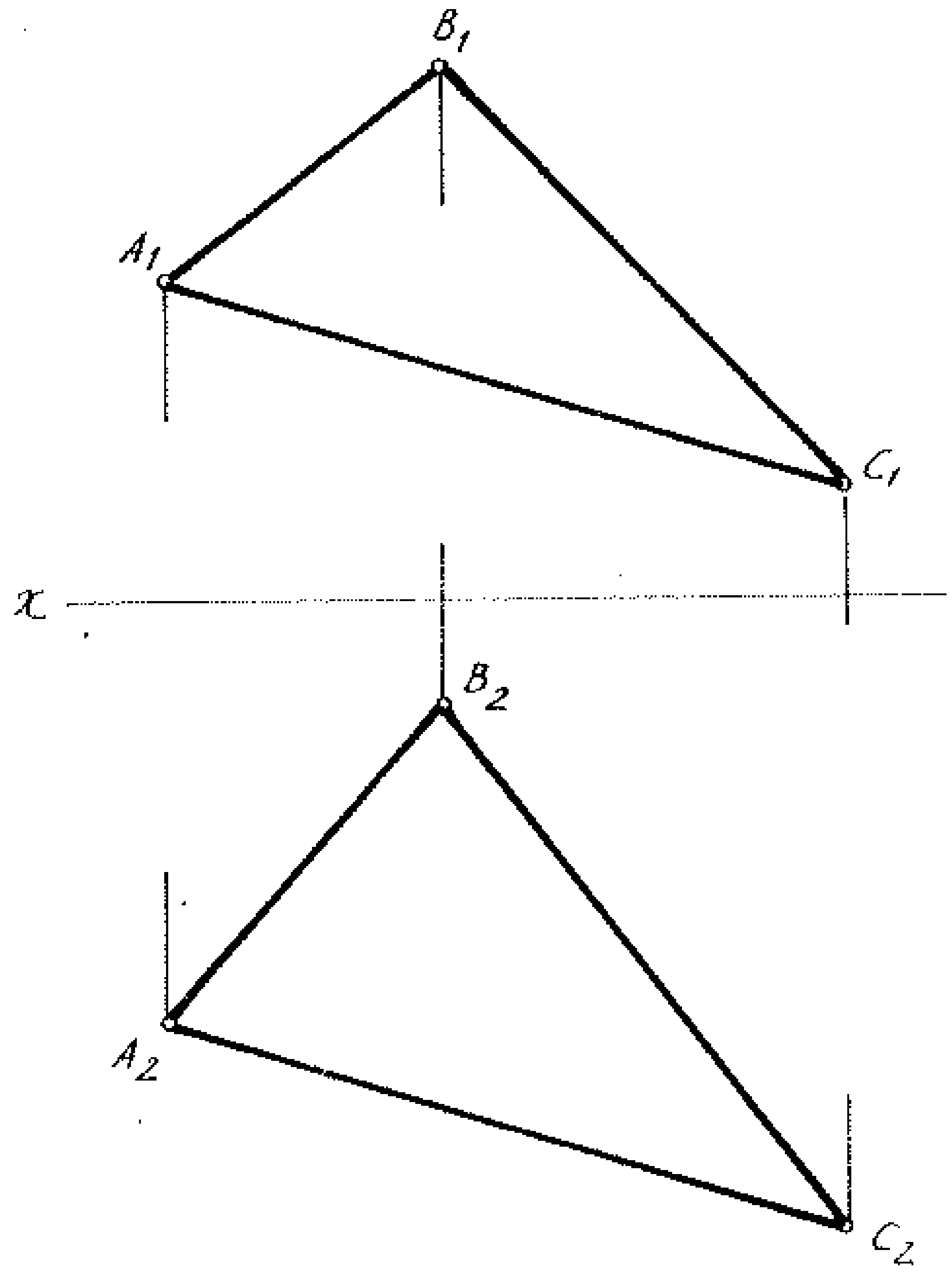
Bài 13 : Xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng m, n. (Hình 4-35, Hình 4-36).



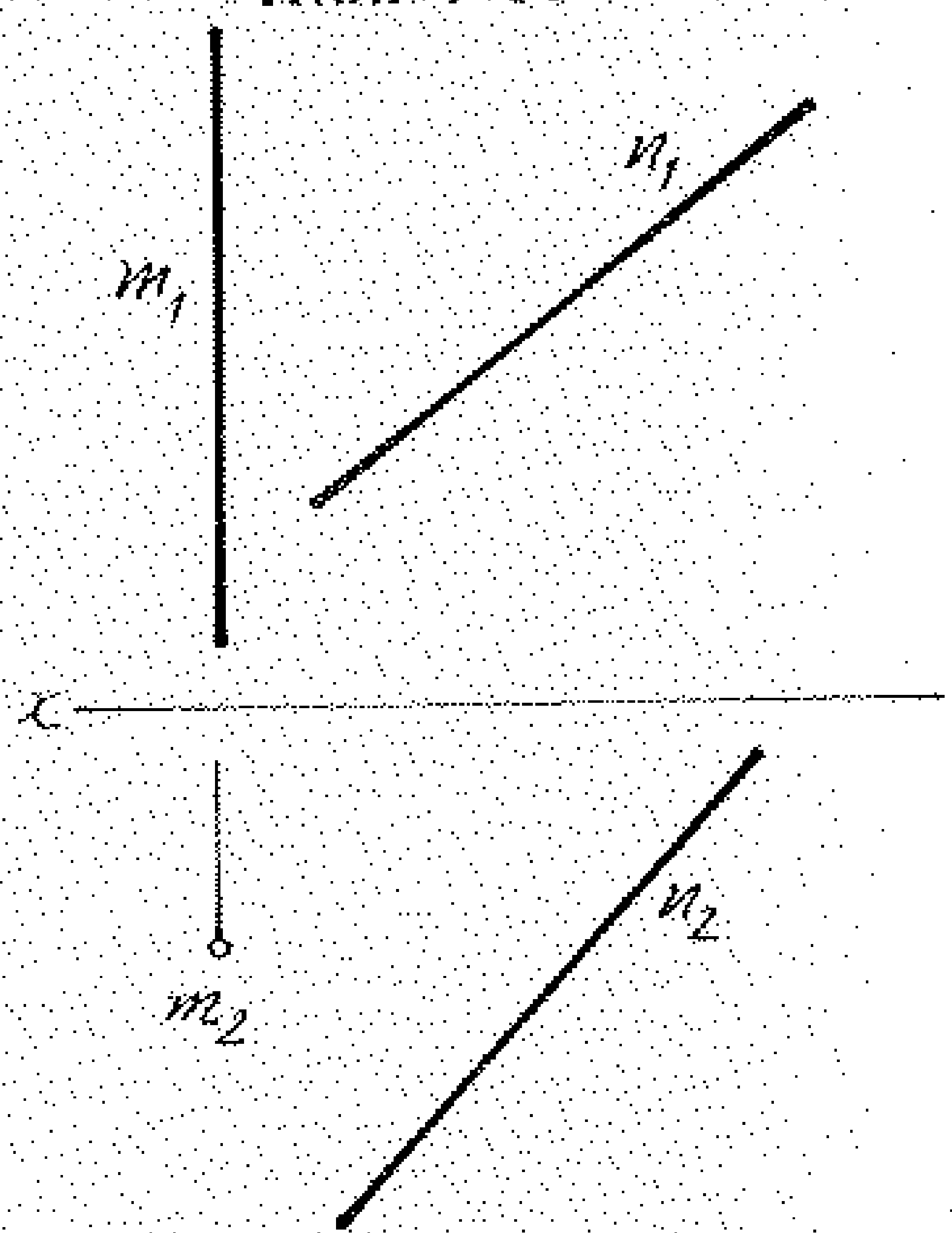
Hình 4-32



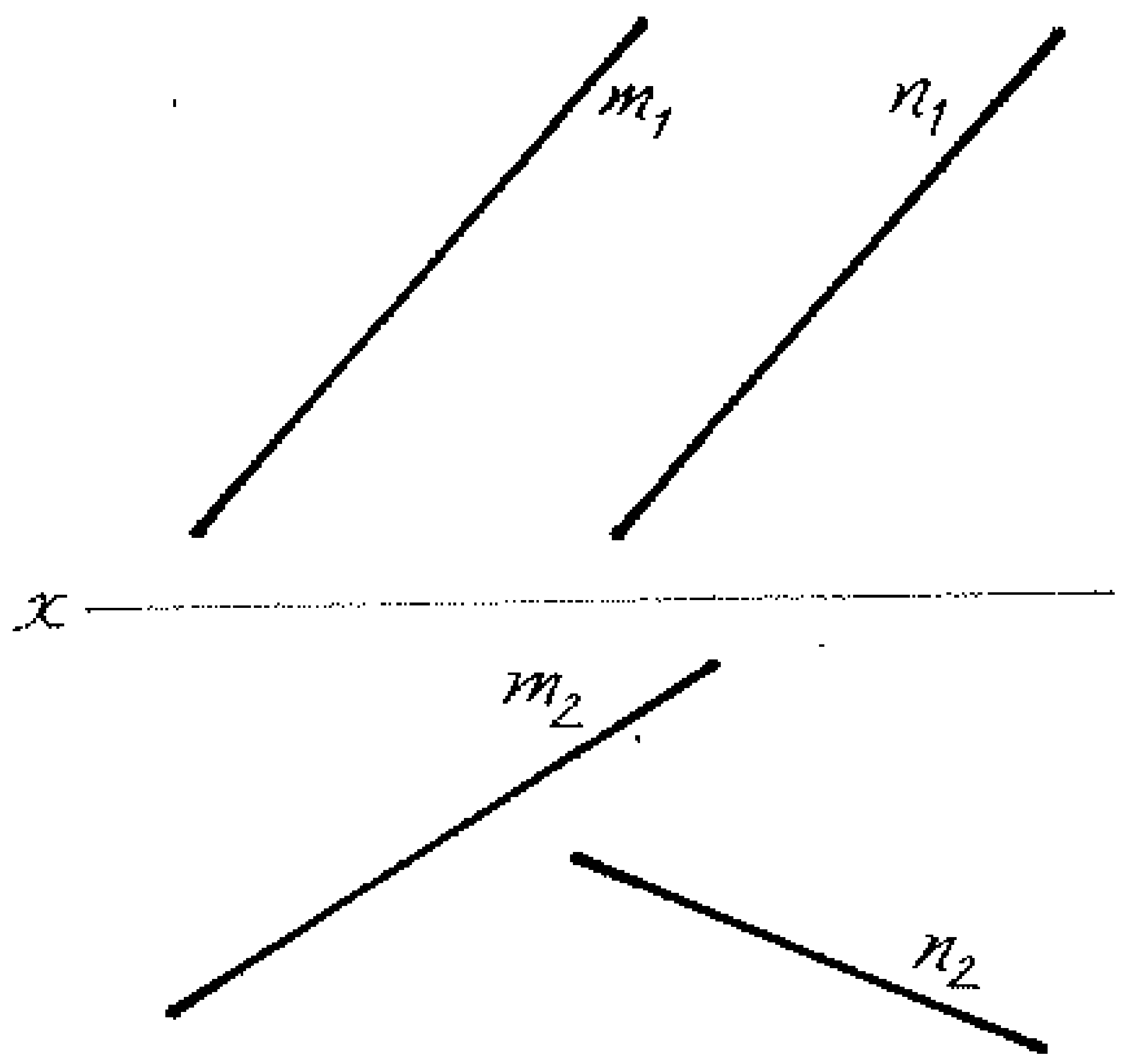
Hình 4-33



Hình 4-34



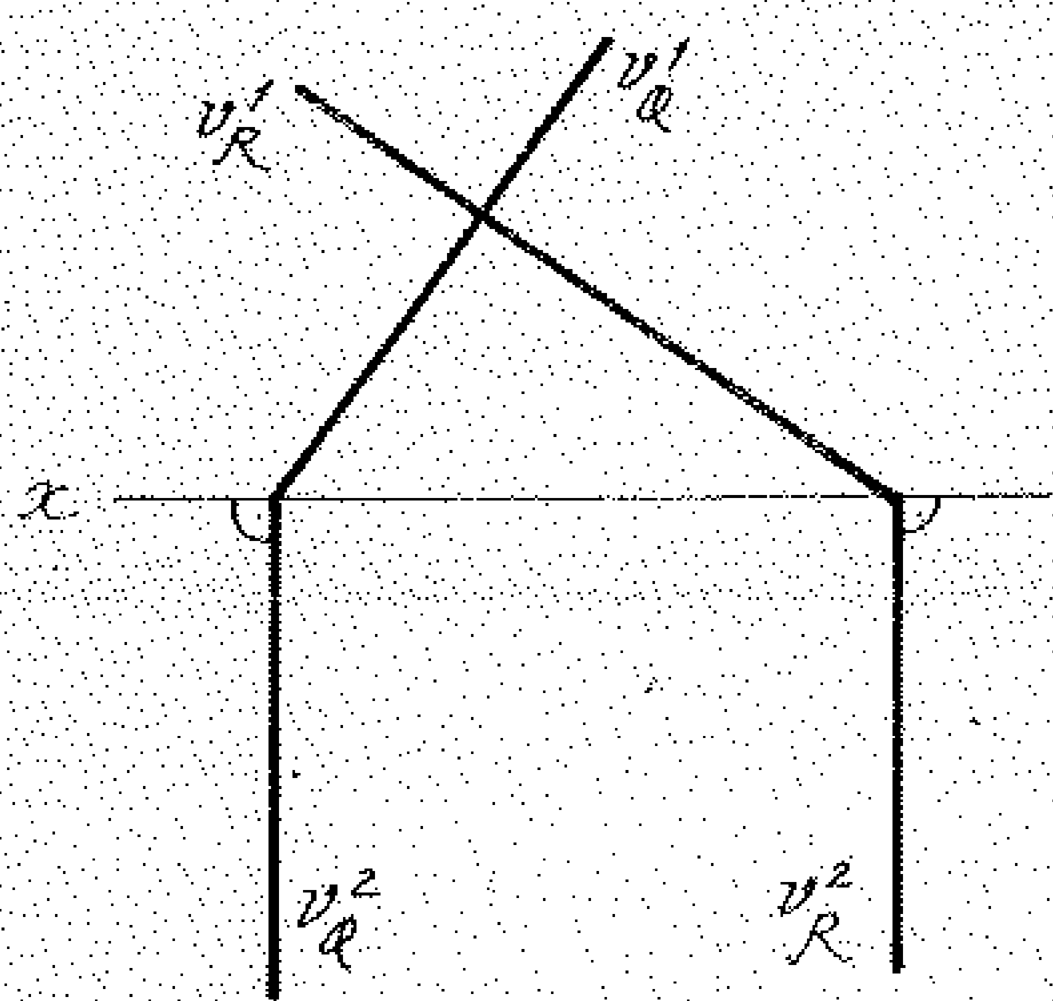
Hình 4-35



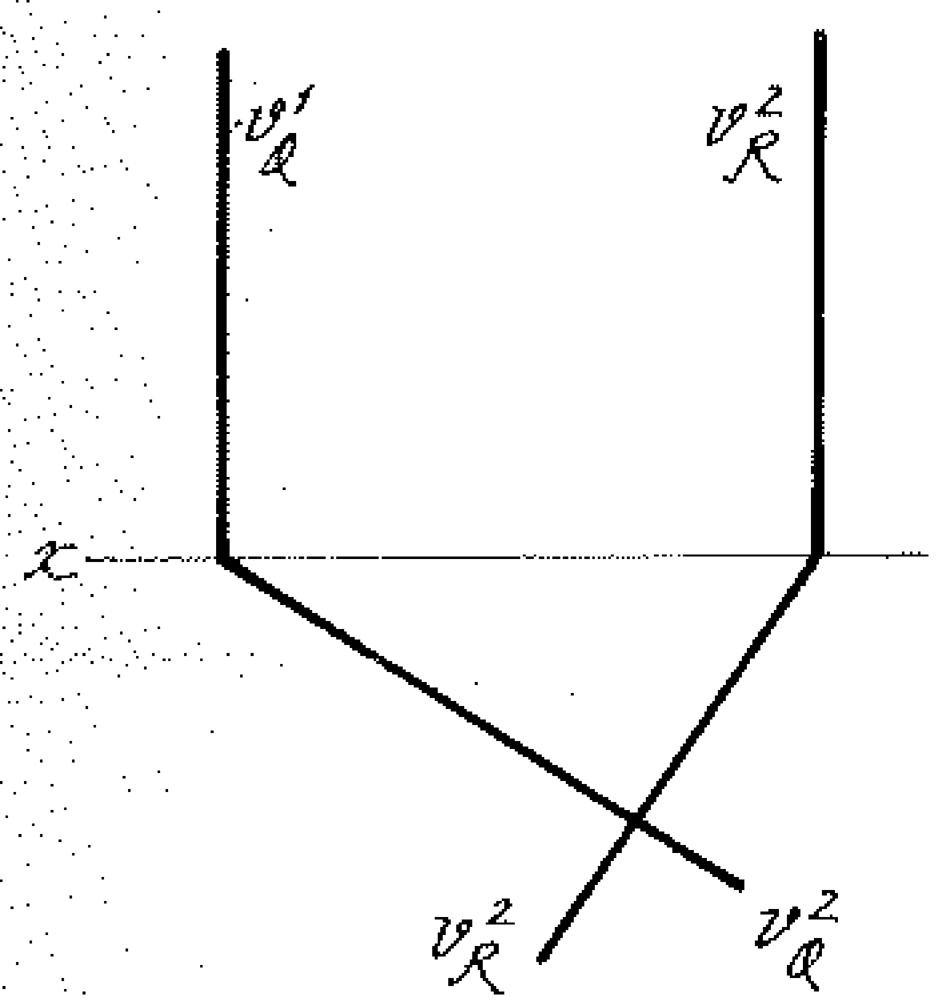
Hình 4-36

Bài 14 : Xác định góc giữa hai mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và $\mathcal{R}$ (Hình 4-37, Hình 4-38).

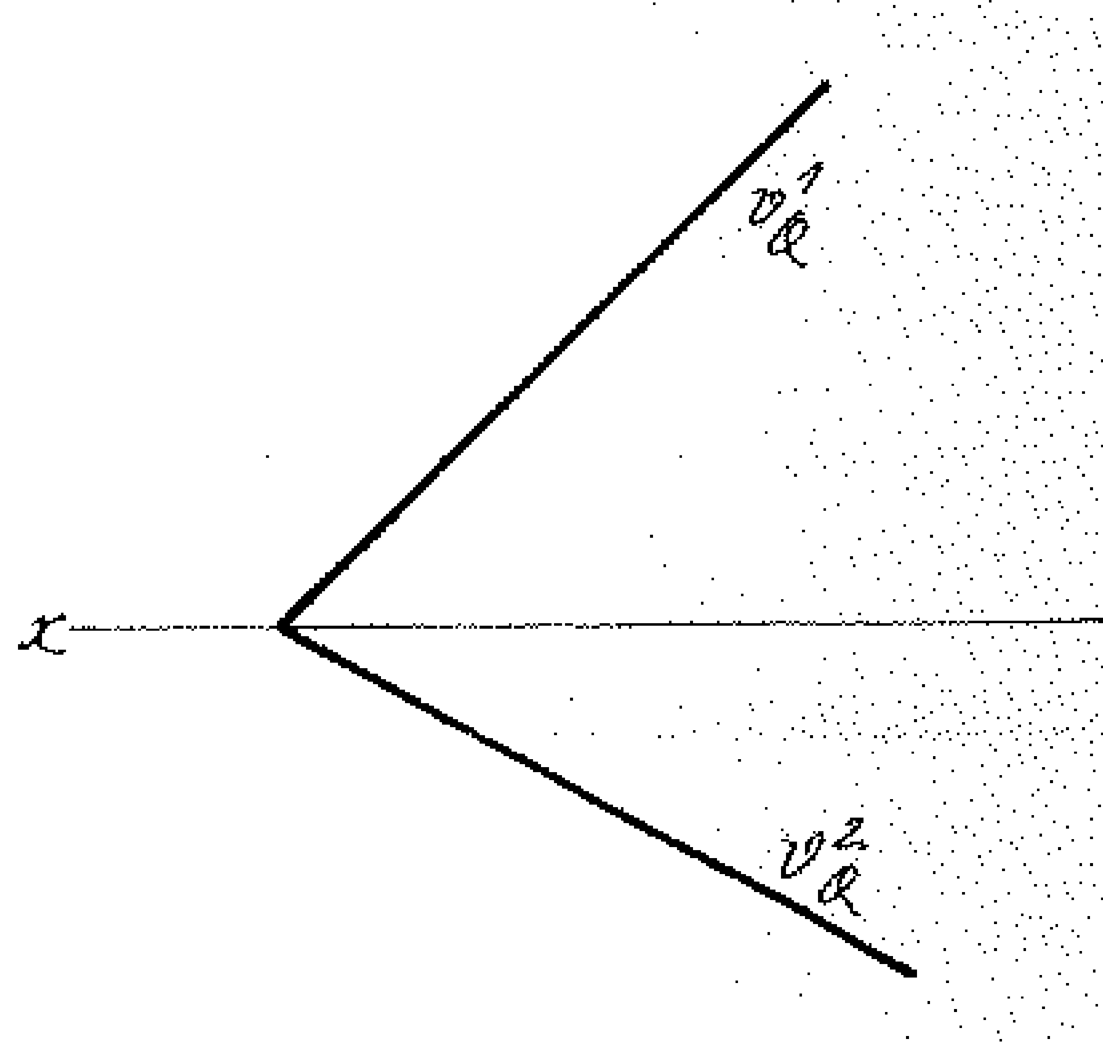
Bài 15 : Xác định góc nghiêng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ so với mặt phẳng hình chiếu đứng, (Hình 4-39).



Hình 4-37



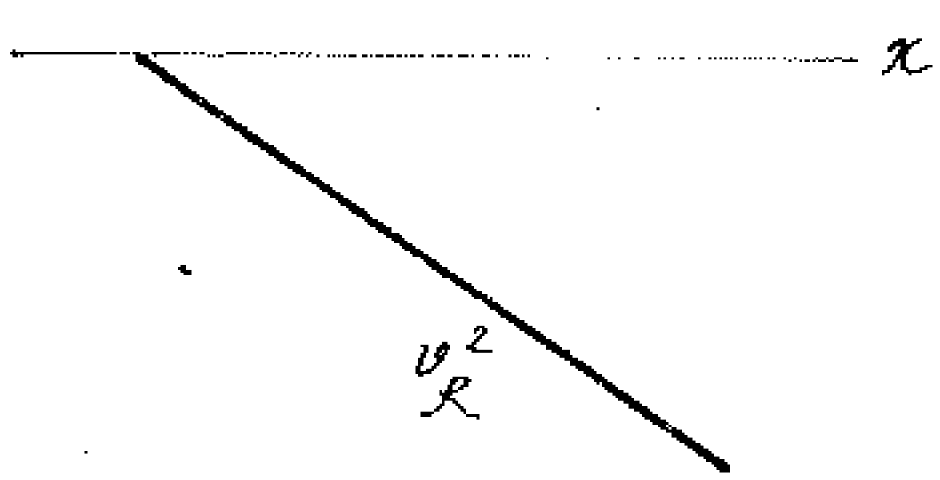
Hình 4-38



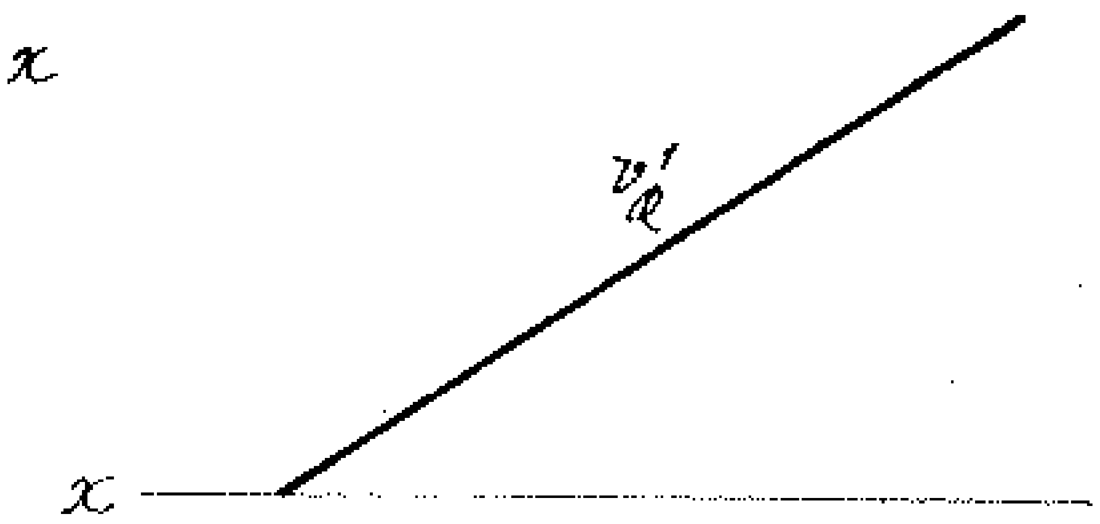
Hình 4-39

Bài 16 : Vẽ vết đứng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ biết vết bằng $v^2_{\mathcal{Q}}$ và góc nghiêng của ($\mathcal{Q}$) so với mặt phẳng hình chiếu bằng là 30°, (Hình 4-40).

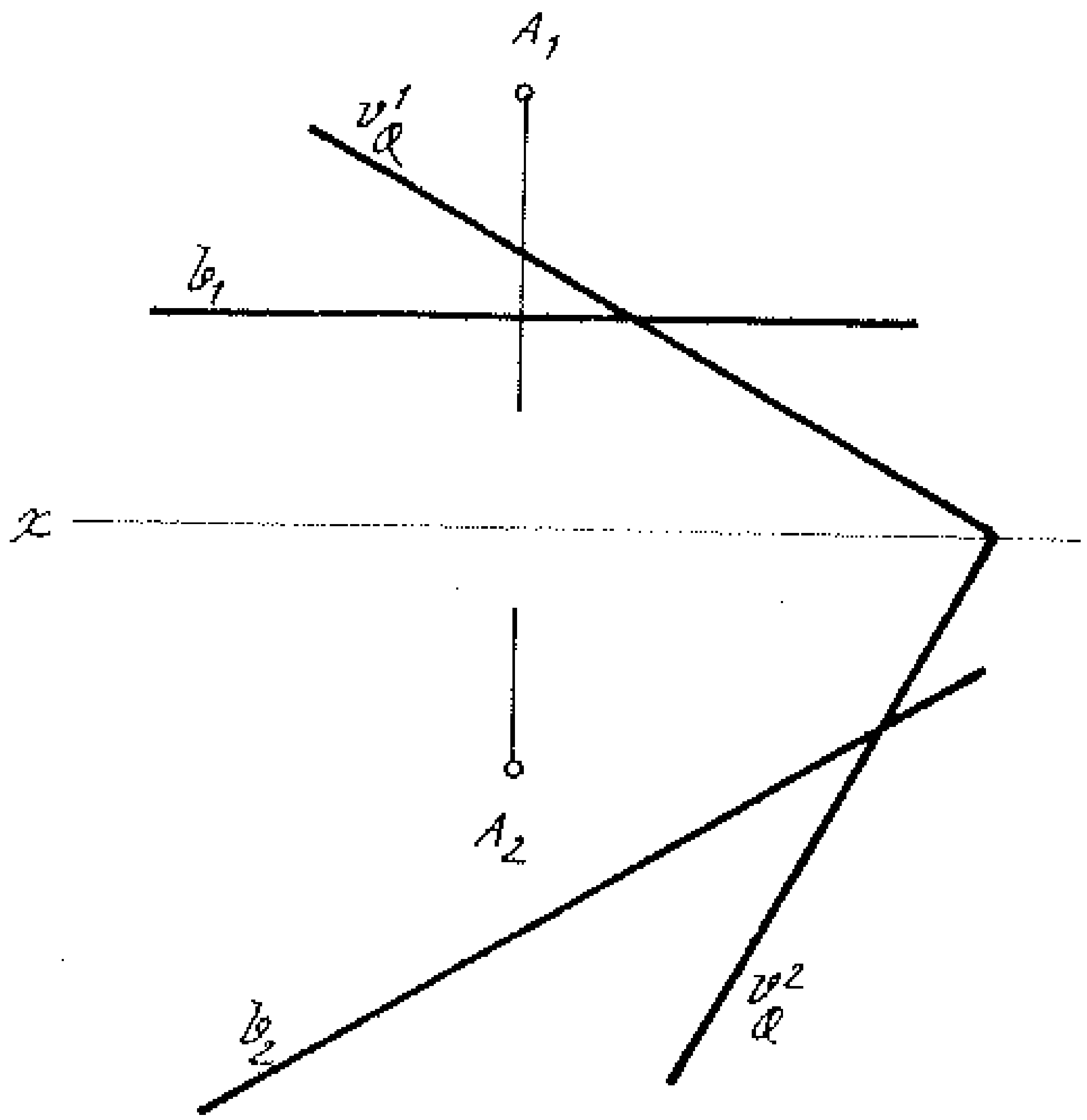
Bài 17 : Vẽ vết bằng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ biết vết đứng $v^1_{\mathcal{Q}}$ và góc nghiêng của ($\mathcal{Q}$) so với mặt phẳng hình chiếu bằng là 30° (Hình 4-41).



Hình 4-40



Hình 4-41



Hình 4-42

Bài 18 : Cho điểm A, đường bằng b và mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Dựng đường thẳng qua A, vuông góc với b và song song với ($\mathcal{Q}$) (Hình 4-42).

Bài 19 : Vẽ các vết của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ biết một đường dốc nhất của ($\mathcal{Q}$) so với mặt phẳng hình chiếu bằng.

Bài 20 : Cho điểm A. Dựng một đường thẳng qua A, nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc bằng α cho trước và sao cho hai hình chiếu của đường thẳng đó song song với nhau.

CHƯƠNG 5

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HÌNH CHIẾU

5.1. Các thí dụ

Thí dụ 1: Cho đoạn thẳng AB.

1- Thay mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}^1$ sao cho điểm A trở thành vết đứng của đường thẳng AB và điểm B có độ cao bằng độ xa.

2- Thay mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$ sao cho AB trở thành đường bằng có độ cao bằng 10mm (Hình 5-1)

Giải :

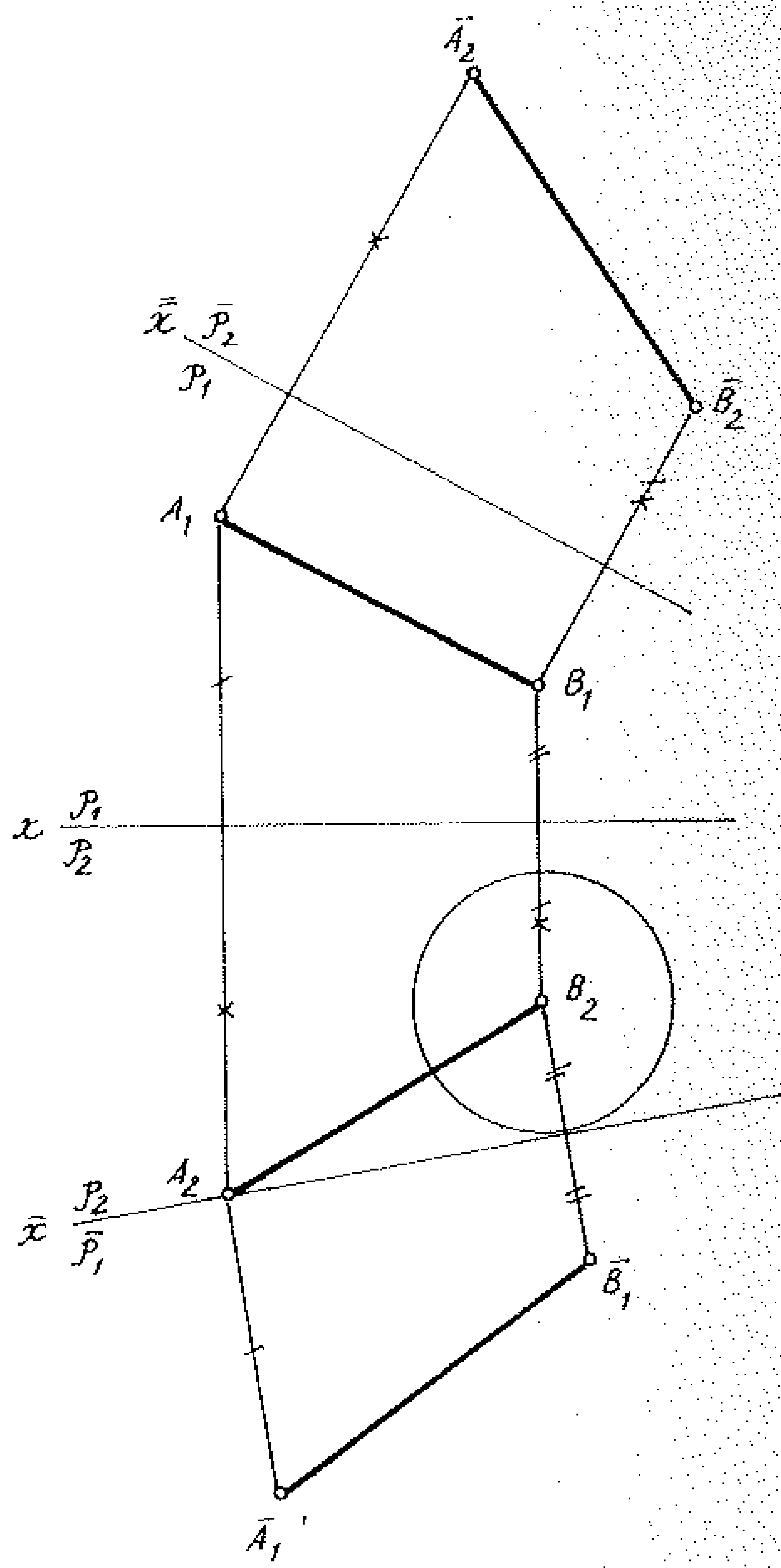
1- Thay $(\mathcal{P}^1)$ bằng $(\overline{\mathcal{P}^1})$ thì trục x thay bằng trục $\overline{x}$ nhưng hình chiếu bằng và độ cao của các điểm A, B không thay đổi. Do đó:

- Trục $\overline{x}$ phải đi qua A_2 thì điểm A mới trở thành vết đứng của đường thẳng AB.

- Trục x phải nằm cách B_2 một khoảng bằng độ cao của điểm B (đoạn B_1B_x thì độ cao và độ xa của điểm B mới bằng nhau.

Vậy $\overline{x}$ là tiếp tuyến vẽ qùa A_2 của đường tròn tâm B_2, bán kính bằng đoạn B_1B_x (Trên hình 5-1 chỉ vẽ một trong hai nghiệm của bài toán).

2- Thay $(\mathcal{P}^2)$ bằng $(\overline{\mathcal{P}^2})$ thì hình chiếu đứng và độ xa của các điểm A, B không thay đổi. Để AB trở thành đường bằng có độ cao bằng 10mm trục $\overline{\overline{x}}$ phải song song và cách A_1B_1 một khoảng bằng 10mm.



Hình 5-1

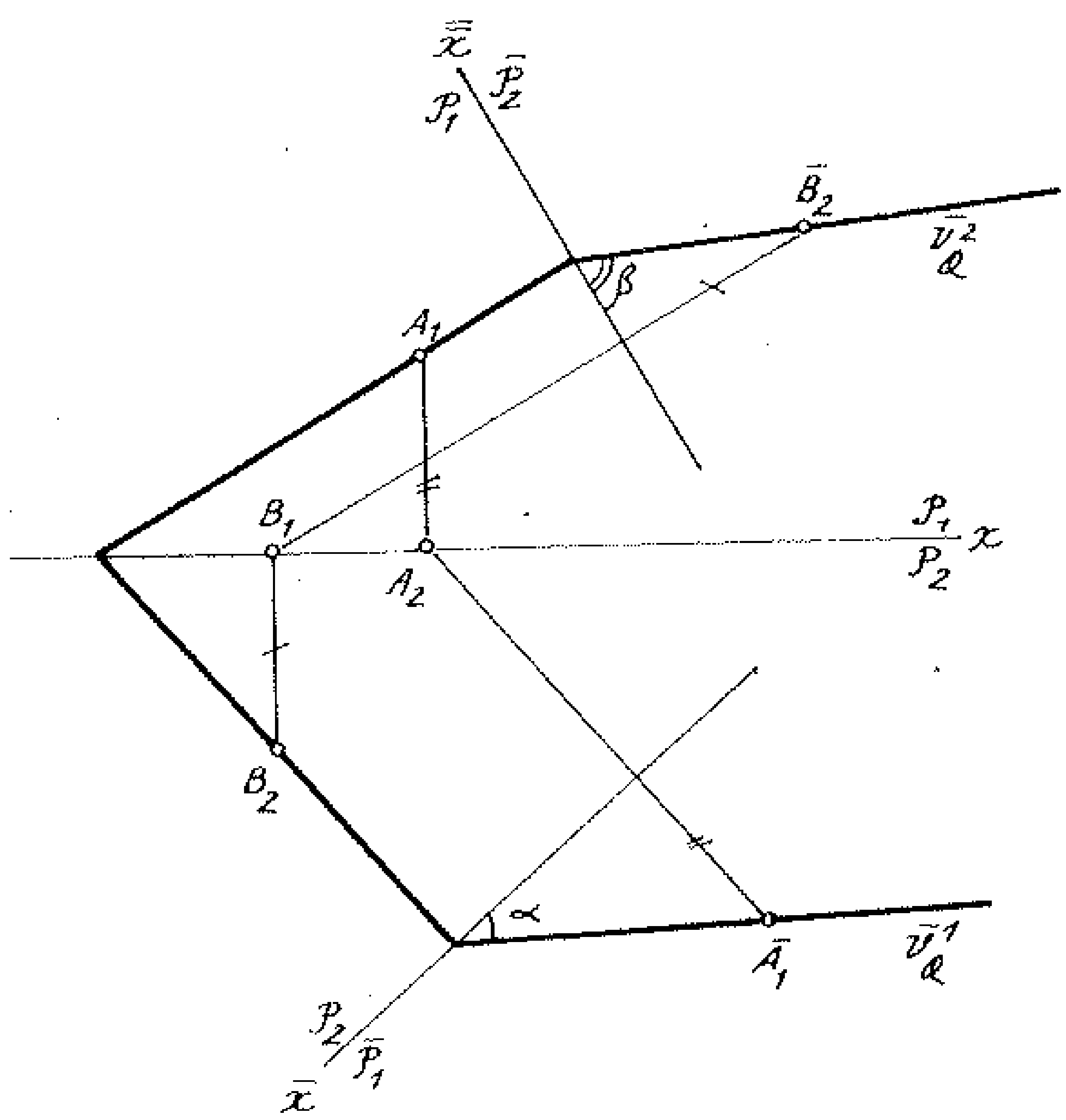
Thí dụ 2: Xác định góc nghiêng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ so với các mặt phẳng hình chiếu $\mathcal{P}^1$ và $\mathcal{P}^2$ (Hình 5-2).

Giải :

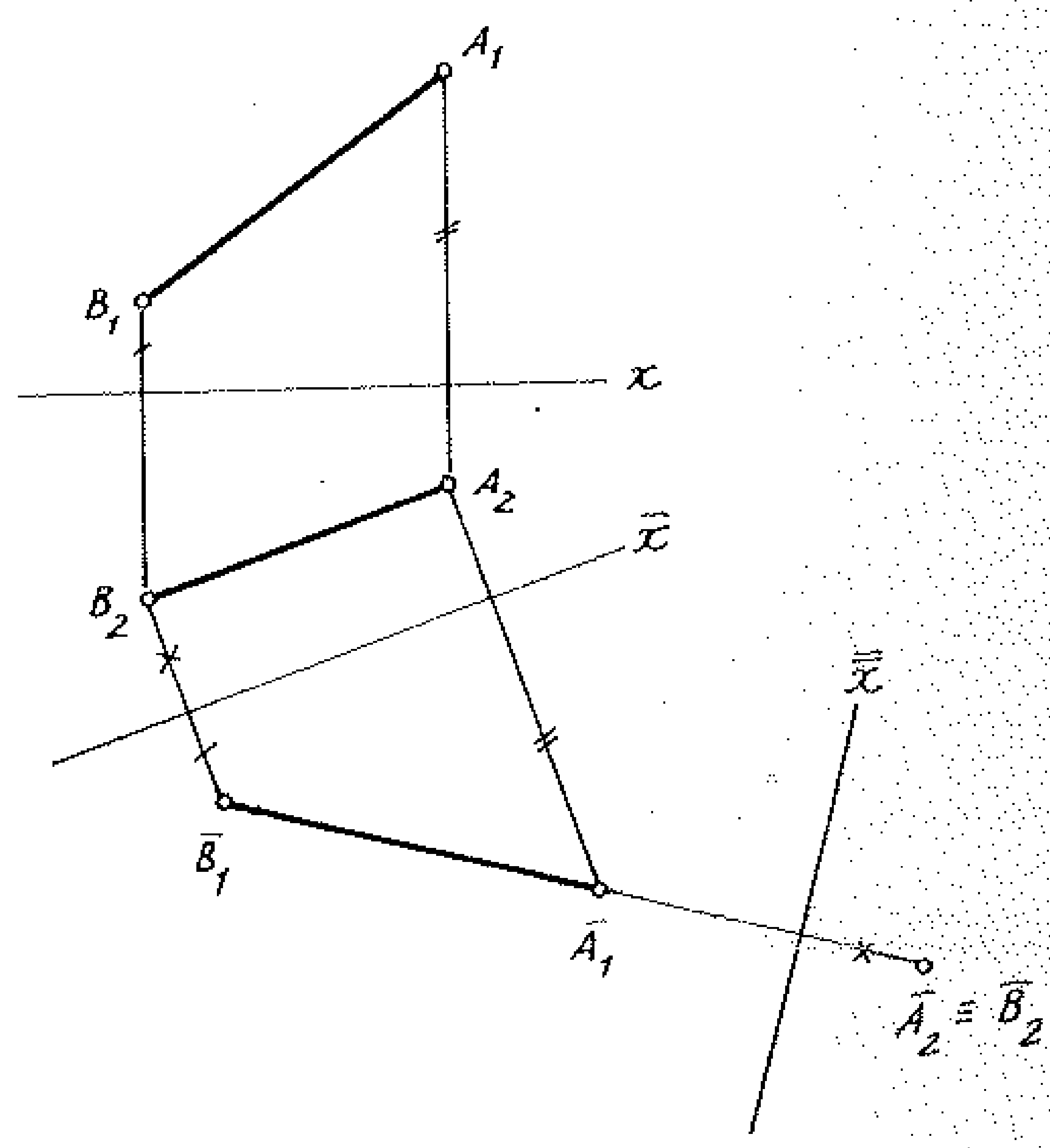
Thay $(\mathcal{P}^1)$ bằng $(\overline{\mathcal{P}^1})$ sao cho $(\mathcal{Q})$ trở thành mặt phẳng chiếu đứng ($\overline{x} \perp v^2_{\mathcal{Q}}$). Góc hợp bởi $\overline{x}$ và $\overline{v^1_{\mathcal{Q}}}$ là góc nghiêng của $(\mathcal{Q})$ so với $(\mathcal{P}^2)$.

Tương tự, thay $(\mathcal{P}^2)$ bằng $(\overline{\mathcal{P}^2})$ sao cho $(\mathcal{Q})$ trở thành mặt phẳng chiếu bằng ($\overline{\overline{x}} \perp v^1_{\mathcal{Q}}$). Góc hợp bởi $\overline{\overline{x}}$ và $\overline{v^2_{\mathcal{Q}}}$ là góc nghiêng của $(\mathcal{Q})$ so với $(\mathcal{P}^1)$.

Thí dụ 3: Thay các mặt phẳng hình chiếu sao cho đường thẳng AB bất kì trở thành đường thẳng chiếu bằng (Hình 5-3).



Hình 5-2

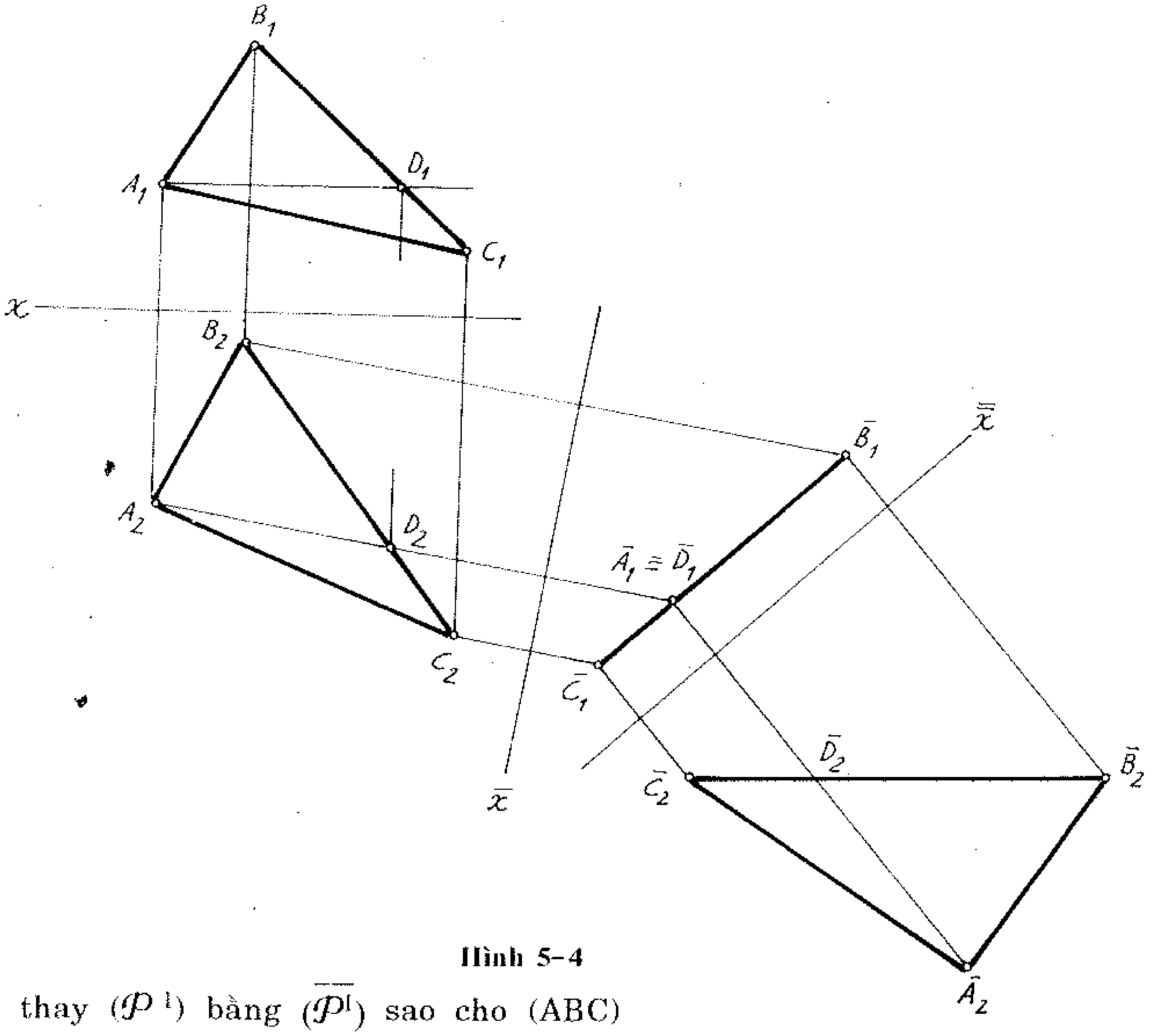


Hình 5-3

Giải : Đầu tiên thay $(\mathcal{P}^1)$ bằng $(\overline{\mathcal{P}^1})$ sao cho AB trở thành đường mặt (vẽ $\overline{x} \,//\, A_2B_2$). Tiếp đó, thay $(\mathcal{P}^2)$ bằng $(\overline{\mathcal{P}^2})$ để AB trở thành đường thẳng chiếu đứng (vẽ $\overline{\overline{x}} \perp \overline{A}_1\overline{B}_1$).

Thí dụ 4: Xác định dạng gốc của tam giác ABC (Hình 5-4).

Giải :



Hình 5-4

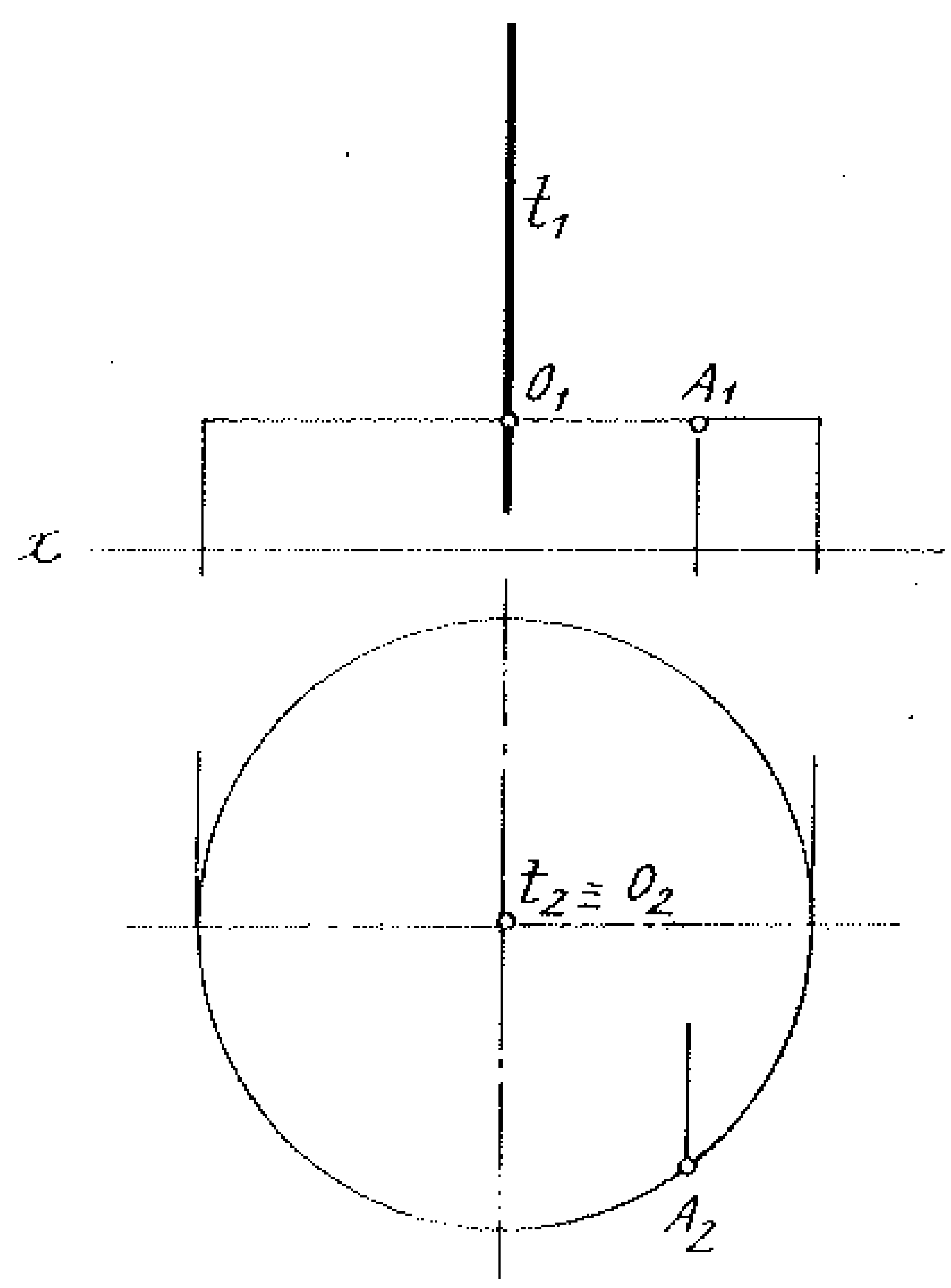
Đầu tiên thay $(\mathcal{P}^1)$ bằng $(\overline{\mathcal{P}^1})$ sao cho (ABC) trở thành mặt phẳng chiếu đứng. Muốn vậy ta chỉ việc vẽ trong (ABC) một đường bằng AD và làm cho AD trở thành đường thẳng chiếu đứng (vẽ $\overline{x} \perp A_2D_2$).

Tiếp đó, thay $(\mathcal{P}^2)$ bằng $(\overline{\mathcal{P}^2})$ sao cho (ABC) trở thành mặt phẳng bằng (vẽ $\overline{\overline{x}} \,//\, \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$). Tam giác $\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2$ là dạng gốc của ΔABC.

Thí dụ 5: Tìm quỹ tích (tập hợp) các hình chiếu của điểm A khi quay nó một vòng quanh trục là đường thẳng chiếu bằng t (Hình 5-5).

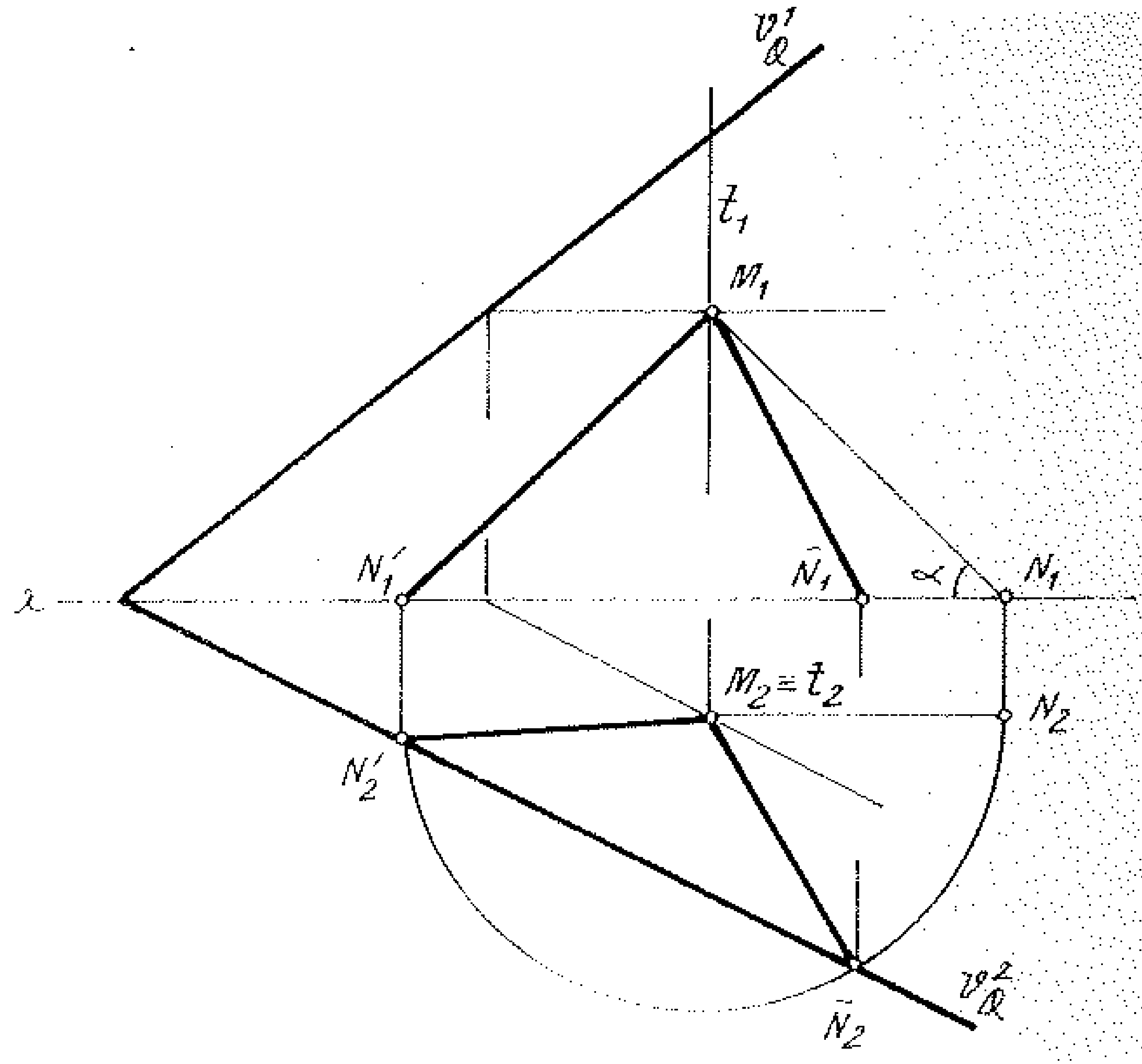
Giải : Vẽ AO $\perp$ t (O $\in$ t).

Khi A quay quanh t nó vạch nên một đường tròn nằm trong mặt phẳng bằng qua A, tâm là O, bán kính là đoạn thẳng OA. Hình chiếu bằng



Hình 5-5

của nó là một đường tròn tâm O_2, bán kính là đoạn O_2A_2, đường tròn này là quỹ tích của A_2. Hình chiếu đứng của quỹ tích là một đoạn thẳng song song với trục x và có độ dài bằng đường kính của đường tròn đó, đoạn thẳng này là quỹ tích của A_1.



Hình 5-6

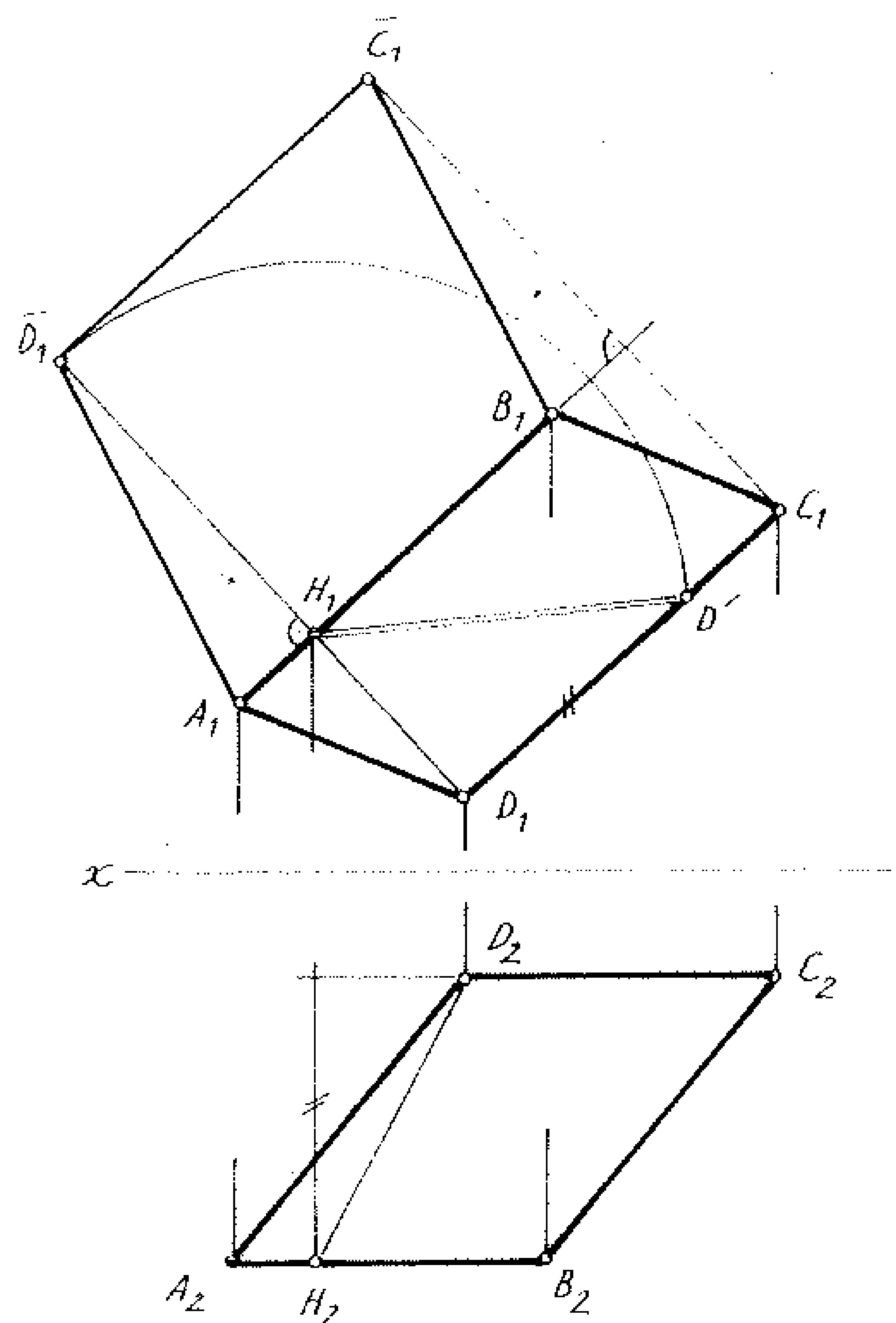
Thí dụ 6: Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và một điểm M $\in$ ($\mathcal{Q}$). Dựng đường thẳng nằm trong ($\mathcal{Q}$), qua M và nghiêng một góc α so với mặt phẳng hình chiếu bằng (Hình 5-6).

Giải :

Vẽ một đoạn thẳng MN // ($\mathcal{P}^1$) sao cho N $\in \mathcal{P}^2$ ($N_1 \in$ x) và góc (MN, $\mathcal{P}^2$) $= \alpha$ (M_1N_1 hợp với trục x một góc bằng α). Quay MN quanh trục là đường thẳng chiếu bằng t (t qua điểm M) sao cho N tới vị trí thuộc vết bằng v^2_{Ω} ($\overline{N}$ và N'). $M\overline{N}$ và MN' là những đường thẳng cần dựng.

Thí dụ 7: Tìm dạng gốc của hình bình hành ABCD (Hình 5-7).

Giải :



Hình 5-7

Quay ABCD quanh đường mặt AB sao cho (ABCD) trở thành mặt phẳng mặt, khi đó hình chiếu đứng của AB $\overline{C}\,\overline{D}$ (A_1 B_1 $\overline{C}_1$ $\overline{D}_1$) là dạng gốc của nó.

Muốn vậy phải xác định vị trí sau khi quay của một điểm không thuộc trục quay AB, chẳng hạn điểm D. Độ dài của đoạn thẳng DH là đoạn H_1D'. Sau khi quay hình chiếu đứng của đoạn DH là đoạn $H_1\overline{D}_1$ = HD = H_1 D'.

Thí dụ 8: Cho vết bằng (v^2_{Ω}) của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ là hình chiếu bằng ($A_2B_2C_2D_2$) của một hình vuông thuộc ($\mathcal{Q}$). Tìm vết đứng của ($\mathcal{Q}$) và hình chiếu đứng của ABCD (Hình 5-8).

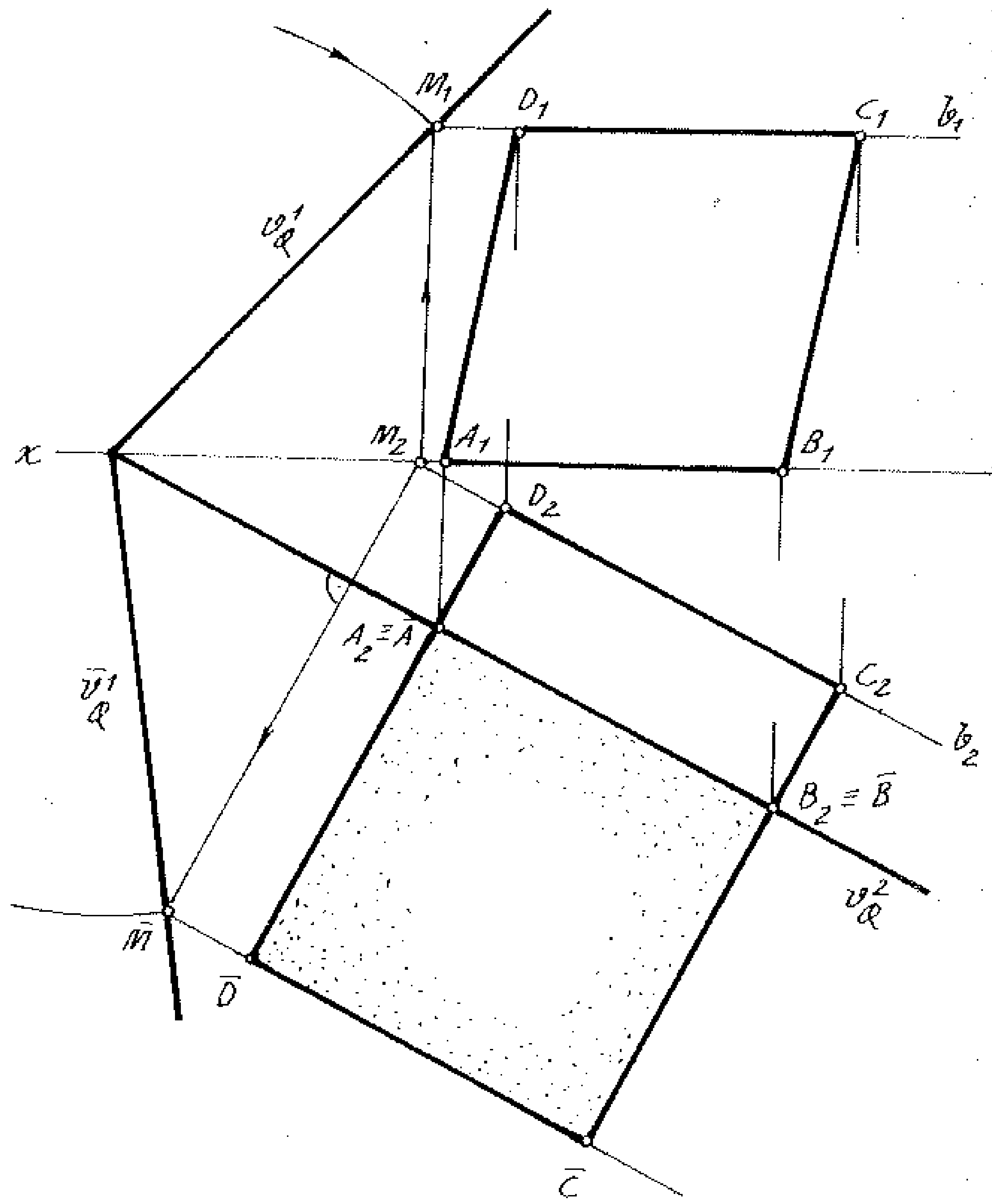
Giải :

Chập ($\mathcal{Q}$) vào ($\mathcal{P}^2$) bằng cách quay nó quanh vết bằng. Hình chập của ABCD là hình vuông $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$. CD thuộc đường bằng b đã biết hình chiếu bằng (b_2) và hình chập ($\overline{b}$) nên có thể tìm được hình chiếu bằng ($M_2 \in$ x) và hình chập ($\overline{M}$) của vết đứng M của b. Suy ra hình chập của vết đứng v^1_{Ω} của ($\mathcal{Q}$) và vết đứng (v^1_{Ω}) của ($\mathcal{Q}$). Dễ dàng vẽ được hình chiếu đứng của ABCD là $A_1B_1C_1D_1$.

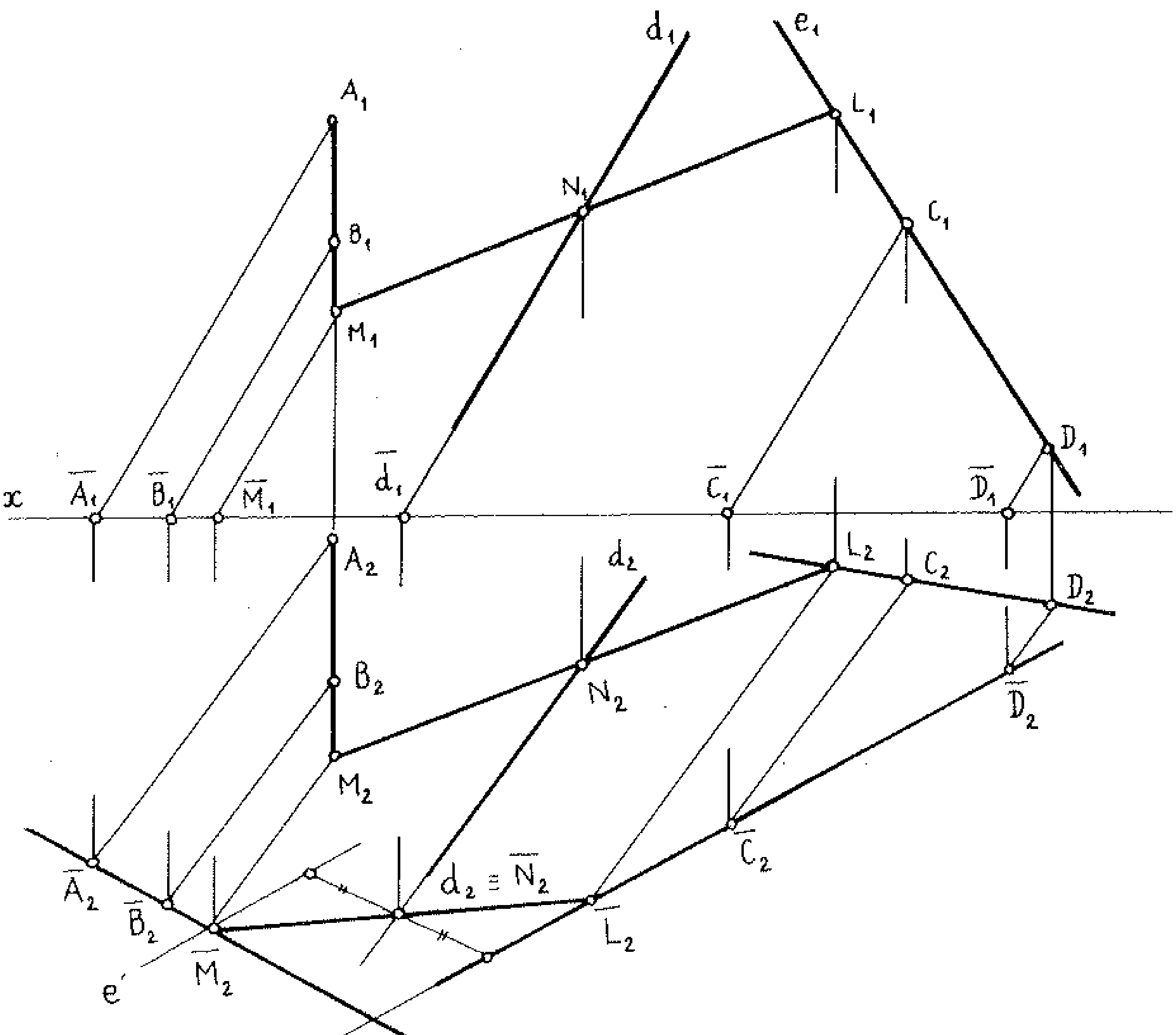
Thí dụ 9: Cho ba đường thẳng chéo nhau : đường cạnh AB và hai đường thẳng bất kỳ d, e. Hãy dựng một đường thẳng cắt AB tại M, cắt d tại N và cắt e tại L sao cho MN = NL (Hình 5-9).

Giải :

Chiếu song song ba đường thẳng theo phương d lên mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$; hình chiếu phụ của AB, d, e lần lượt là $\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{d}$ và $\overline{e}$ trong đó $\overline{d}$ là một điểm. Hình chiếu phụ của điểm $N \in d$ là điểm $\overline{N} \equiv \overline{d}$. Đến đây ta giải bài toán : dựng đoạn thẳng $\overline{M}\,\overline{L}$ sao cho $\overline{M} \in \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{L} \in \overline{e}$ và trung điểm của nó là điểm $\overline{N}$ đã biết. Trừ hình chiếu phụ của M, N, L, bằng các đường thẳng song song với d, ta tìm được hình chiếu bằng và hình chiếu đứng của chúng.



Hình 5-8



Hình 5-9

5.2. Bài tập

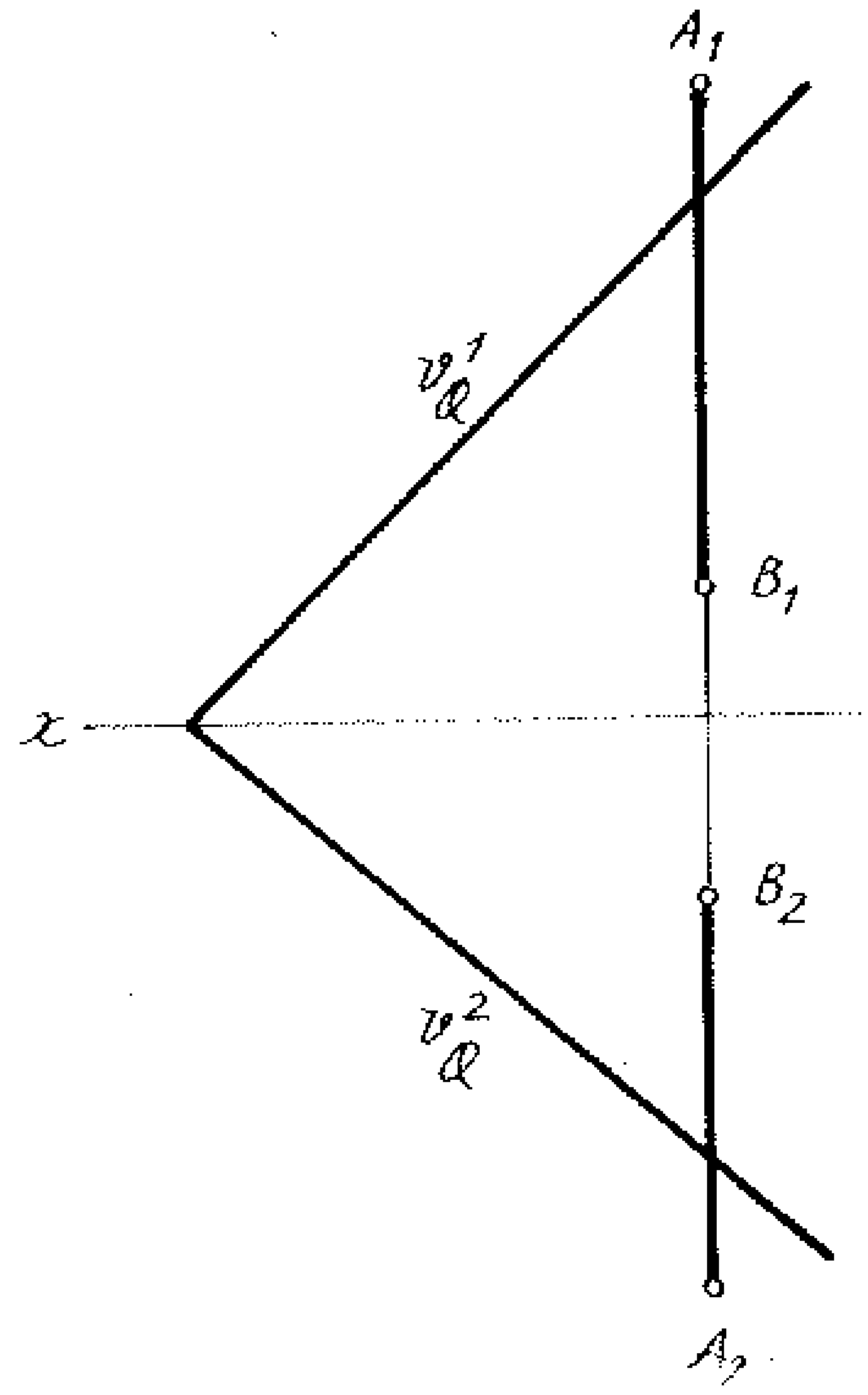
Bài 1 : Tìm giao điểm của đường cạnh AB với mặt phẳng $\mathcal{Q}$:

a) $\mathcal{Q}$ ($v^1_{\mathcal{Q}} \times v^2_{\mathcal{Q}}$). (Hình 5-10).

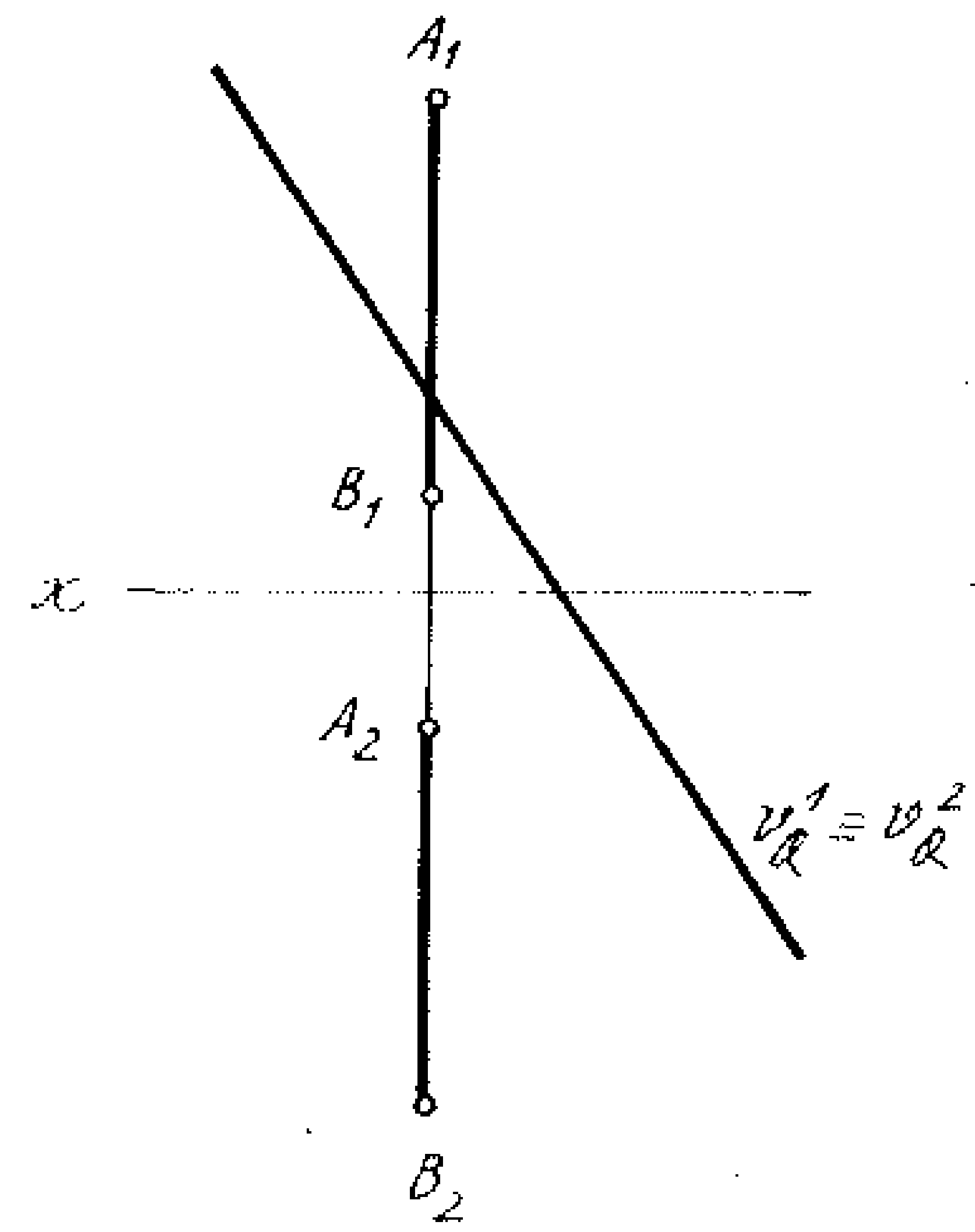
b) $\mathcal{Q}$ ($v^1_{\mathcal{Q}} \equiv v^2_{\mathcal{Q}}$), (Hình 5-11).

c) $\mathcal{Q}$ (m //n), (Hình 5-12).

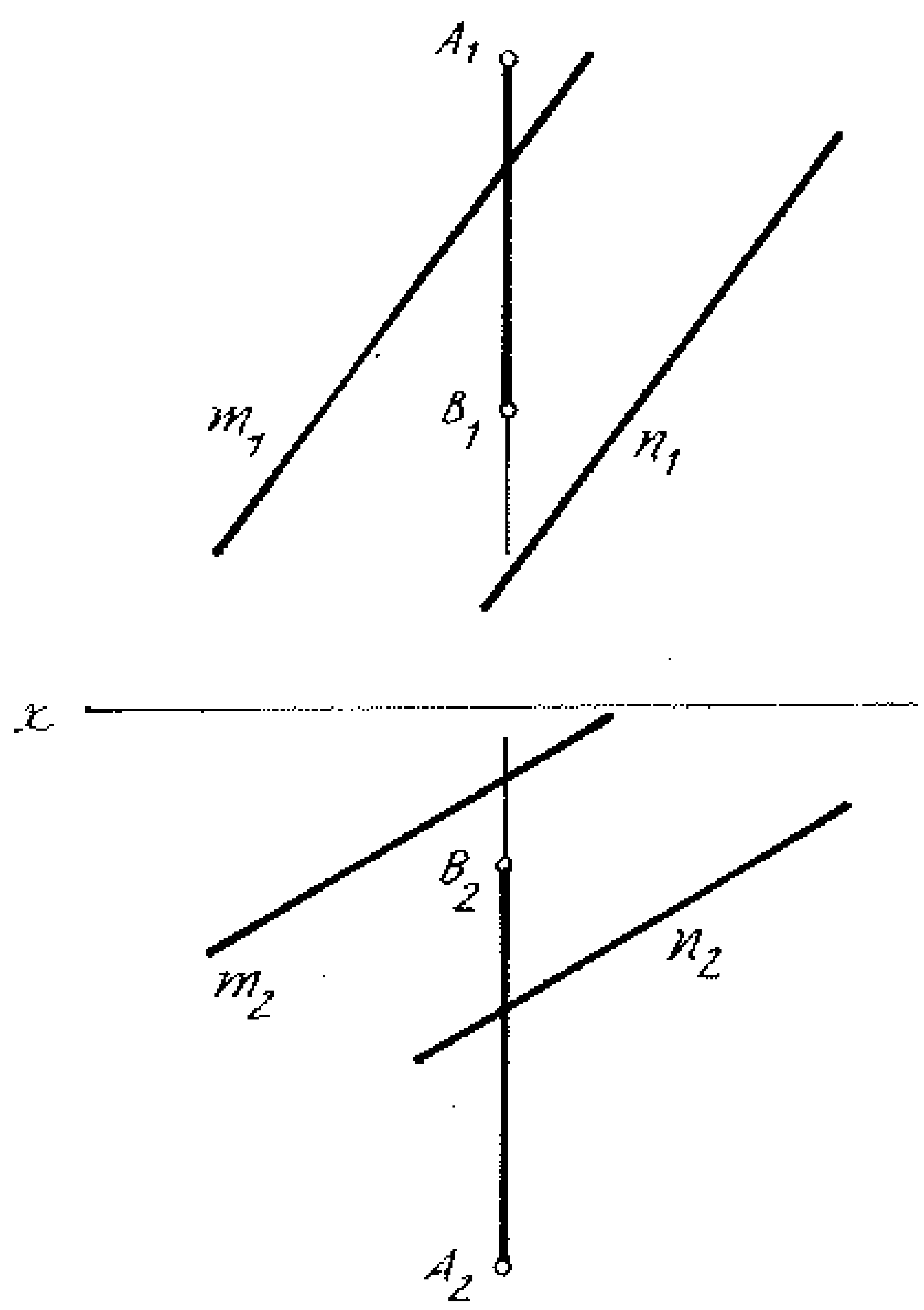
d) $\mathcal{Q}$ ($v^1_{\mathcal{Q}}$ // $v^2_{\mathcal{Q}}$), (Hình 5-13).



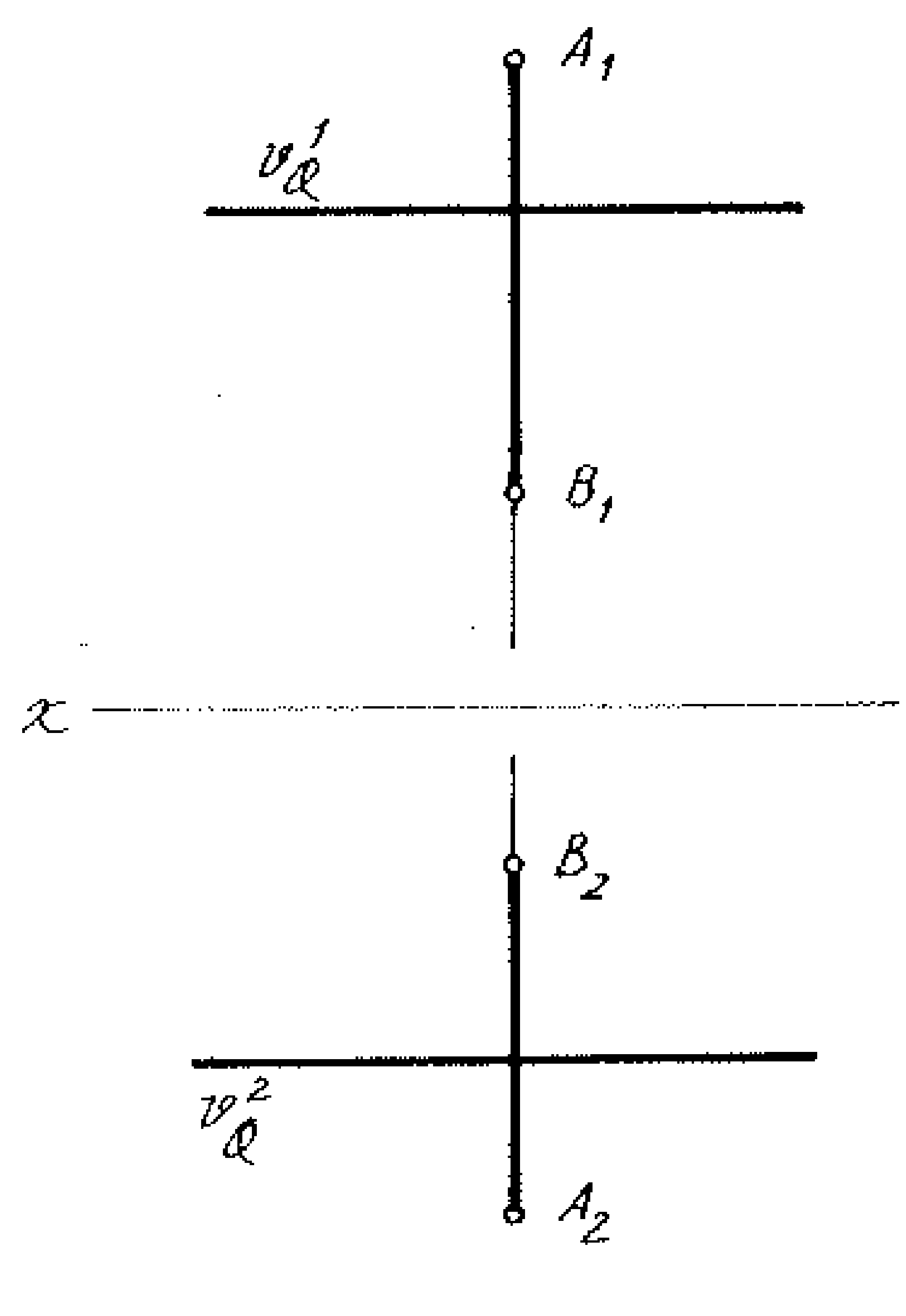
Hình 5-10



Hình 5-11



Hình 5-12



Hình 5-13

Bài 2 : Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (A, B, C) và $\mathcal{R}$ (K, x) (Hình 5-14).

Bài 3 : Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và một hình chiếu của tam giác ABC thuộc $\mathcal{Q}$. Hãy xác định hình chiếu thứ hai của ΔABC và dạng gốc của nó :

a) $\mathcal{Q}$ ($v^1_Q \cap v^2_Q$), (Hình 5-15).

b) $\mathcal{Q}$ (v^1_Q // v^2_Q), (Hình 5-16).

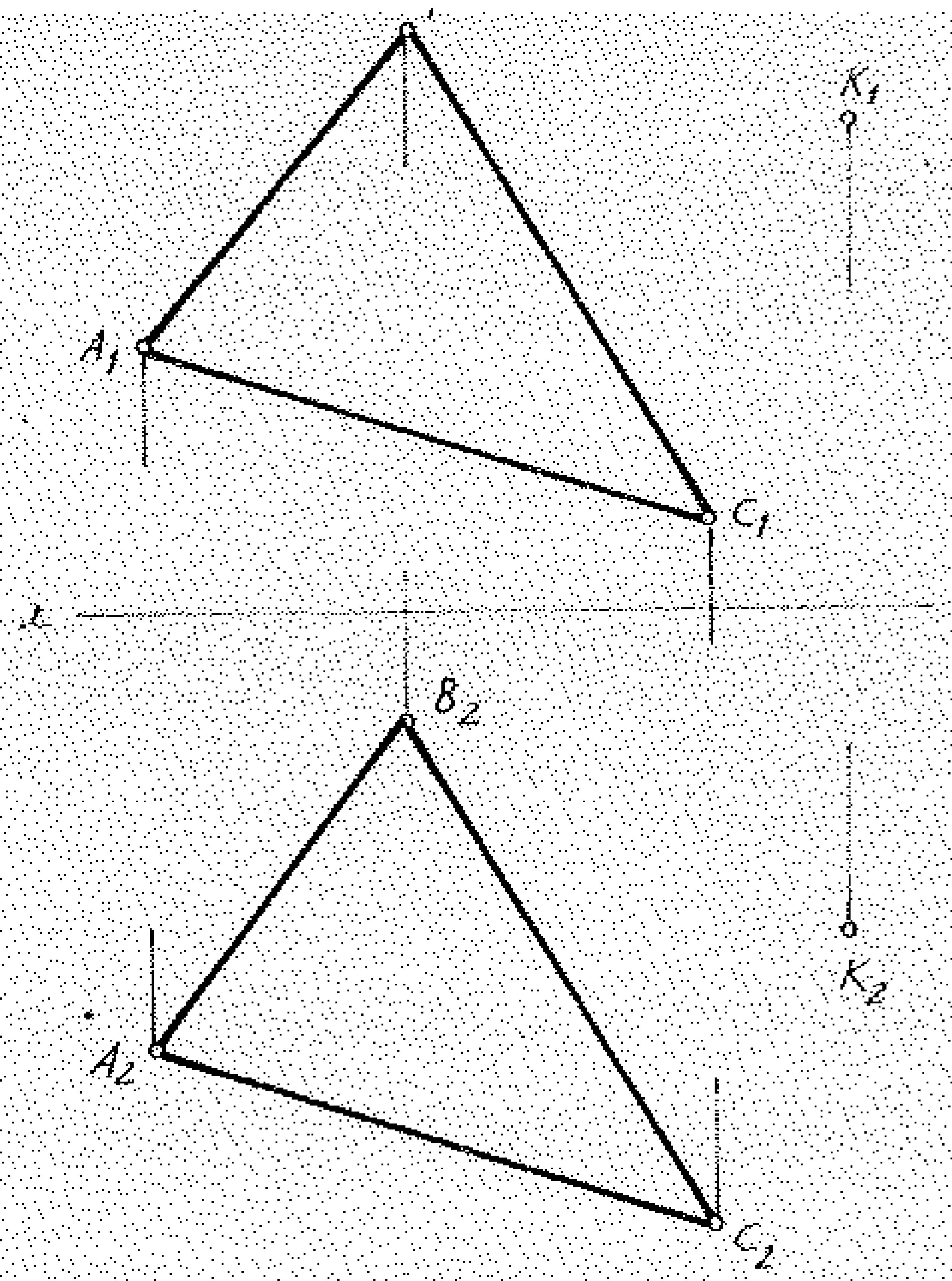
c) $\mathcal{Q} \perp \mathcal{P}^1$, (Hình 5-17)

d) $\mathcal{Q} \perp \mathcal{P}^2$, (Hình 5-18)

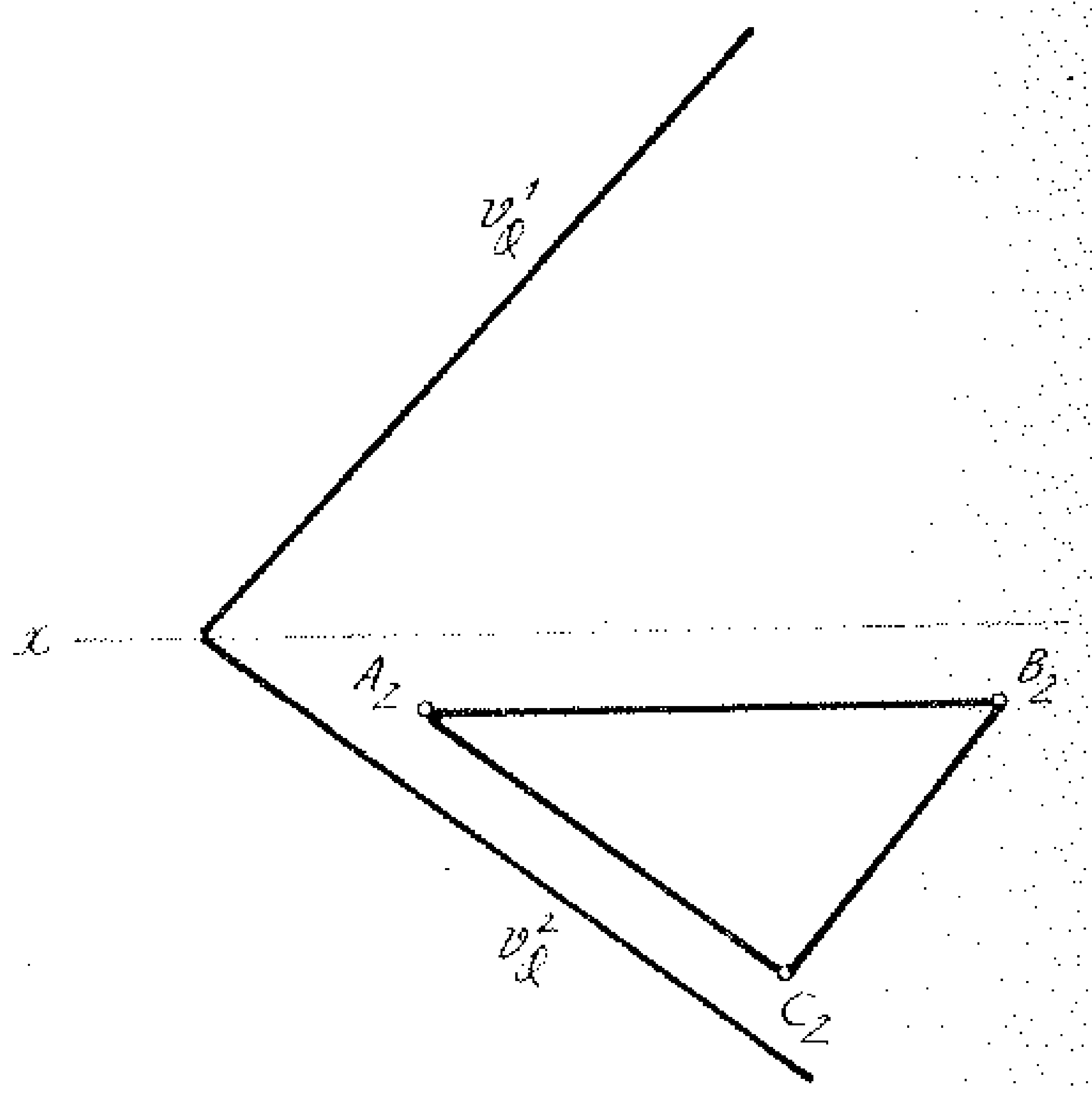
e) $\mathcal{Q}$ (A, b) trong đó b // $\mathcal{P}^2$, (Hình 5-19)

f) $\mathcal{Q}$ (A, m) trong đó m // $\mathcal{P}^1$, (Hình 5-20).

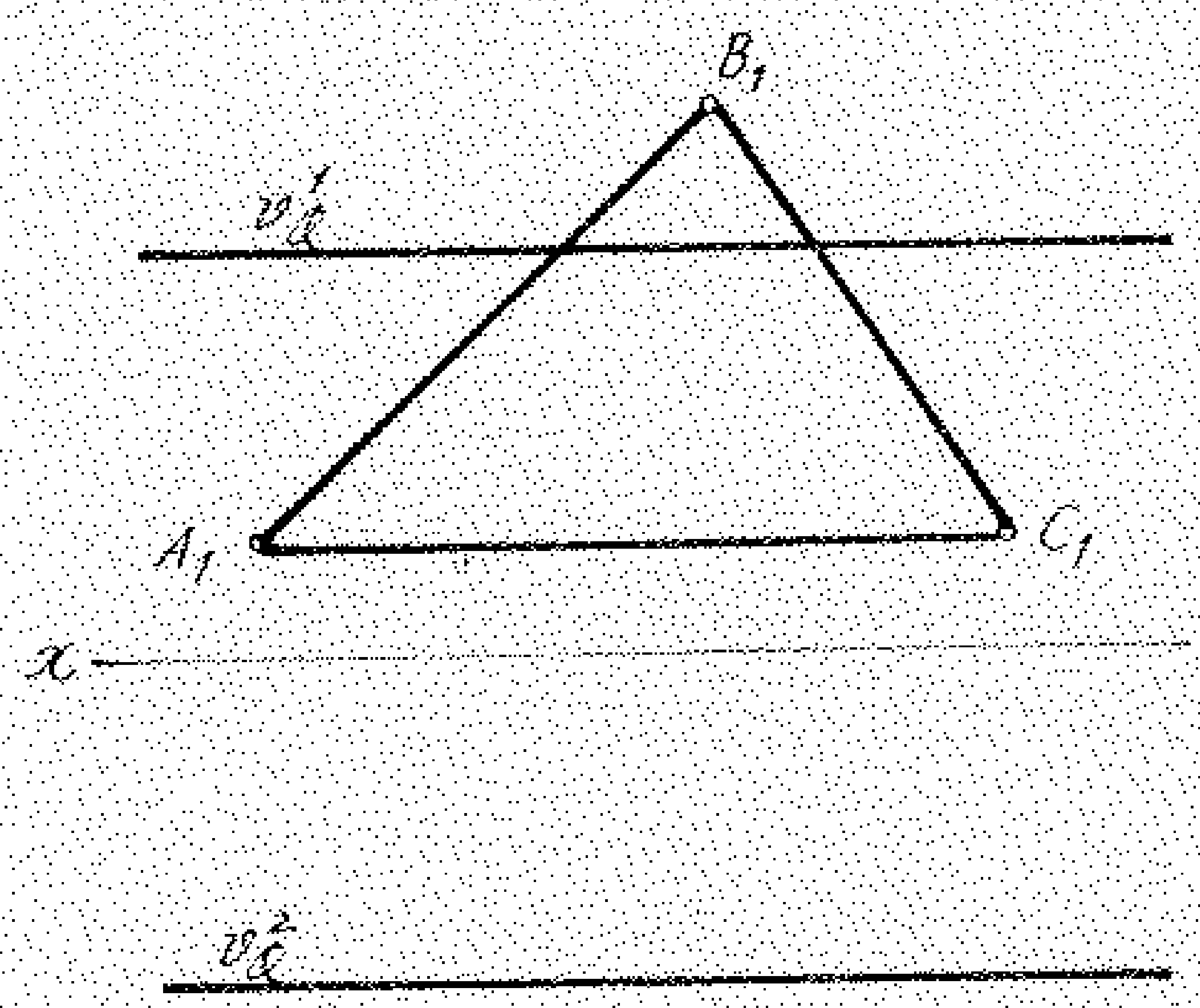
Bài 4 : Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và một hình chiếu của đoạn thẳng AB $\in \mathcal{Q}$. Hãy vẽ các hình chiếu của một tam giác đều ABC $\in$ ($\mathcal{Q}$) :



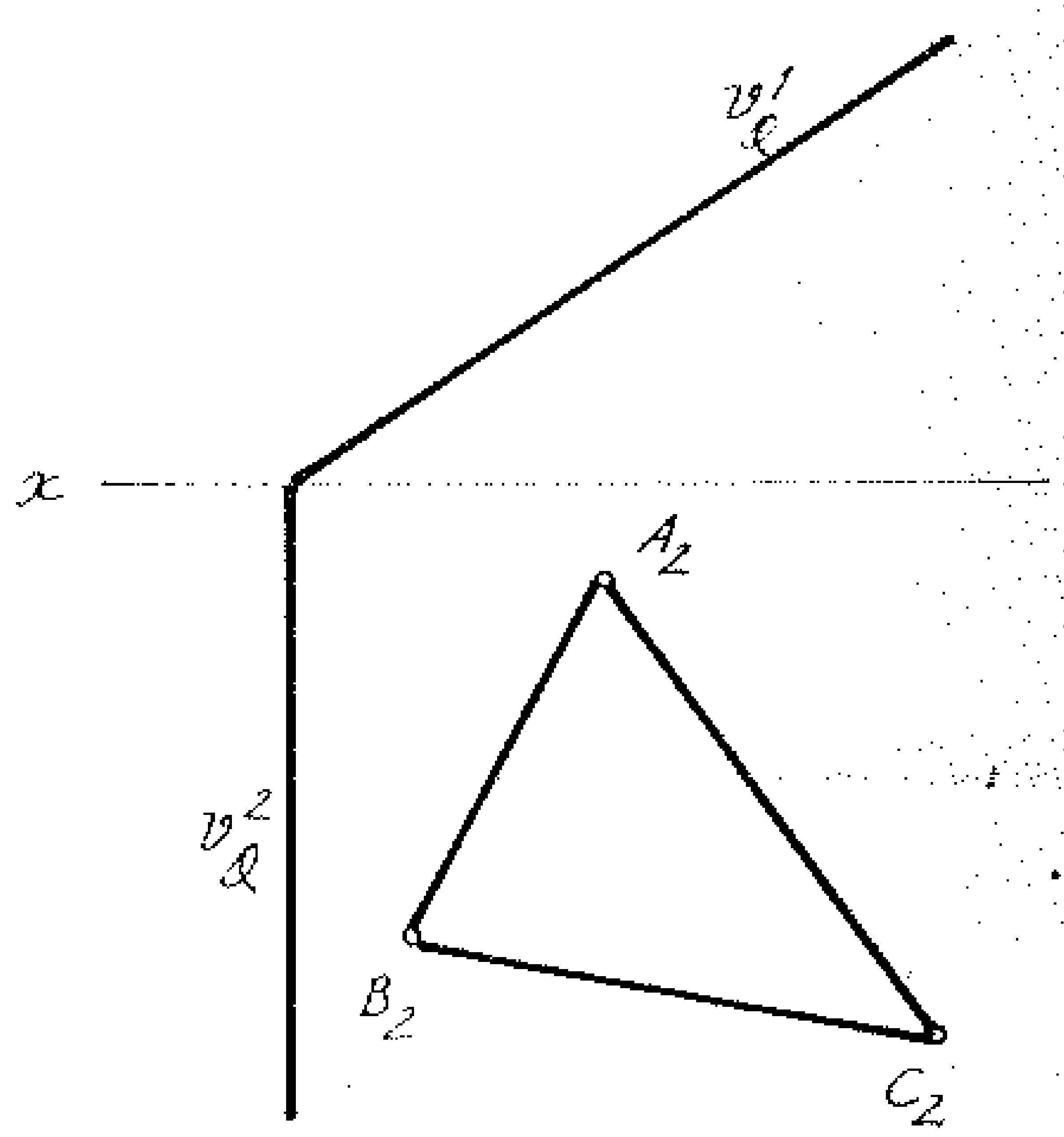
Hình 5-14



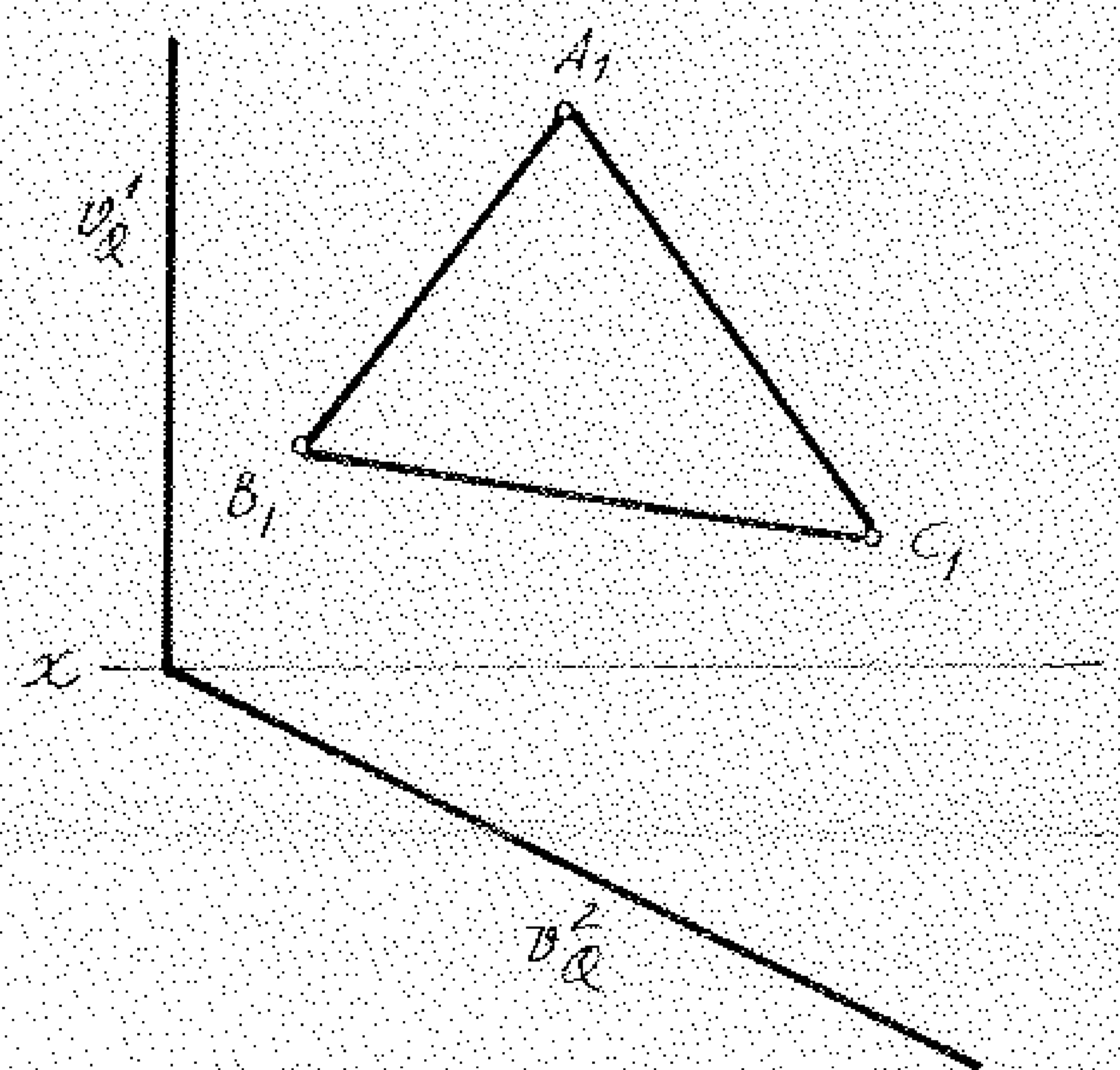
Hình 5-15



Hình 5-16



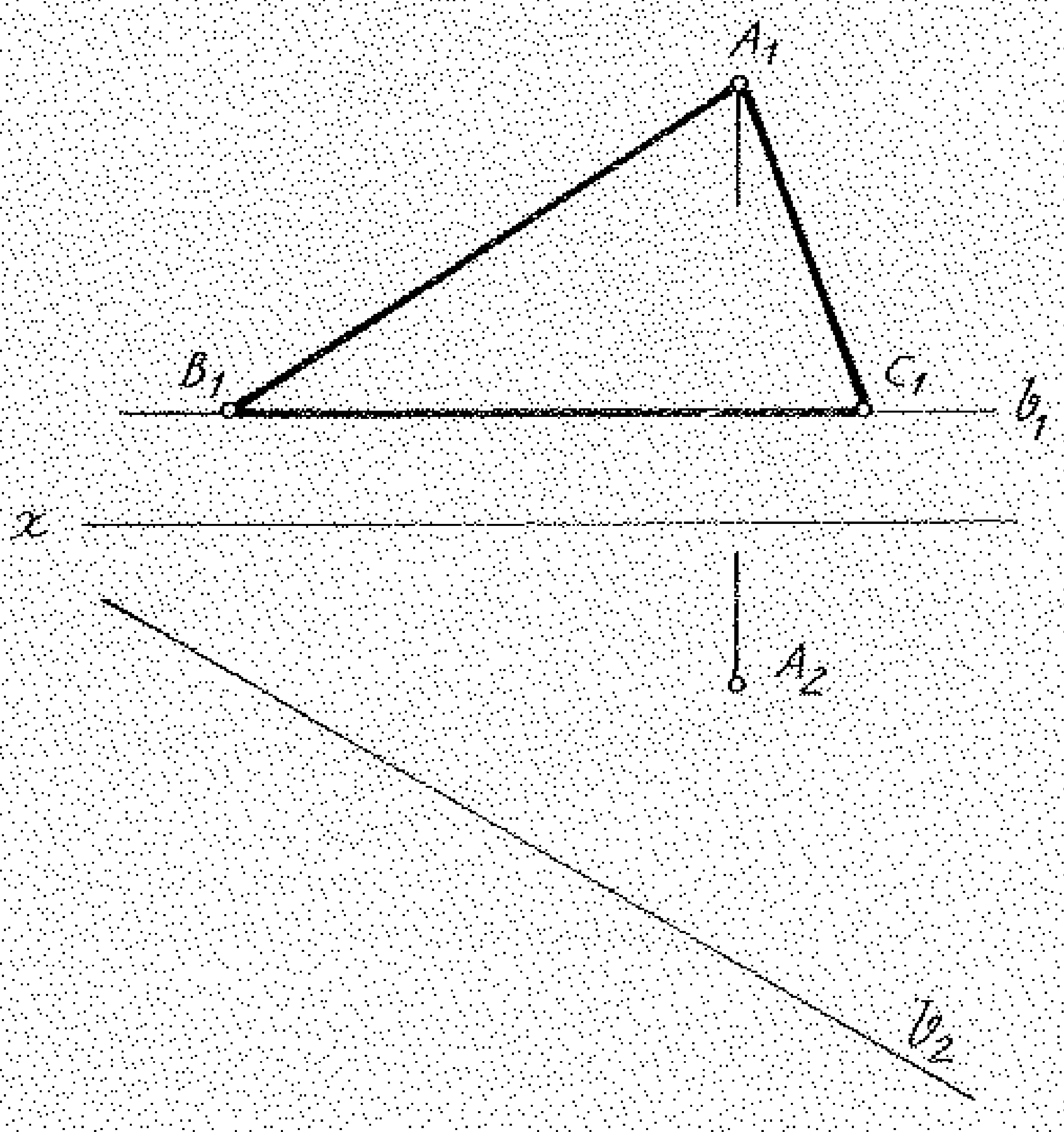
Hình 5-17



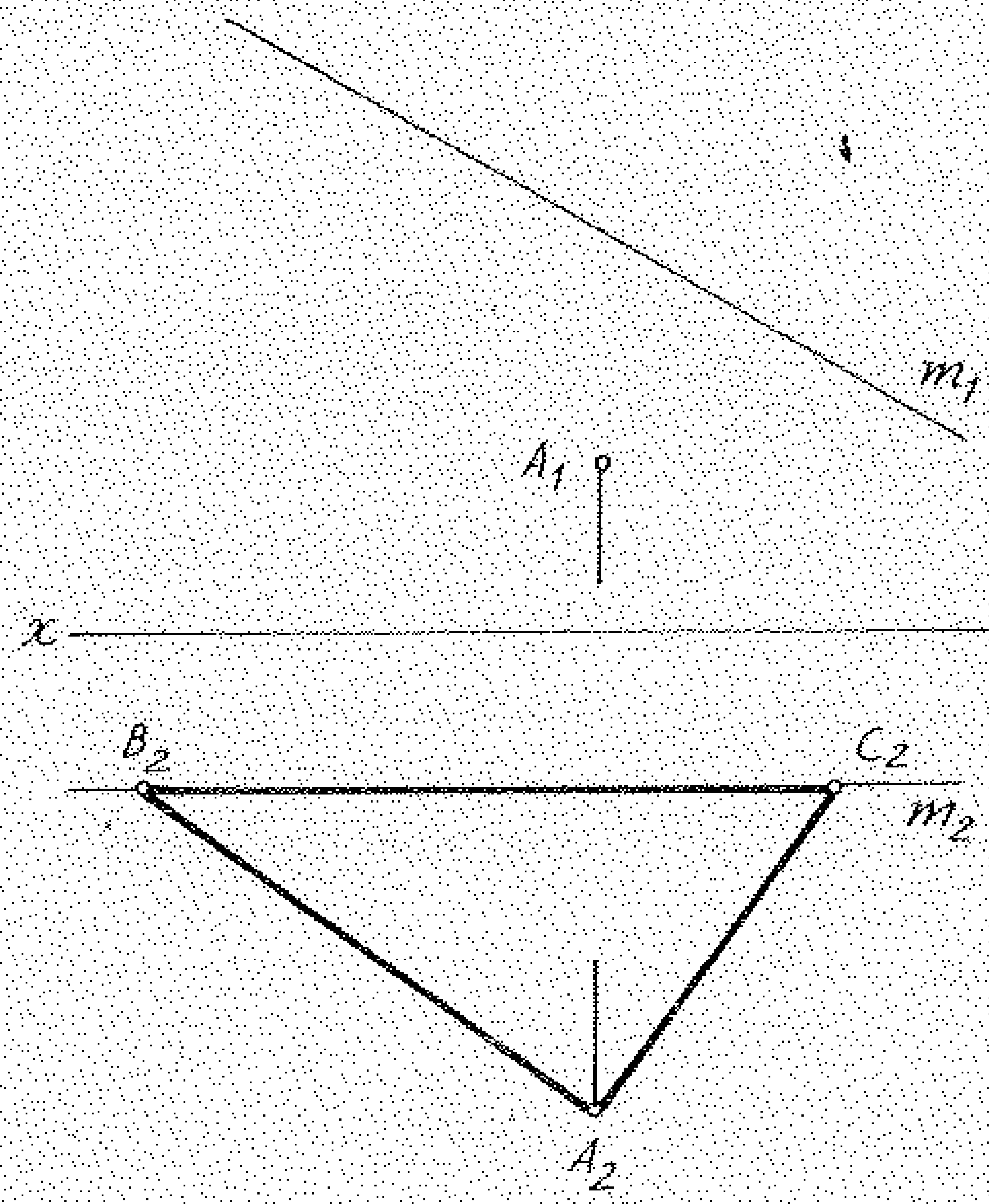
Hình 5-18

a) $\mathcal{Q}$ ($v^1_{\mathcal{Q}}$, $v^2_{\mathcal{Q}}$), (Hình 5-21).

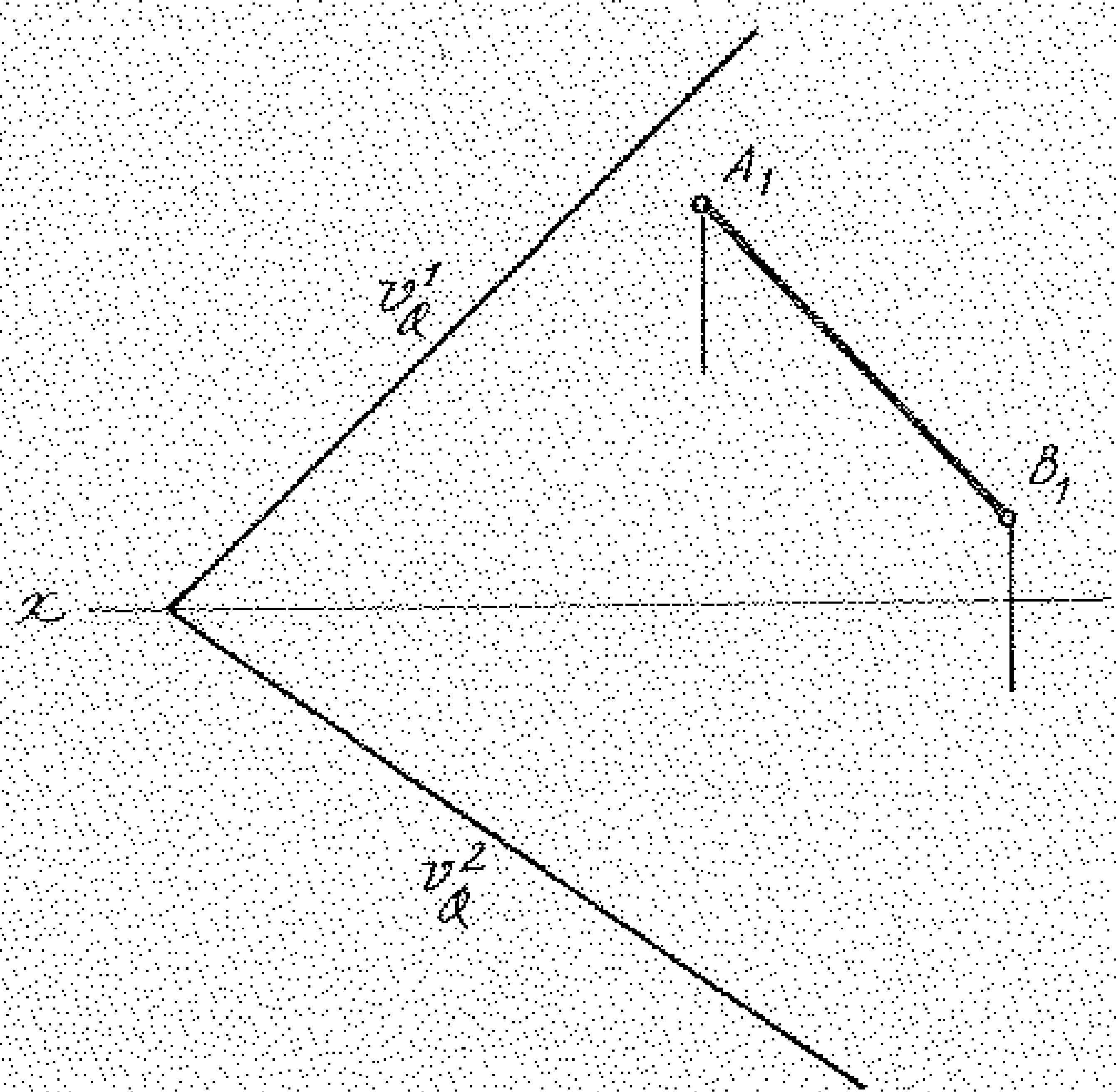
b) $\mathcal{Q}$ ($v^1_{\mathcal{Q}}$ // $v^2_{\mathcal{Q}}$), (Hình 5-22).



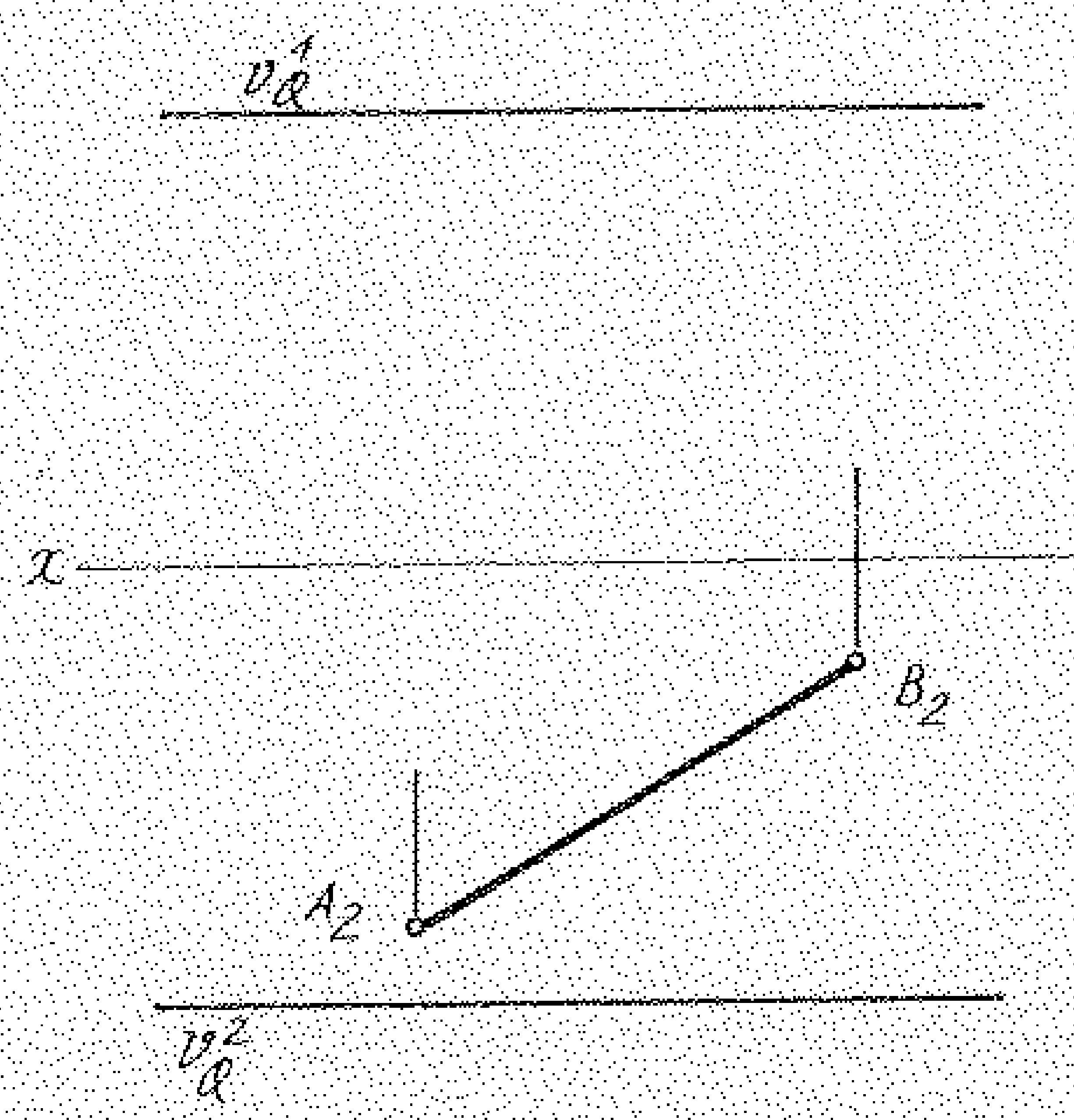
Hình 5-19



Hình 5-20



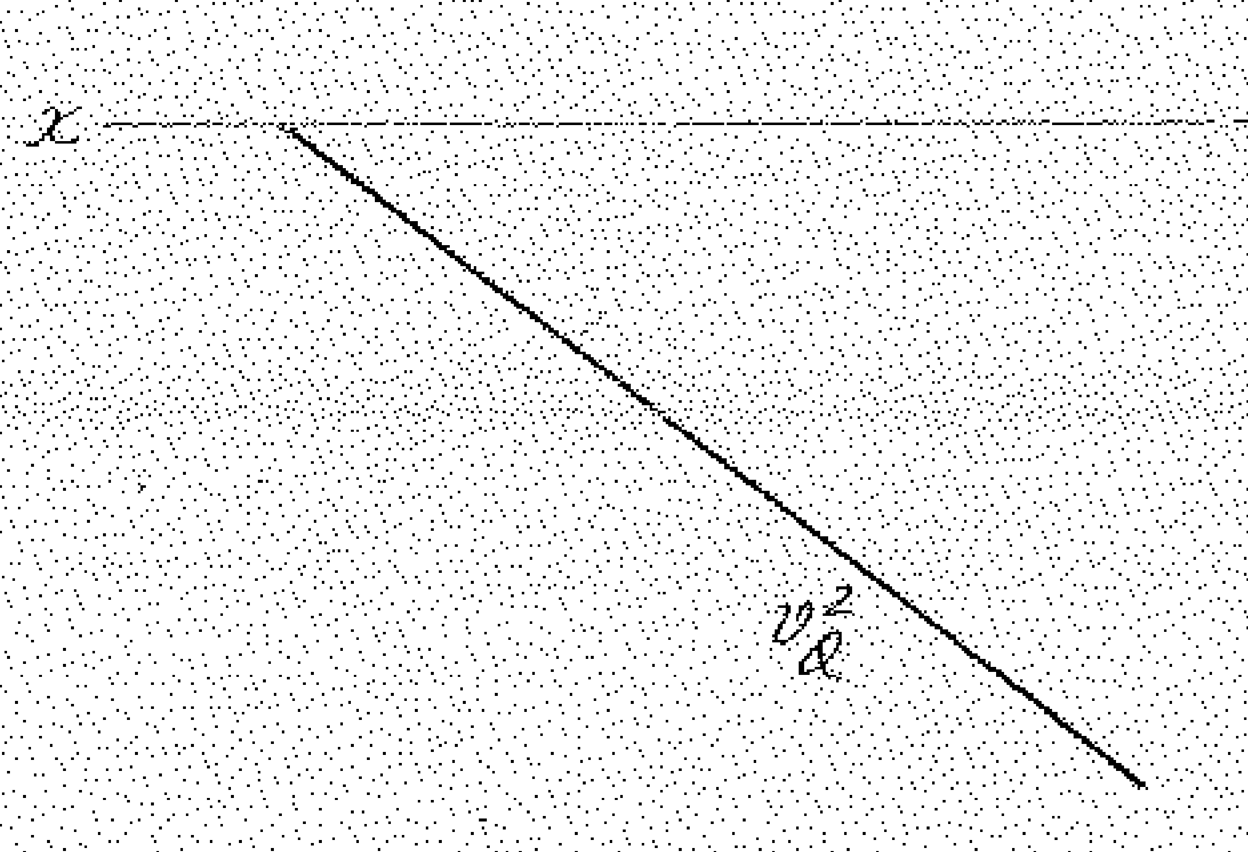
Hình 5-21



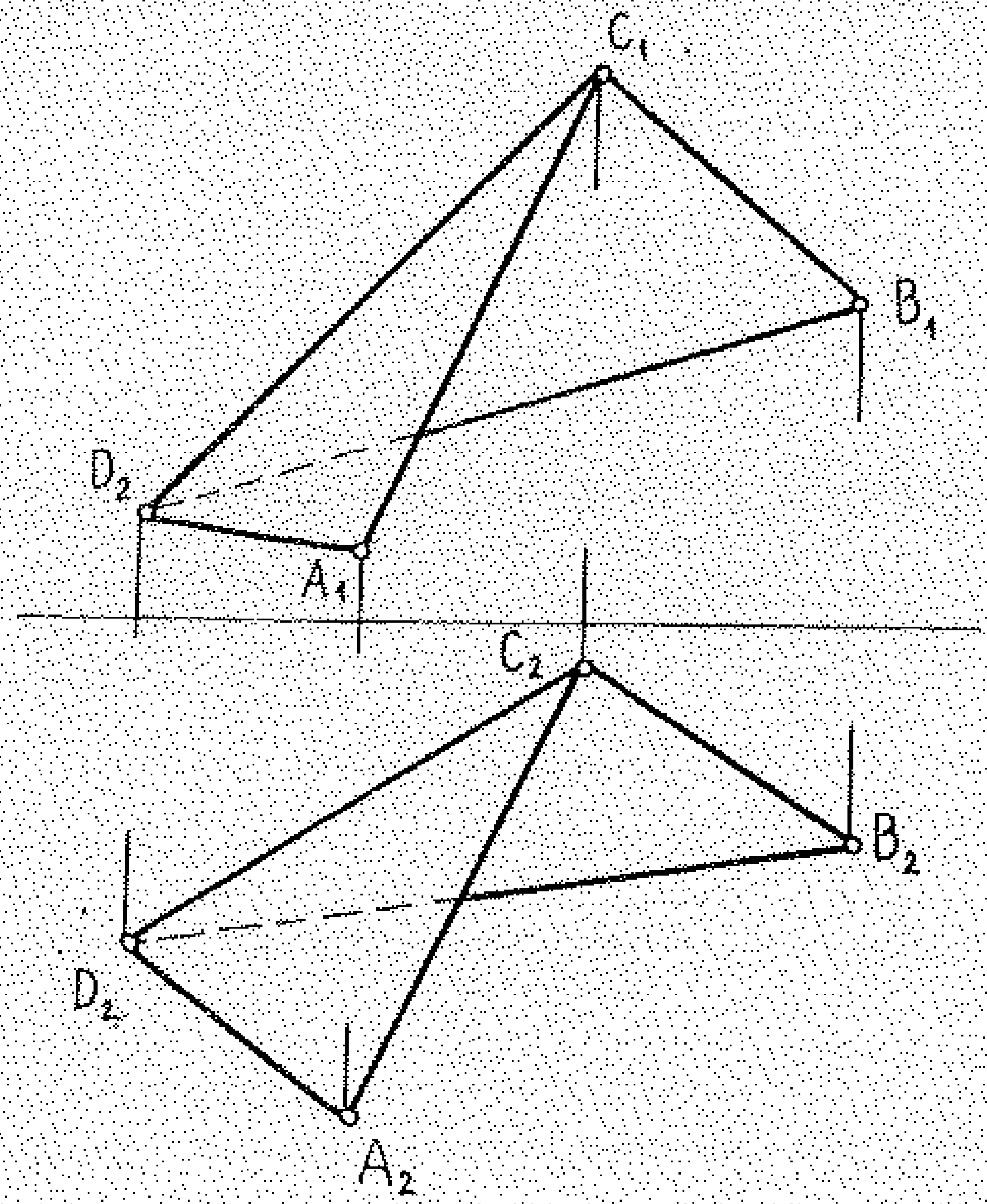
Hình 5-22

Bài 5 : Cho vết bằng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Hãy vẽ vết đứng của nó biết rằng góc nghiêng của ($\mathcal{Q}$) so với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$ là 45° (Hình 5-23).

Bài 6 : Xác định độ lớn của nhị diện cạnh (AB) – hai mặt của nhị diện là (ABC) và (ABD) (Hình 5-24).

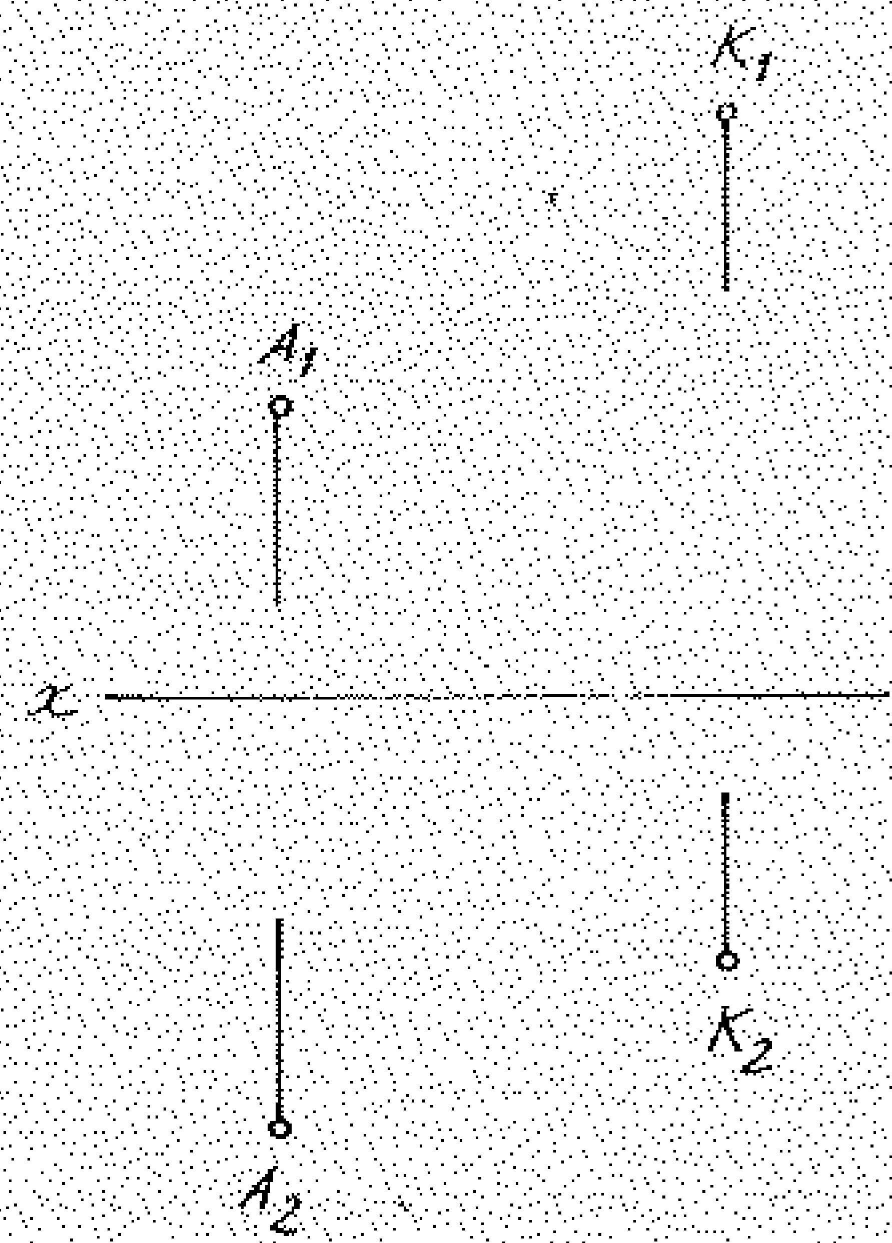


Hình 5-23



Hình 5-24

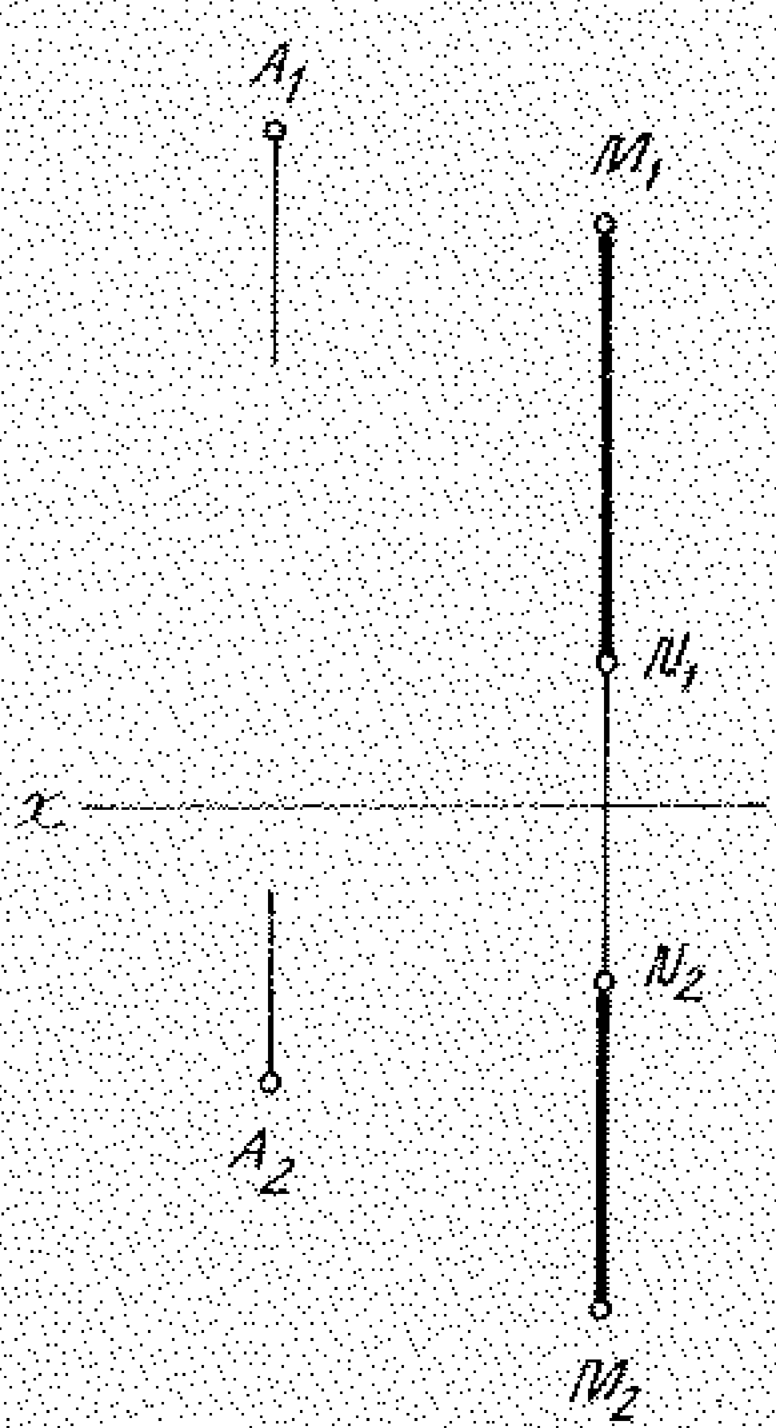
Bài 7 : Tìm khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng Q (K, x) (Hình 5-25).



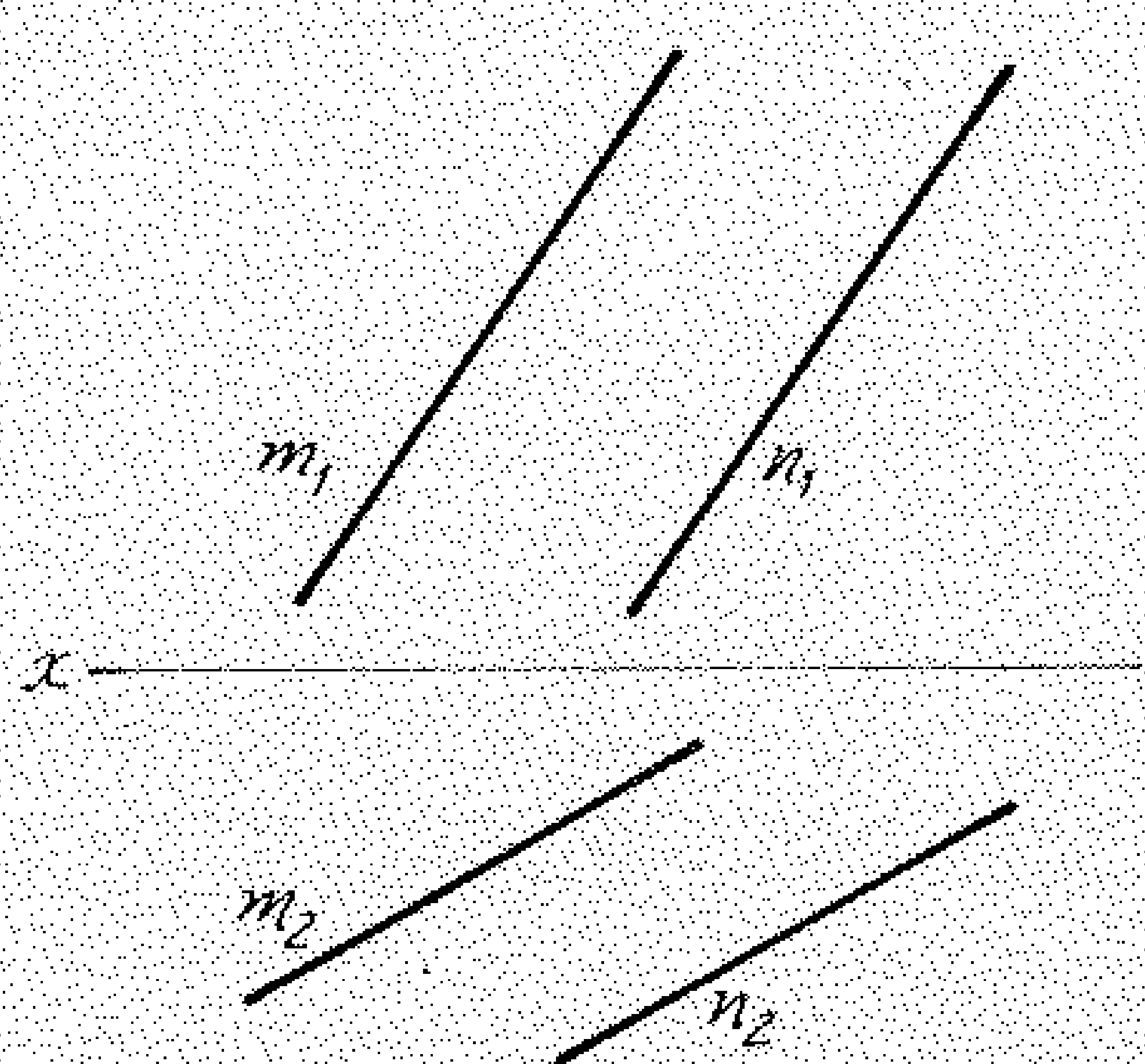
Hình 5-25

Bài 8 : Cho đường cạnh MN và điểm A. Hãy dựng một mặt phẳng Q qua A và vuông góc với MN (Hình 5-26).

Bài 9 : Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m, n (Hình 5-27).



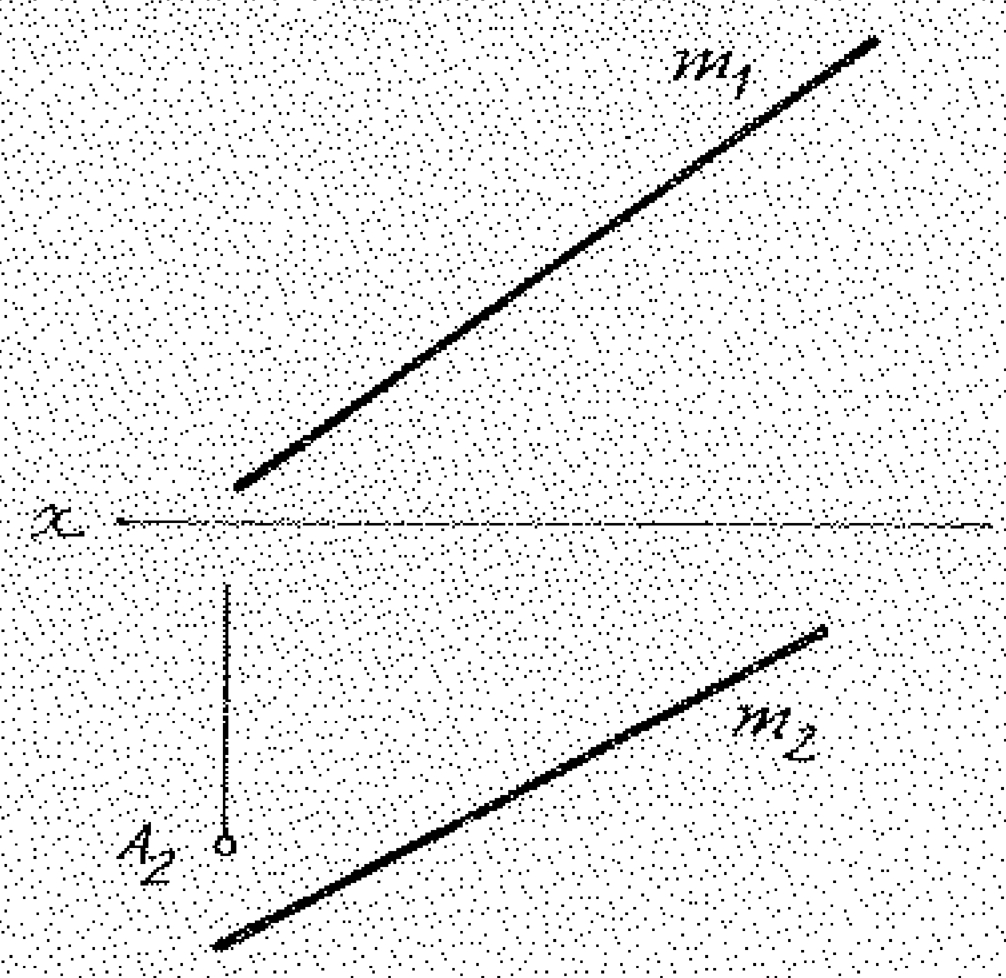
Hình 5-26



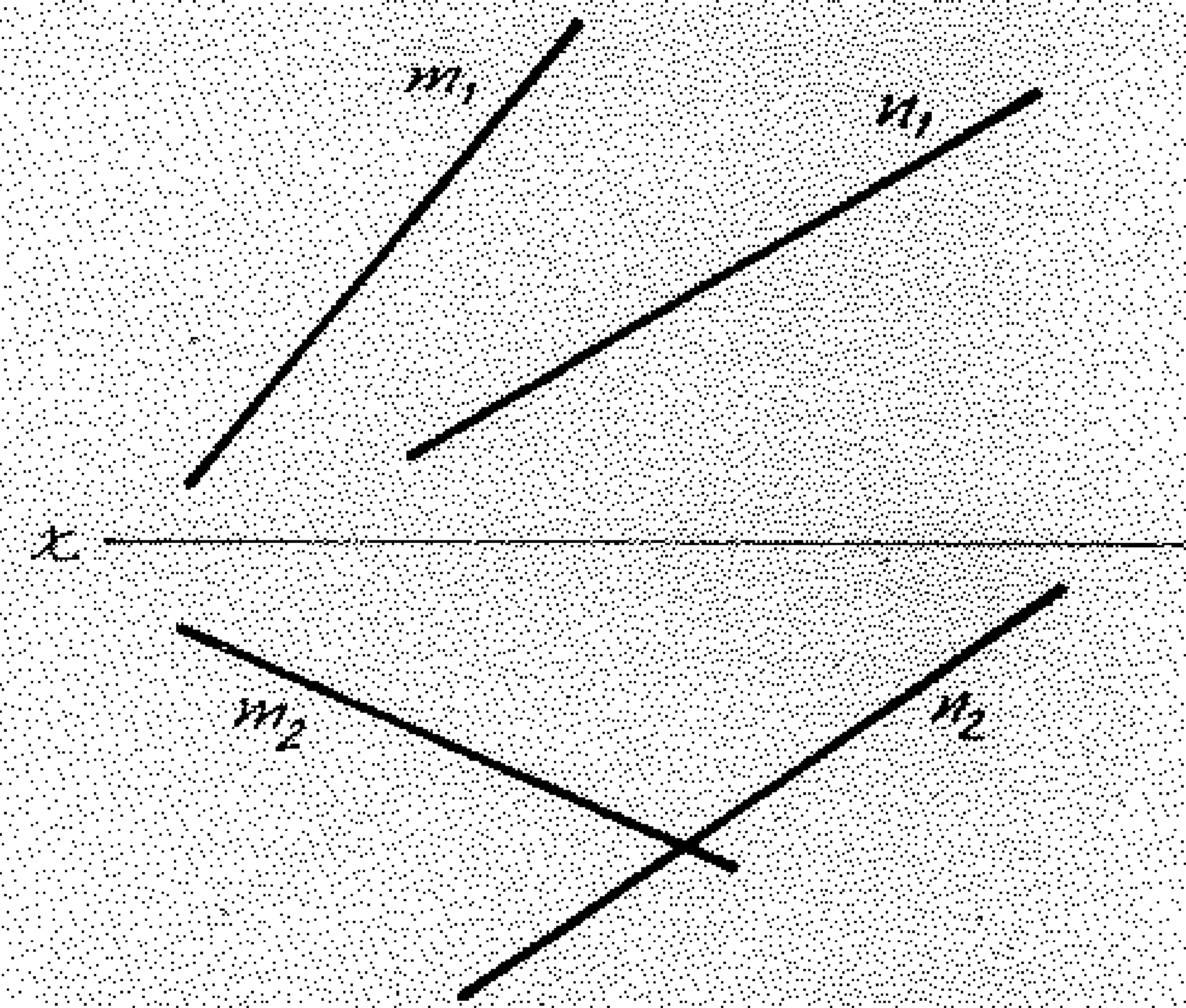
Hình 5-27

Bài 10 : Cho đường thẳng m và hình chiếu bằng của điểm A. Tìm hình chiếu đứng của A, biết rằng khoảng cách từ A đến m là 25 mm (Hình 5-28).

Bài 11 : Vẽ đường vuông góc chung và tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng m và n (Hình 5-29).



Hình 5-28

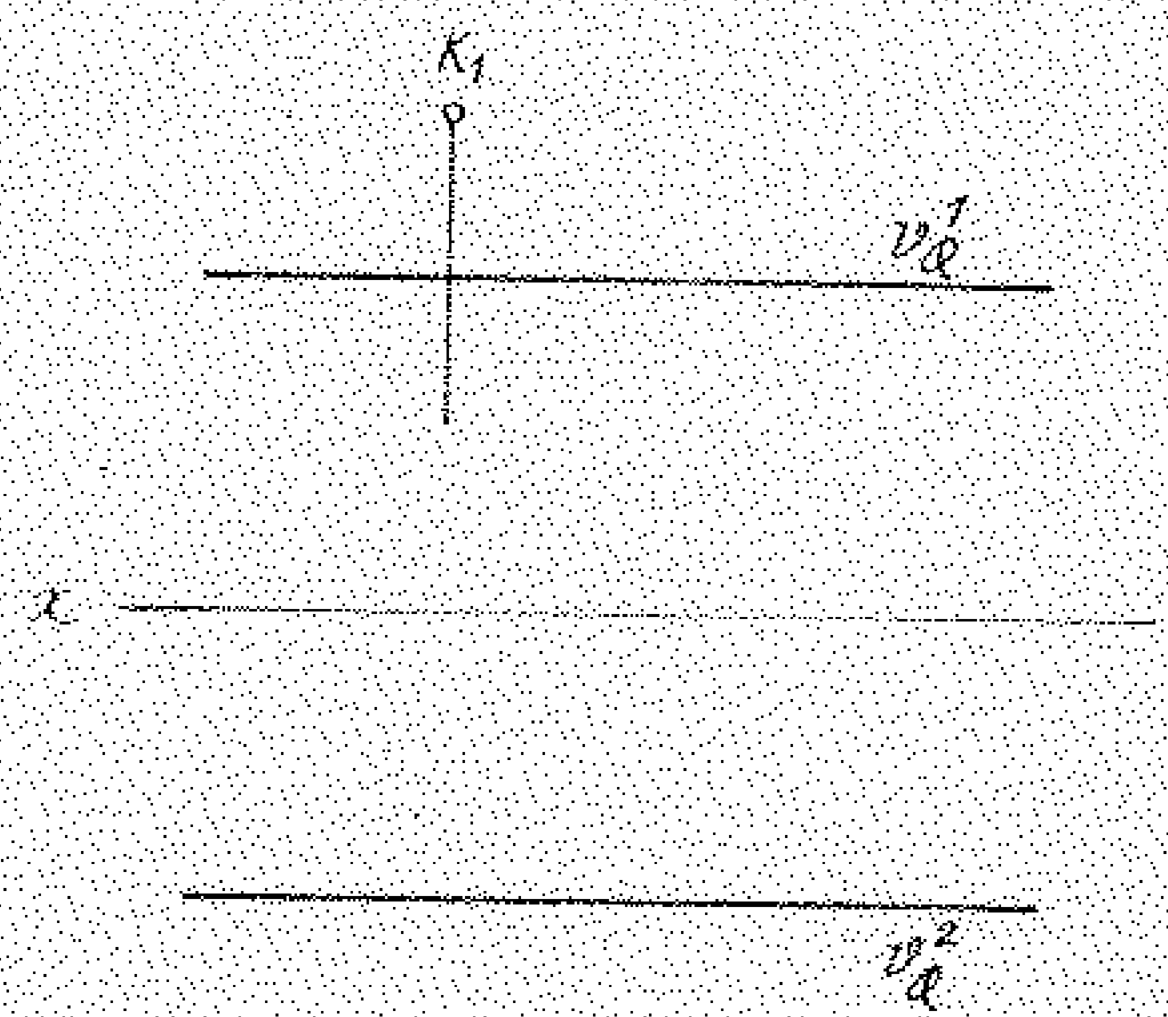


Hình 5-29

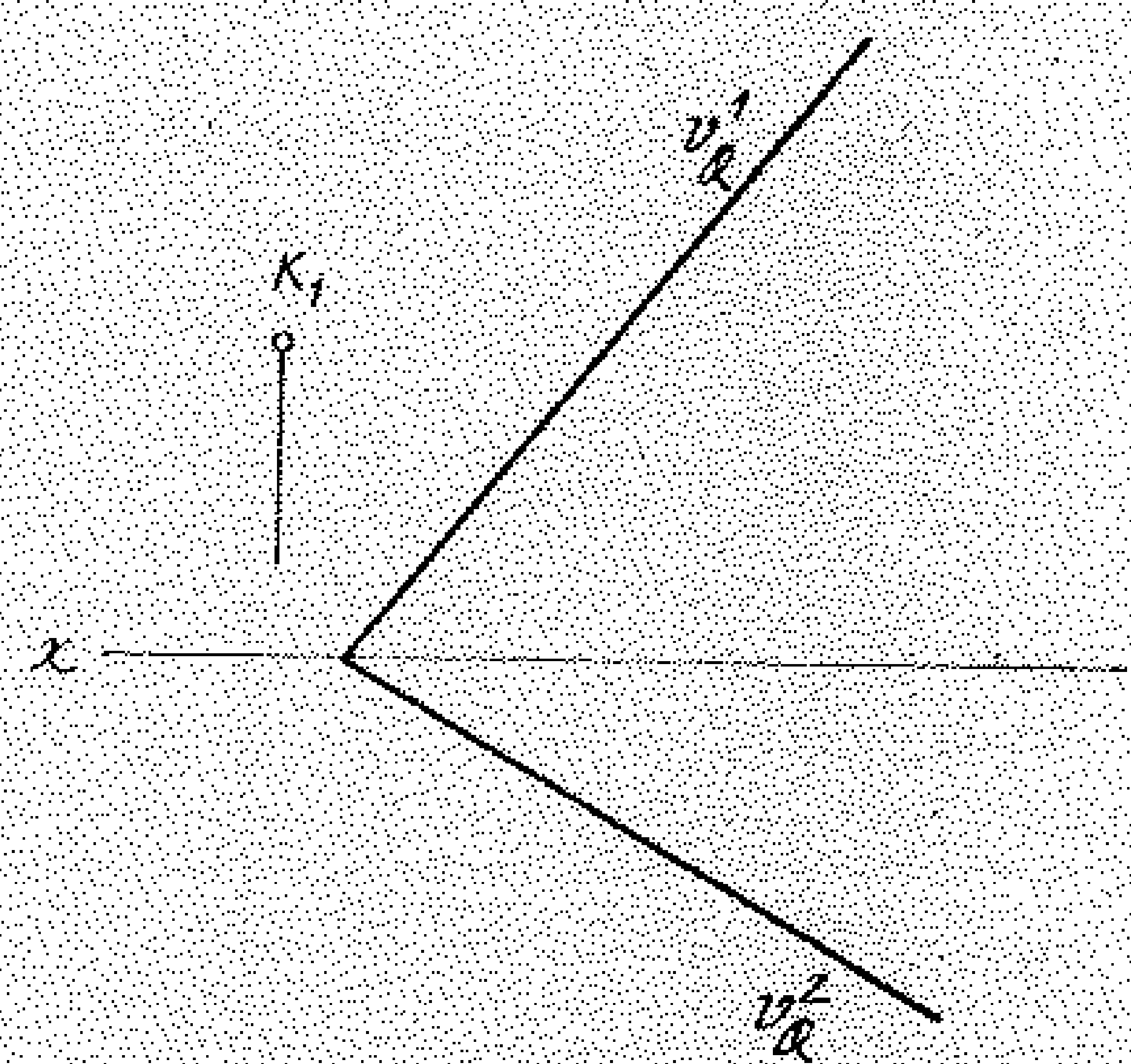
Bài 12 : Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và hình chiếu đứng của điểm K. **Tìm hình chiếu bằng** của K, biết rằng khoảng cách từ K đến ($\mathcal{Q}$) là 25mm.

a) $\mathcal{Q}$ (v^1_Q // v^2_Q), (Hình 5-30).

b) $\mathcal{Q}$ (v^1_Q , v^2_Q), (Hình 5-31).



Hình 5-30



Hình 5-31

Bài 13 : Cho đường thẳng m (m_1, m_2). Hãy xác định phép thay một mặt phẳng hình chiếu sao cho :

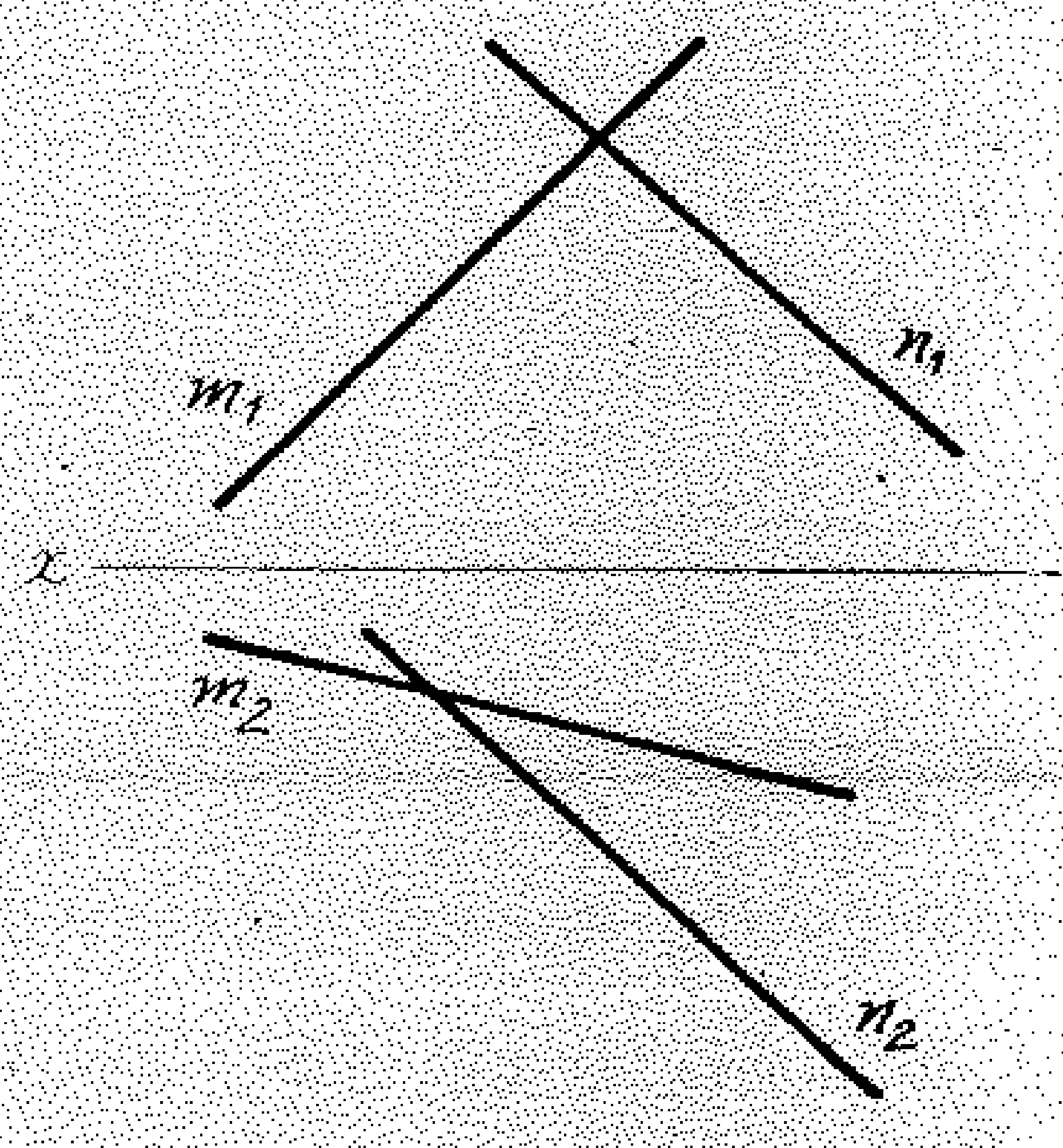
a) Hai hình chiếu của m đối xứng với nhau qua trục x.

b) Hai hình chiếu của m song song với nhau

c) Hai hình chiếu của m trùng nhau.

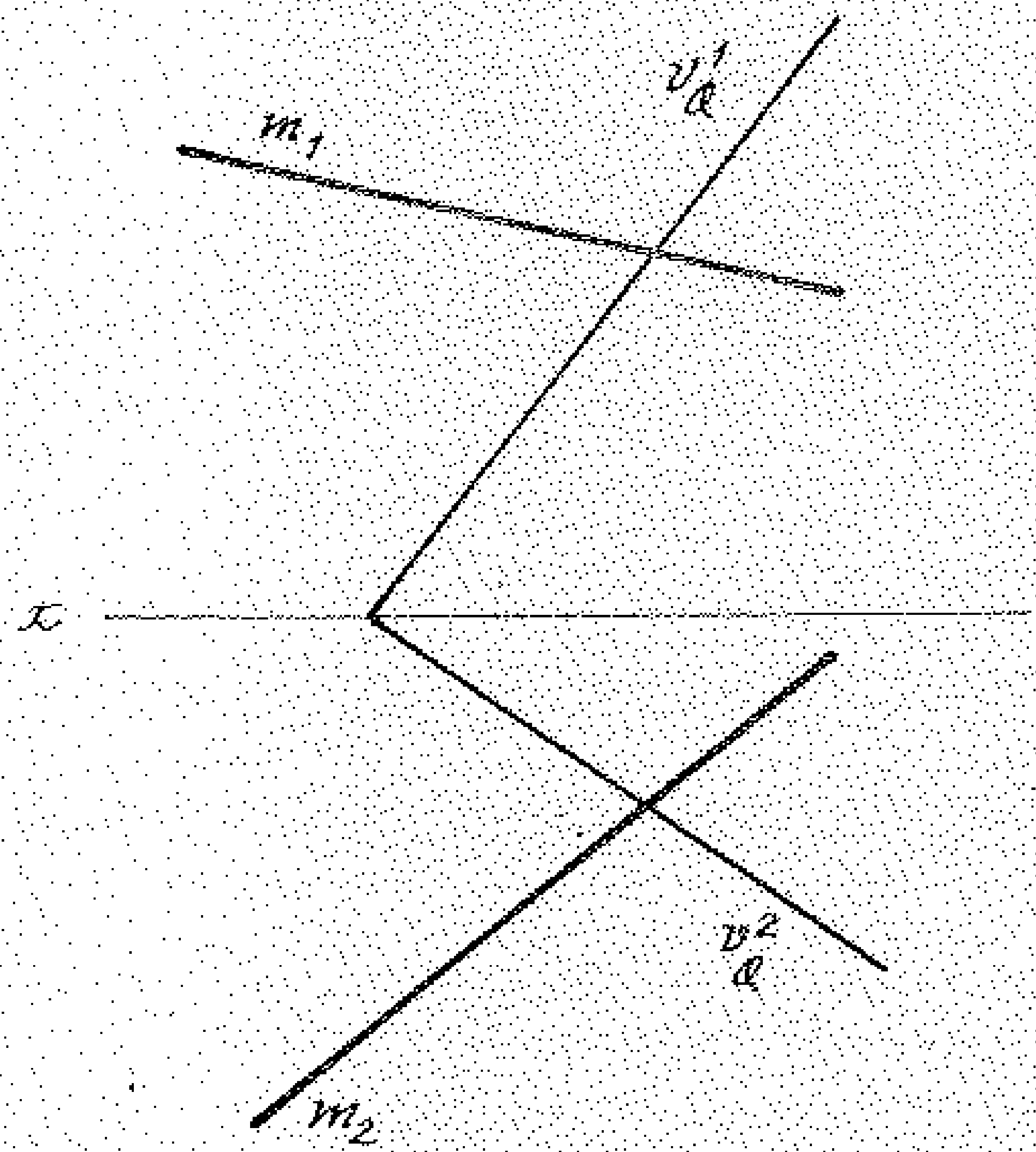
Bài 14 : Xác định góc giữa hai đường thẳng m và n, (Hình 5-32).

Bài 15 : Xác định góc hợp bởi đường thẳng m và mặt phẳng $\mathcal{Q}$, (Hình 5-33).

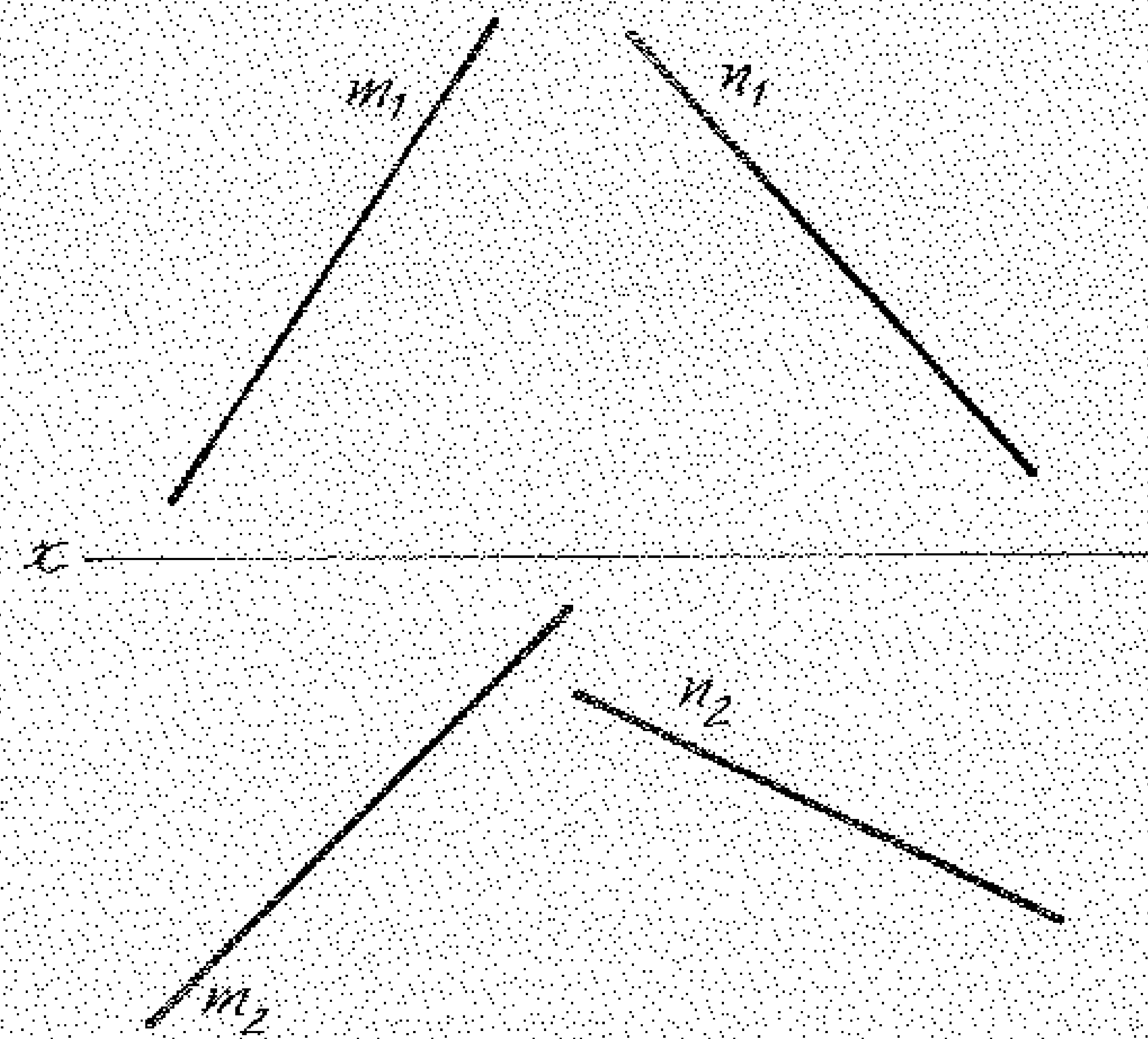


Hình 5-32

Bài 16 : Cho hai đường thẳng m, n. Hãy dựng một đường bằng cắt m tại A, cắt n tại B và sao cho độ dài của đoạn thẳng AB bằng 25mm, (Hình 5-34).



Hình 5-33



Hình 5-34

CHƯƠNG 6

BIỂU DIỄN ĐƯỜNG CONG VÀ CÁC MẶT

6.1. Các thí dụ

Thí du 1: Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và một điểm $O \in (\mathcal{Q})$. Vẽ các hình chiếu của đường tròn v thuộc mặt phẳng $\mathcal{Q}$ có tâm là điểm O và bán kính R = 20mm, (Hình 6-1).

Giải : Hình chiếu đứng của v là elip (v_1) có trục dài AB = 2R với AB nằm trên đường mặt qua O, trục ngắn C_1D_1 với CD nằm trên đường dốc nhất của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ so với $\mathcal{P}^1$. Hình chiếu bằng của AB và CD là hai đường kính liên hợp của elip (v_2), trong đó C là điểm xa nhất, D là điểm gần nhất của (v).

Hình chiếu bằng của (v) là elip (v_2) có trục dài EF = 2R với EF nằm trên một đường bằng qua O, trục ngắn G_2H_2 với GH nằm trên đường dốc nhất của $(\mathcal{Q})$ so với $(\mathcal{P}^2)$. Để xác định trục ngắn của các elip (v_1) và (v_2) có nhiều cách :

- Chập mặt phẳng $\mathcal{Q}$ vào mặt phẳng $\mathcal{P}^2$ (Hình 6-1).

- Thay các mặt phẳng hình chiếu sao cho $(\mathcal{Q})$ trở thành mặt phẳng chiếu. - Đặt trên đường dốc nhất của $(\mathcal{Q})$ so với $(\mathcal{P}^1)$ các đoạn thẳng OC = OD = R và đặt trên đường dốc nhất của $(\mathcal{Q})$ so với $(\mathcal{P}^2)$ các đoạn thẳng OG = OH = R.

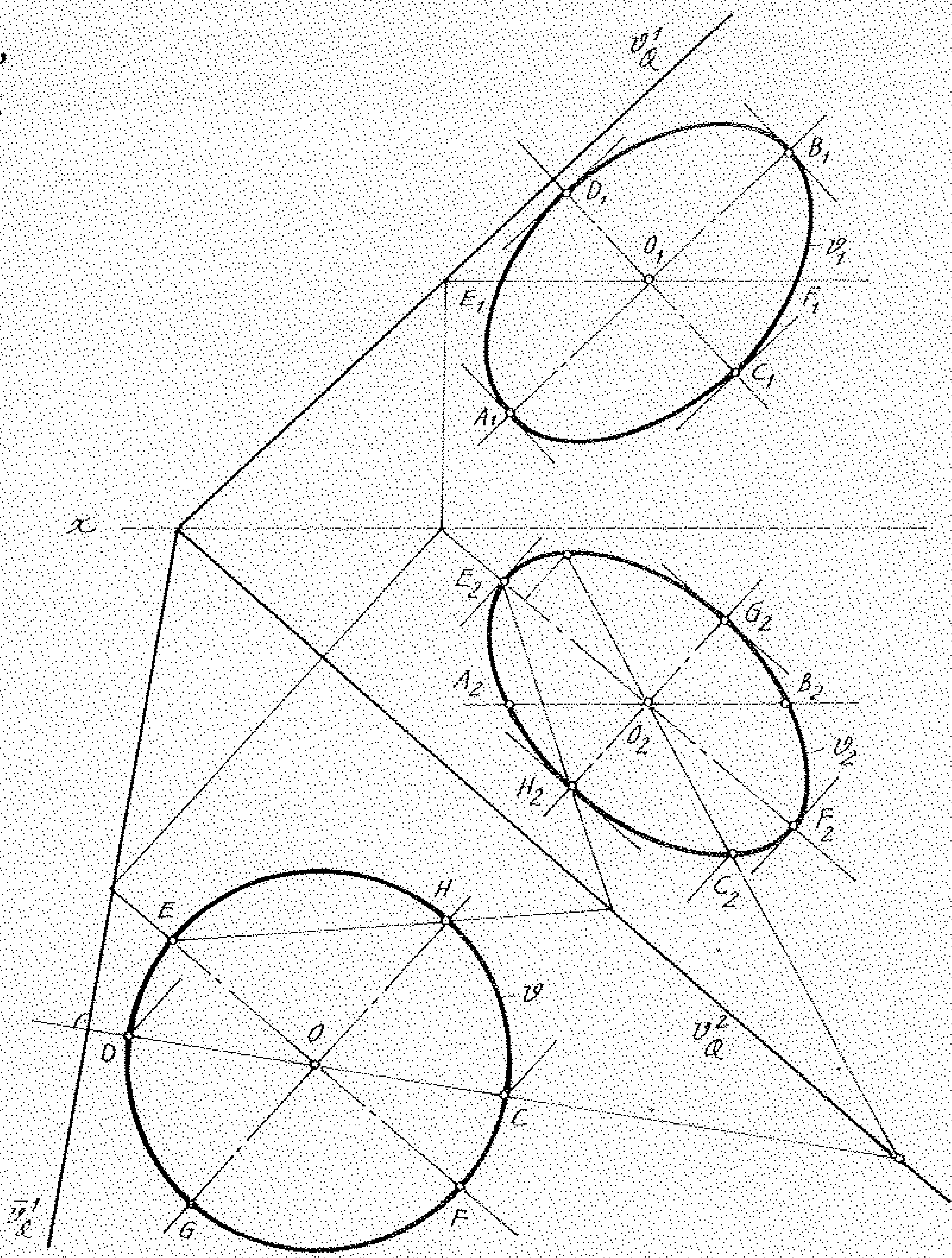
Thí dụ 2: Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và hình chiếu bằng là một đường tròn của một elíp (e) thuộc ($\mathcal{Q}$). Hãy vẽ hình chiếu đứng của (e) (Hình 6-2).

Giải : Hình chiếu đứng của (e) là một elíp. Hai đường kính AB và CD của (e) có hình chiếu bằng $A_2B_2 \perp C_2D_2$ nên hình chiếu đứng A_1B_1 và C_1D_1 của chúng là hai đường kính liên hợp của elíp hình chiếu đứng. Điểm thấp nhất M và điểm cao nhất N của (e) nằm trên đường dốc nhất (qua D) của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ so với ($\mathcal{P}^2$).

Thí dụ 3: Cho tam giác ABC

1- Dựng hình chóp S.ABC có cạnh bên SA = 40 mm và sao cho cạnh bên SA vuông góc với đáy.

2- Biết hình chiếu đứng M_1 của một điểm M nằm trên mặt của hình chóp (giả sử M_1 thấy), tìm hình chiếu bằng M_2 của điểm M (Hình 6-3).



Hình 6-1

Giải :

1- Vẽ qua A đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) : $d_1 \perp A_1B_1$ (vì AB là đường mặt) và $d_2 \perp A_2C_2$ (vì AC là đường bằng). Đặt trên d một đoạn thẳng SA = 40 mm. Cặp điểm cùng tia chiếu bằng I, J (với $I \in SB$ và $J \in AC$) cho thấy trên hình chiếu bằng cạnh SB thấy còn cạnh AC khuất. Cặp điểm cùng tia chiếu đứng K, L (với $K \in SC$ và $L \in AB$) cho thấy trên hình chiếu đứng cạnh SC thấy còn cạnh AB khuất.

2- Hình chiếu đứng M_1 của điểm M thấy nên M nằm trên mặt (SBC). Gắn M vào đường thẳng $SN \in (SBC)$ ta tìm được M_2. M_2 thấy vì hình chiếu bằng của mặt (SBC) thấy.

Thí dụ 4: Cho mặt nón tròn xoay và hình chiếu đứng của một điểm M nằm trên mặt nón (M_1 thấy). Tìm hình chiếu bằng của M (Hình 6-4).

Giải : Để tìm hình chiếu bằng M_2 của điểm M ta gắn M vào một đường thuộc mặt nón, chẳng hạn :

– Gắn M vào đường sinh (SA)

– Gắn M vào đường tròn (v)

M_1 thấy nên M thuộc nửa trước của mặt nón.

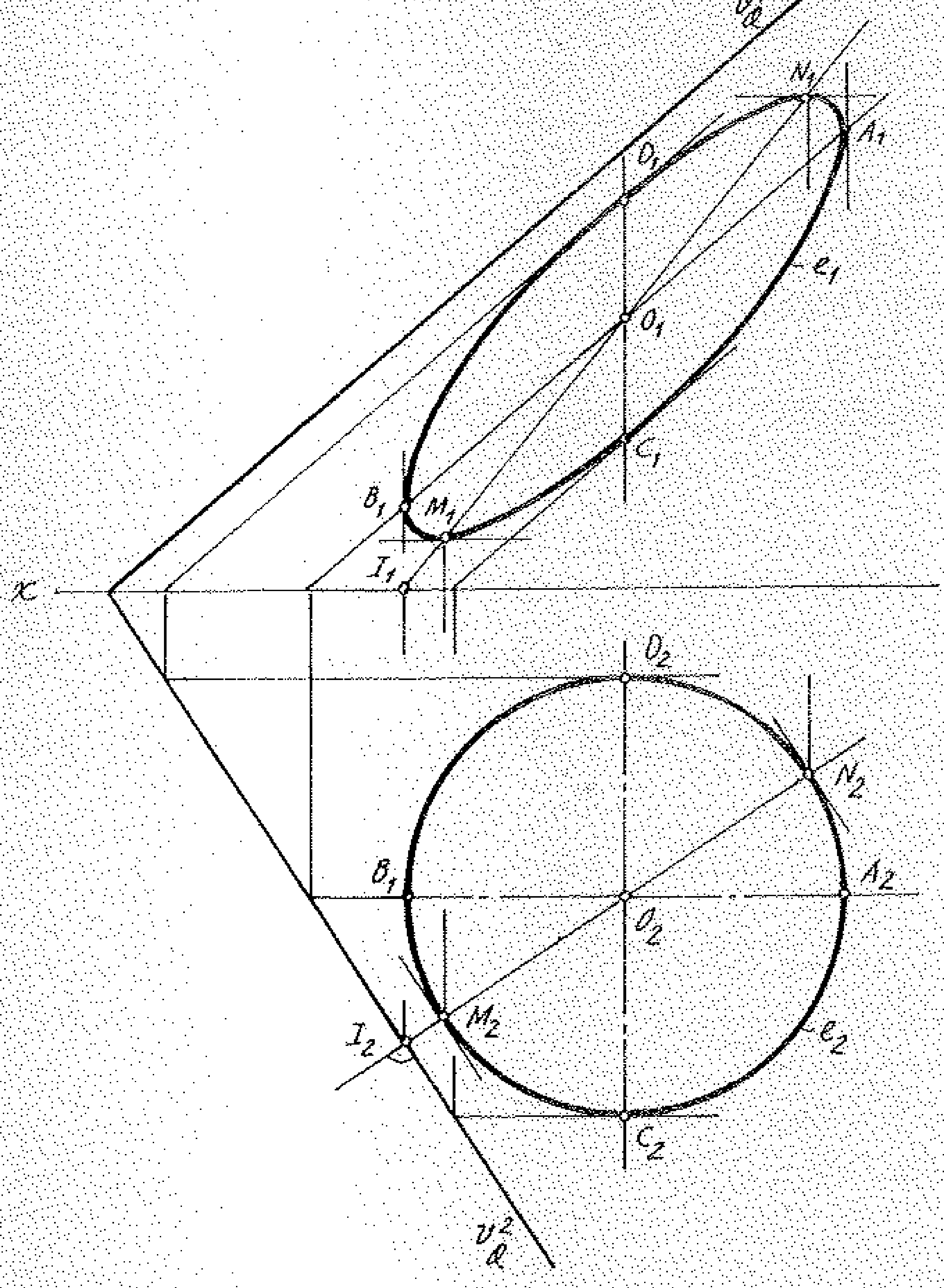
Thí dụ 5: Cho hai điểm O, A

1– Vẽ đường bao quanh các hình chiếu của mặt cầu tâm O, bán kính R = OA.

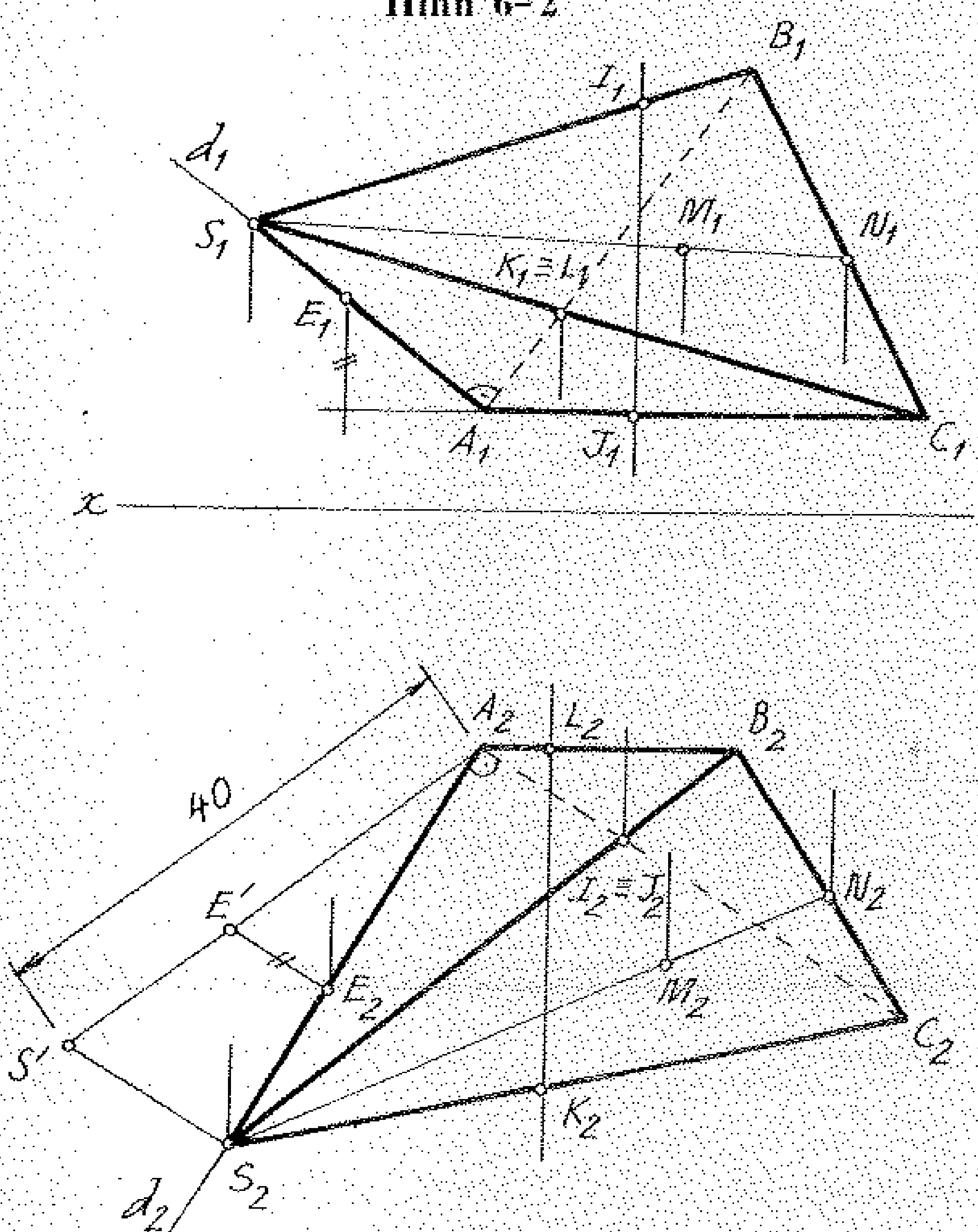
2– Giả sử đã biết hình chiếu đứng M_1 của một điểm M thuộc mặt cầu (M_1 thấy). Tìm hình chiếu bằng của M, (Hình 6–5).

Giải :

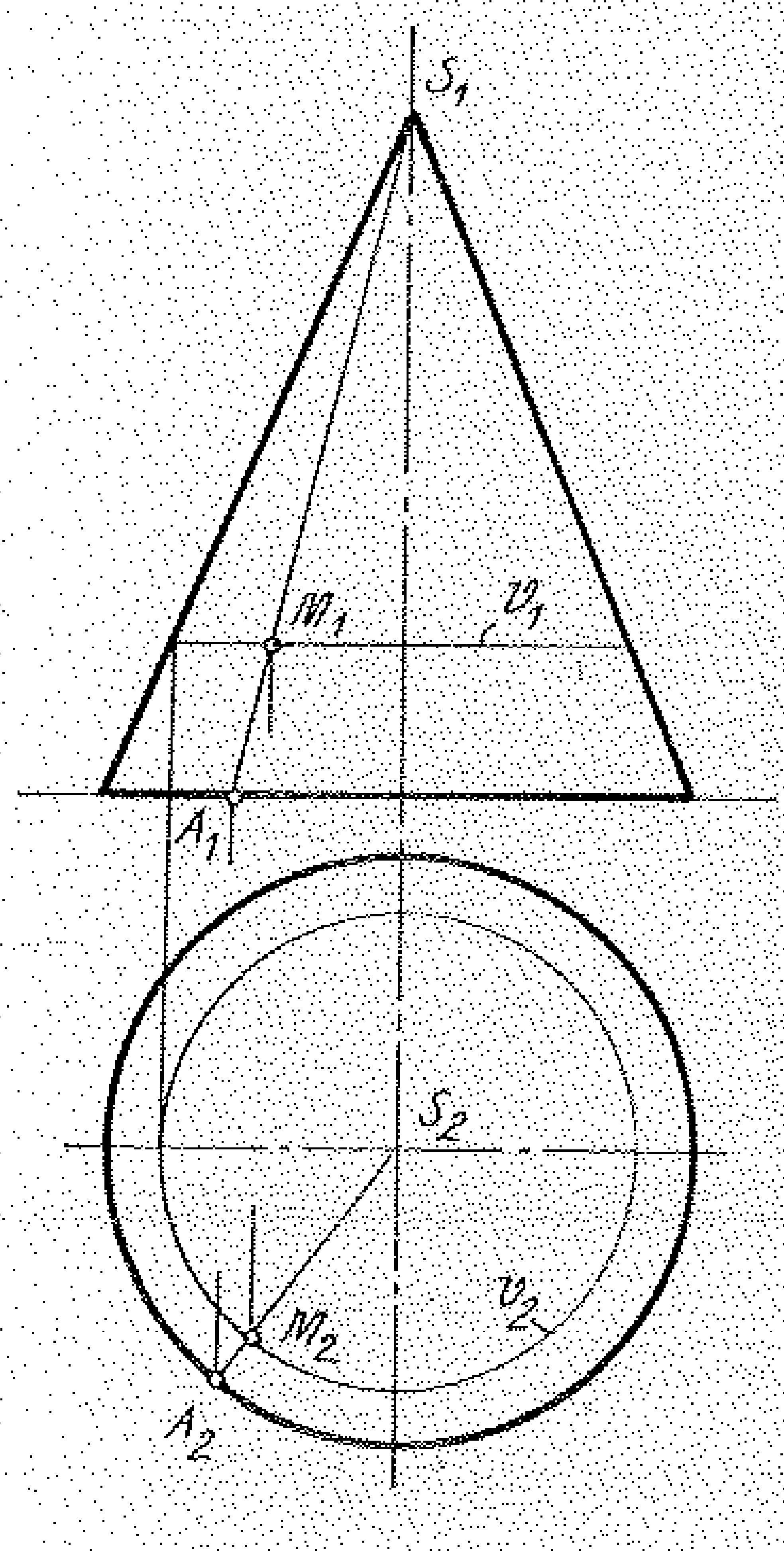
1– Tìm độ lớn của đoạn OA (đoạn O_2A'). Đường bao quanh hình chiếu đứng của mặt cầu là hình chiếu đứng của đường tròn lớn (k) nằm trong mặt phẳng mặt (k_1 là đường tròn tâm O_1, bán kính R = O_2A'). Đường bao quanh hình chiếu bằng của mặt



Hình 6–2



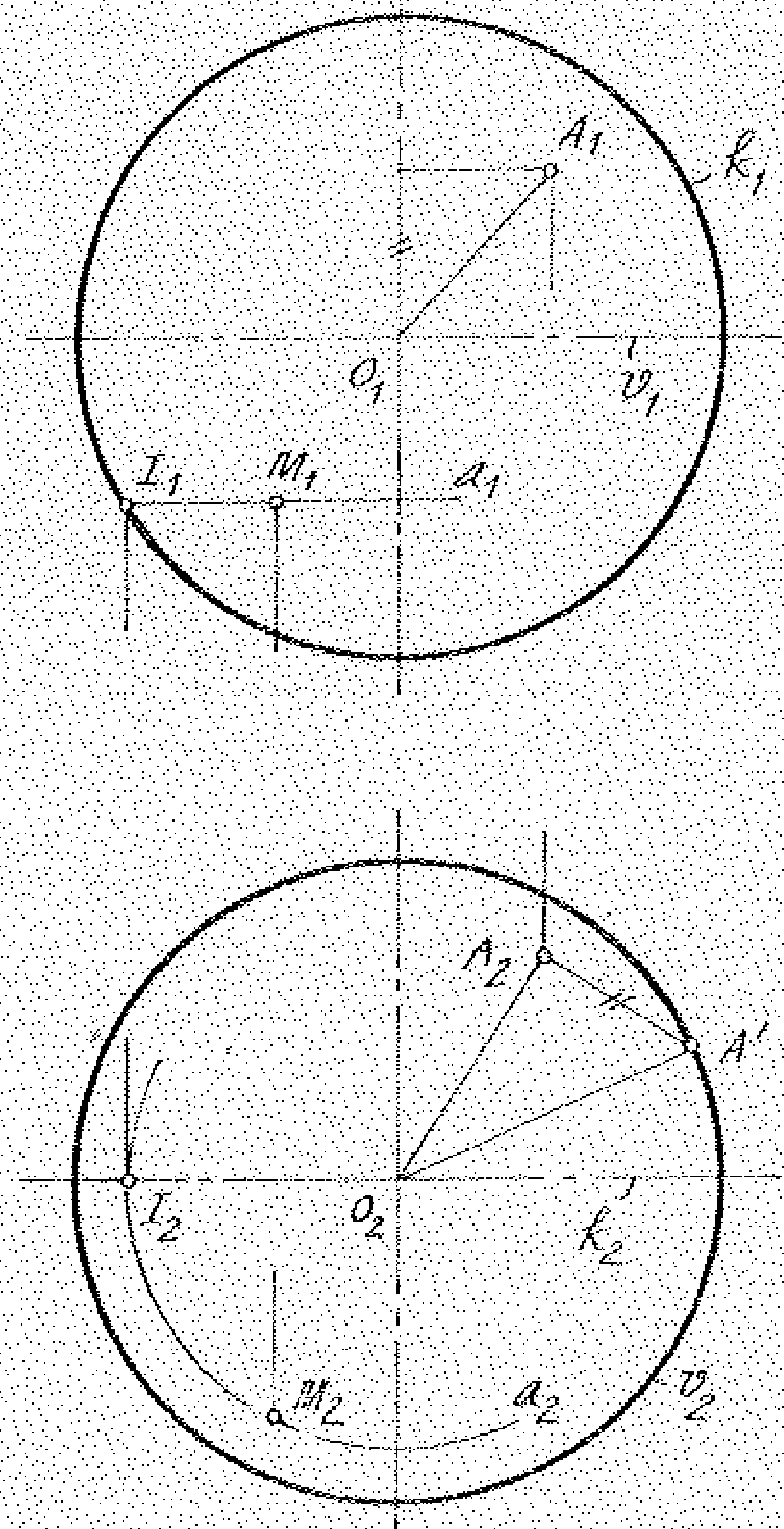
Hình 6–3



Hình 6–4

cầu là hình chiếu bằng của đường tròn lớn (v) nằm trong mặt phẳng bằng.

2- Để tìm hình chiếu bằng của điểm M ta gắn M vào một đường tròn thuộc mặt cầu và song song với một mặt phẳng hình chiếu (trên hình 6-5 điểm M được gắn vào đường tròn a nằm trên mặt phẳng bằng). M_1 thấy nên M là điểm thuộc nửa trước của mặt cầu.



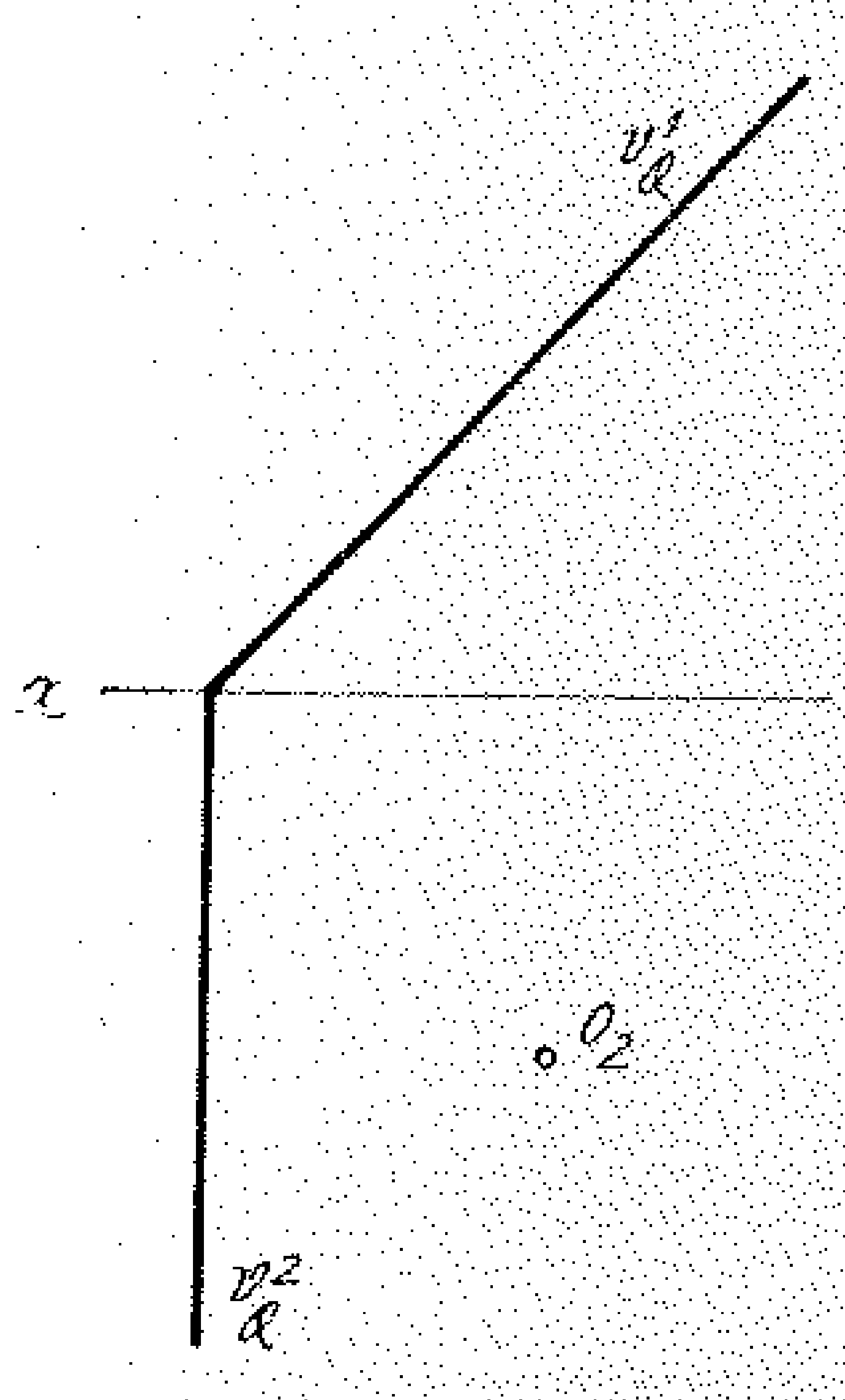
Hình 6-5

6.2. Bài tập

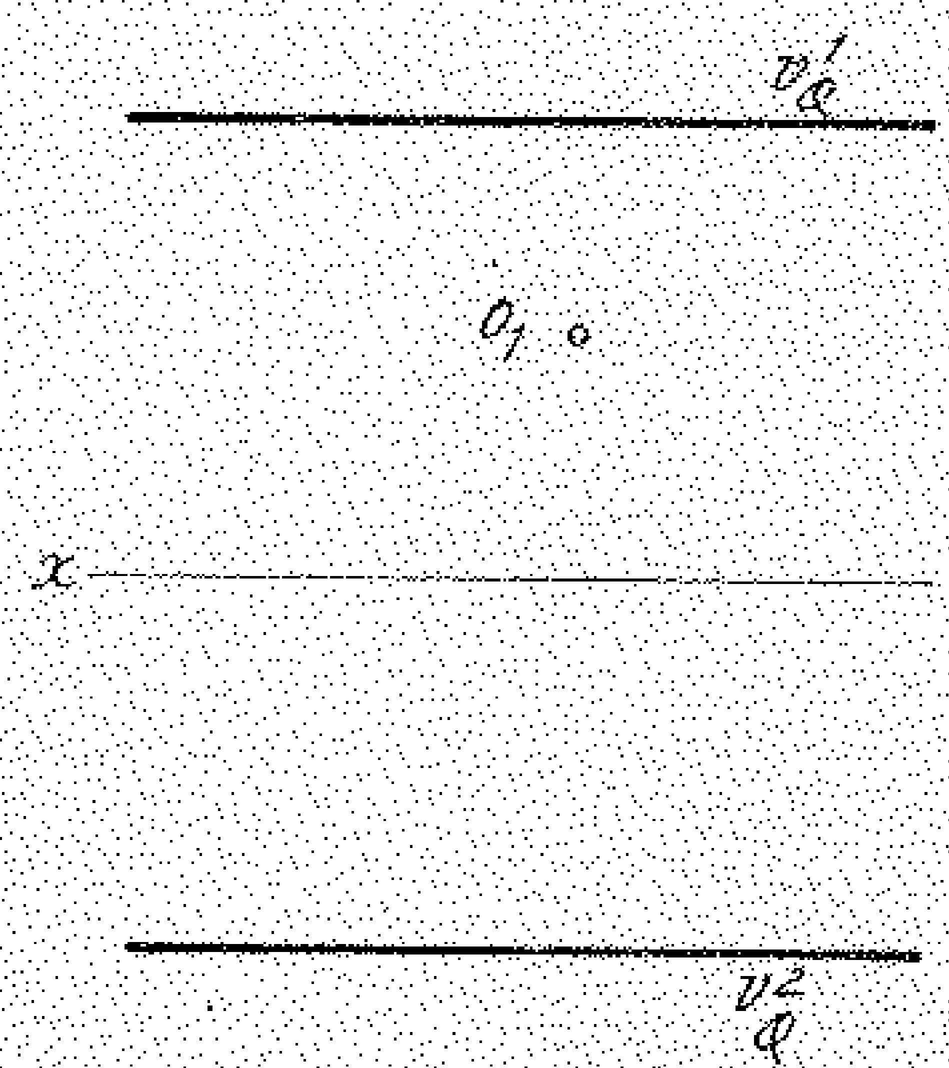
Bài 1 : Vẽ các hình chiếu của đường tròn (v) thuộc mặt phẳng $\mathcal{Q}$ biết tâm O và bán kính R của nó (R = 25 mm).

- $\mathcal{Q} \perp \mathcal{P}^1$ (Hình 6-6)
- $\mathcal{Q}$ // x (Hình 6-7)
- $\mathcal{Q}$ (b, m) và $O = b \cap m$ (Hình 6-8).

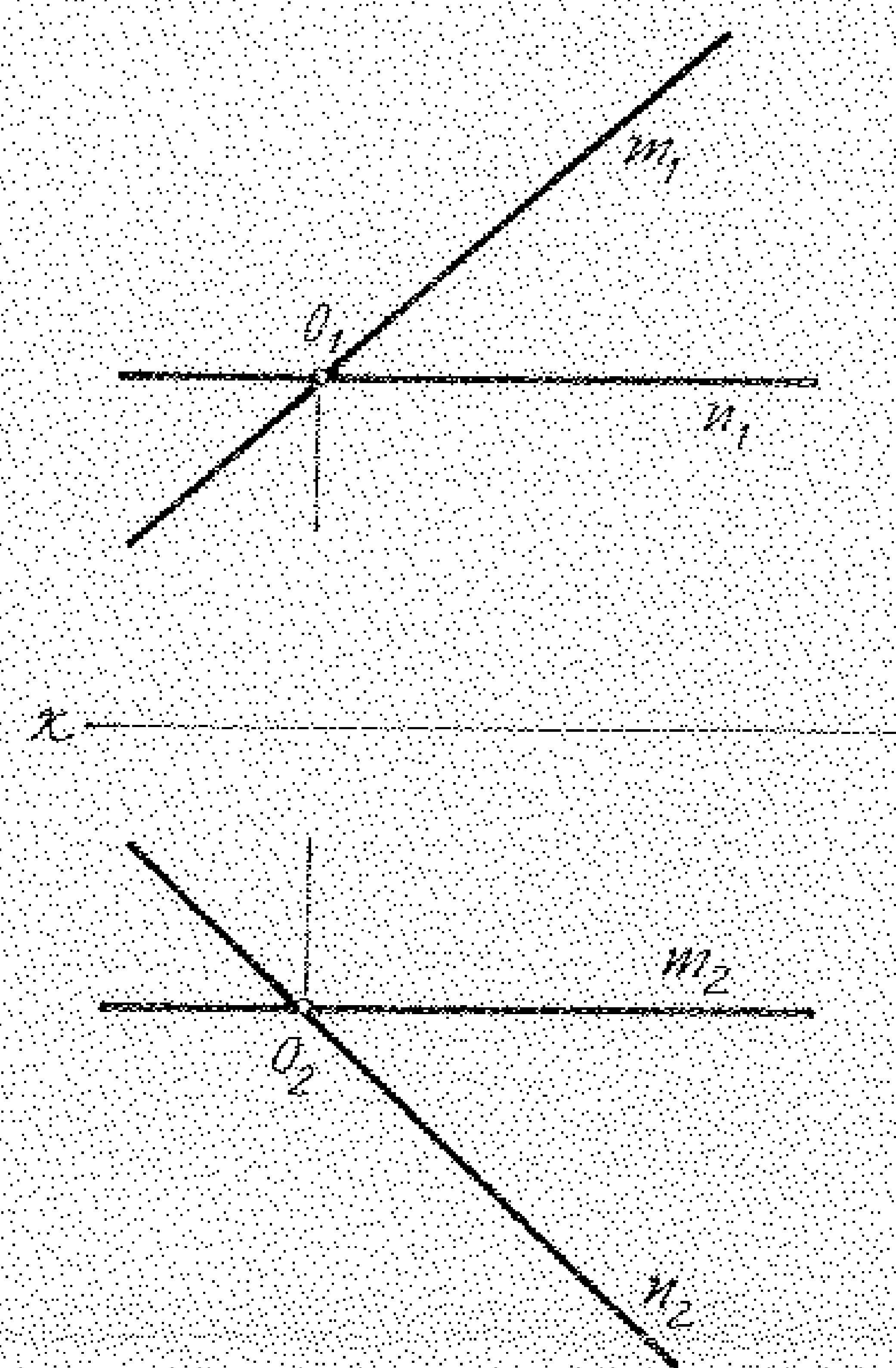
Bài 2 : Biết tâm O của đường tròn (v) và hai trục A_1B_1 và C_1D_1 của elip (v_1) là hình chiếu đứng của (v). Vẽ hình chiếu bằng của đường tròn (v) (Hình 6-9).



Hình 6-6

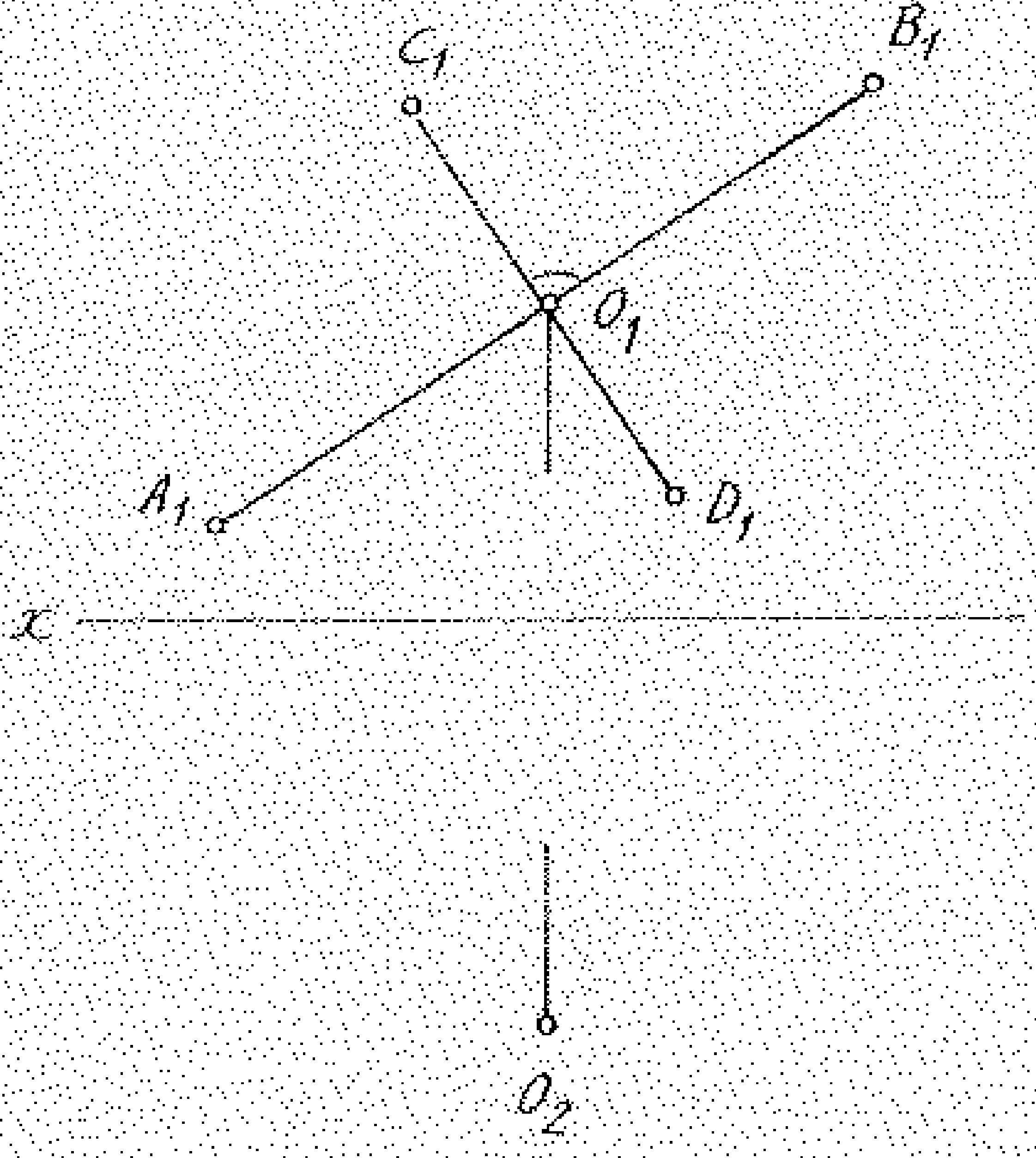


Hình 6-7

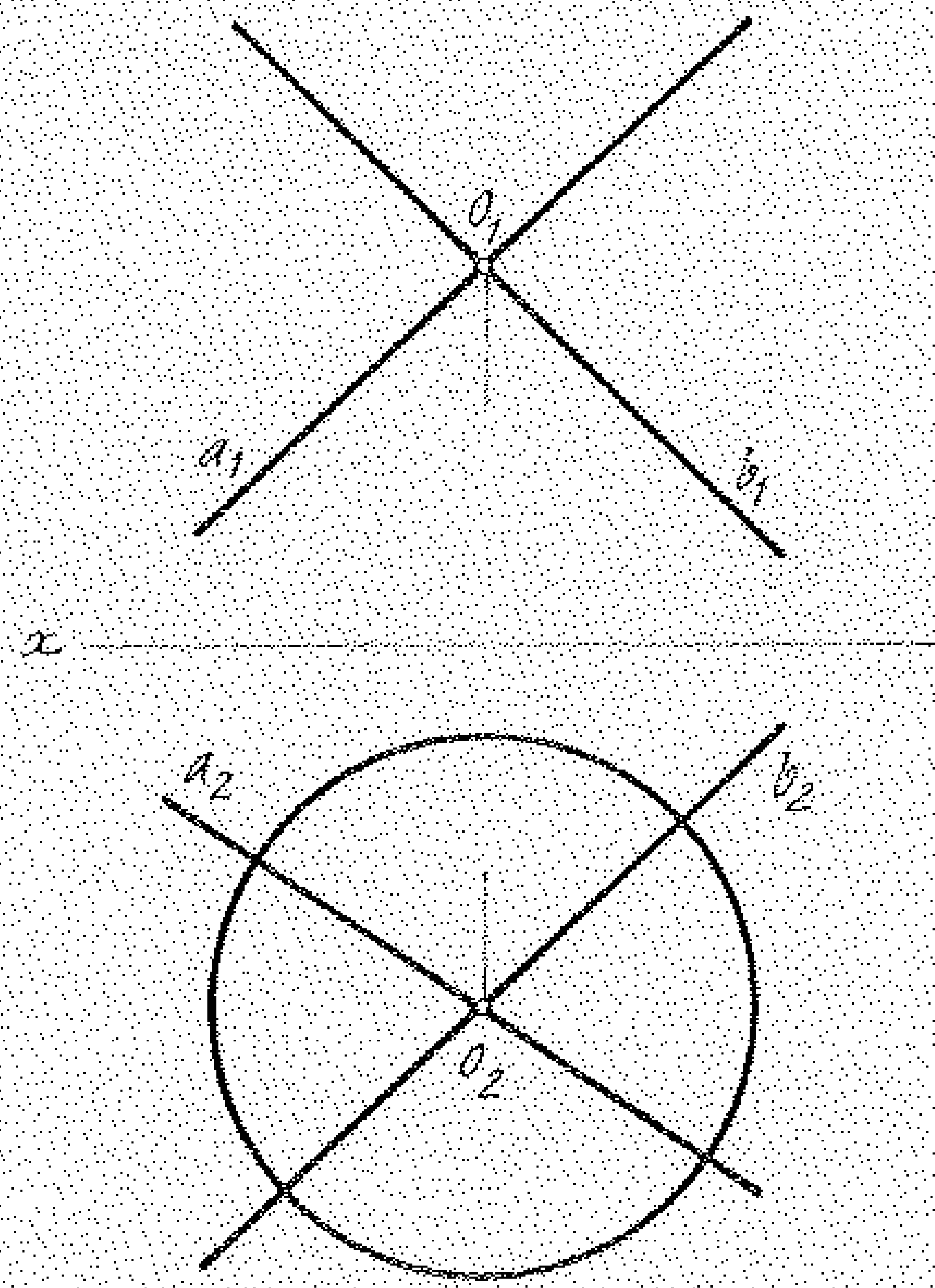


Hình 6-8

Bài 3 : Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (a, b), gọi $O = a \cap b$ và (e) là elip có tâm là O và nằm trên mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Biết hình chiếu bằng của (e) (là đường tròn tâm O_2). Hãy vẽ hình chiếu đứng của elip (e) (Hình 6-10).



Hình 6-9

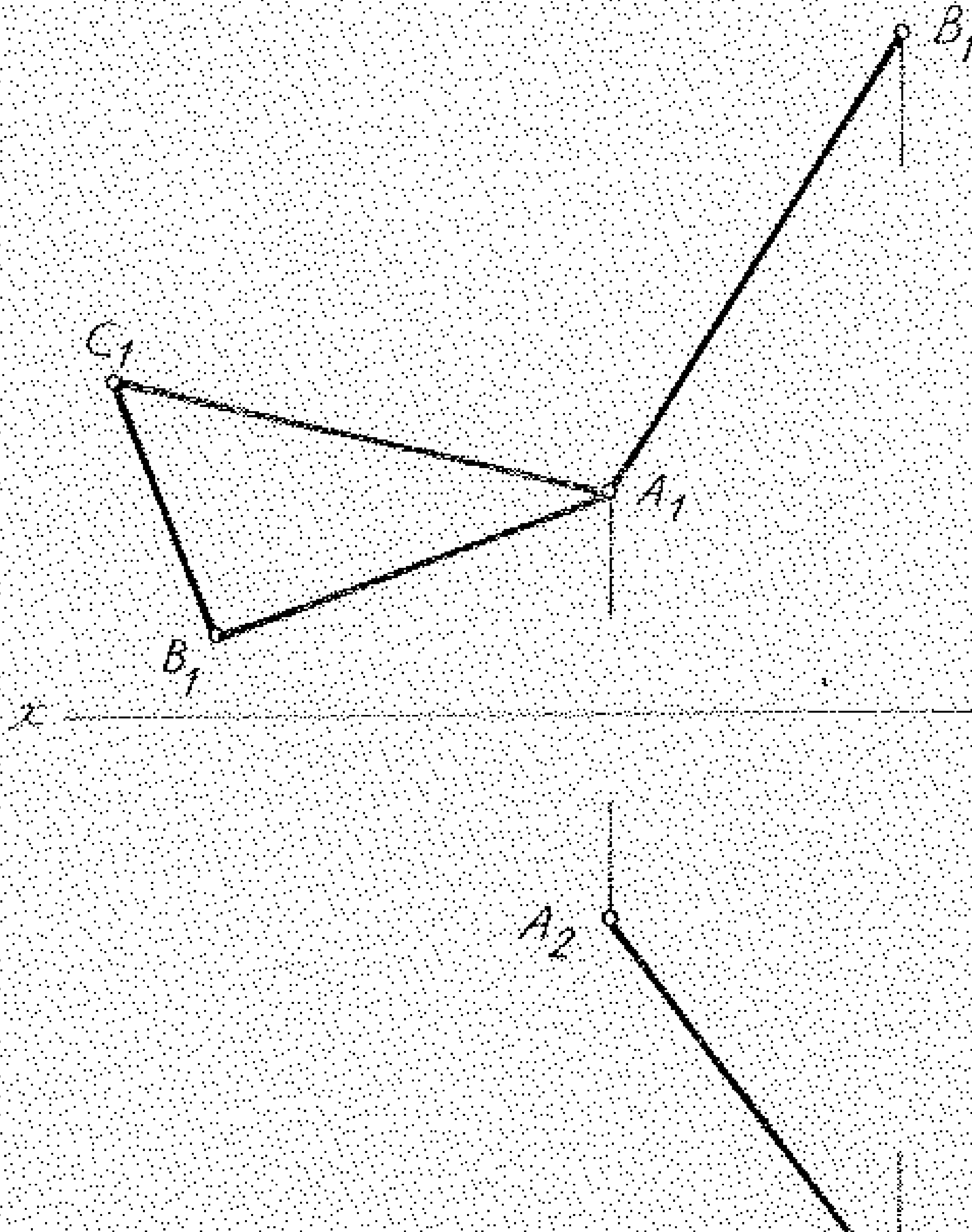


Hình 6-10

Bài 4 : Vẽ các hình chiếu của lăng trụ đứng ABC. A'B'C' biết cạnh bên AA' và hình chiếu đứng của đáy ABC của lăng trụ đó (Hình 6-11).

Bài 5 : Cho mặt phẳng Q và hình chiếu đứng của hai điểm D, A $\in$ (Q). Gọi (v) là đường tròn tâm O, bán kính R = OA thuộc mặt phẳng Q. Hãy xác định các điểm cao nhất, thấp nhất (so với $\mathcal{P}^2$), gần nhất, xa nhất (so với $\mathcal{P}^1$) và tiếp tuyến tại A của đường tròn (v) (Hình 6-12).

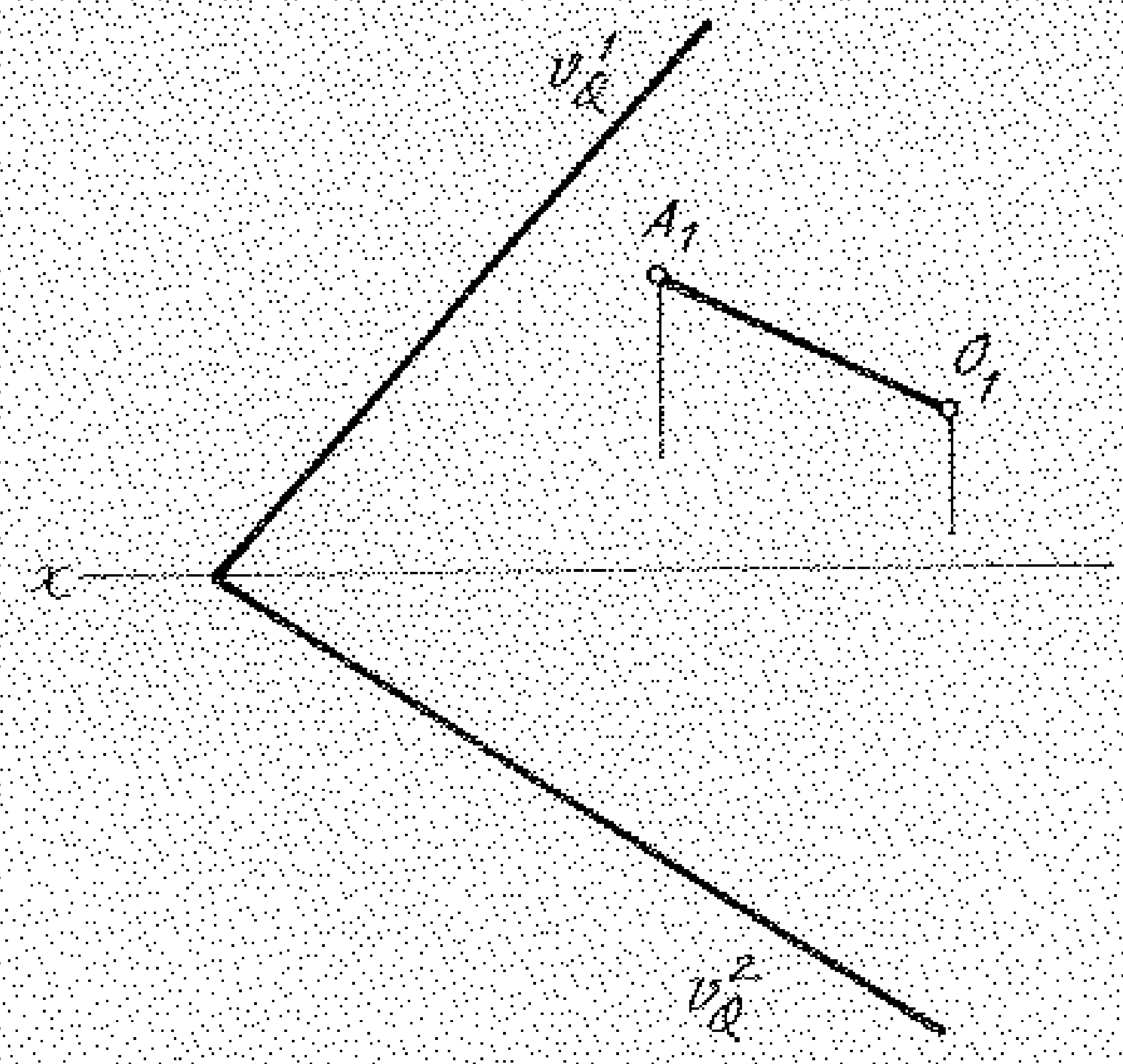
Bài 6 : Hình chóp S.ABC có đáy ABC nằm trên mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$ và ba cạnh bên vuông góc với nhau từng đôi một (SA $\perp$ SB $\perp$ SC $\perp$ SA). Biết hình chiếu bằng của đáy ABC. Vẽ các hình chiếu của hình chóp (Hình 6-13).



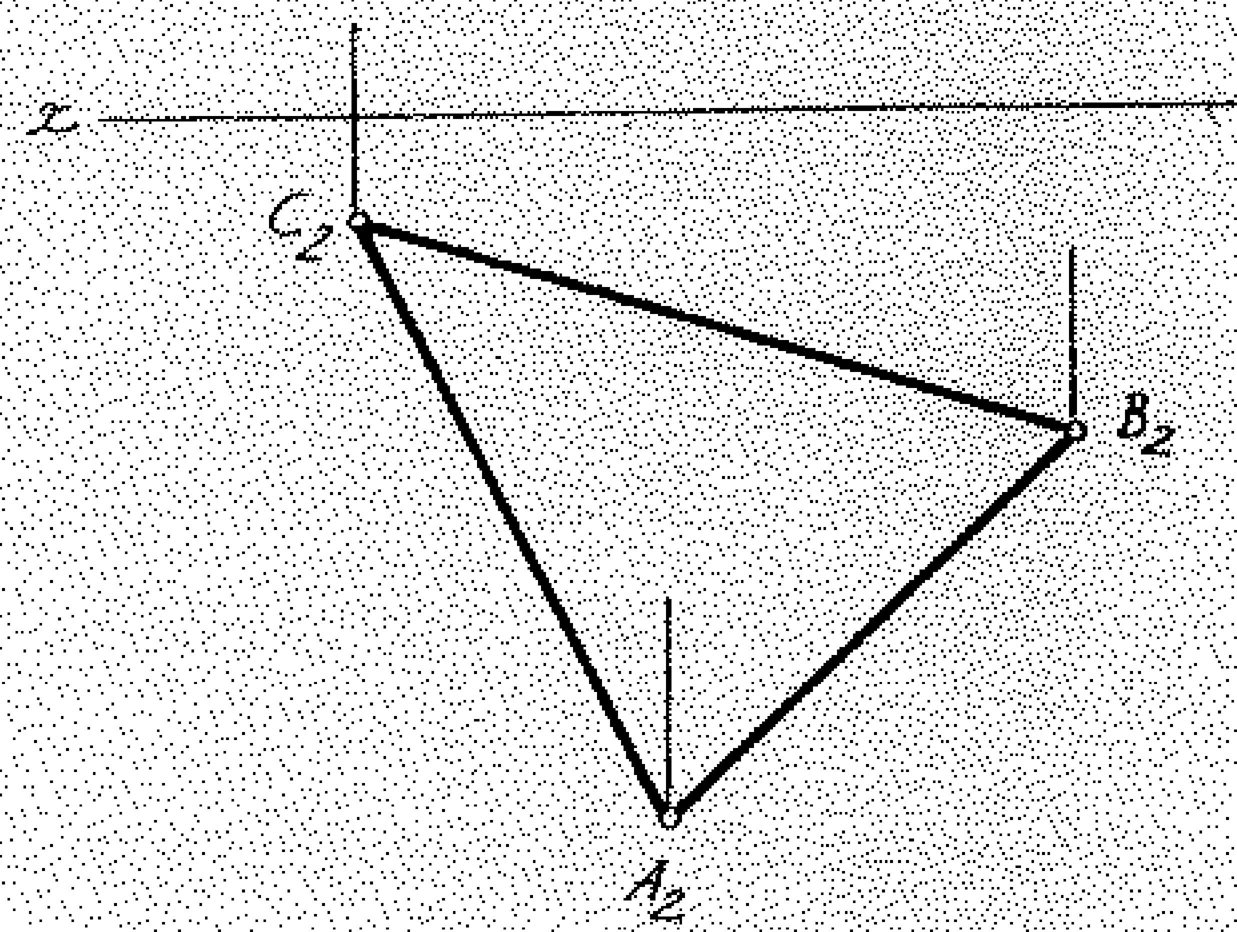
Hình 6-11

Bài 7 : Mặt tròn xoay (Φ) có trục là đường thẳng chiếu bằng t và đường sinh l (t và l đã biết). Hãy vẽ đường bao quanh các hình chiếu của (Φ) (Hình 6-14).

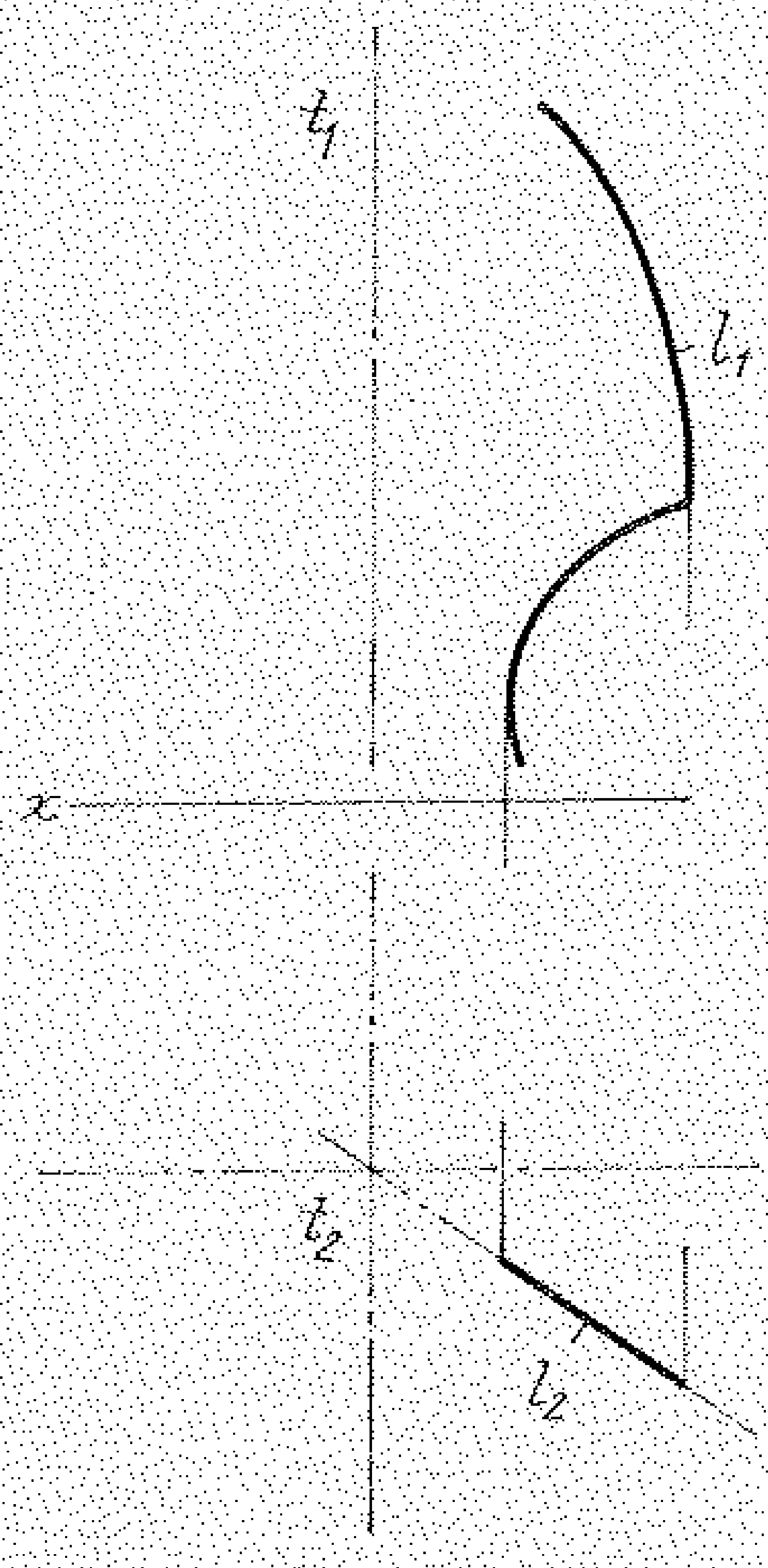
Bài 8 : Mặt tròn xoay (Φ) có trục là đường thẳng t, đường sinh l. Biết t, l (hai đường cùng thuộc một mặt phẳng mặt) và hình chiếu đứng M_1 của một điểm M $\in$ (Φ) (M_1 thấy). Tìm hình chiếu bằng của M (Hình 6-15).



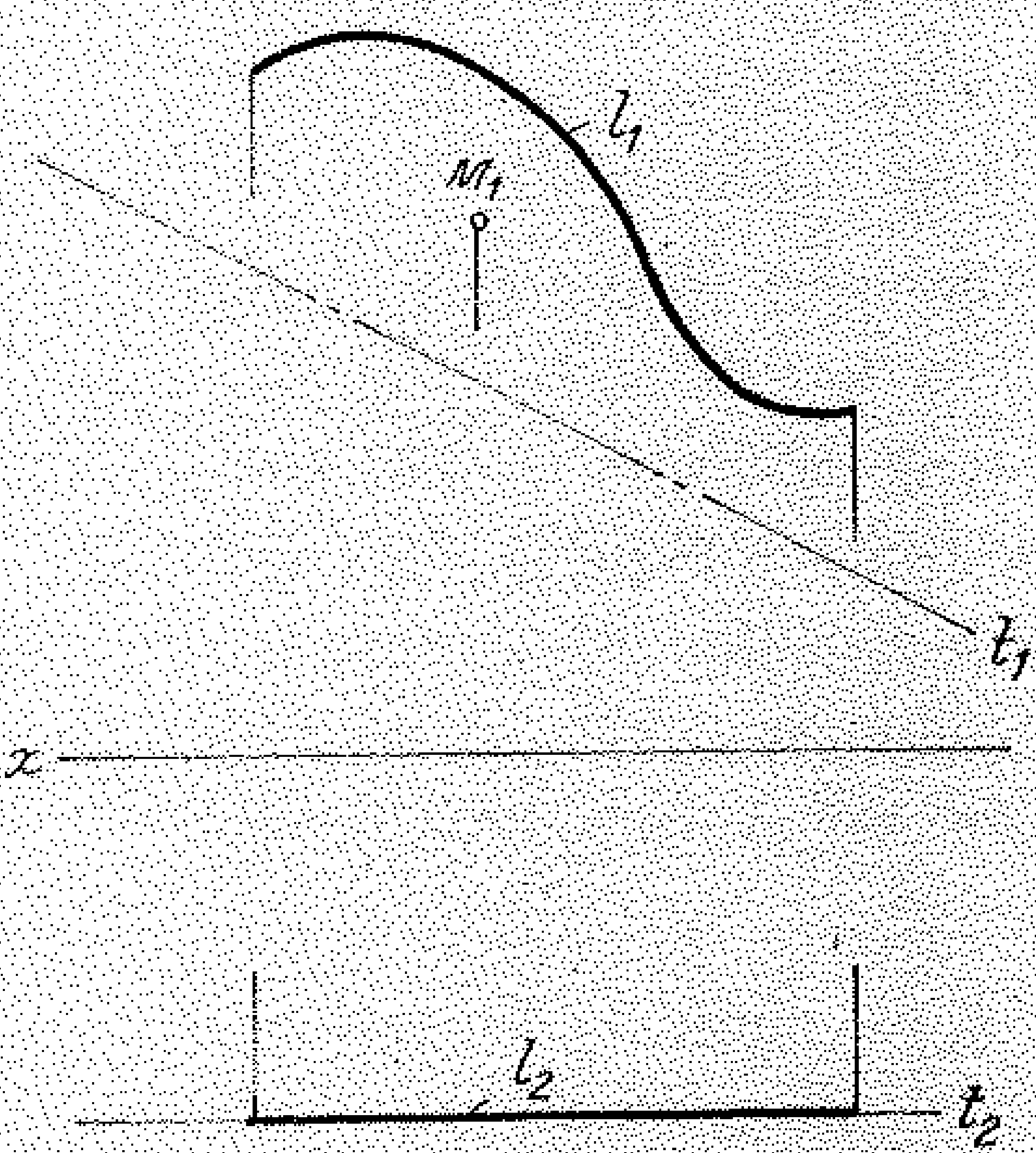
Hình 6-12



Hình 6-13



Hình 6-14



Hình 6-15

Bài 9 : Hình trụ xiên (Φ) có hai đáy là những hình trụ và một **trong hai đáy nằm** trên mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$. Biết ba đường sinh AA', BB', CC' **của (Φ) và** hình chiếu bằng của một điểm M ∈ (Φ) (M_2 khuất).

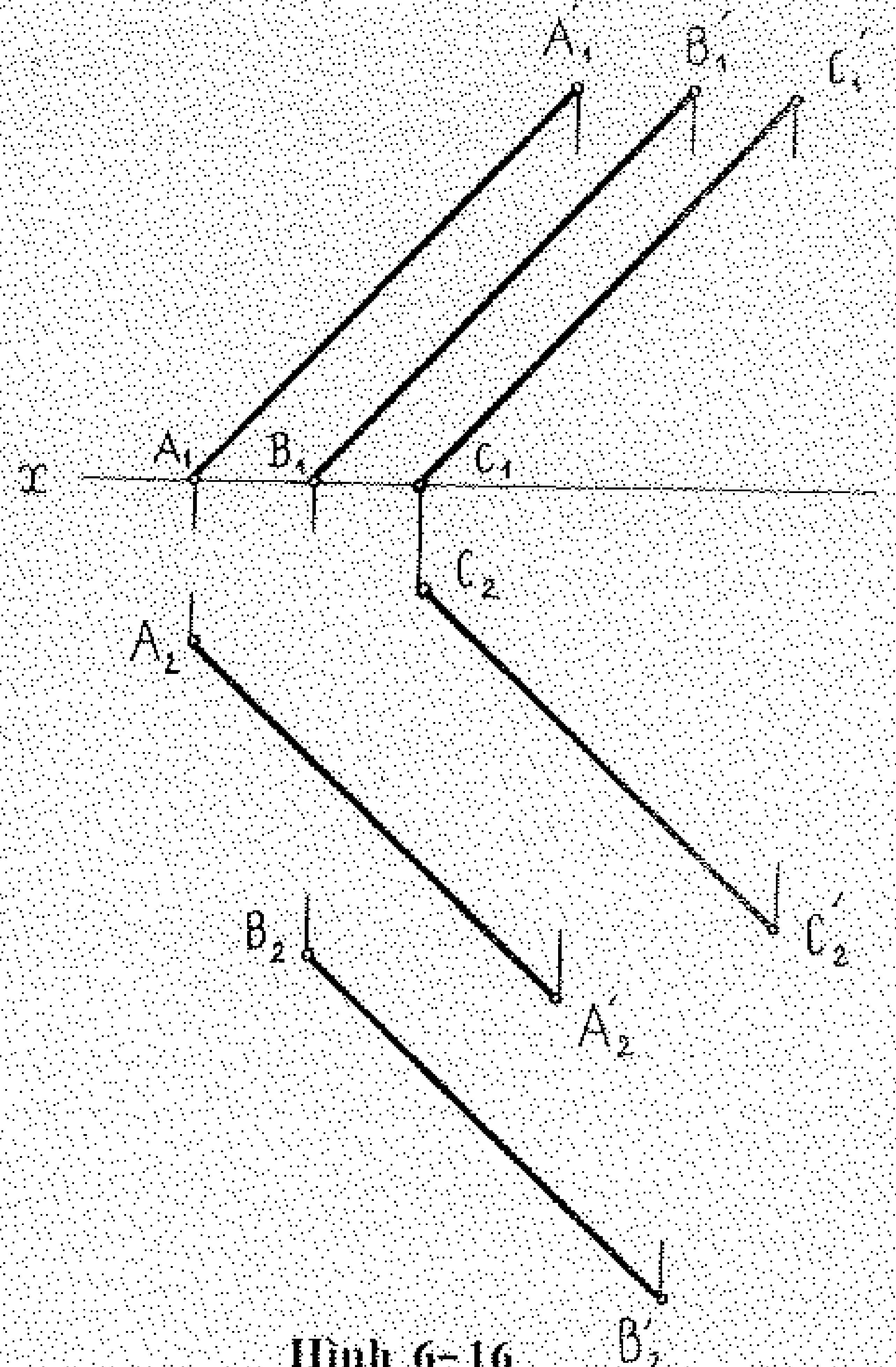
a – Hãy vẽ đường bao quanh các hình chiếu của (Φ).

b – Tìm hình chiếu đứng của điểm M (Hình 6-16).

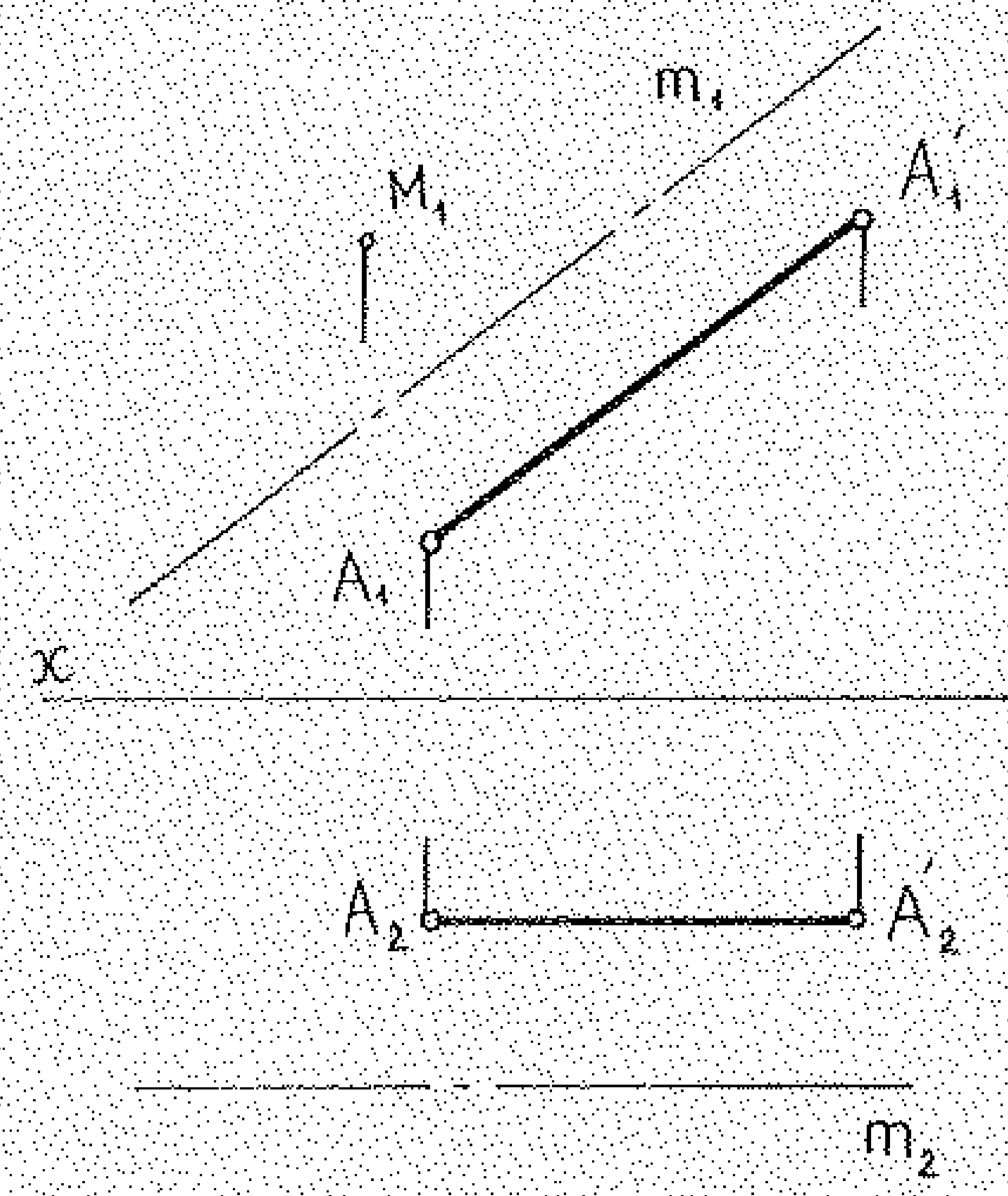
Bài 10 : Hình trụ tròn xoay (Φ) có trục là **đường mặt m. Biết trục m và một** đường sinh AA' của (Φ), biết hình chiếu đứng M_1 **của một điểm M ∈ Φ (M_1 thấy).**

a – Hãy vẽ đường bao quanh các hình chiếu của (Φ).

b – Tìm hình chiếu bằng của điểm M (Hình 6-17).



Hình 6-16



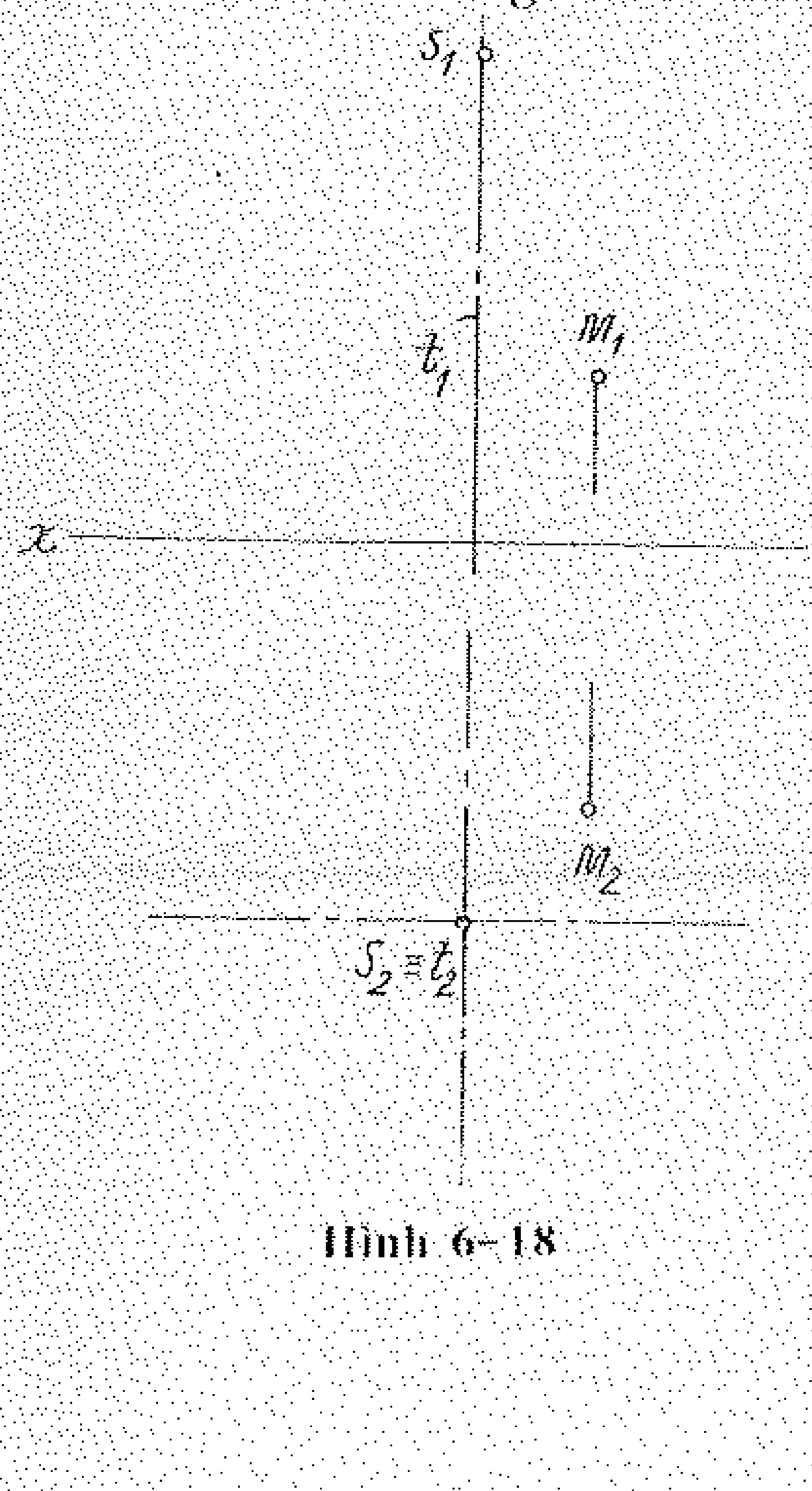
Hình 6-17

Bài 11 : Hình nón tròn xoay (Φ) có trục là đường thẳng chiếu bằng t, đỉnh S và đáy là một hình tròn thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$. Biết trục t, đỉnh S của (Φ) và một điểm M ∈ (Φ). Hãy vẽ đường bao quanh các hình chiếu của (Φ) (Hình 6-18).

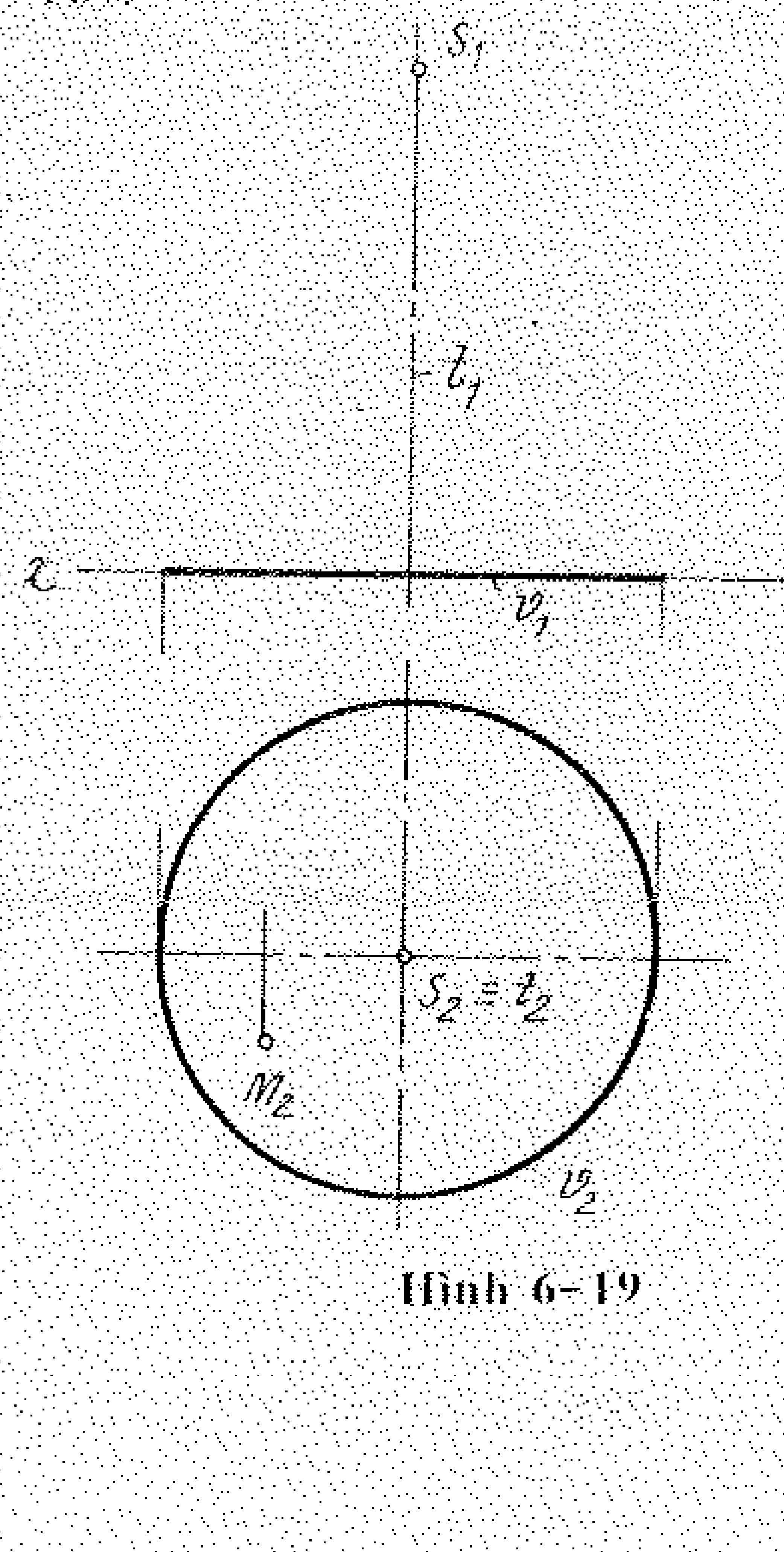
Bài 12 : Hình nón tròn xoay (Φ) có trục là đường thẳng chiếu bằng t, đỉnh là điểm S và đáy là hình tròn (v) thuộc mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$. Biết s, t, (v) và hình chiếu bằng của một điểm M ∈ (Φ)

a – Hãy vẽ đường bao quanh hình chiếu đứng của (Φ).

b – Tìm hình chiếu đứng của điểm M (Hình 6-19).



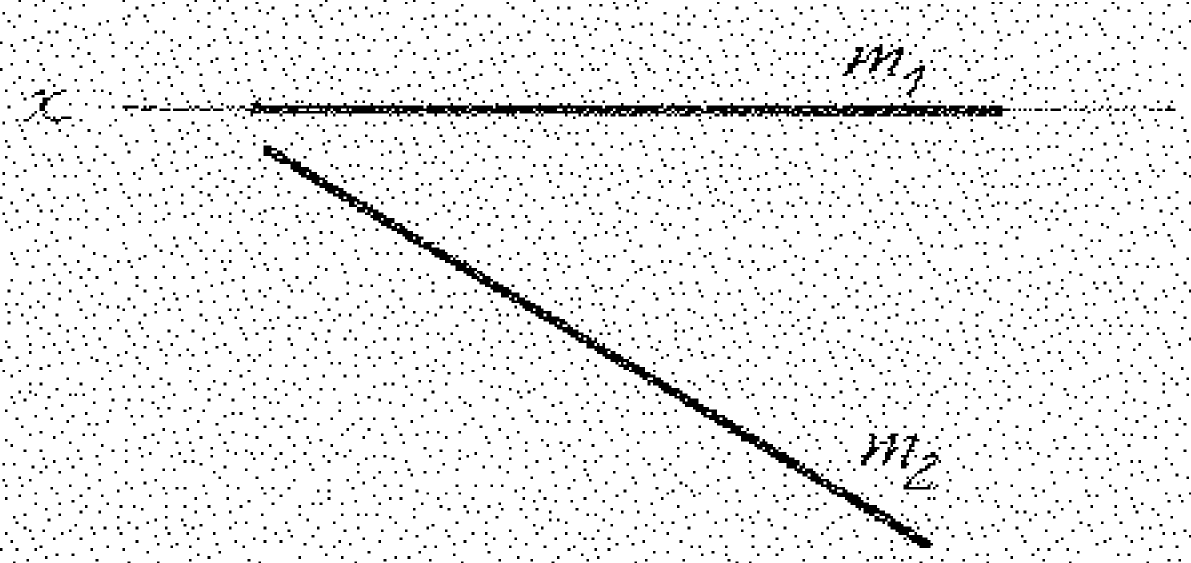
Hình 6-18



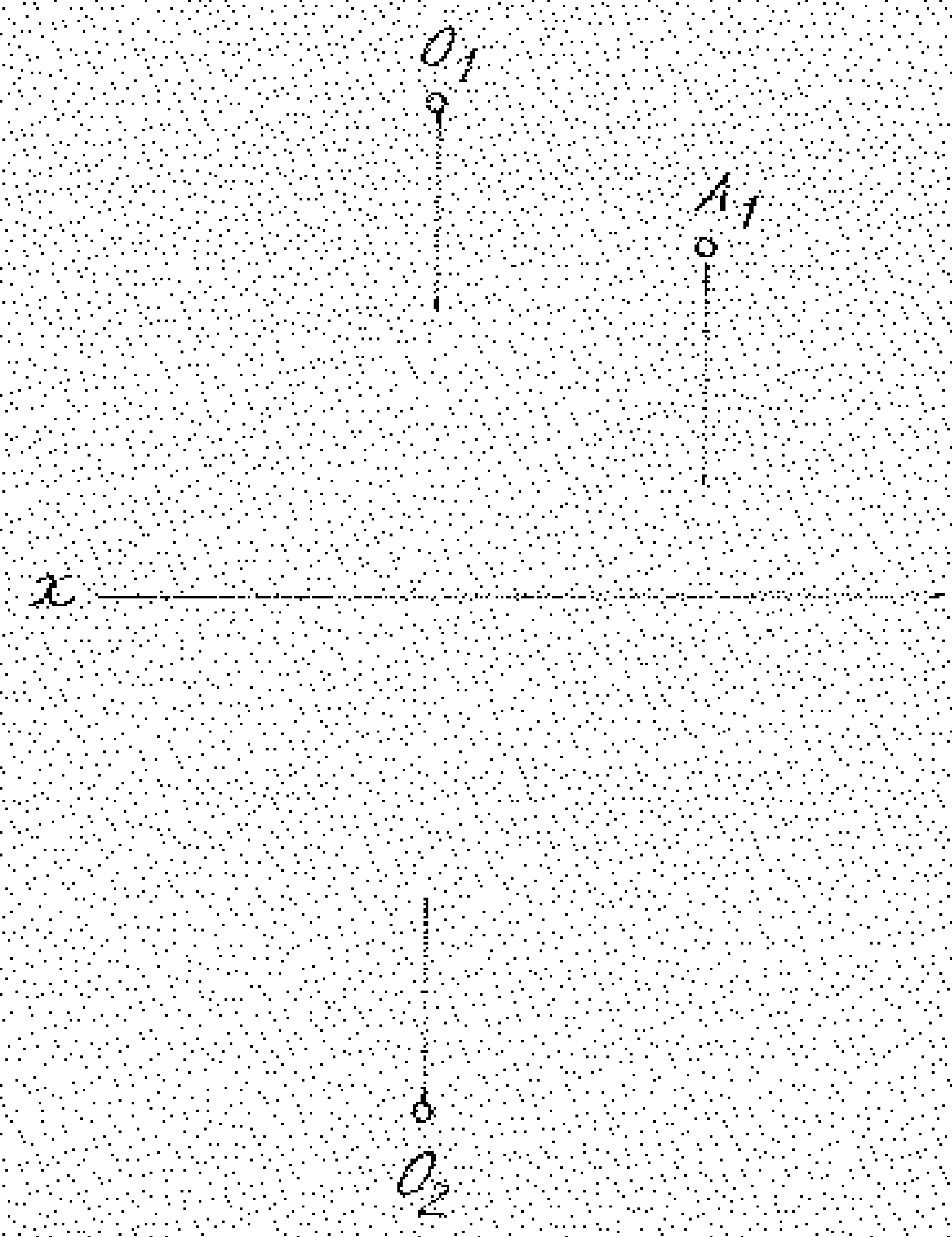
Hình 6-19

Bài 13 : Cho đường thẳng m. Hãy dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ đi qua đường thẳng m sao cho mặt phẳng ấy hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc bằng 45^o (Hình 6-20).

Bài 14 : Cho điểm O và hình chiếu đứng A_1 của một điểm A nằm cách điểm O một đoạn bằng 30 mm. Tìm hình chiếu bằng của điểm A (Hình 6-21).



Hình 6-20



Hình 6-21

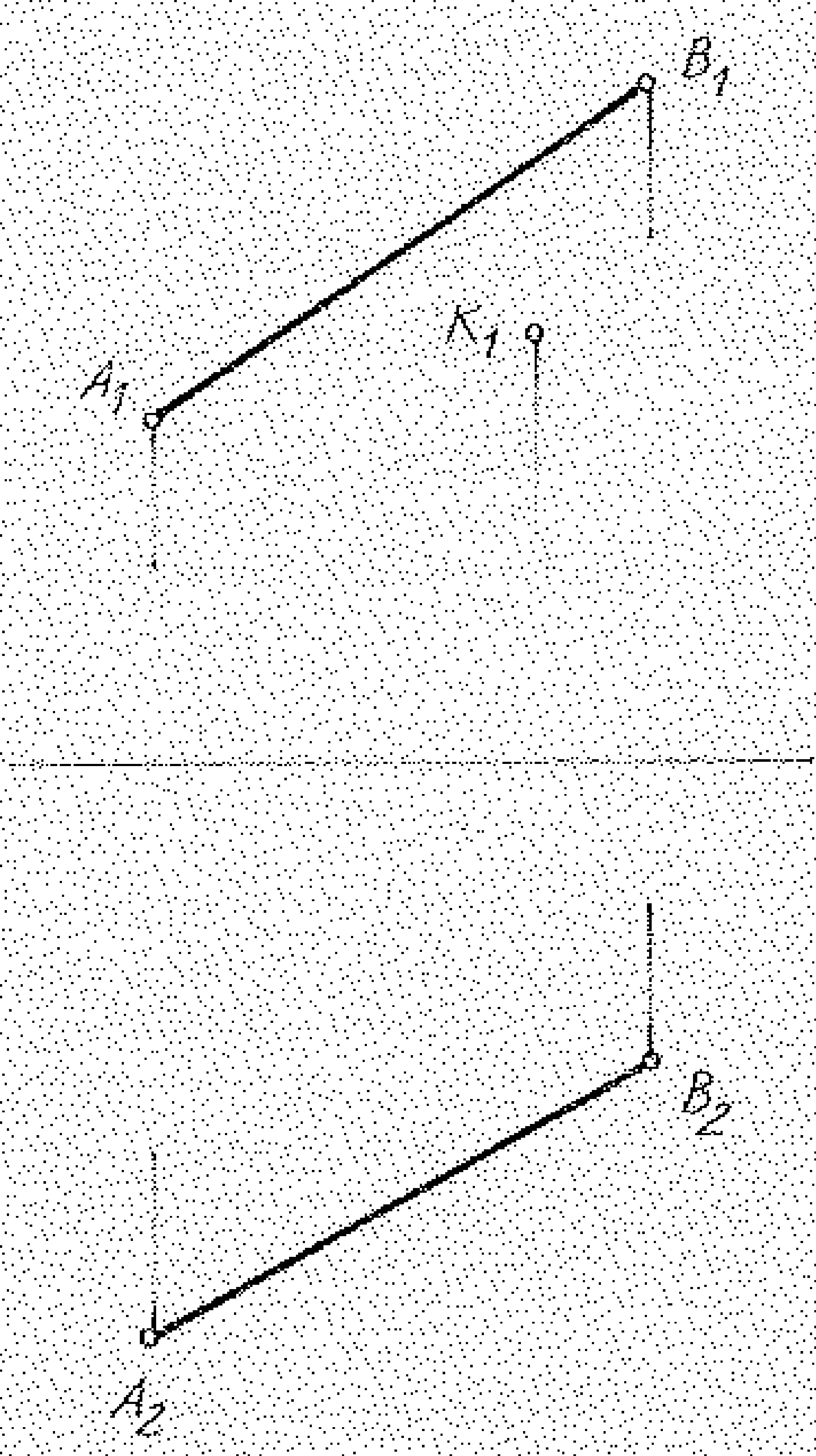
Bài 15 : Biết đường kính AB của mặt cầu (Φ) và hình chiếu đứng của một điểm K ∈ (Φ)

a - Vẽ đường bao quanh các hình chiếu của mặt cầu (Φ).

b - Tìm hình chiếu bằng của điểm K (Hình 6-22).

Bài 16 : Cho ba tia Sa, Sb, Sc không cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy vẽ đường bao quanh các hình chiếu của mặt nón tròn xoay (Φ) có đỉnh là S và các đường sinh SA = SB = SC = 40 mm có A ∈ Sa, B ∈ Sb và C ∈ Sc.

Bài 17 : Cho bốn tia Sa, Sb, Sc và Sd. Hãy kiểm tra xem có tồn tại một mặt nón tròn xoay đỉnh S và có bốn đường sinh SA, SB, SC, SD mà A, B, C, D lần lượt nằm trên các tia Sa, Sb, Sc và Sd không ?



Hình 6-22

CHƯƠNG 7

MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT CONG

7.1. Các thí dụ

Một số chú ý khi vẽ mặt phẳng tiếp xúc với các mặt cong thường gặp

+ Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại một điểm (gọi là tiếp điểm) thì vuông góc với đường kính của mặt cầu đi qua tiếp điểm (gọi là pháp tuyến).

+ Mặt phẳng tiếp xúc với mặt kẻ thì có chung với mặt kẻ đó tất cả các đường sinh thẳng đi qua tiếp điểm.

+ Mặt phẳng tiếp xúc với mặt tròn xoay tại một điểm thì vuông góc với mặt phẳng kinh tuyến đi qua tiếp điểm của mặt tròn xoay.

Để vẽ mặt phẳng tiếp xúc với một mặt cong ta có thể :

- Hoặc là dựng mặt phẳng đi qua tiếp điểm và vuông góc với pháp tuyến của mặt cong tại tiếp điểm đó.

- Hoặc là dựng mặt phẳng được xác định bằng hai tiếp tuyến đi qua tiếp điểm của mặt cong.

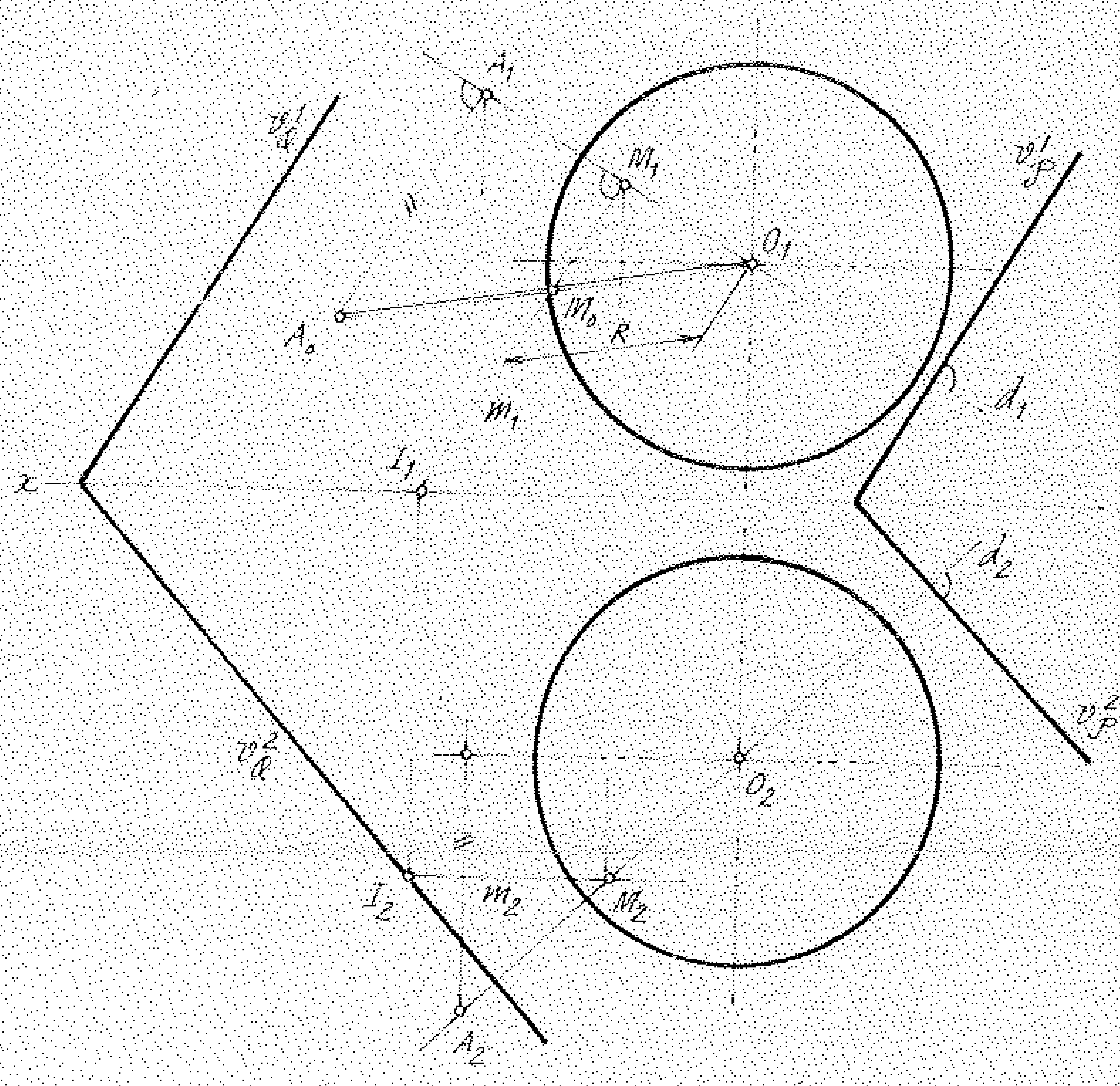
Thí dụ 1: Dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ tiếp xúc với mặt cầu tâm O, bán kính R và song song với mặt phẳng $\mathcal{P}(v_P^1, v_P^2)$.

Giải : Mặt phẳng tiếp xúc $\mathcal{Q}$ cần dựng phải vuông góc với một đường kính của mặt cầu.

Vì $(\mathcal{Q}) // (\mathcal{P})$ nên $(\mathcal{P})$ cũng vuông góc với đường kính đó (Hình 7-1). Do đó ta dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ như sau :

- Qua tâm O của mặt cầu vẽ đường thẳng $d \perp (\mathcal{P})$.

- Các đầu mút của đường kính của mặt cầu.



Hình 7-1

nằm trên đường thẳng d là các tiếp điểm cần tìm. Trên hình vẽ chỉ rõ cách xác định một đầu mút – điểm M – của đường kính đó với OM = R.

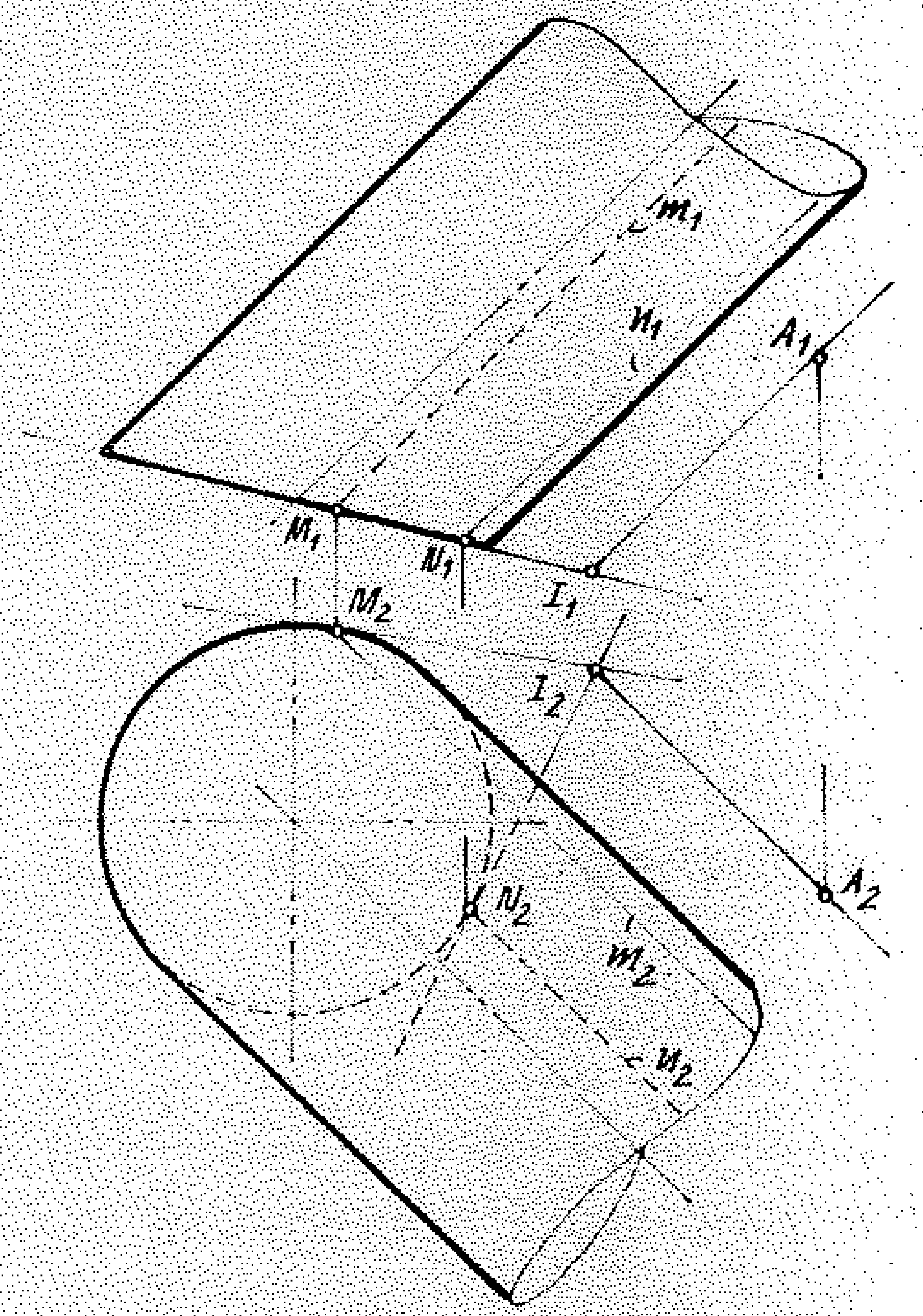
– Qua M dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ // ($\mathcal{P}$). Đó là một trong hai mặt phẳng tiếp xúc cần tìm.

Thí dụ 2: Qua điểm A dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt trụ xiên.

Giải : – Biết rằng mặt phẳng tiếp xúc với mặt trụ theo đường sinh thẳng của nó, do đó mặt phẳng tiếp xúc cần dựng sẽ chứa đường thẳng a vẽ qua A và song song với các đường sinh của mặt trụ (Hình 7-2). Suy ra cách dựng các mặt phẳng tiếp xúc với mặt trụ như sau :

– Xác định giao điểm I của a với mặt phẳng đáy trụ.

– Vẽ các tiếp tuyến IM và IN của đường cong đáy trụ. Các mặt phẳng $\mathcal{P}$(A, m) và $\mathcal{Q}$ (A, n) là hai mặt phẳng tiếp xúc cần dựng, trong đó m và n lần lượt là các đường sinh vẽ qua M và N của mặt trụ.



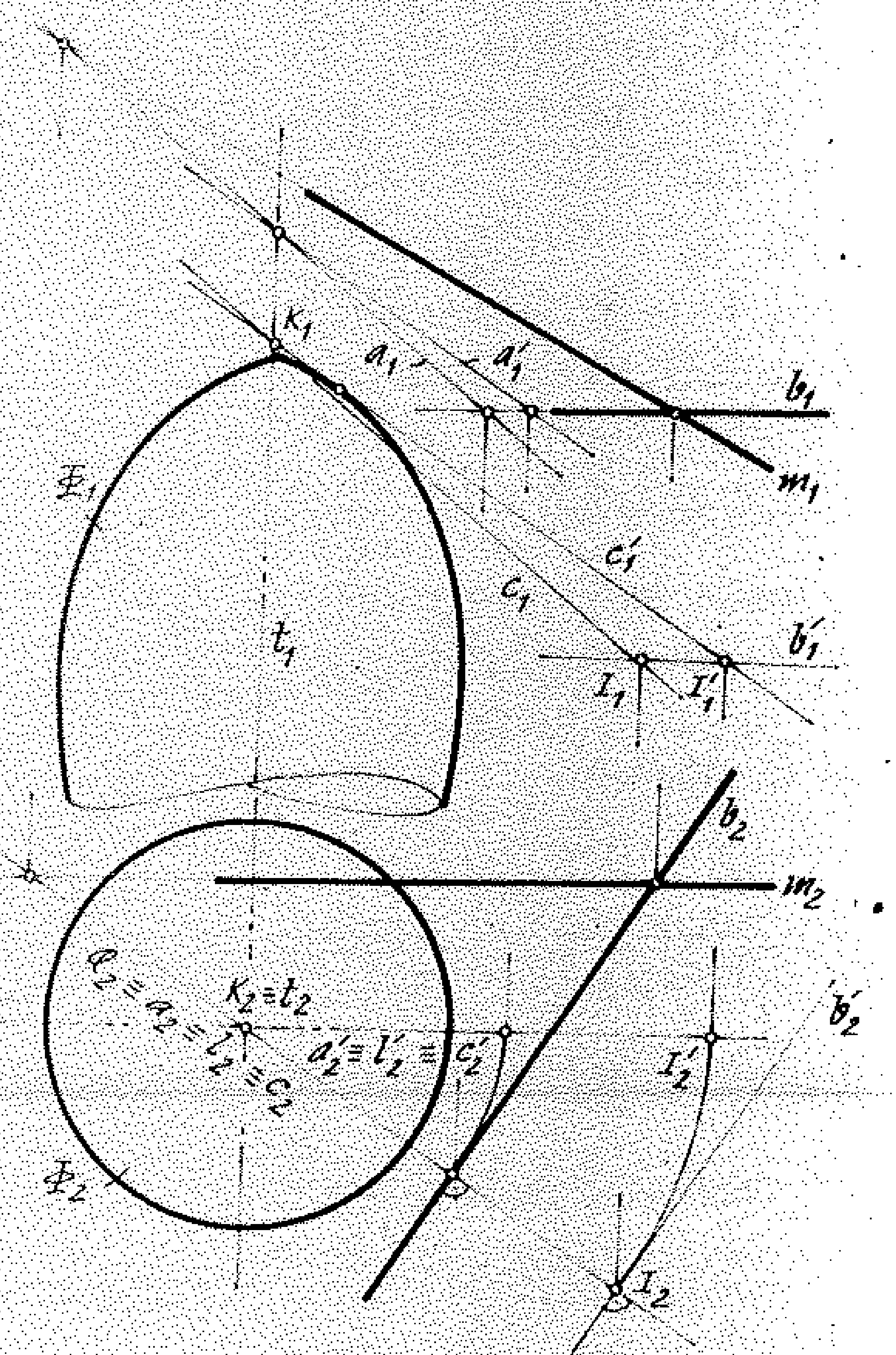
Hình 7-2

Thí dụ 3: Dựng mặt phẳng $\mathcal{R}$ tiếp xúc với mặt tròn xoay (Φ) và song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$(b ∩ m).

Giải : Mặt phẳng tiếp xúc với mặt tròn xoay (Φ) thì vuông góc với kinh tuyến vẽ qua tiếp điểm. Mặt phẳng tiếp xúc cần dựng ($\mathcal{R}$) song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$ nên ($\mathcal{P}$) cũng vuông góc với mặt phẳng kinh tuyến nói trên của (Φ), (Hình 7-3).

– Mặt phẳng kinh tuyến vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{P}$(b ∩ m) là mặt phẳng chiếu bằng $\mathcal{Q}$ chứa trục Z của mặt tròn xoay với $\mathcal{Q}_2 \perp b_2$. Gọi a = ($\mathcal{Q}$) ∩ ($\mathcal{P}$) và l = ($\mathcal{Q}$) ∩ (Φ).

– Mặt phẳng tiếp xúc $\mathcal{R}$ phải chứa tiếp tuyến c của kinh tuyến l thuộc mặt (Φ). Vì ($\mathcal{R}$) // ($\mathcal{P}$) nên rõ ràng là c // a.



Hình 7-3

Trên hình vẽ, bằng phép quay mặt phẳng $\mathcal{Q}$ quanh trục xoay t đến vị trí mới là mặt phẳng mặt (// $\mathcal{P}^1$) ta xác định được tiếp tuyến c đó.

Sau khi quay : a (a_1, a_2) $\Rightarrow$ a' (a'_1, a'_2)

$$I (I_1, I_2) \Rightarrow I' (I'_1, I'_2)$$

Vẽ c' // a' trong đó c'_1 // a'_1 và $c'_2 \equiv a'_2$. Đường thẳng c' được xác định bằng hai điểm I' và K với $K \in t$.

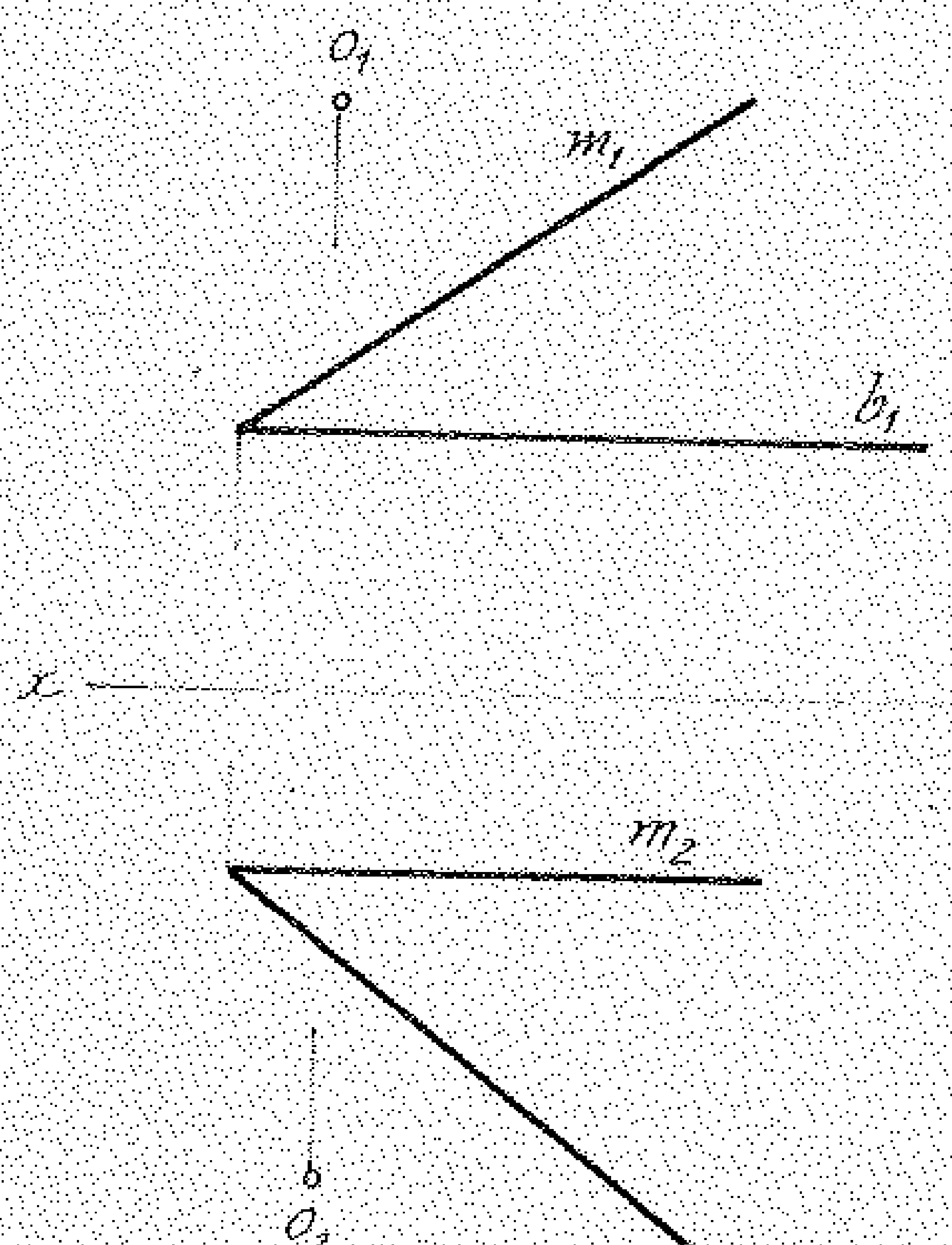
Bằng phép biến đổi ngược lại dễ dàng vẽ được tiếp tuyến C (IK).

Mặt phẳng $\mathcal{R}$ xác định bằng hai đường thẳng cắt nhau c và b'(với $b' \in I$ và b' // b) chính là mặt phẳng tiếp xúc cần dựng.

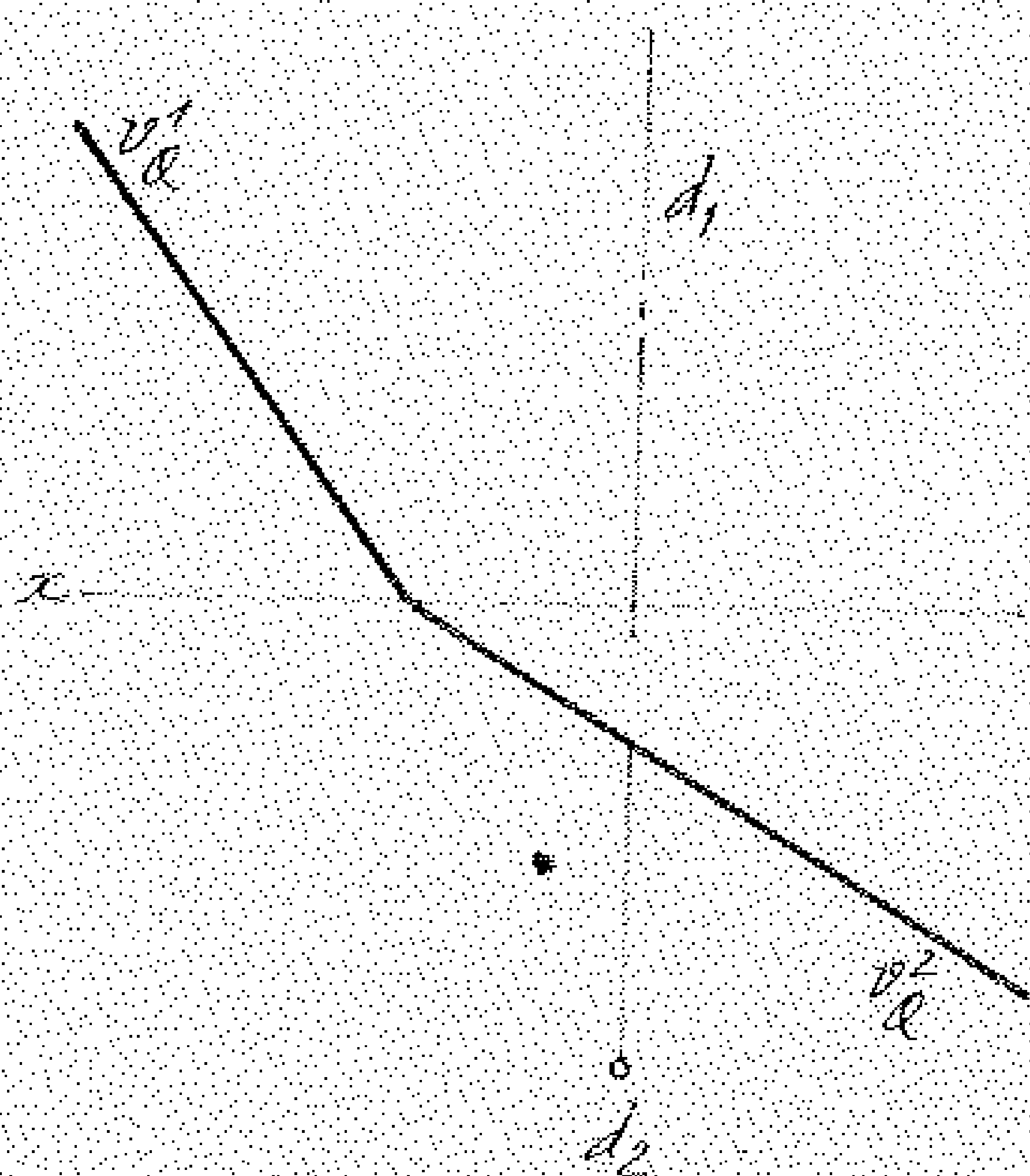
7.2. Bài tập

Bài 1 : Vẽ mặt cầu tâm O tiếp xúc với mặt phẳng $\mathcal{P}$(b $\cap$ m) (Hình 7–4).

Bài 2 : Vẽ mặt nón tròn xoay có trục là đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (v^1_Q , v^2_Q) (Hình 7–5).



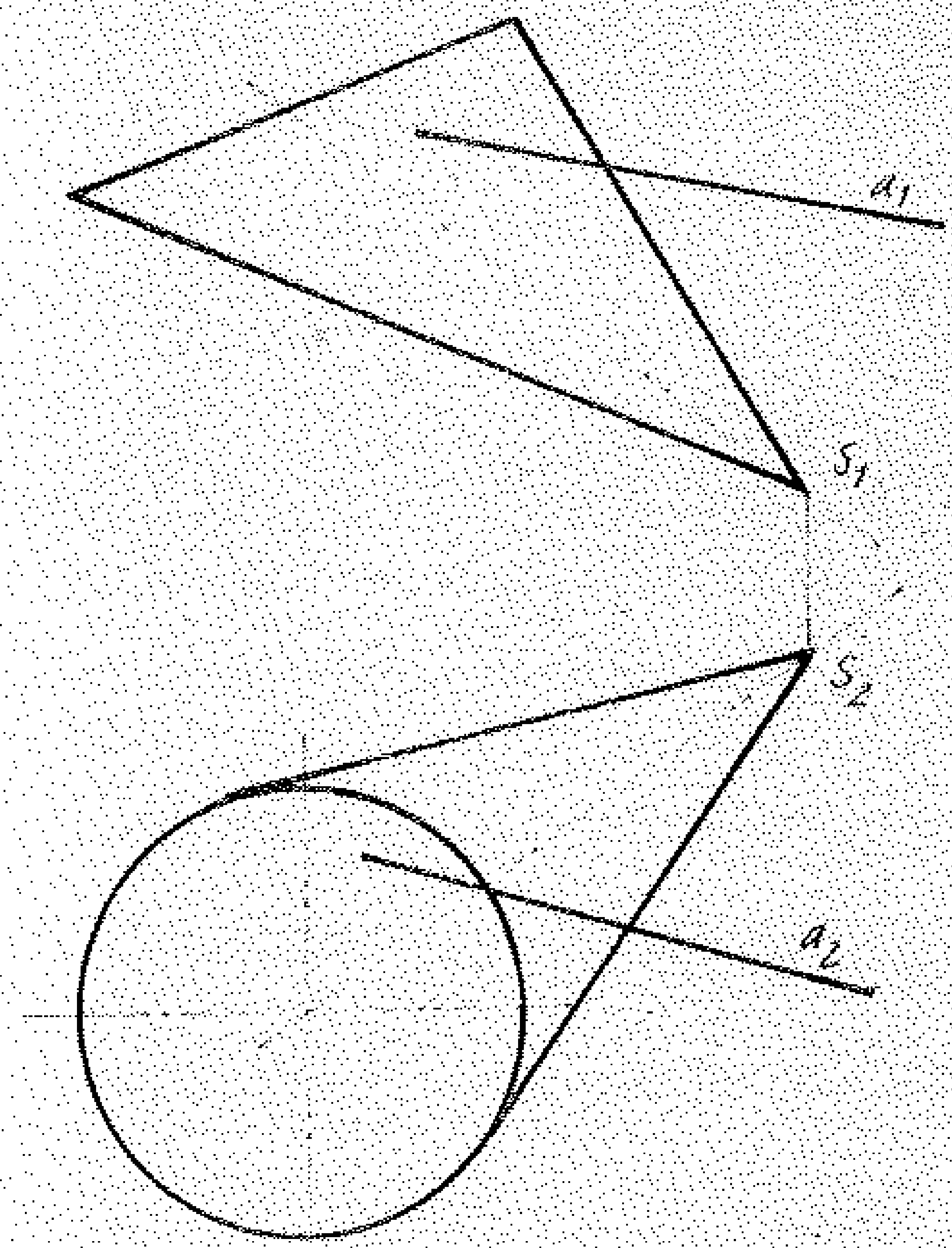
Hình 7-4



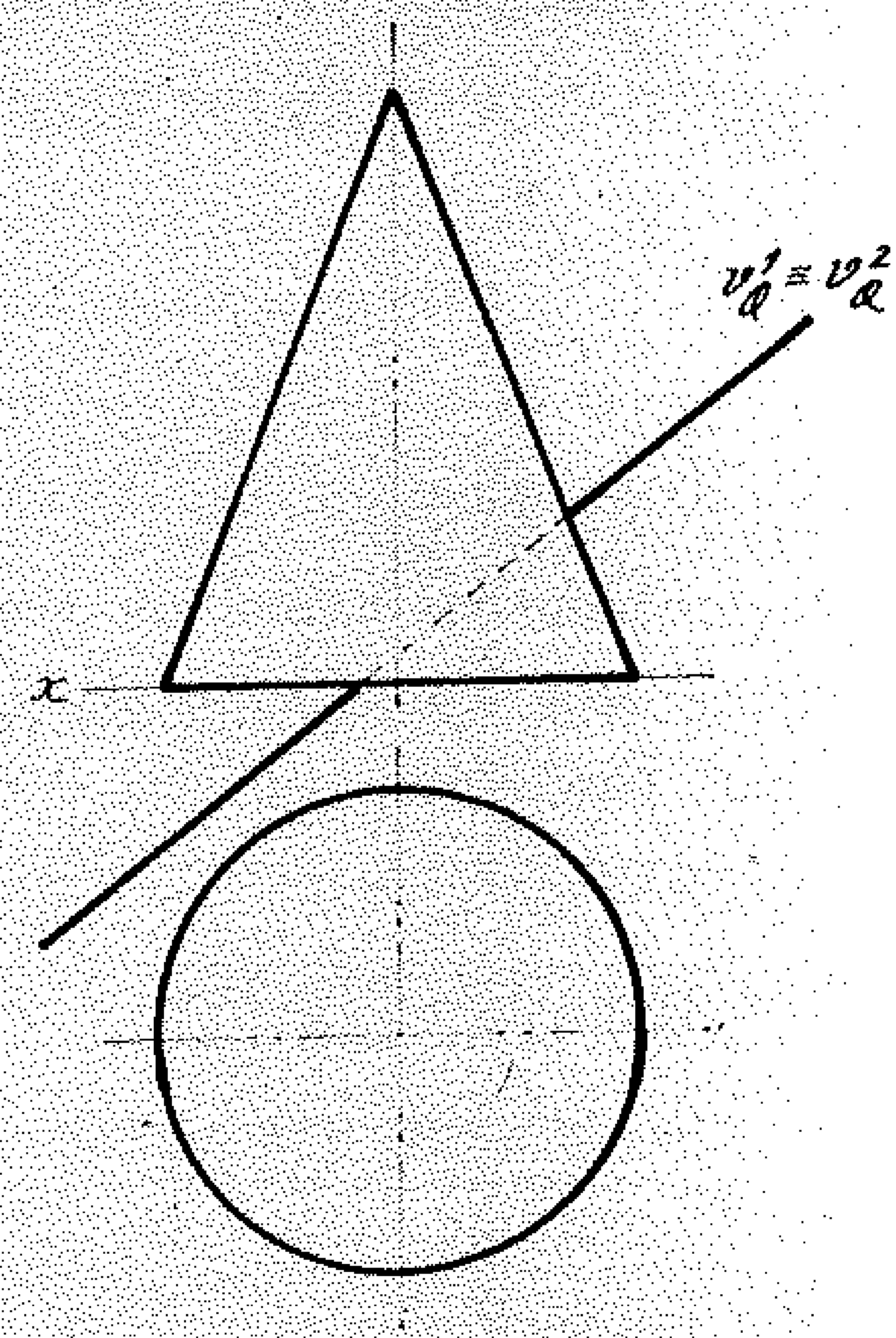
Hình 7-5

Bài 3 : Vẽ mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón đỉnh S và song song với đường thẳng a (Hình 7–6).

Bài 4 : Vẽ giao tuyến của mặt nón tròn xoay với mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Xác định điểm cao nhất và điểm thấp nhất của giao tuyến (Hình 7–7).



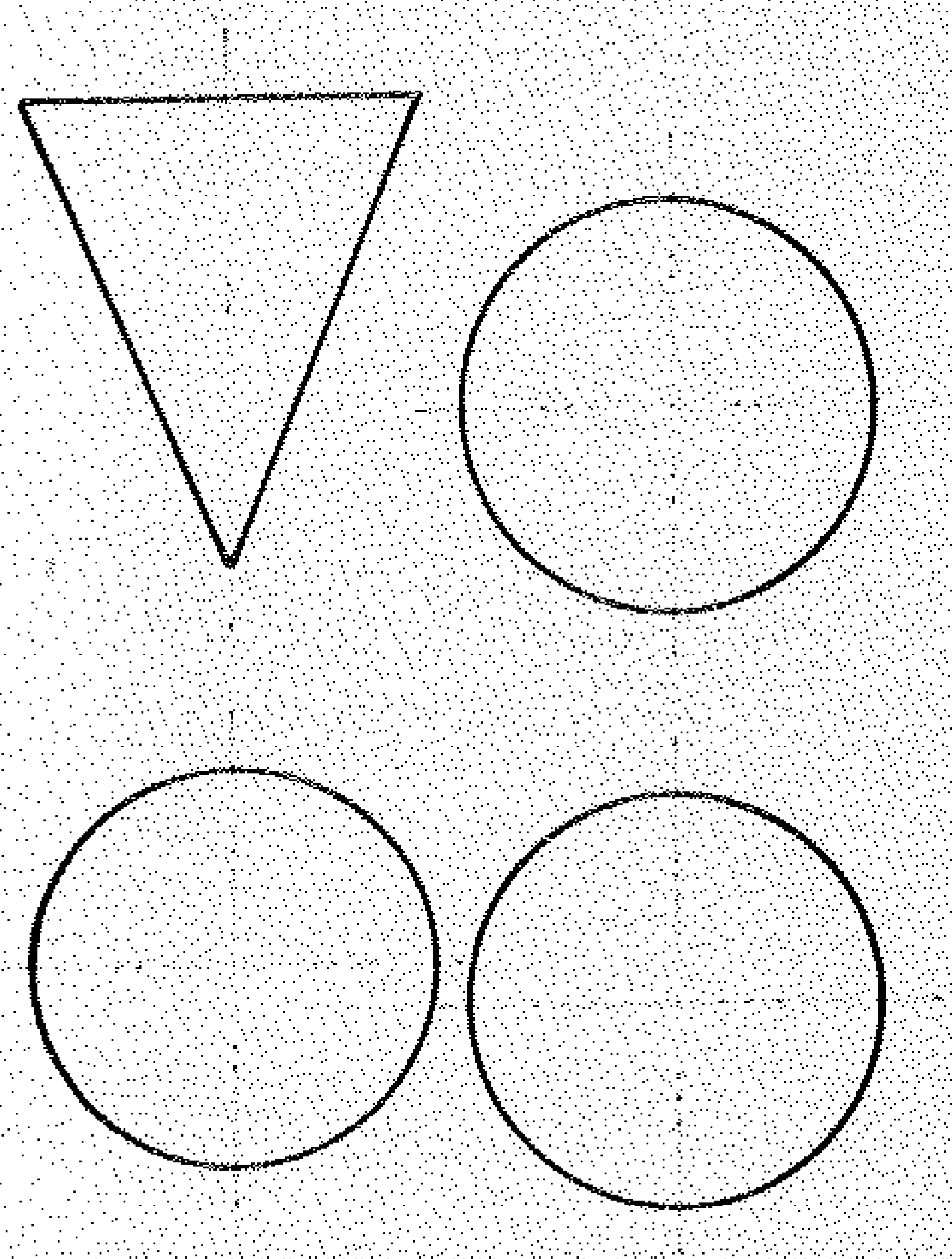
Hình 7-6



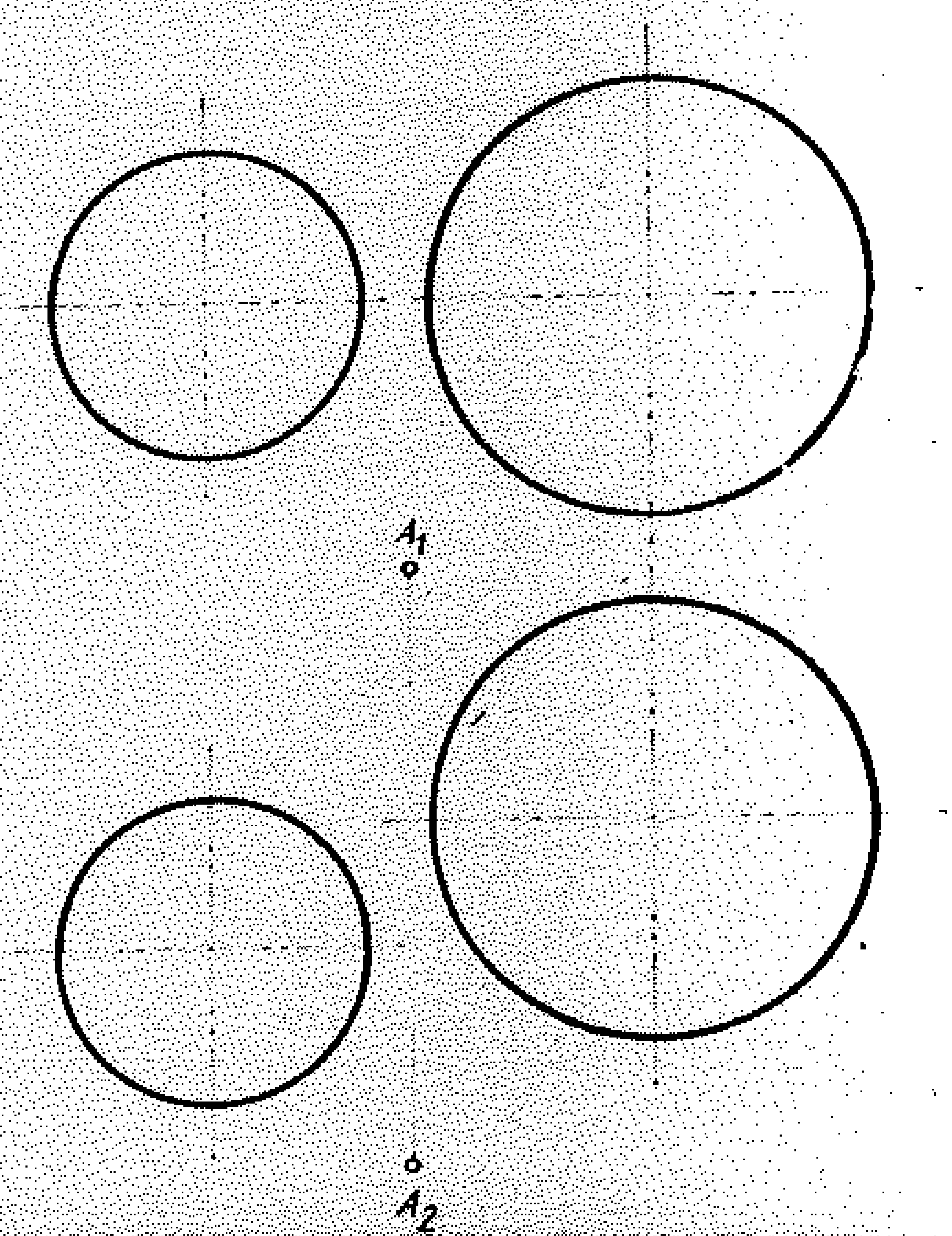
Hình 7-7

Bài 5 : Dựng mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón tròn xoay và với mặt cầu (Hình 7-8).

Bài 6 : Dựng mặt phẳng tiếp xúc với hai mặt cầu và đi qua điểm A (Hình 7-9).



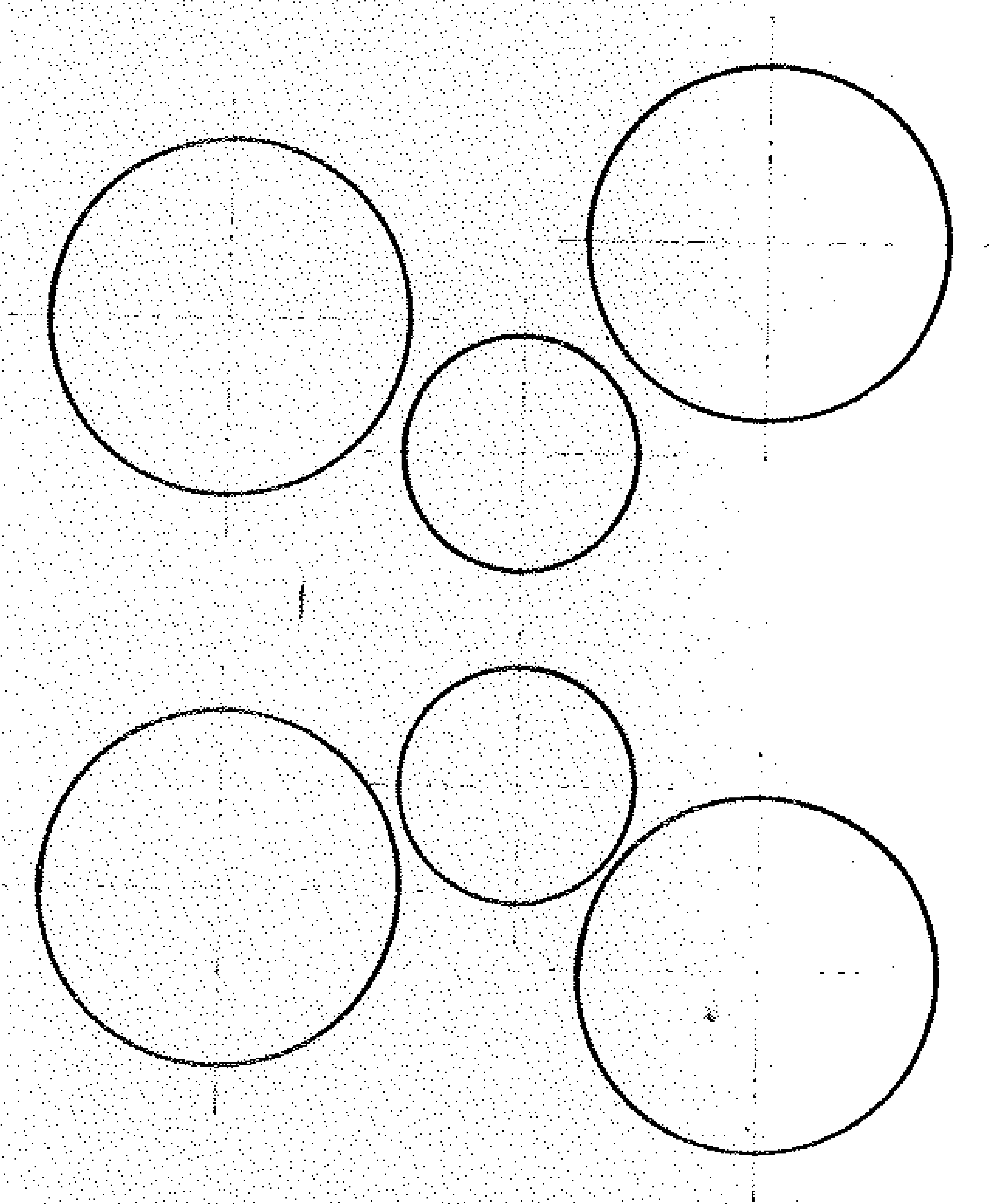
Hình 7-8



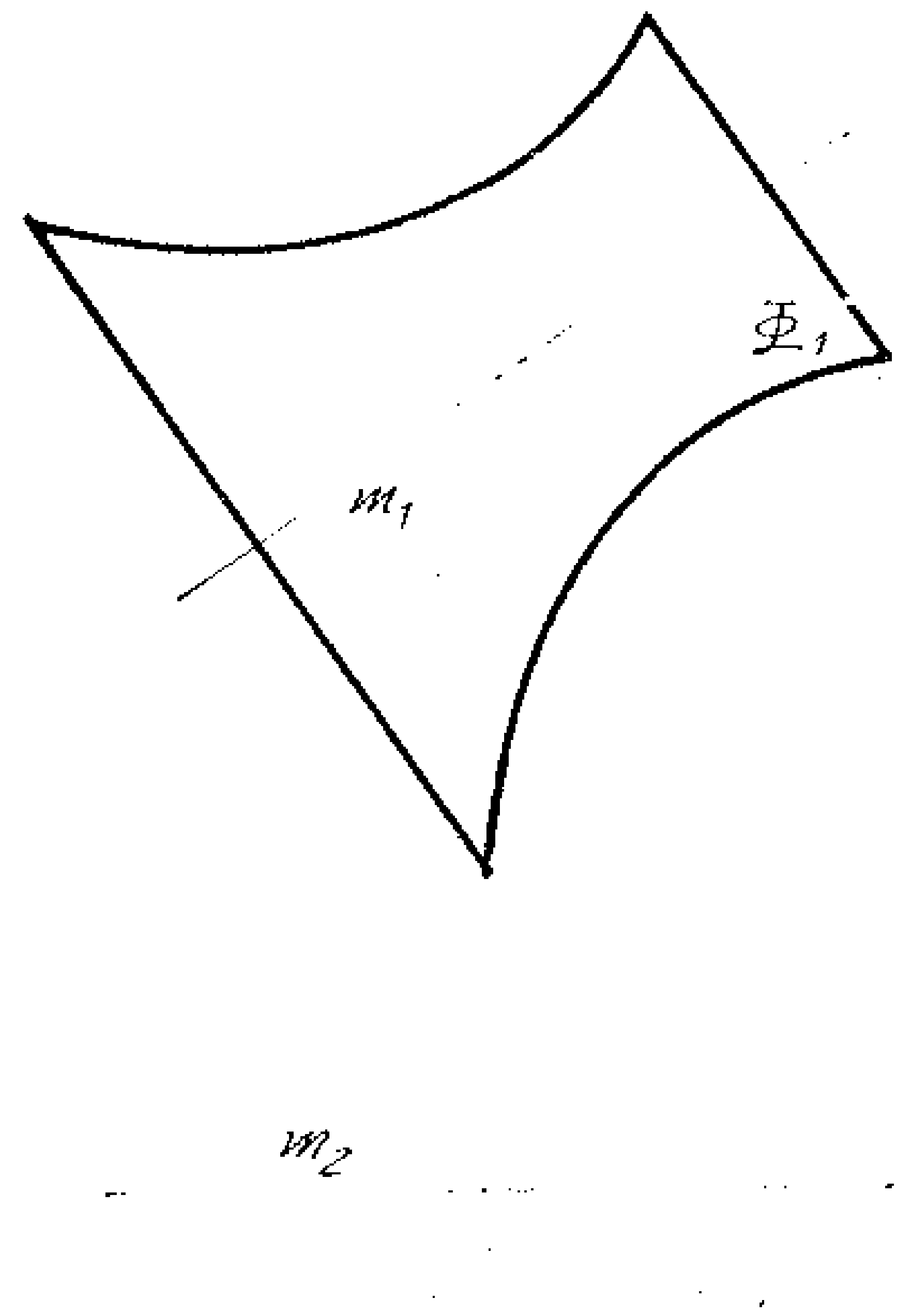
Hình 7-9

Bài 7 : Dựng mặt phẳng tiếp xúc với ba mặt cầu (Hình 7-10).

Bài 8 : Vẽ đường bao của hình chiếu bằng của mặt tròn xoay (Φ) có trục là đường mặt m, cho biết hình chiếu đứng của mặt tròn xoay đó (Hình 7 –11).

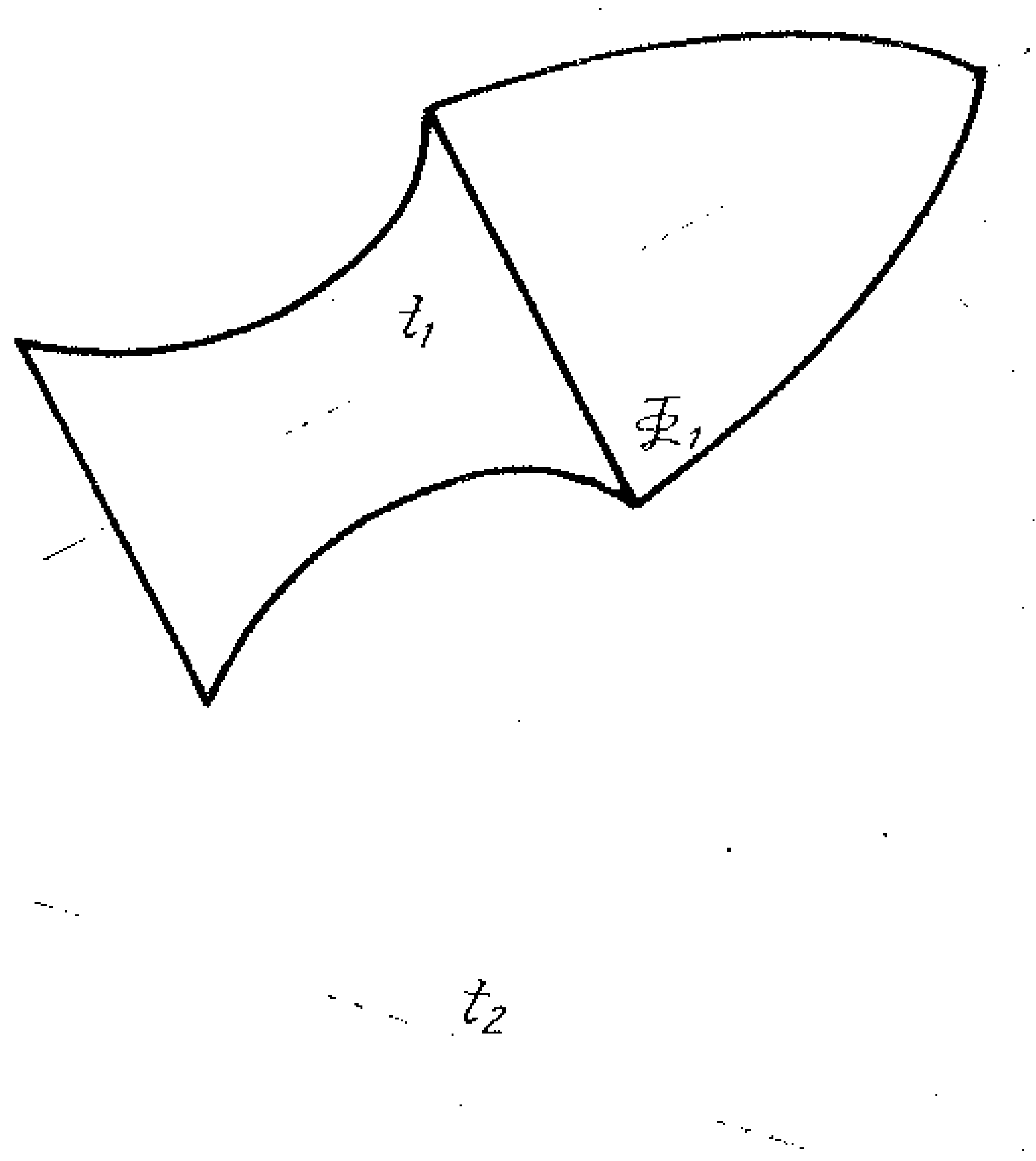


Hình 7–10



Hình 7–11

Bài 9 : Vẽ đường bao của hình chiếu bằng của mặt tròn xoay (Φ) có trục là đường thẳng t, cho biết hình chiếu đứng của mặt tròn xoay đó (Hình 7–12).



Hình 7–12

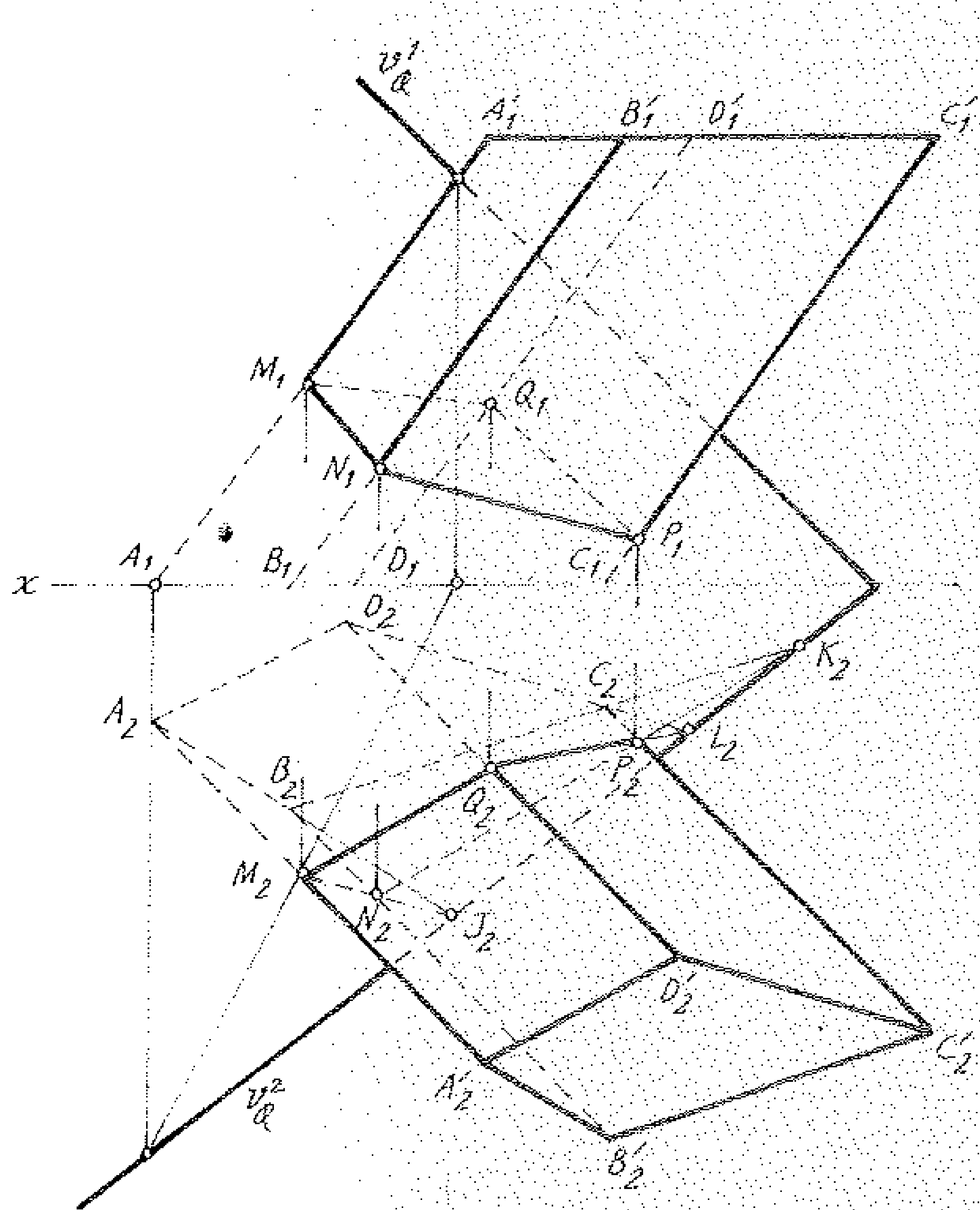
CHƯƠNG 8

GIAO CỦA MẶT PHẲNG VỚI ĐA DIỆN VÀ MẶT CONG

8.1. Các thí dụ

Thí dụ 1: Tìm giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với lăng trụ ABCD.A'B'C'D' (Hình 8–1).

Giải : Giao của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với lăng trụ (L) là một đa giác (Đ). Mỗi đỉnh của (Đ) là giao điểm của một cạnh của (L) với ($\mathcal{Q}$). Chẳng hạn đỉnh M của (Đ) là giao điểm AA' ∩ ($\mathcal{Q}$) (xác định M bằng cách dùng mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng). Mỗi cạnh của (Đ) là giao tuyến của ($\mathcal{Q}$) với một mặt của (L). Thí dụ MN = ($\mathcal{Q}$) ∩ (ABA'B'). M là điểm chung thứ nhất (đã biết), J là điểm chung thứ hai (J = AB ∩ ($\mathcal{Q}$)) của hai mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và (ABA'B').



Hình 8–1

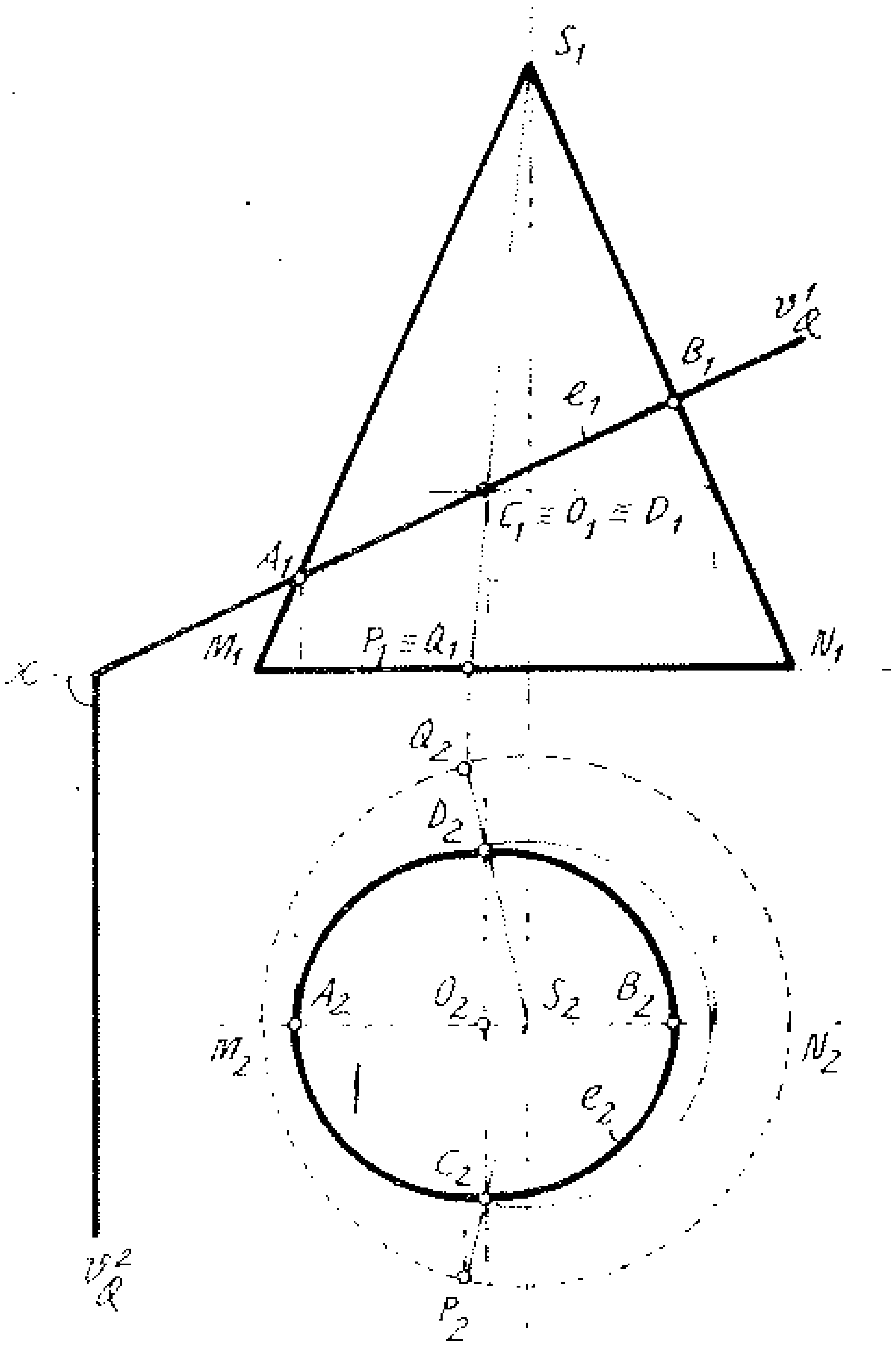
Thí dụ 2: Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{Q}$ với mặt nón tròn xoay (Φ) có trục là đường thẳng chiếu bằng (Hình 8–2).

Giải : Mặt phẳng $\mathcal{Q}$ cắt tất cả các đường sinh của mặt nón tròn xoay (Φ) nên giao tuyến của ($\mathcal{Q}$) và (Φ) là một elip (e). Hình chiếu đứng của (e) là đoạn thẳng A_1B_1. Hình chiếu bằng của (e) là elip (e_2) có trục AB nằm trên mặt phẳng mặt qua S (mặt phẳng này là mặt phẳng đối xứng chung của (Φ) và ($\mathcal{Q}$)) và trục CD nằm trên đường thẳng chiếu đứng đi qua điểm giữa O của đoạn thẳng AB (O là tâm của elip (e)).

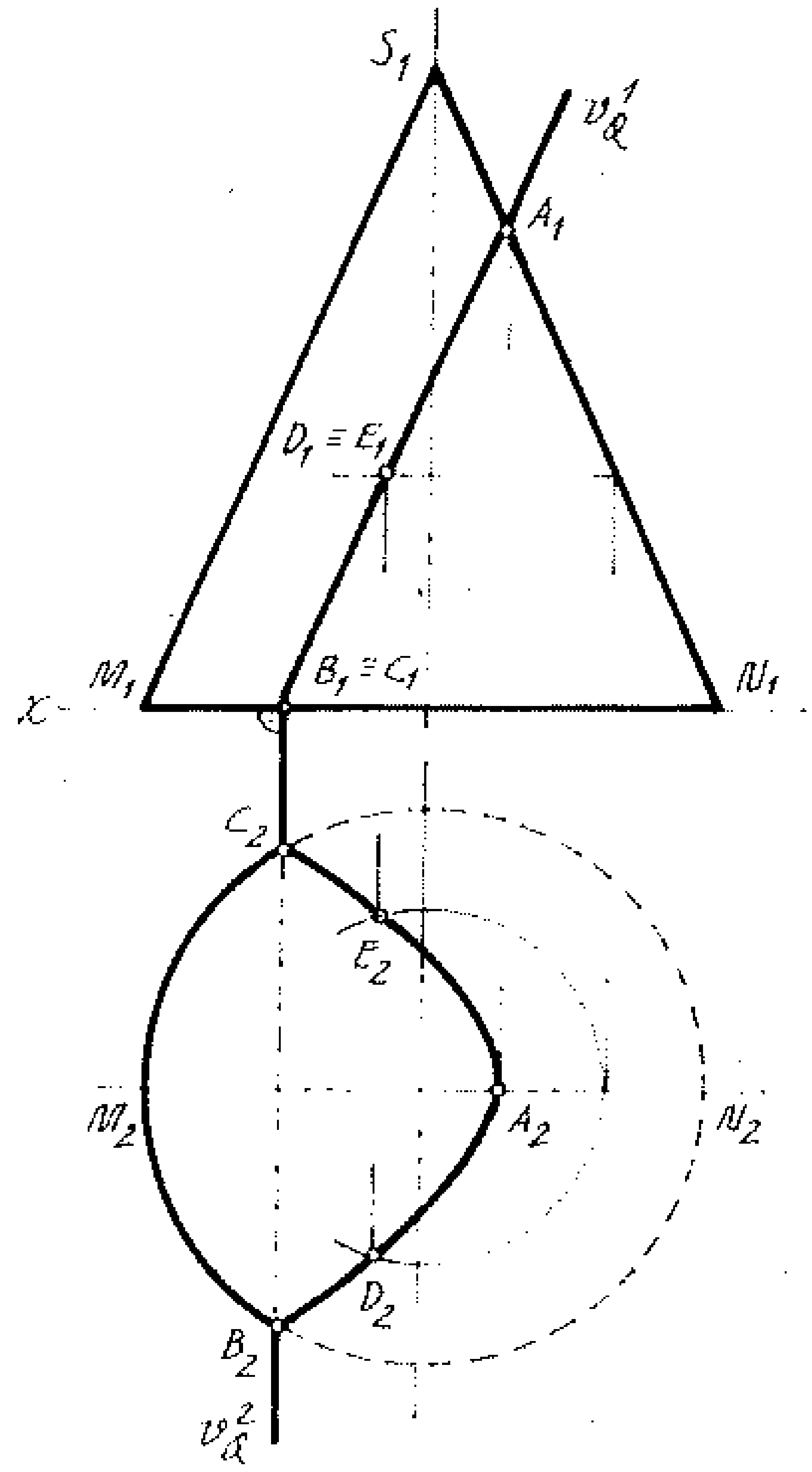
Chú ý : hình chiếu bằng của đáy nón bị che khuất bởi mặt phẳng $\mathcal{Q}$.

Thí dụ 3: Tìm giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{Q}$ với mặt nón tròn xoay (Φ) có trục là đường thẳng chiếu bằng (Hình 8–3).

Giải : Mặt phẳng $\mathcal{Q}$ song song với một (và chỉ một) đường sinh SM của (Φ) nên giao tuyến giữa ($\mathcal{Q}$) và (Φ) là một parabôn. Đỉnh của parabôn là giao điểm A = SN ∩ ($\mathcal{Q}$) (SM và SN là hai đường sinh giới hạn phần thấy và phần khuất của



Hình 8-2

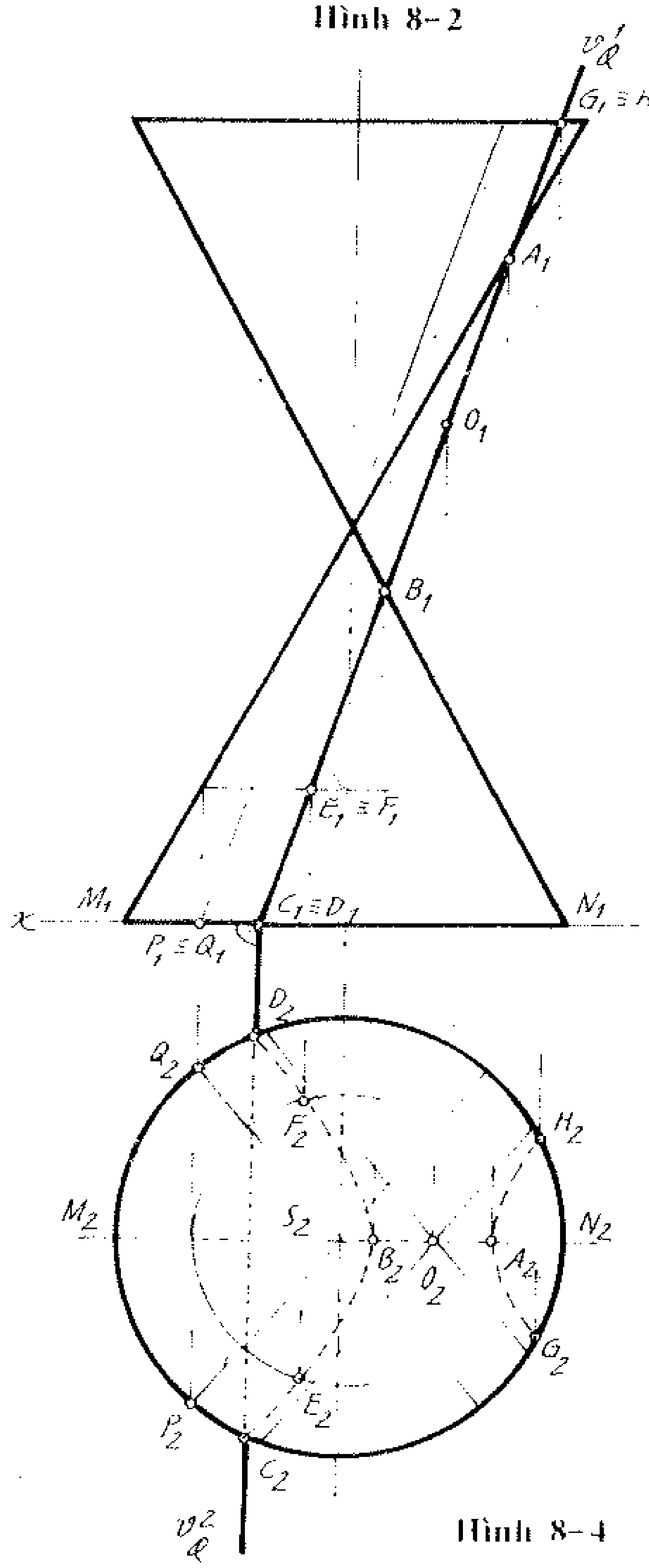


Hình 8-3

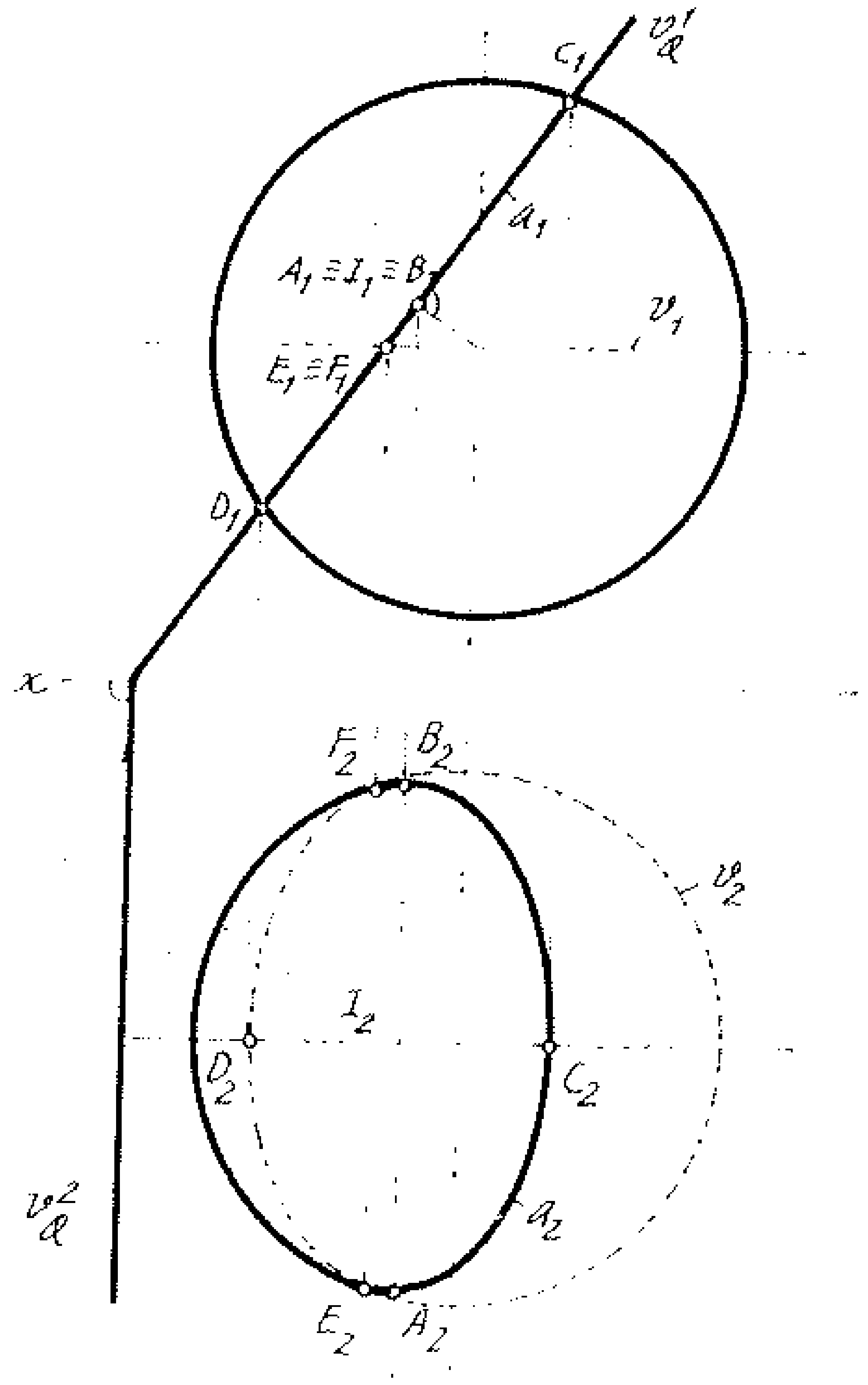
(Φ) trên hình chiếu đứng). Giao tuyến của (Q) với đáy nón cho ta hai điểm thấp nhất của parabôn là B, C.

Thí dụ 4: Tìm giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng Q với mặt nón tròn xoay (Φ) (Hình 8-4).

Giải : Mặt phẳng Q song song với hai đường sinh SP, SQ của nón nên giao tuyến của (Q).



Hình 8-4



Hình 8-5

và (Φ) là một hypecbôn. Hai giao điểm $A = SM' \cap (\mathcal{Q})$ và $B = SN \cap (\mathcal{Q})$ là hai đỉnh của hypecbôn. Tiệm cận của hypecbôn là hai đường thẳng đi qua tâm O của nó (O là điểm giữa của đoạn thẳng AB) và song song với hai đường sinh SP và SQ.

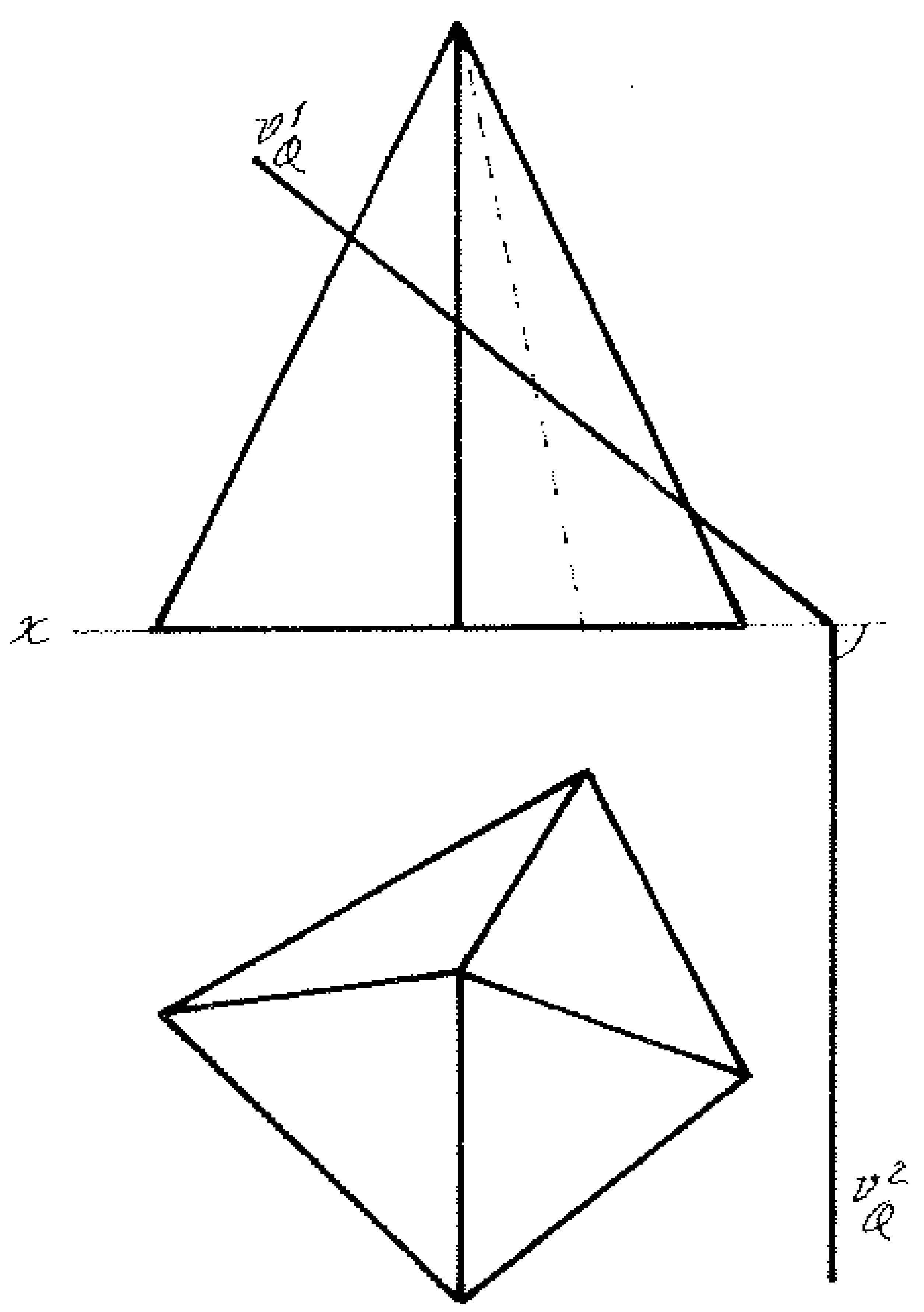
Thí dụ 5: Tìm giao tuyến của mặt cầu (O) với mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{Q}$ (Hình 8-5).

Giải : Giao của ($\mathcal{Q}$) và (O) là một đường tròn (a). Hình chiếu đứng của (a) là một đoạn thẳng, hình chiếu bằng của (a) là elíp (a_2). Gọi CD là đường kính của (a) thuộc mặt phẳng mặt vẽ qua O thì $C_1D_1 = 2R$ (R là bán kính của (a)). Trục lớn A_2B_2 của (a_2) nằm trên một đường thẳng chiếu đứng và có độ dài $A_2B_2 = 2R = C_1D_1$

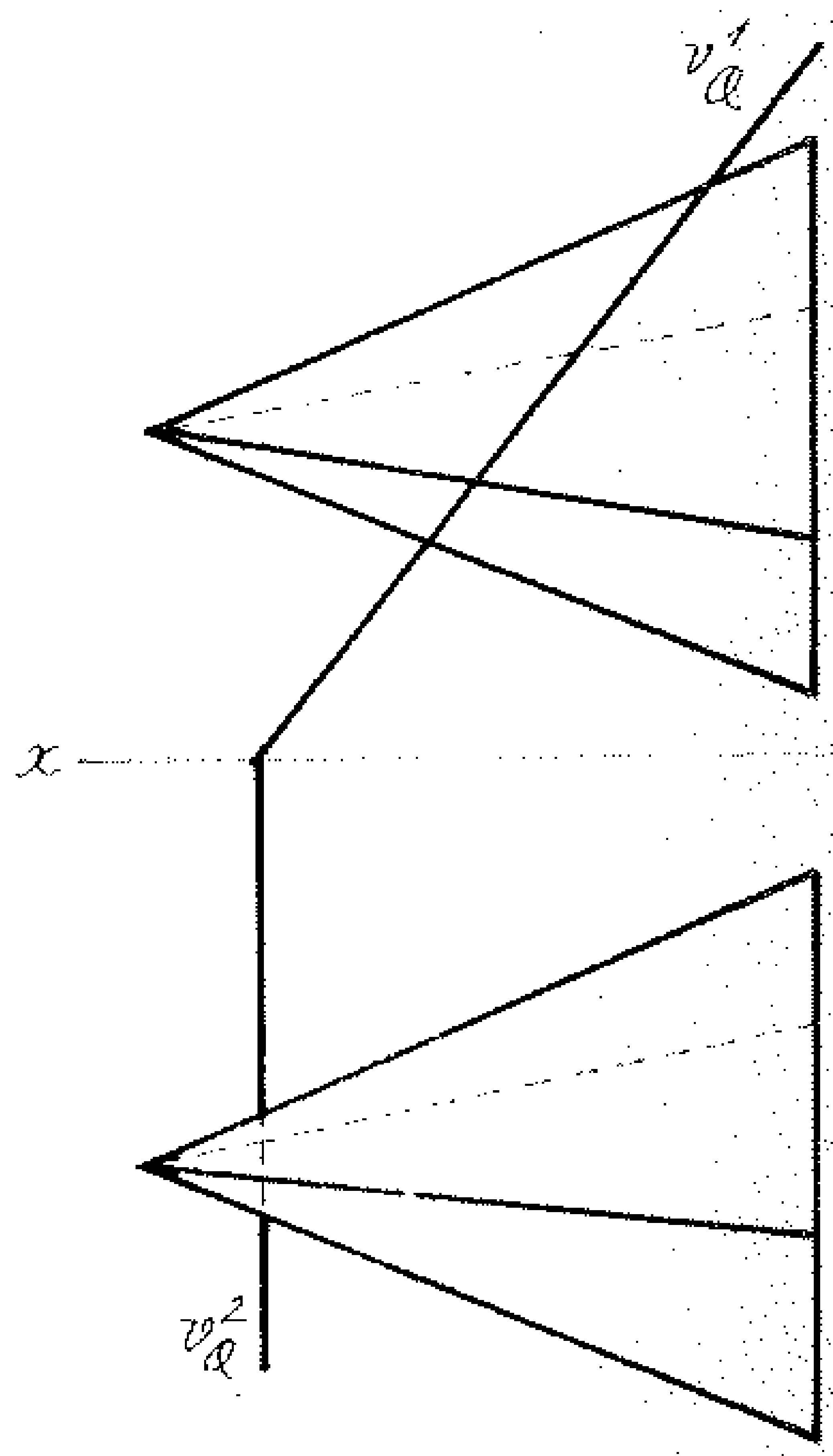
Các giao điểm $E, F = (v) \cap (\mathcal{Q})$ là những điểm giới hạn thấy khuất của (a) trên hình chiếu bằng.

8.2. Bài tập

Bài 1 : Vẽ giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{Q}$ với các mặt chóp, (Hình 8-6; Hình 8-7) và mặt lăng trụ, (Hình 8-8). Xét thấy khuất và tìm độ lớn của các thiết diện.



Hình 8-6

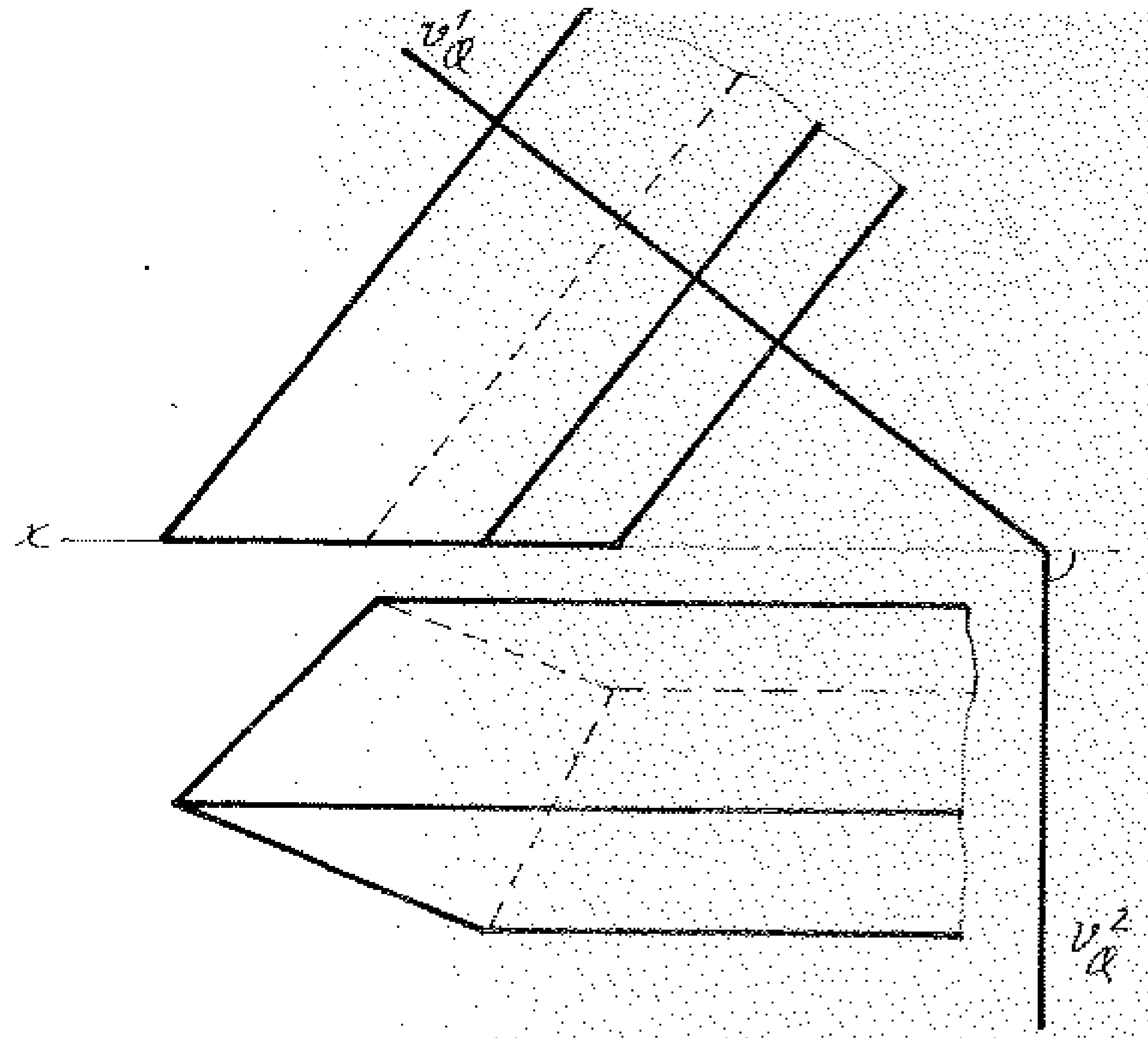


Hình 8-7

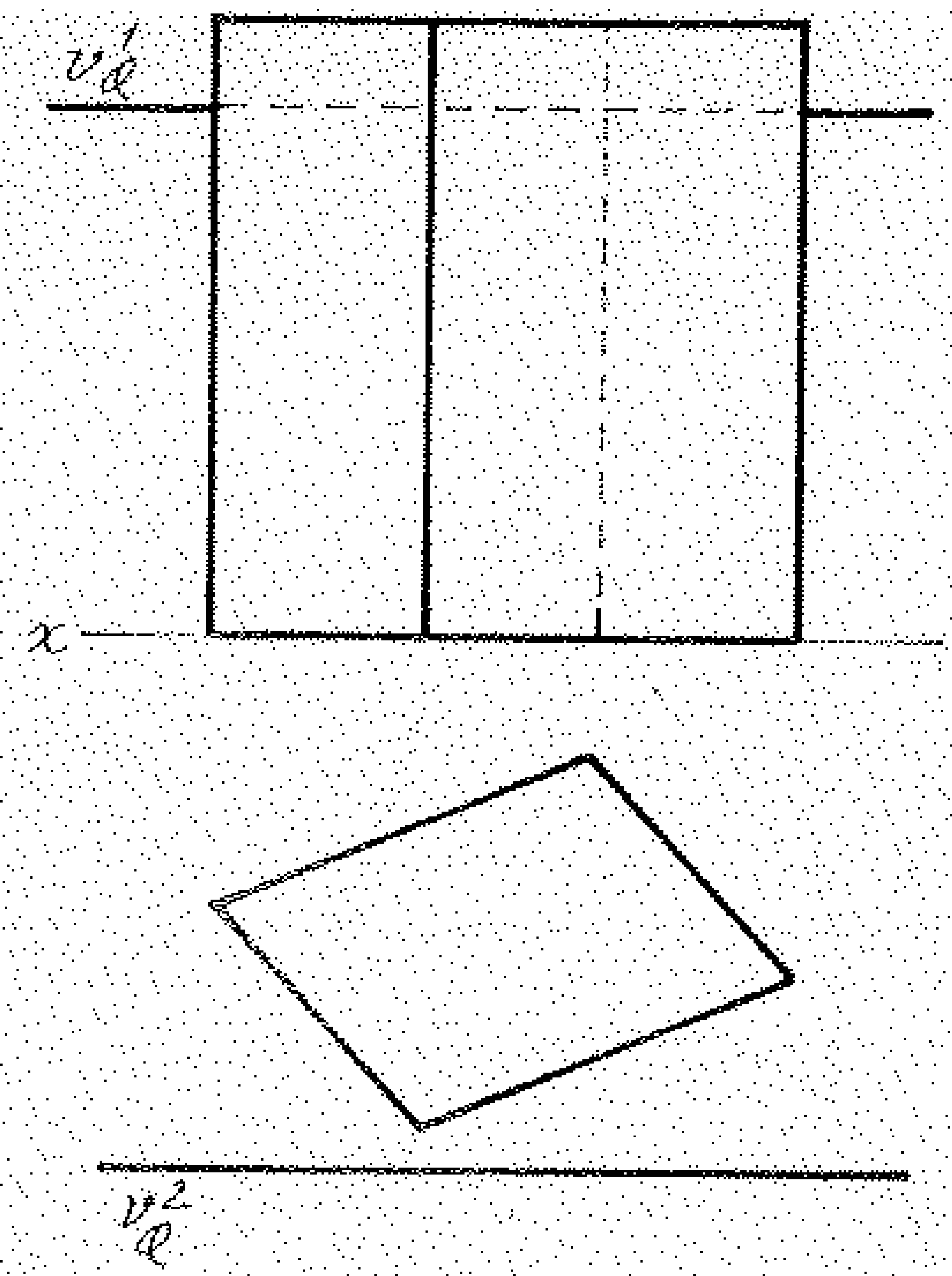
Bài 2 : Tìm giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với mặt lăng trụ và xét thấy khuất, (Hình 8-9 ; Hình 8-10 ; Hình 8-11 ; Hình 8-12).

Bài 3 : Tìm giao tuyến của mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{Q}$ với mặt nón tròn xoay. Xét thấy khuất và tìm độ lớn của các thiết diện (Hình 8-13 ; Hình 8-14 ; Hình 8-15).

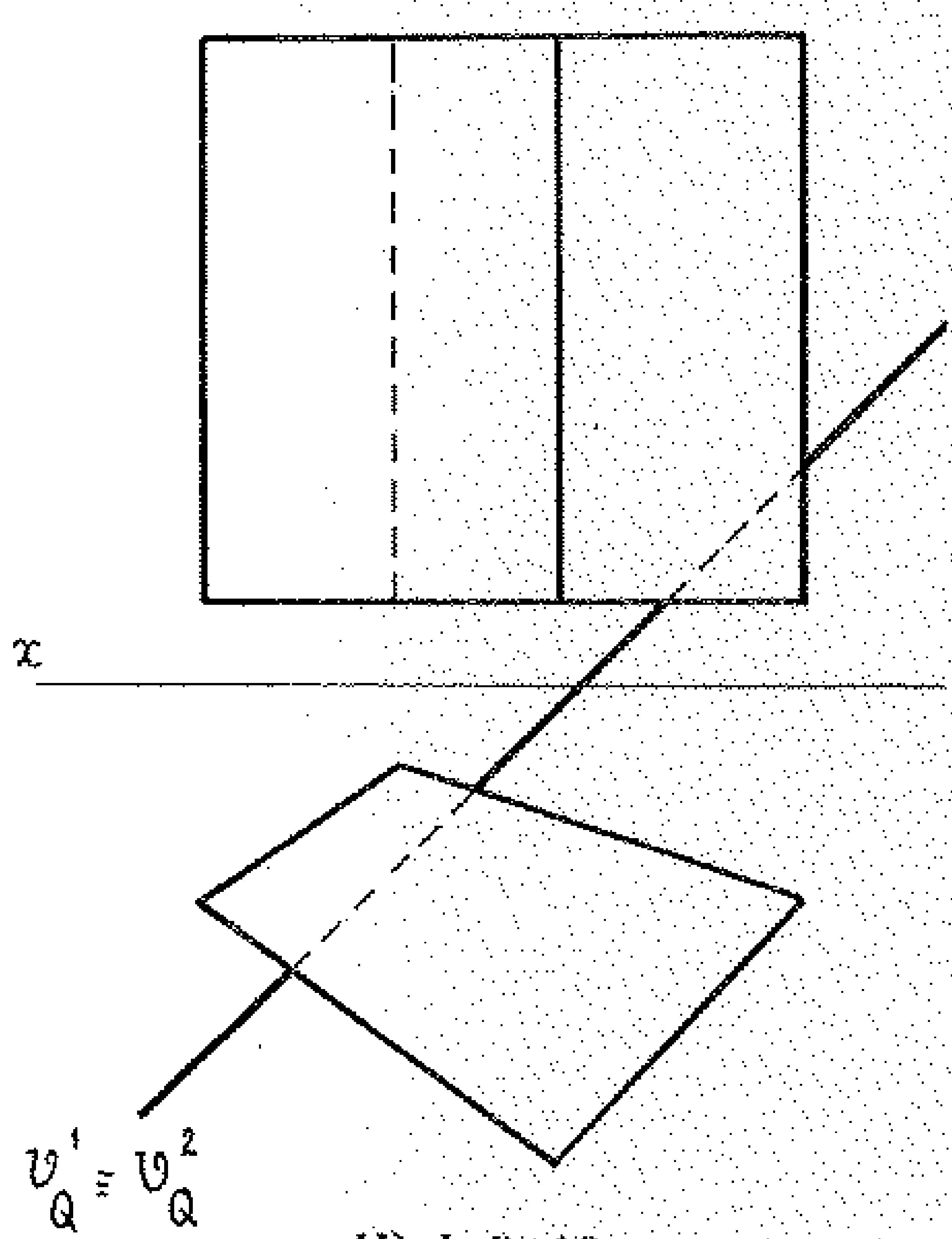
Bài 4 : Tìm giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với mặt nón, (Hình 8-16) và mặt trụ (Hình 8-17 và 8-18). Xét thấy khuất.



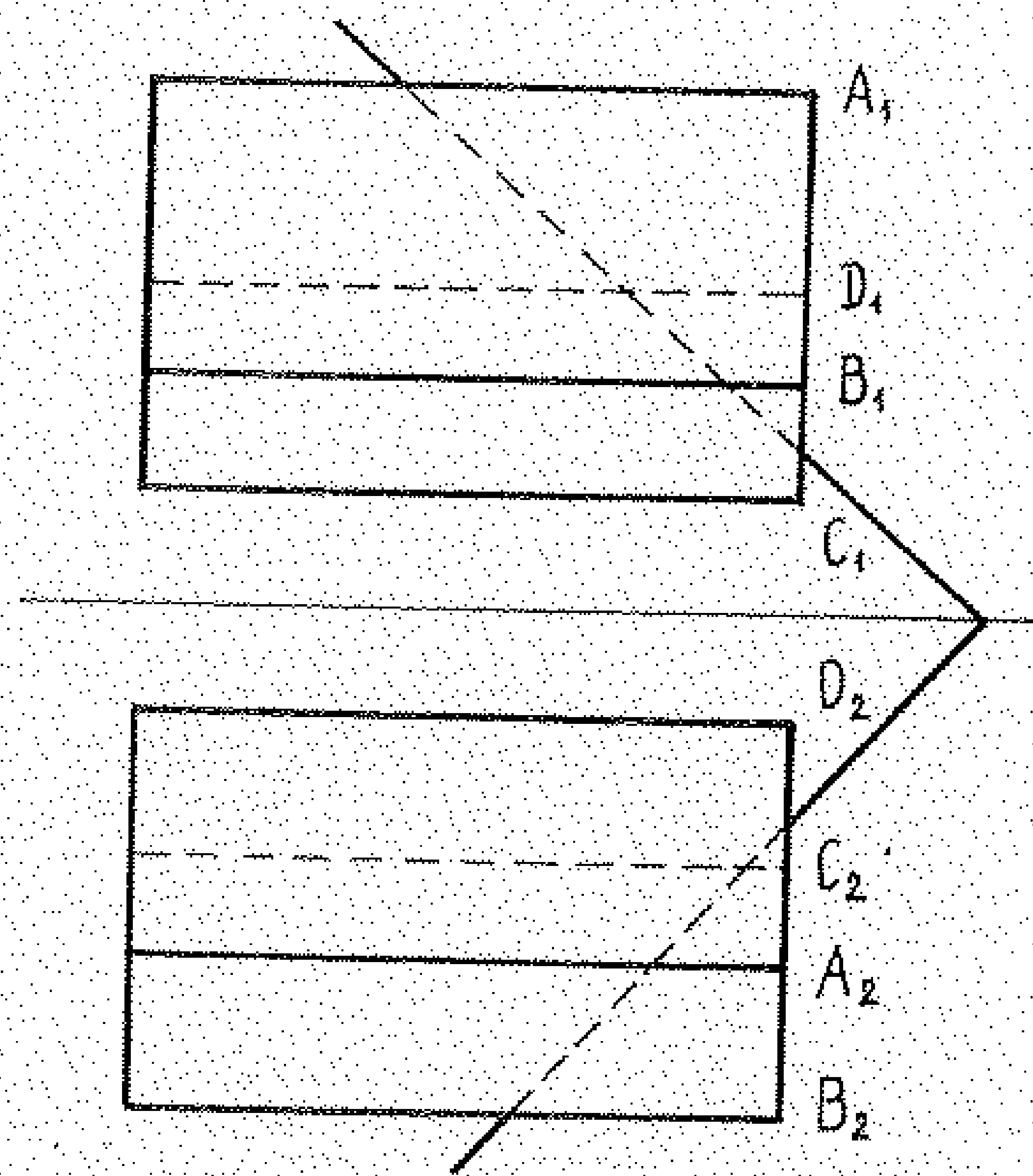
Hình 8-8



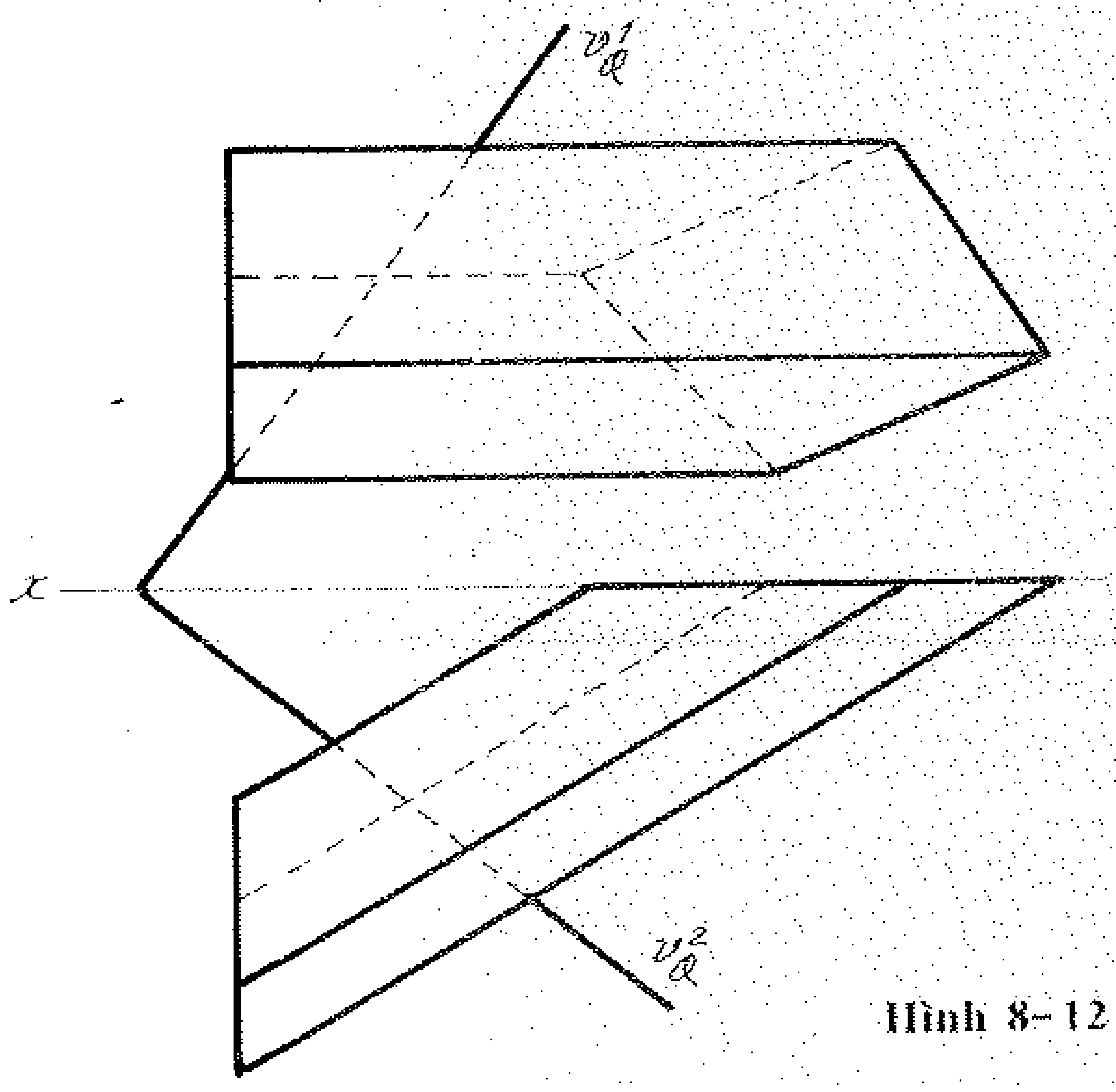
Hình 8-9



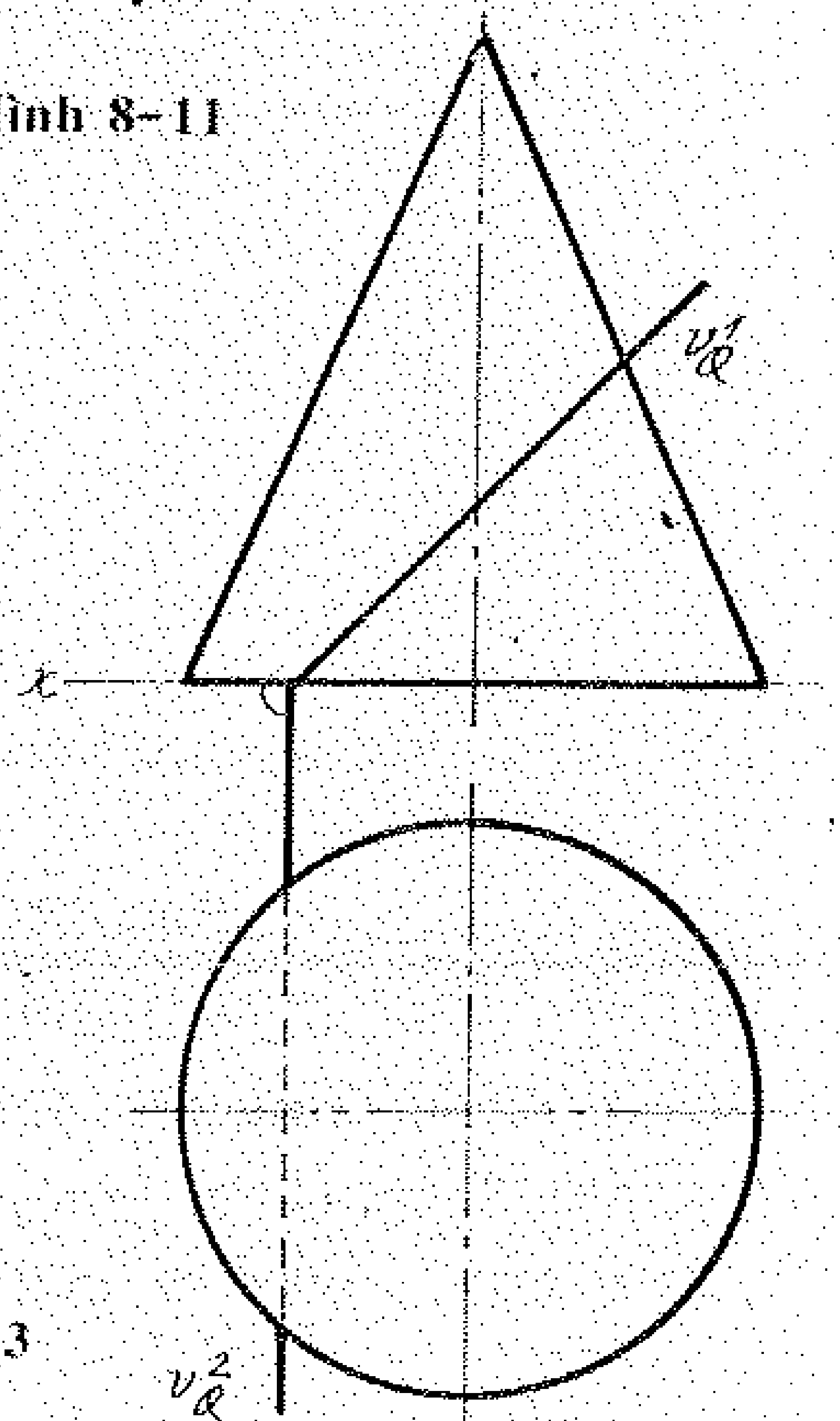
Hình 8-10



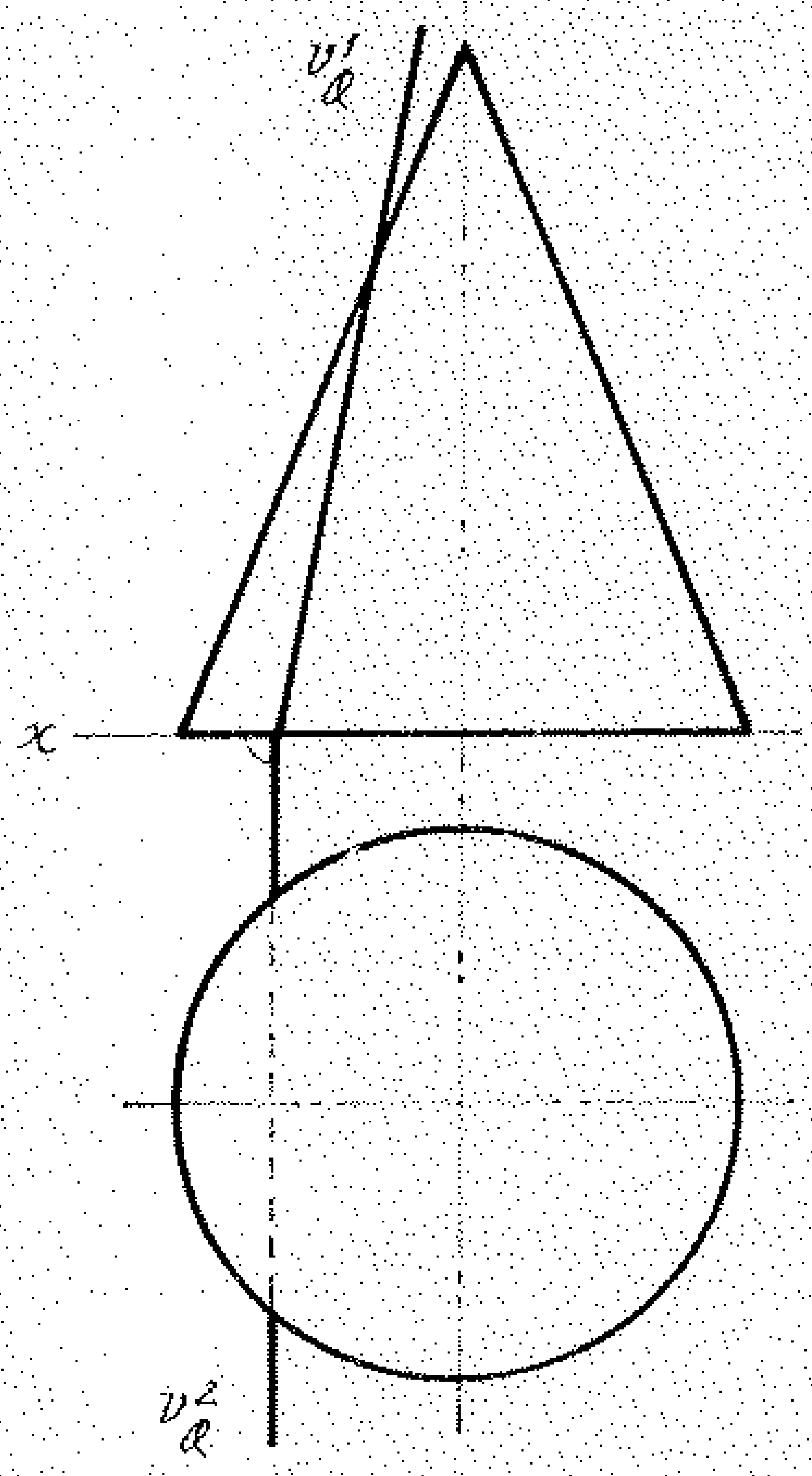
Hình 8-11



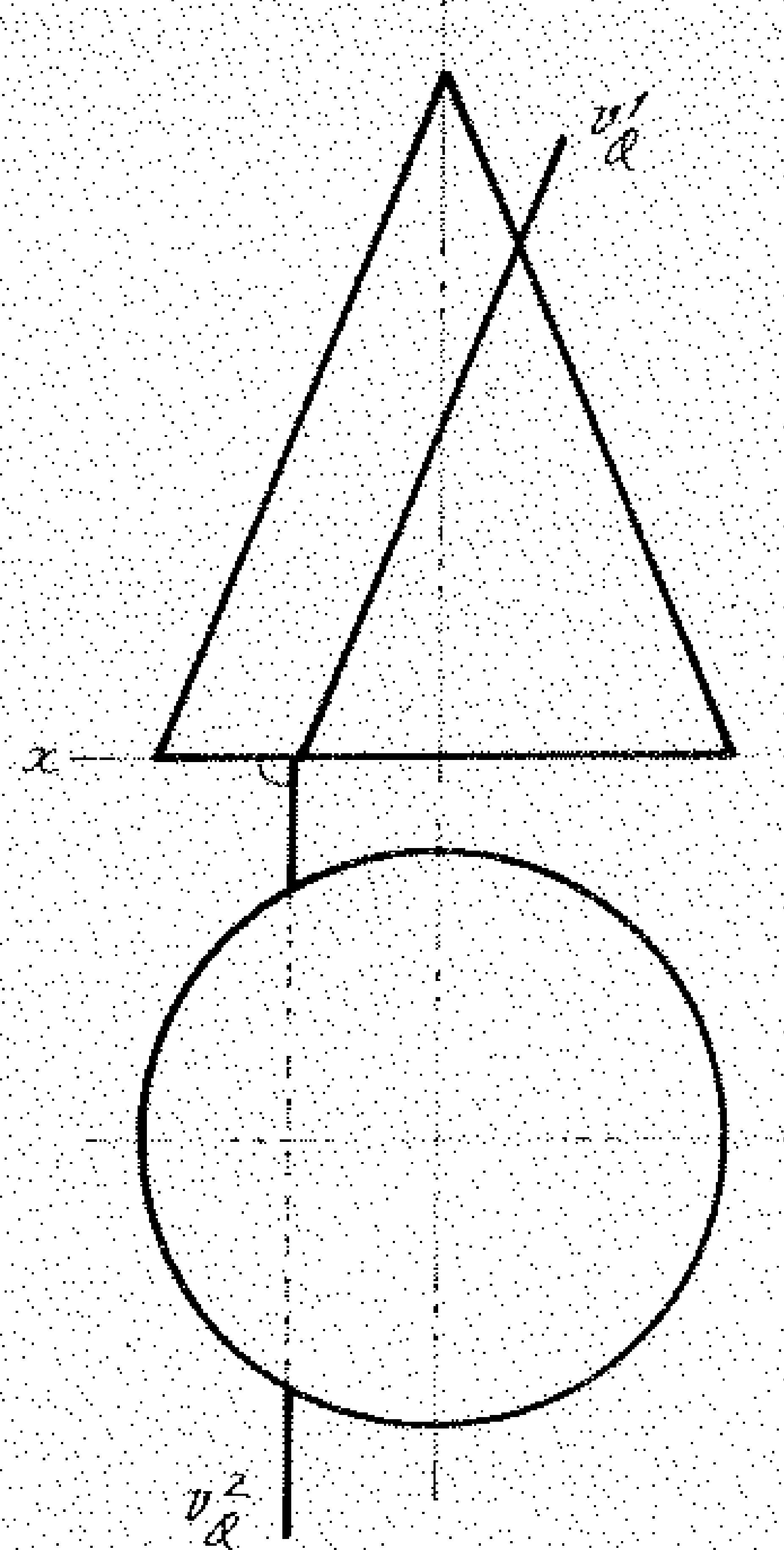
Hình 8-12



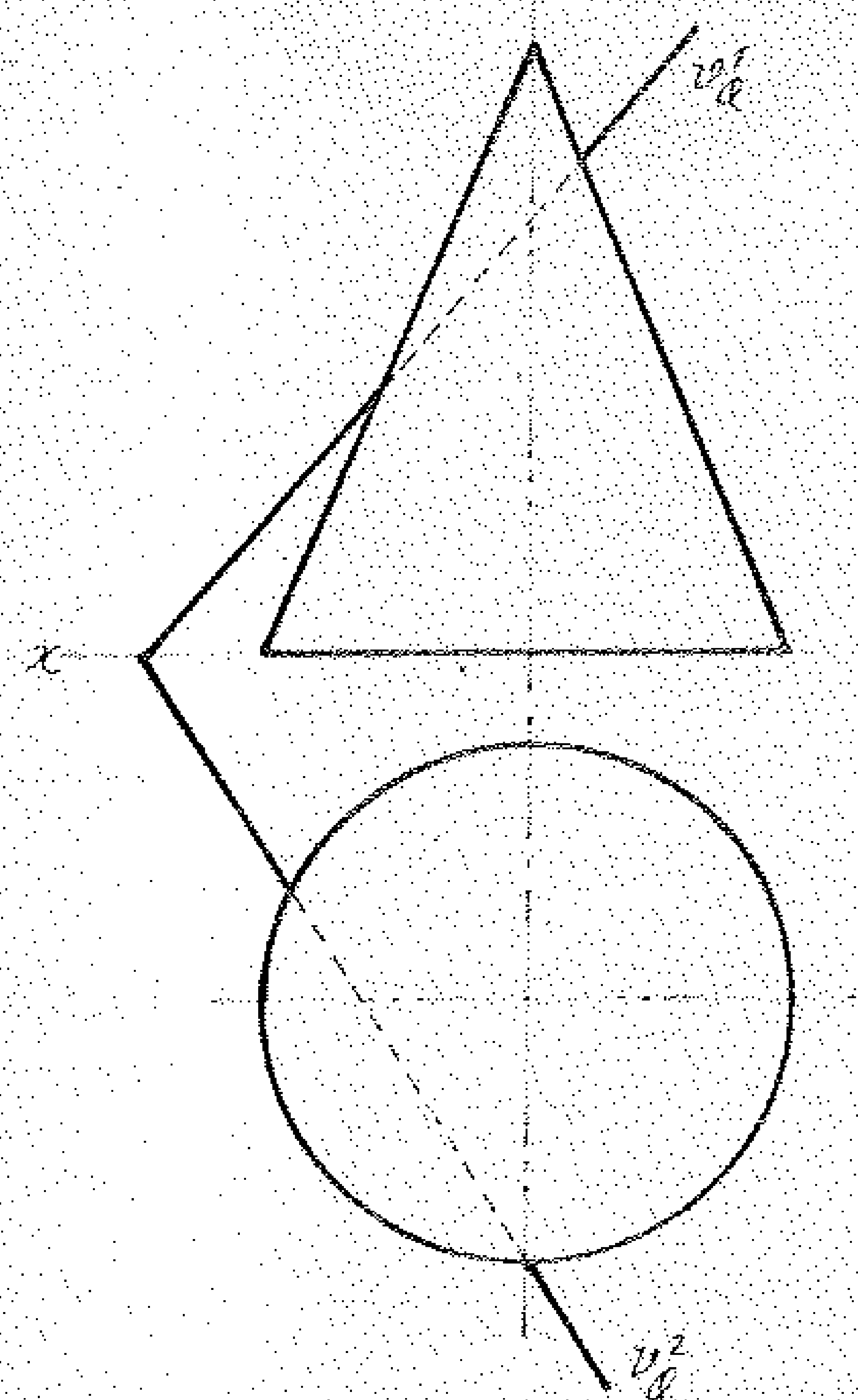
Hình 8-13



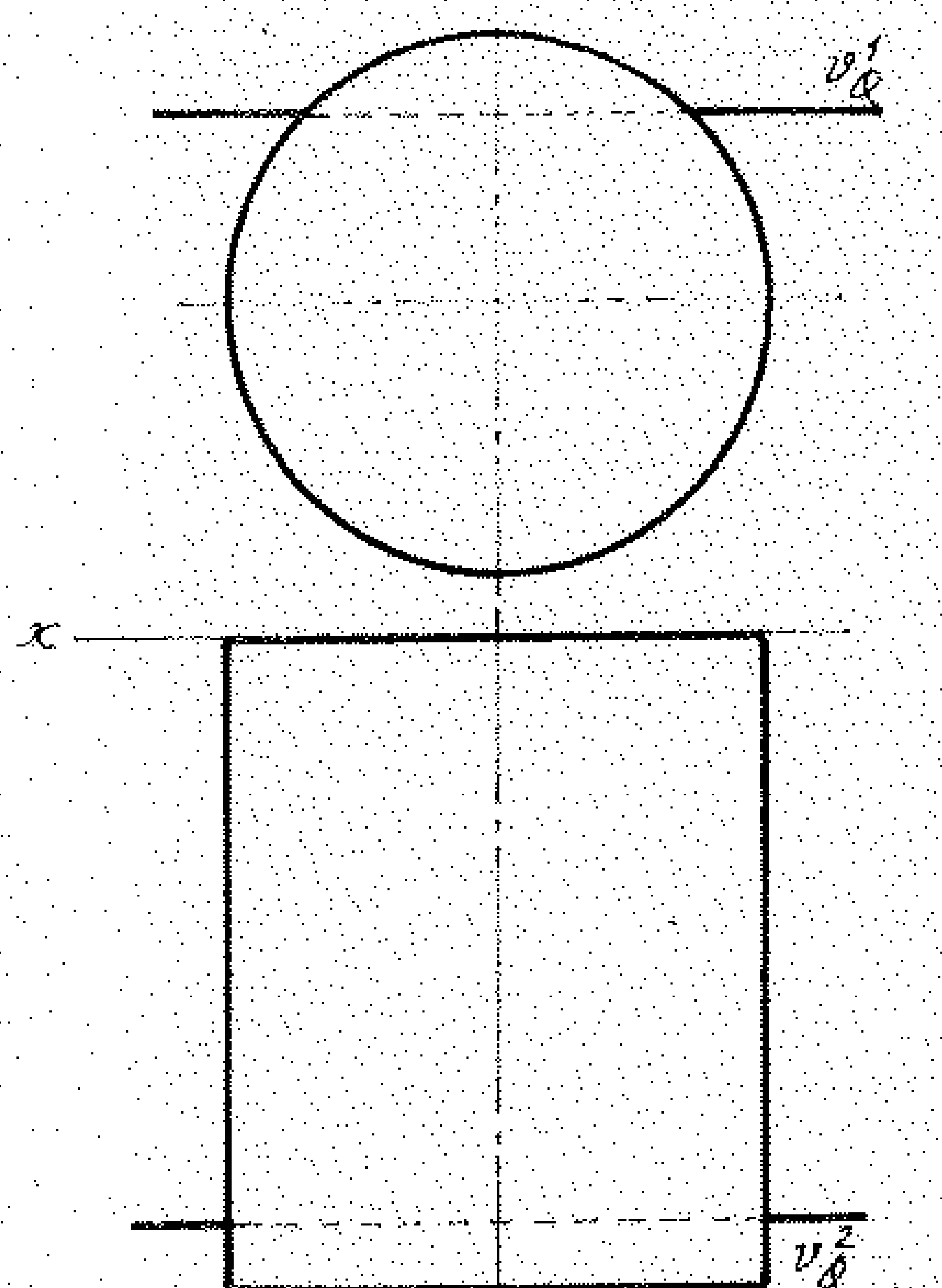
Hình 8-14



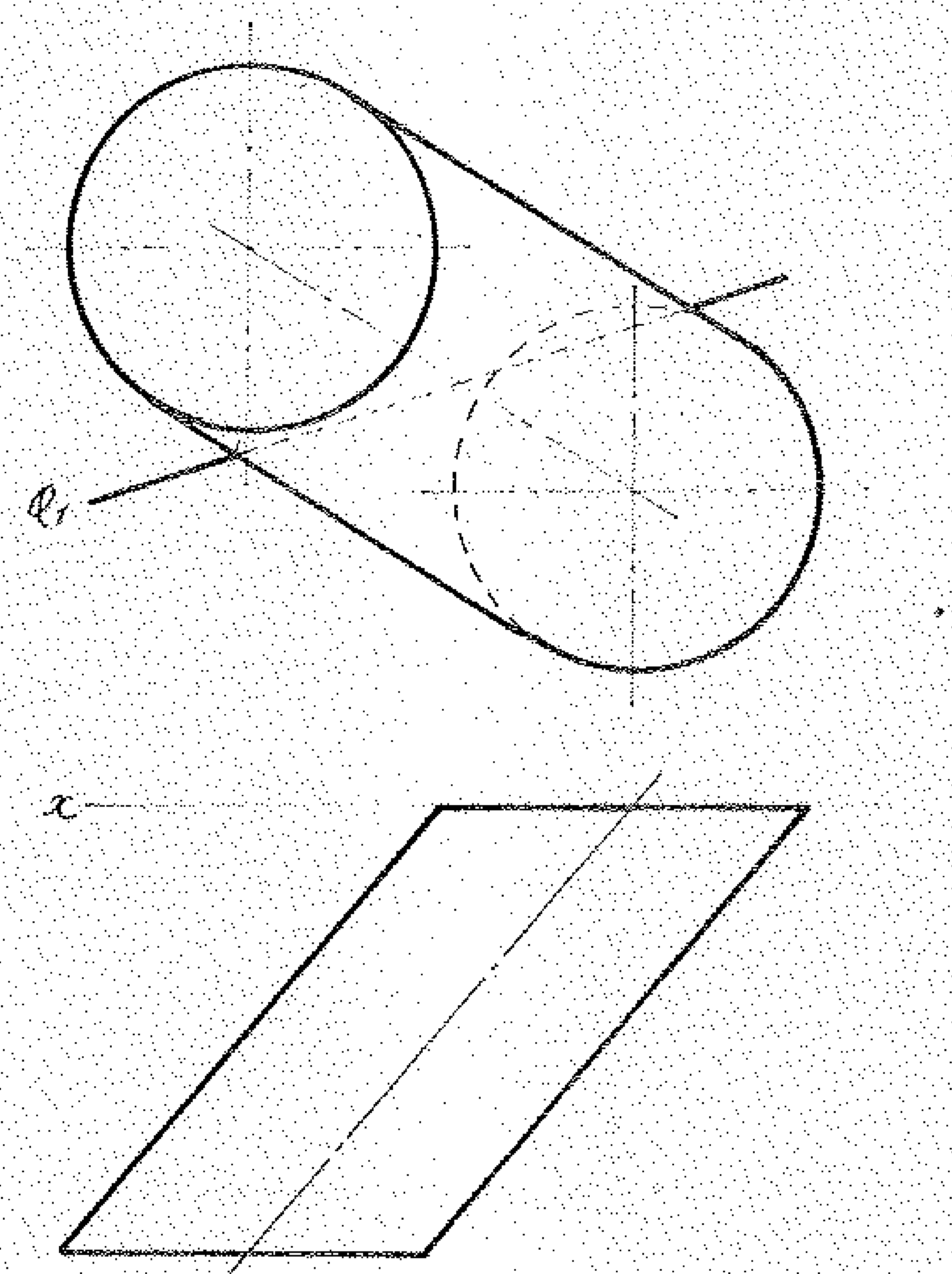
Hình 8-15



Hình 8-16



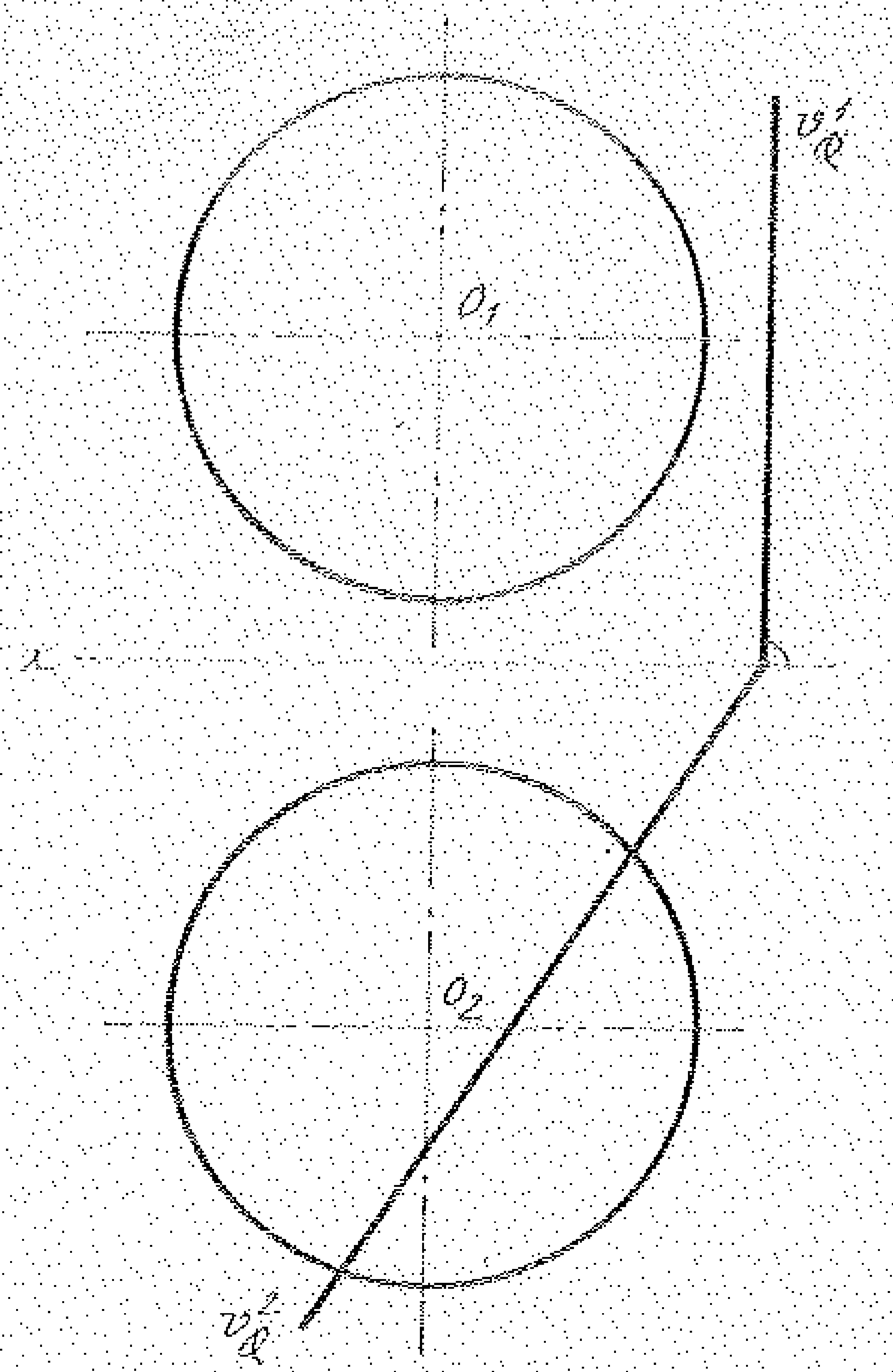
Hình 8-17



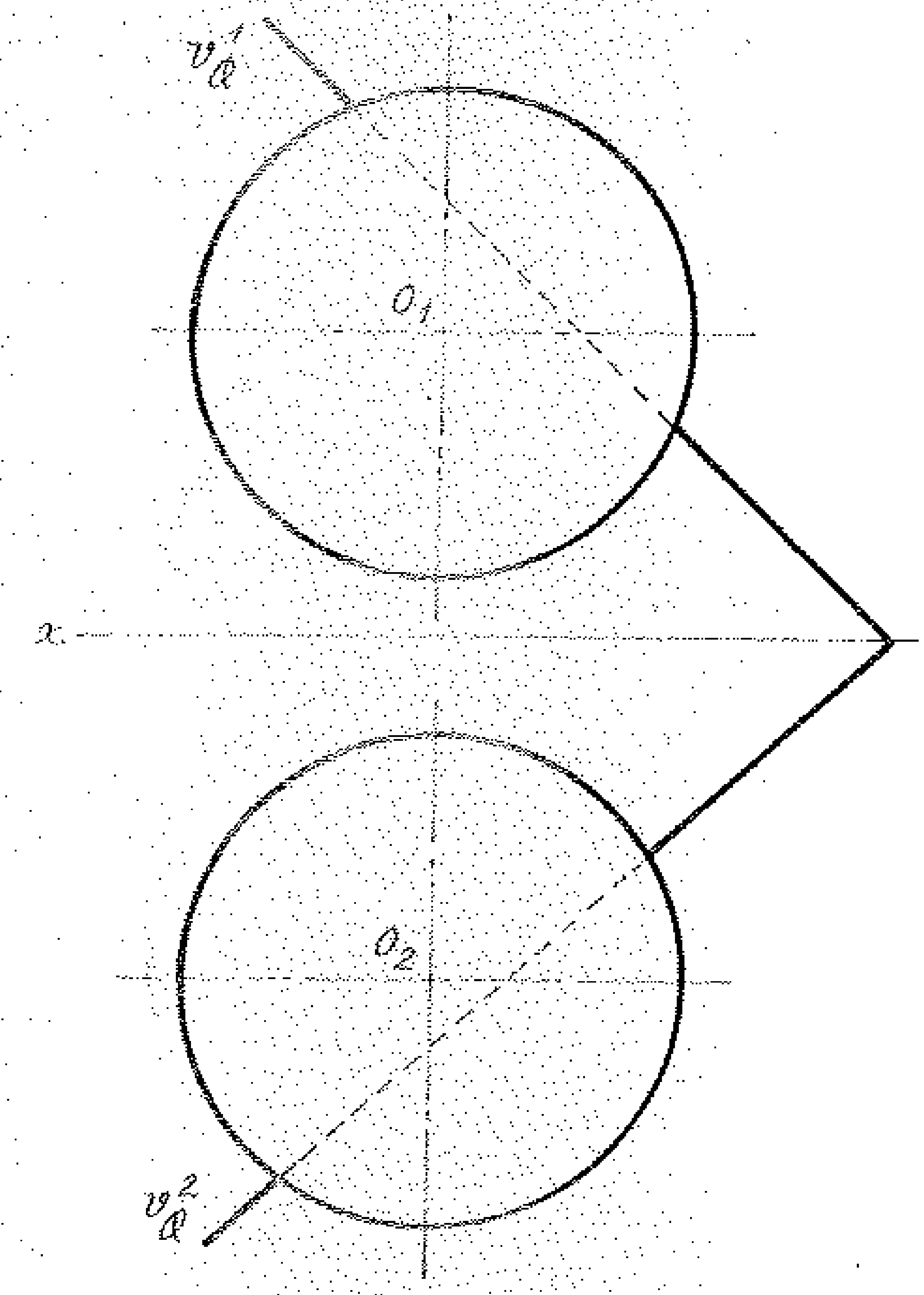
Hình 8-18

Bài 5 : Tìm giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với mặt cầu (Hình 8-19 và 8-20).

Bài 6 : Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật nằm trên mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$. Hãy dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ đi qua AB và cắt lăng trụ đã cho theo giao tuyến là một hình vuông. Vẽ các hình chiếu của giao tuyến (Hình 8-21).

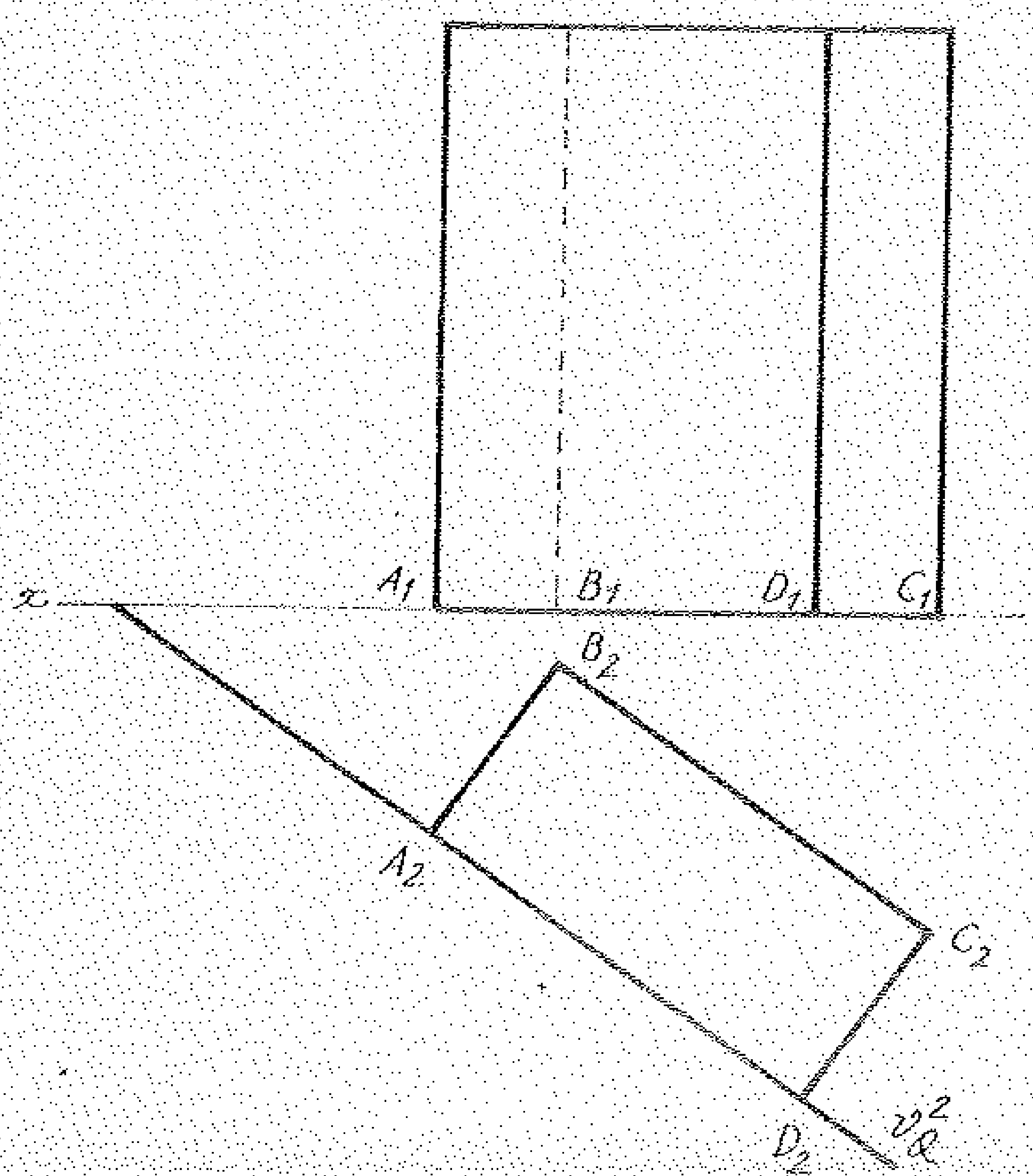


Hình 8-19

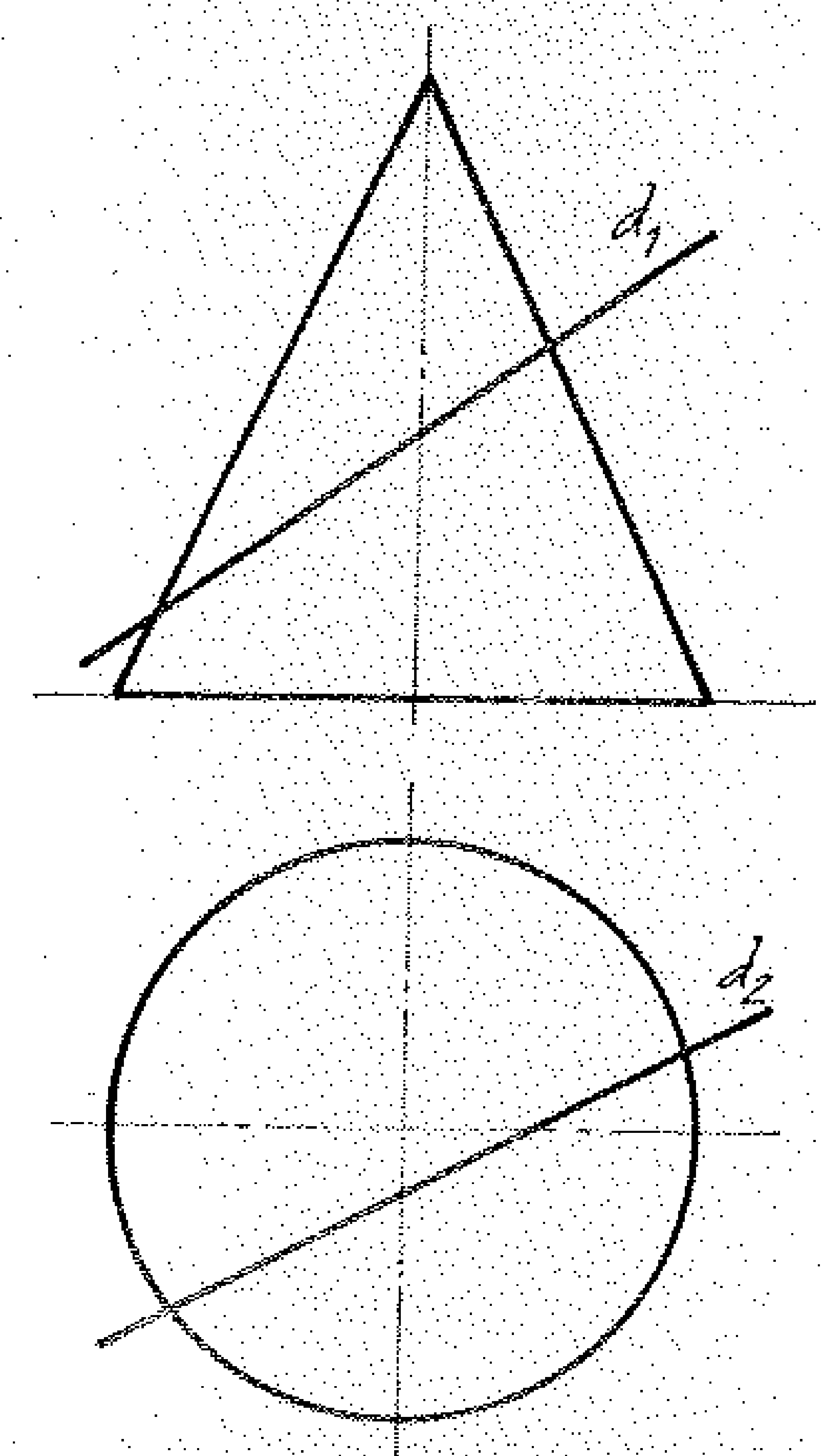


Hình 8-20

Bài 7 : Cho mặt nón tròn xoay và đường thẳng d. Dựng mặt phẳng Q đi qua d sao cho giao tuyến của mặt nón cắt bởi Q là các đường sinh. Vẽ các hình chiếu của giao tuyến, (Hình 8-22).

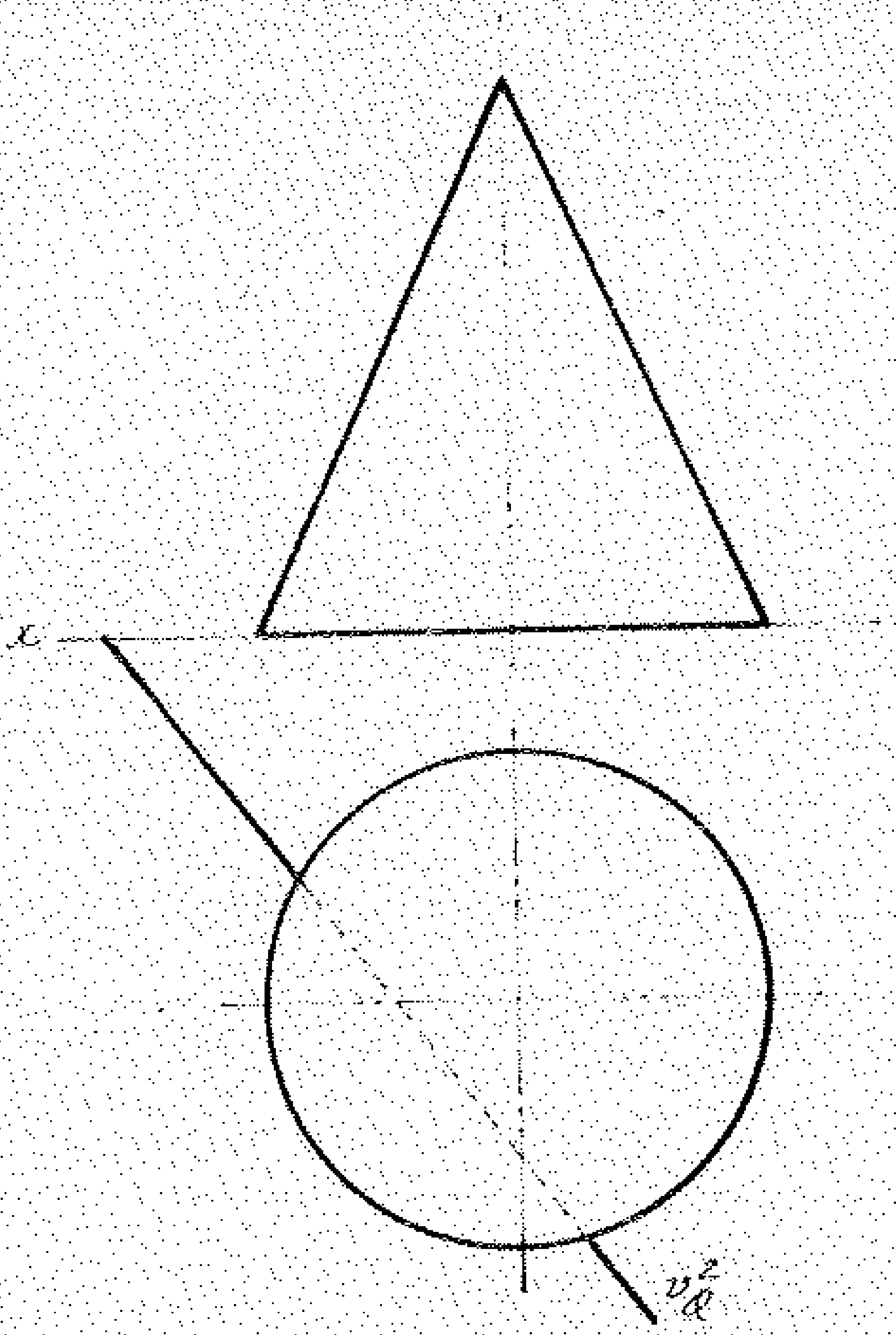


Hình 8-21

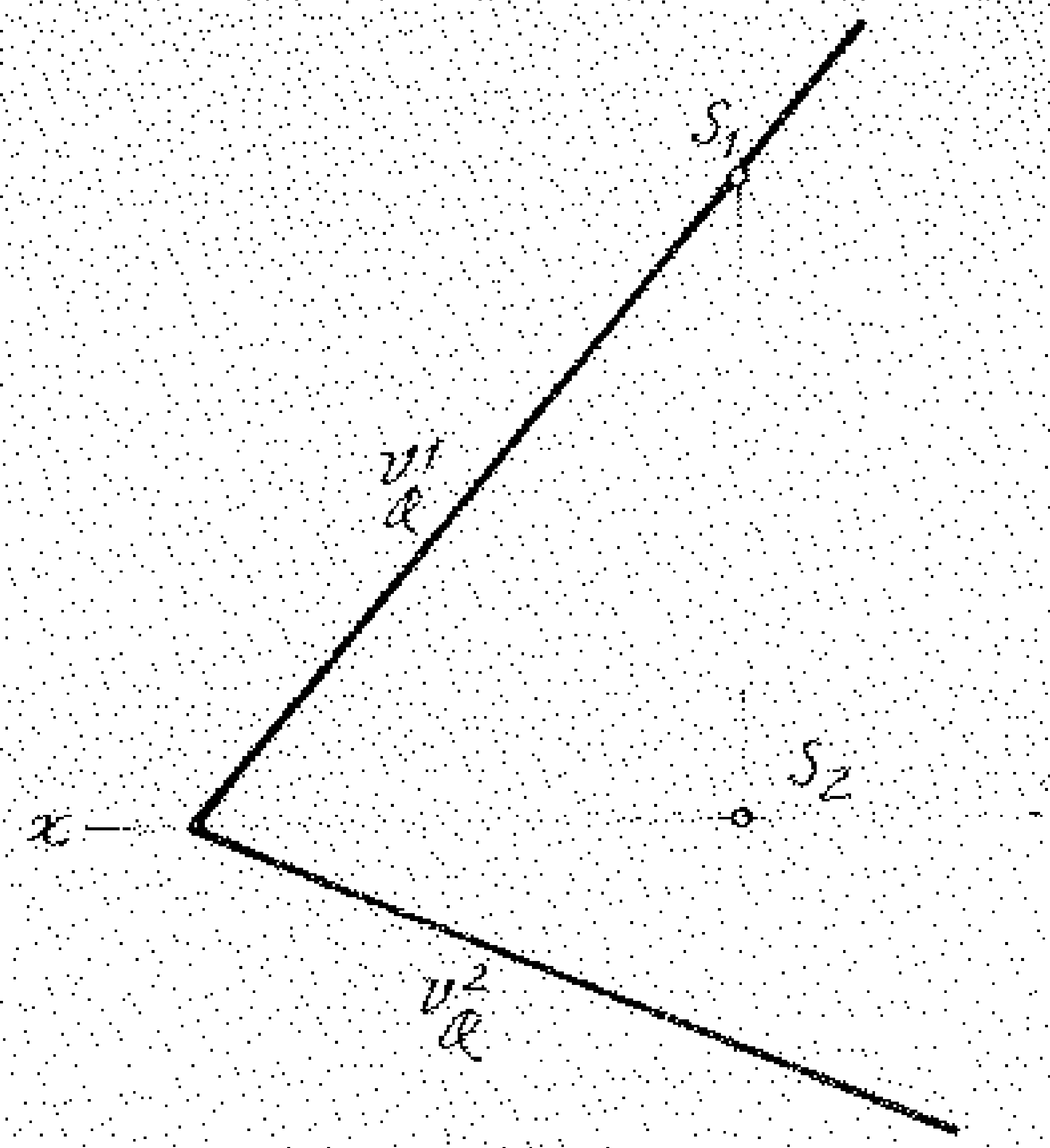


Hình 8-22

Bài 8 : Cho vết bằng của mặt phẳng Q và mặt nón tròn xoay. Hãy xác định vết đứng của (Q) biết rằng giao tuyến của nón và (Q) là một parabôn. Vẽ các hình chiếu của giao tuyến (Hình 8-23).



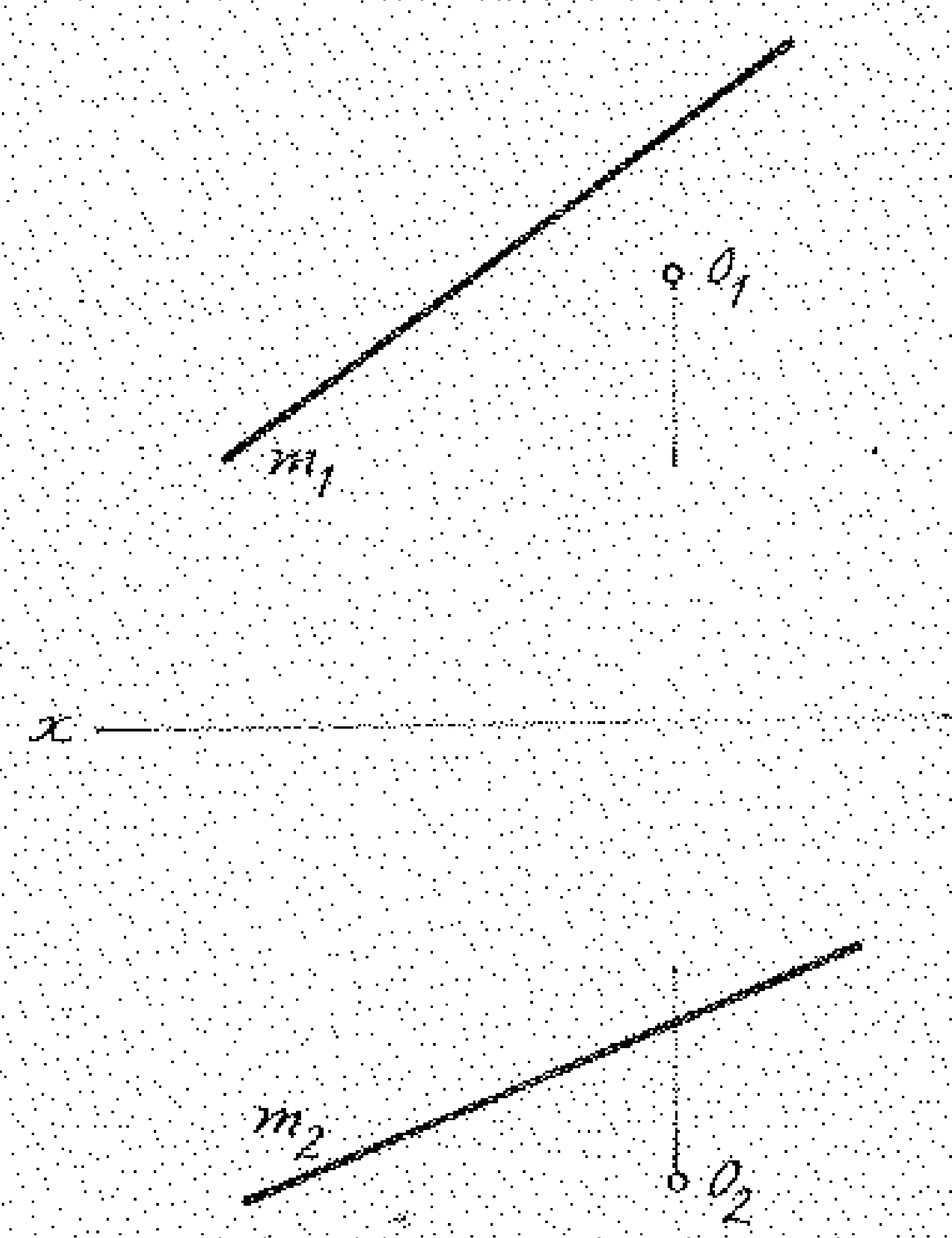
Hình 8-23



Hình 8-24

Bài 9 : Cho mặt phẳng $\mathcal{Q}$ và một điểm $S \in (\mathcal{Q})$. Vẽ qua S những đường thẳng nằm trong $(\mathcal{Q})$ và hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$ một góc bằng 60^o, (Hình 8-24).

Bài 10 : Cho đường thẳng m và một điểm O. Dựng mặt cầu tâm O sao cho khoảng cách giữa hai giao điểm của m với mặt cầu có độ dài bằng 20 mm, (Hình 8-25).



Hình 8-25

CHƯƠNG 9

GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐA DIỆN VÀ MẶT CONG

9.1. Các thí dụ

Thí dụ 1: Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt chóp SABC (Hình 9-1).

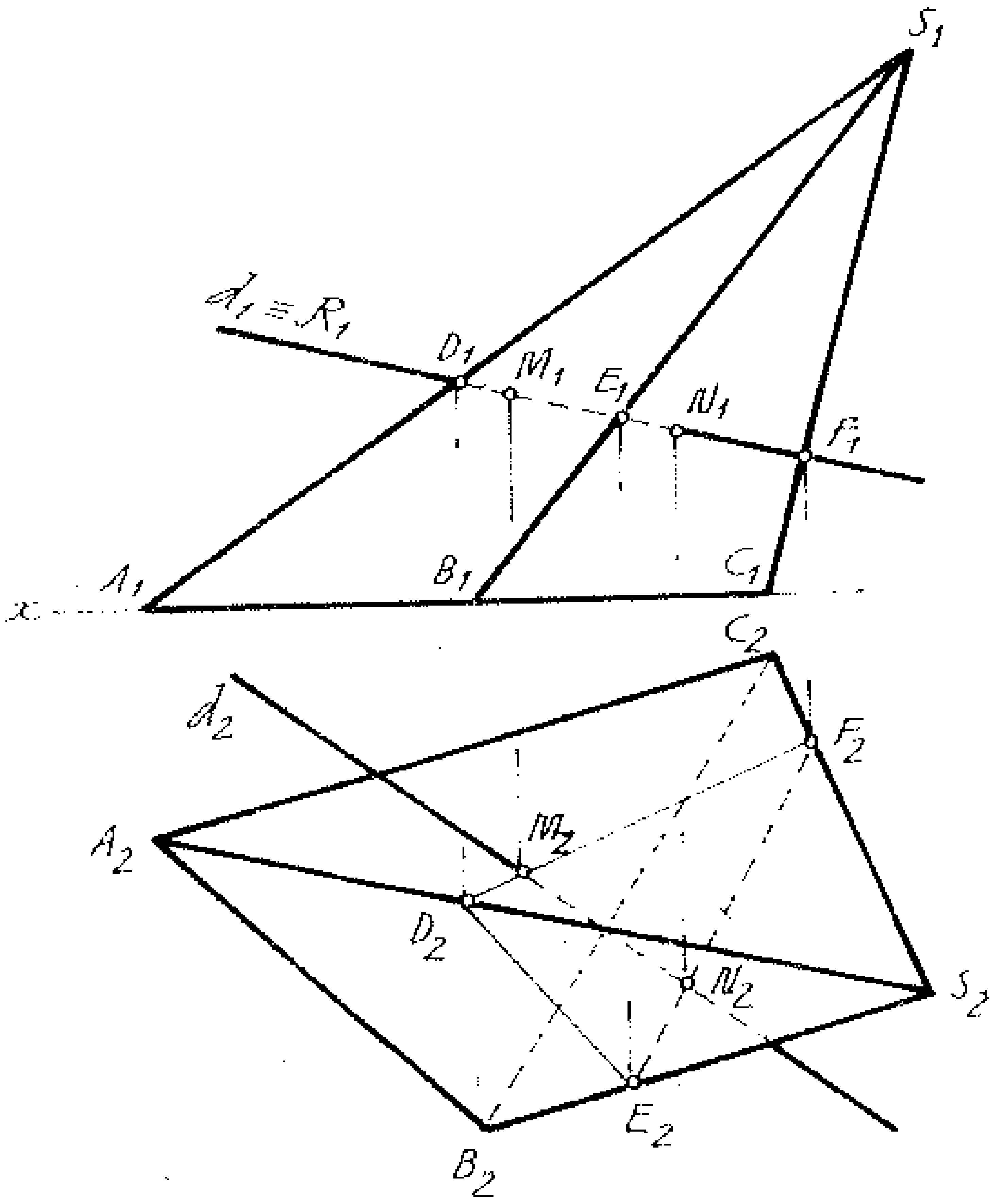
Giải : Mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}_1$) chứa đường thẳng d cắt mặt chóp theo giao tuyến DEF. Các giao điểm M và N của d với giao tuyến DEF chính là giao điểm của d với mặt chóp. Trên hình chiếu đứng giao điểm M = d ∩ (SAC) khuất còn giao điểm N = d ∩ (SBC) thấy.

Trên hình chiếu bằng giao điểm M thấy còn giao điểm N khuất.

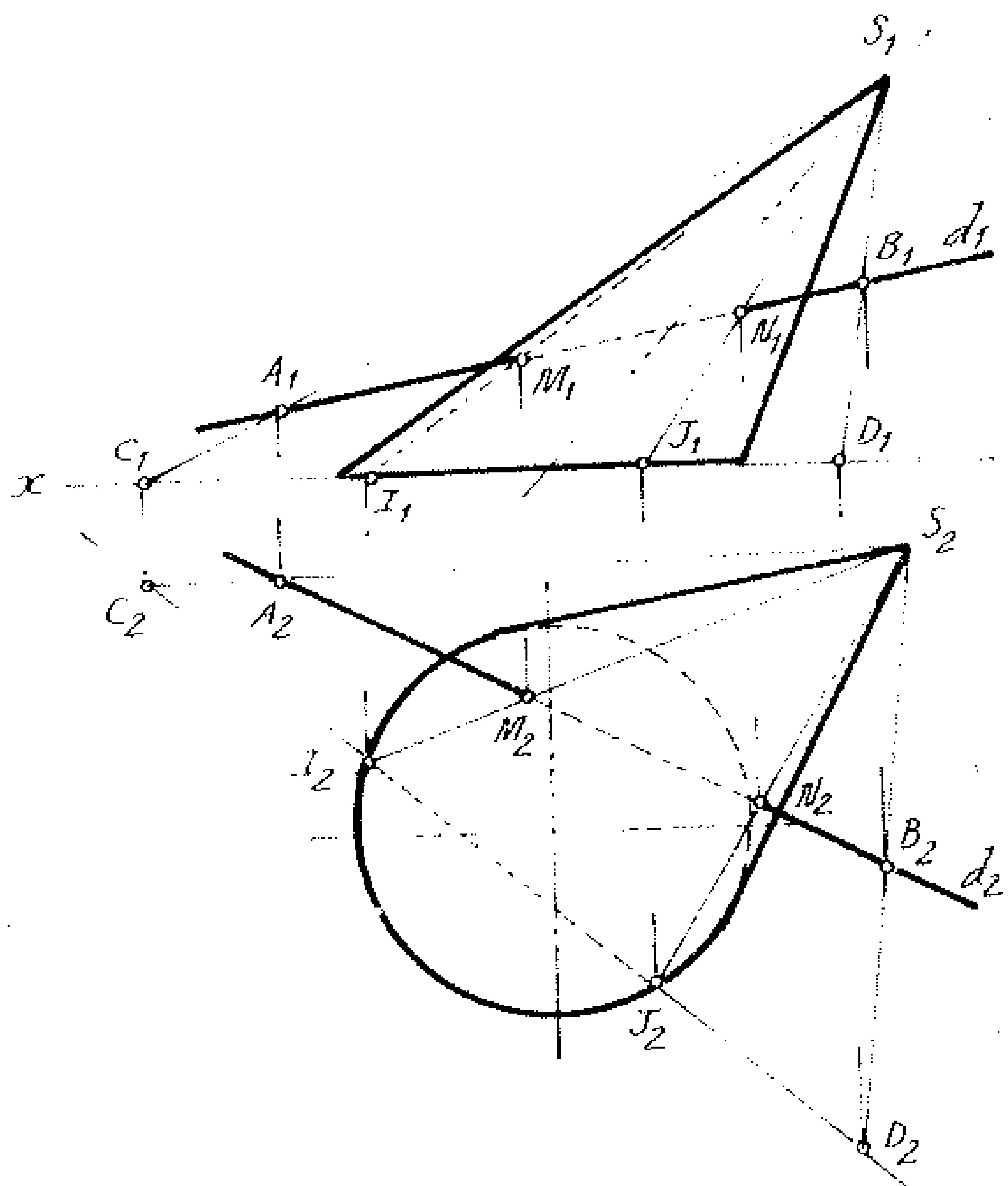
Thí dụ 2: Tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt nón đỉnh S có đáy là một hình tròn nằm trên mặt phẳng hình chiếu bằng (Hình 9-2).

Giải : Mặt phẳng phụ trợ $\mathcal{R}$ (S, d) cắt mặt phẳng chứa đáy nón theo đường thẳng CD. Gọi I và J là các giao điểm của CD với đường tròn đáy nón. SI và SJ là giao tuyến của mặt phẳng phụ trợ $\mathcal{R}$ với mặt nón. Các giao điểm M = d ∩ SI và N = d ∩ SJ là các giao điểm cần tìm của d với mặt nón.

Trên hình chiếu đứng đường sinh SI khuất nên giao điểm M khuất ; đường sinh SJ thấy nên giao điểm N thấy.



Hình 9-1



Hình 9-2

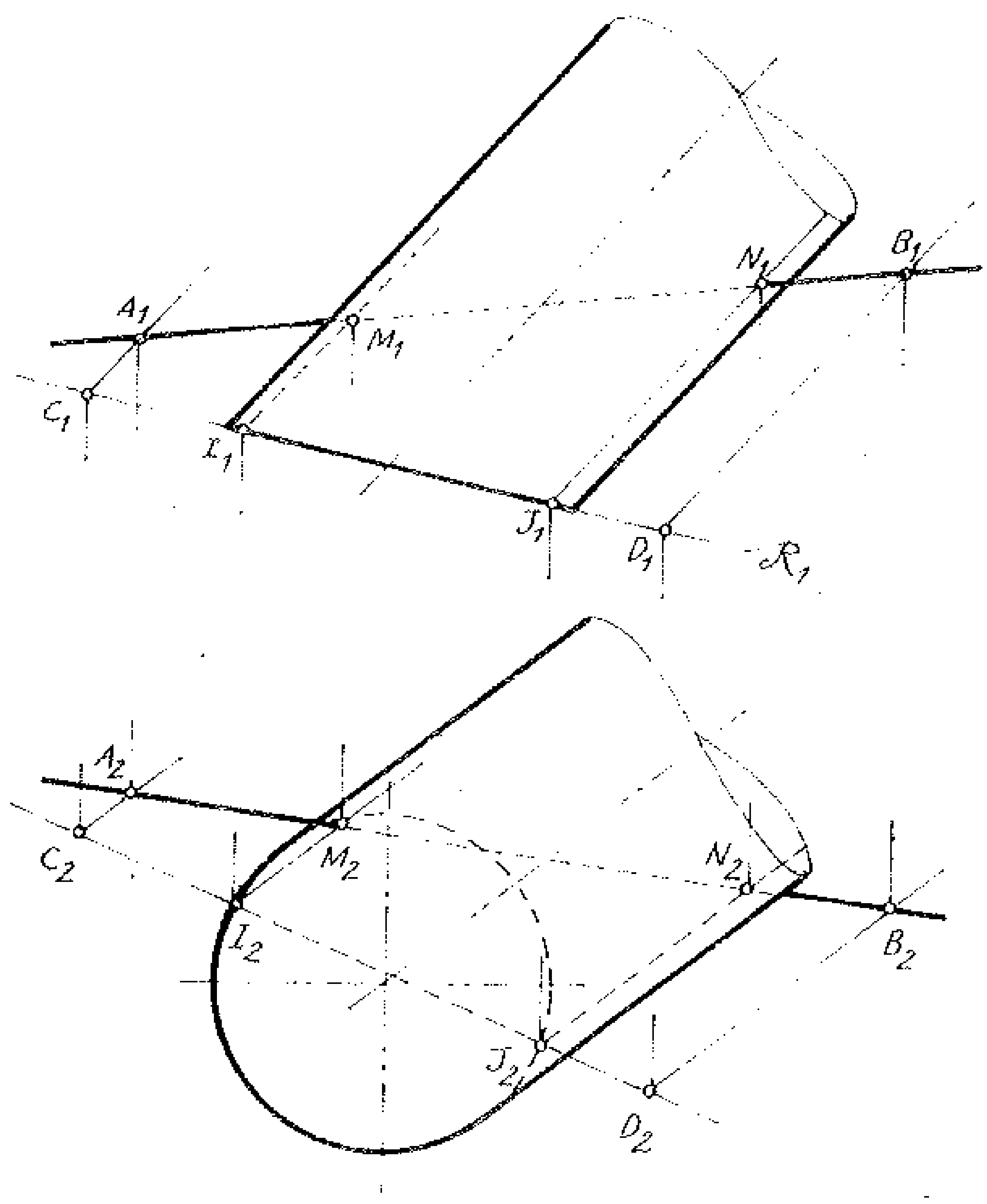
Trên hình chiếu bằng cả hai đường sinh SI và SJ đều thấy, do đó các giao điểm M và N đều thấy.

Thí dụ 3: Tìm giao điểm của đường thẳng AB với mặt trụ xiên có đáy nằm trong mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ và hình chiếu bằng của nó là đường tròn (Hình 9-3).

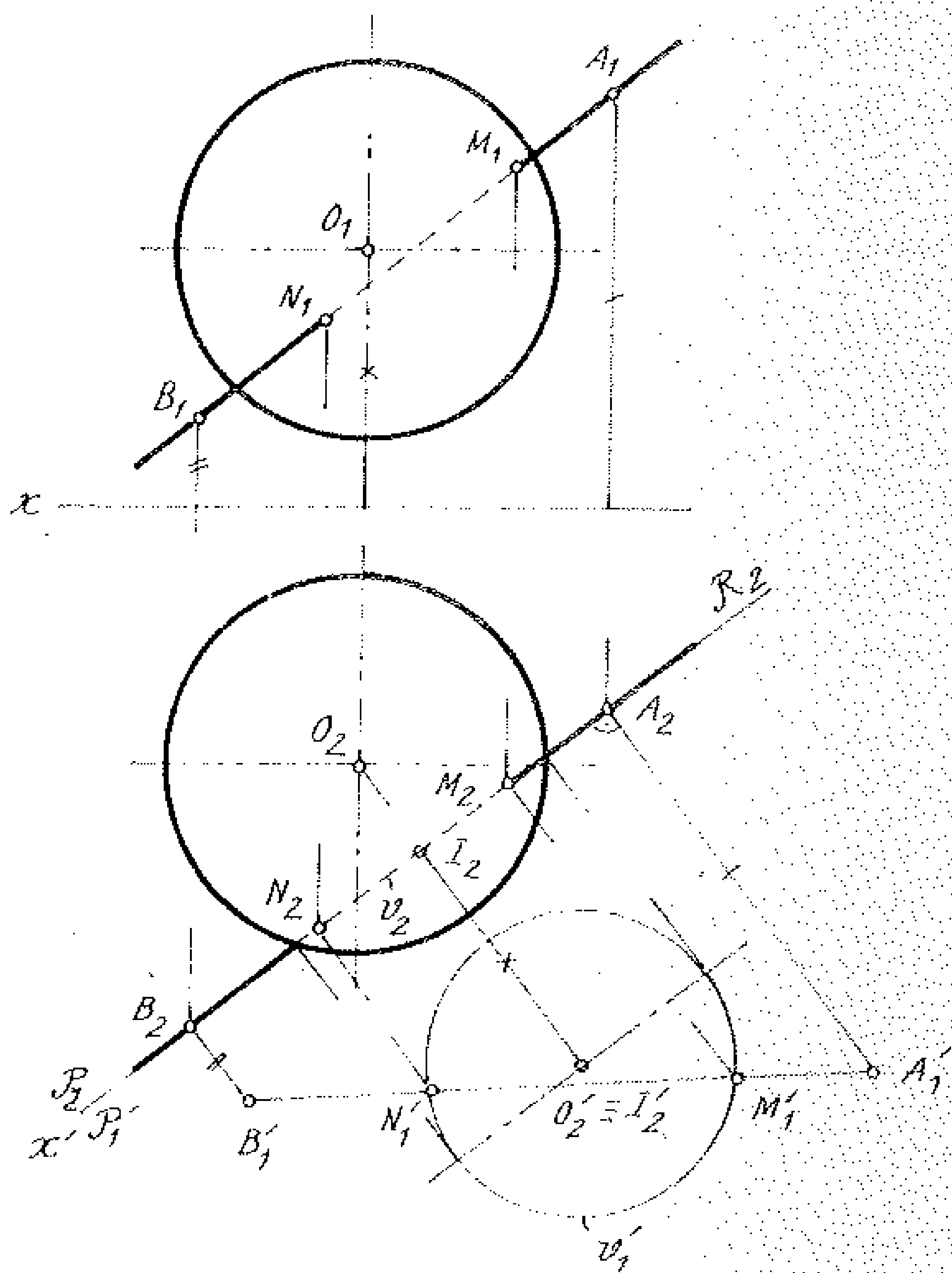
Giải : Mặt phẳng phụ trợ chứa đường thẳng AB và song song với các đường sinh của mặt trụ cắt mặt phẳng đáy trụ $\mathcal{R}$ theo đường thẳng CD. Giao điểm I, J của CD với đáy trụ là chân của các đường sinh giao tuyến của mặt phẳng phụ trợ với mặt trụ đã cho. Các giao điểm M, N của AB với hai đường sinh nói trên chính là giao điểm của AB với mặt trụ.

Trên hình chiếu đứng đường sinh chứa điem M khuất nên giao điểm M khuất ; đường sinh chứa điểm N thấy nên giao điểm N thấy.

Trên hình chiếu bằng đường sinh chứa điểm M thấy nên giao điểm M thấy ; đường sinh chứa điểm N khuất nên giao điểm N khuất.



Hình 9-3



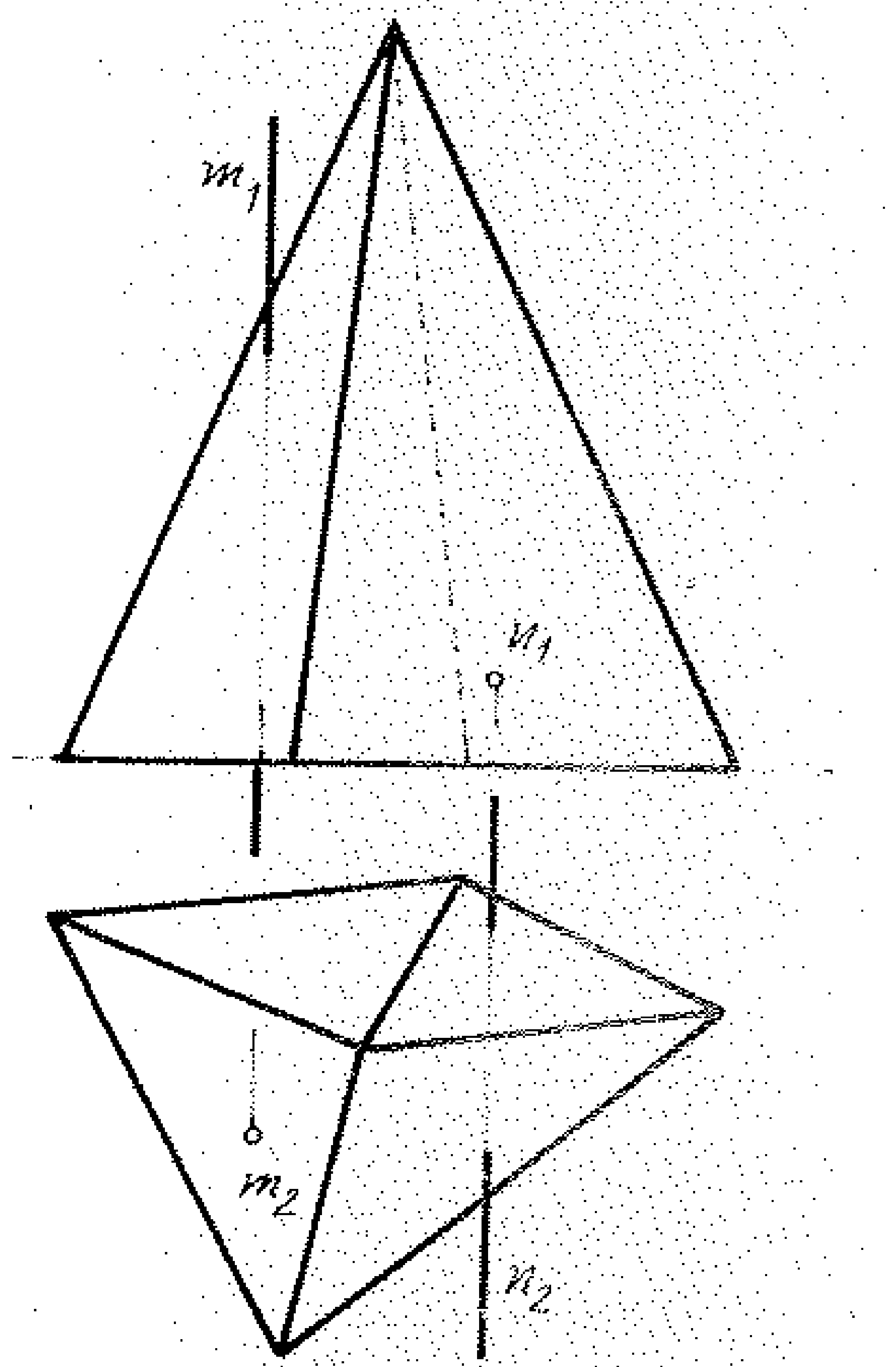
Hình 9-4

Thí dụ 4: Tìm giao điểm của đường thẳng AB với mặt cầu tâm O (Hình 9-4).

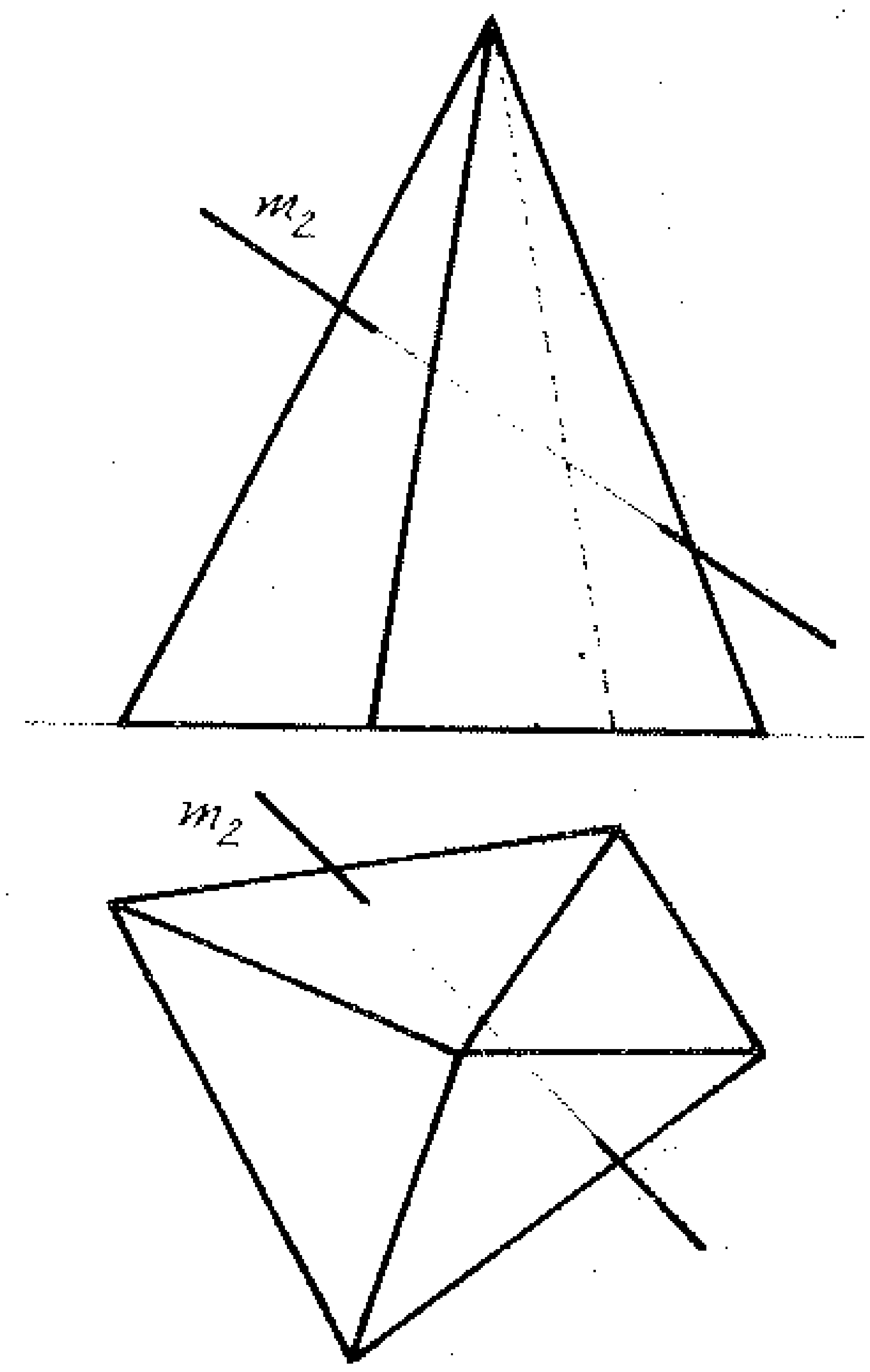
Giải : Mặt phẳng phụ trợ chiếu bằng $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}_2$) chứa AB cắt mặt cầu theo một đường tròn (v) tâm I có hình chiếu bằng là một đoạn thẳng $\equiv \mathcal{R}_2$ và có độ dài bằng đường kính của nó. Bằng phép thay mặt phẳng hình chiếu đứng ta xác định được hình chiếu đứng mới của (v) là đường tròn (v'_1) tâm là I'_1 và hình chiếu đứng mới của AB là $A'_1B'_1$. Từ các giao điểm M'_1, N'_1 của $A'_1B'_1$ với (v'_1) dễ dàng vẽ được các hình chiếu ban đầu của AB với mặt cầu.

9.2. Bài tập

Bài 1 : Tìm giao điểm của các đường thẳng m, n với mặt chóp (Hình 9-5 ; 9-6).

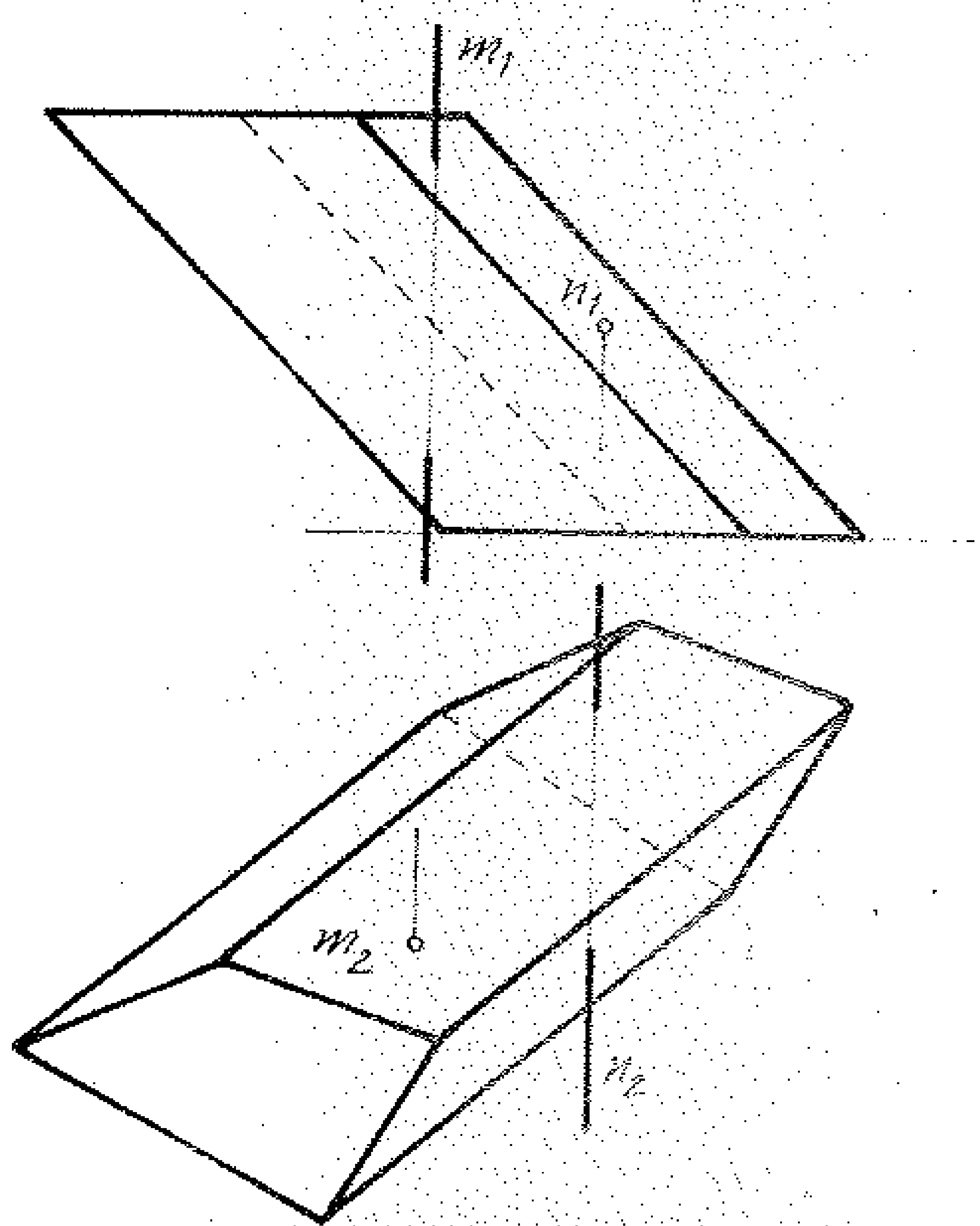


Hình 9-5

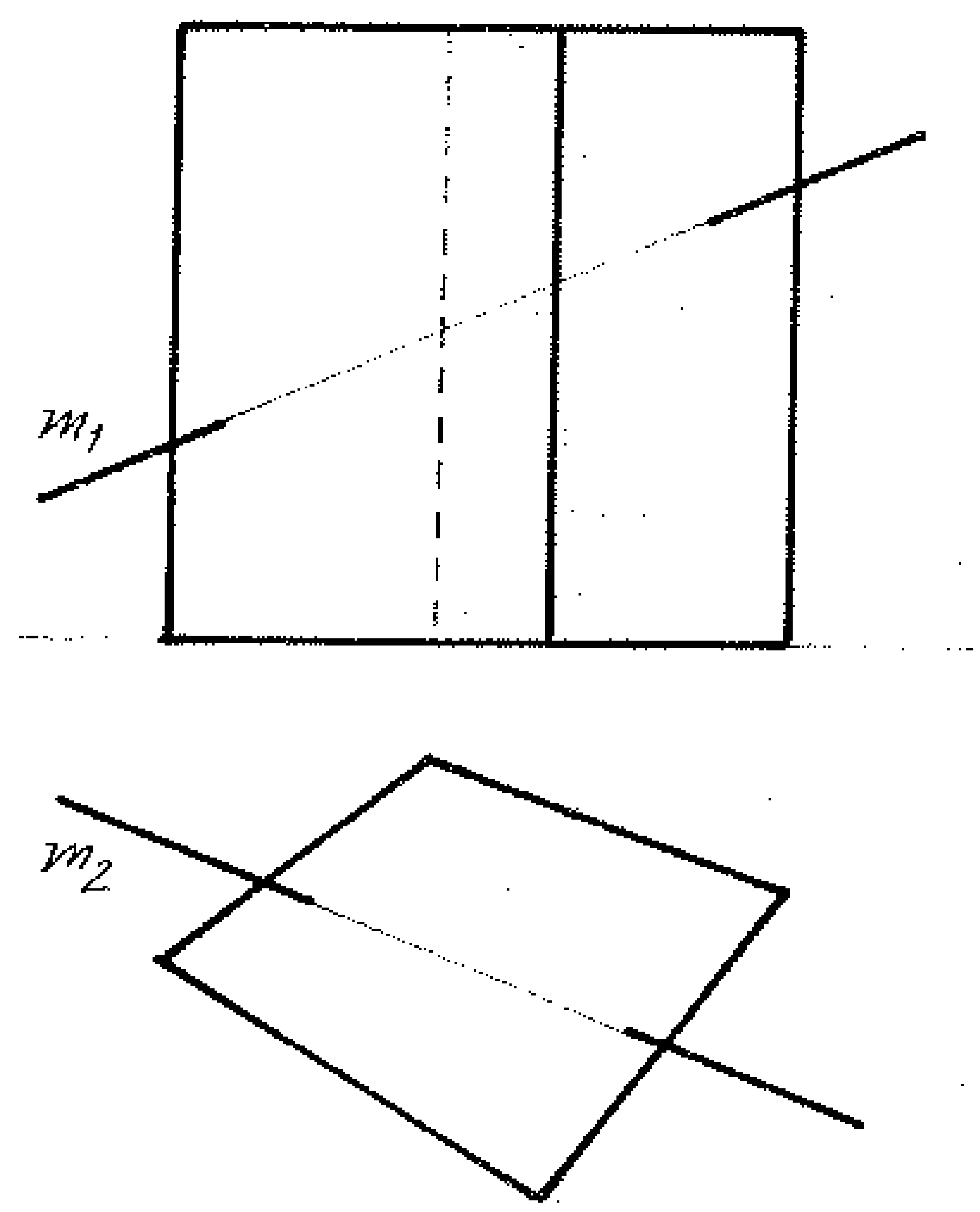


Hình 9-6

Bài 2 : Tìm giao điểm của các đường thẳng m, n với mặt lăng trụ (Hình 9-7 ; 9-8 ; 9-9).



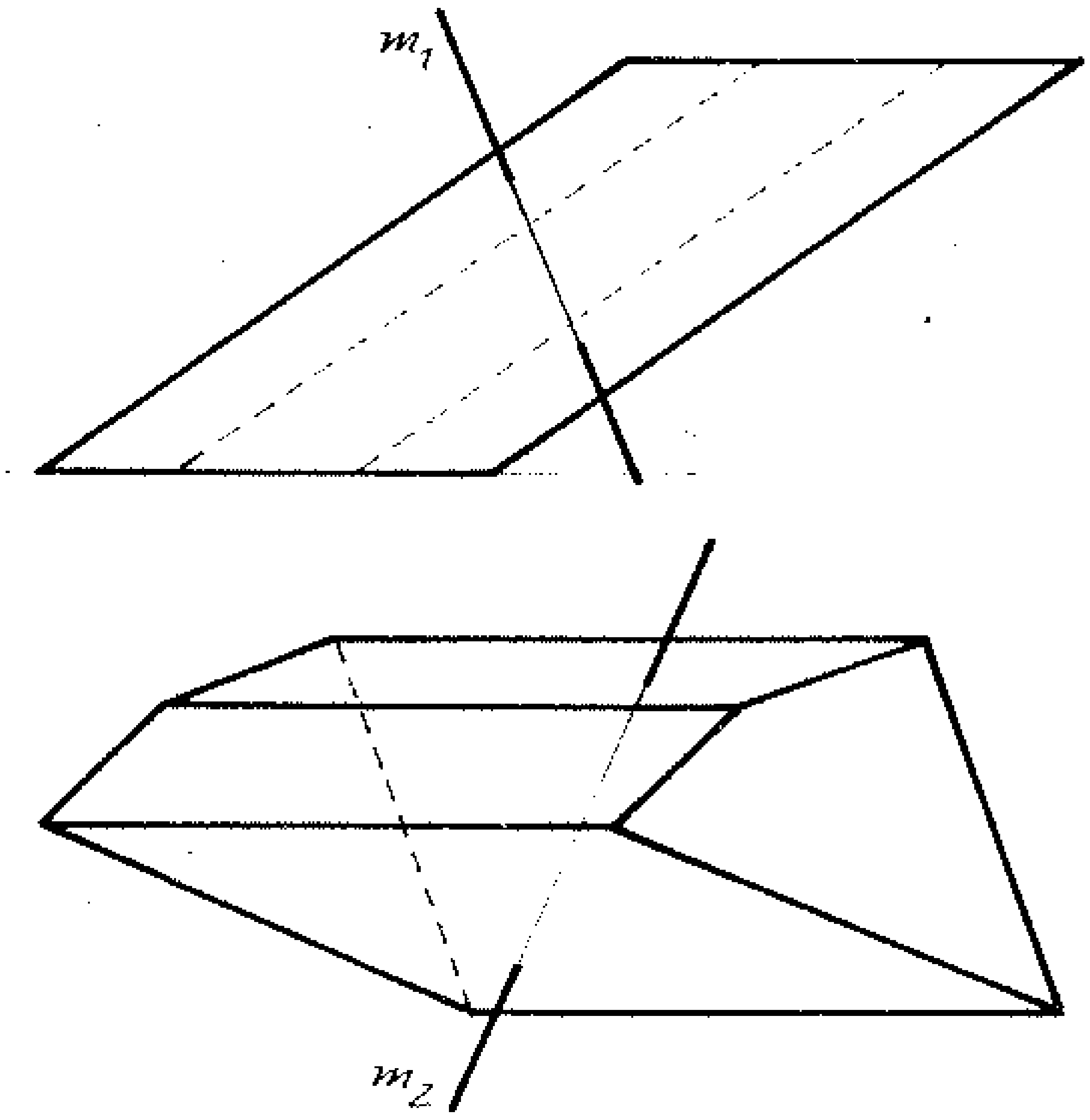
Hình 9-7



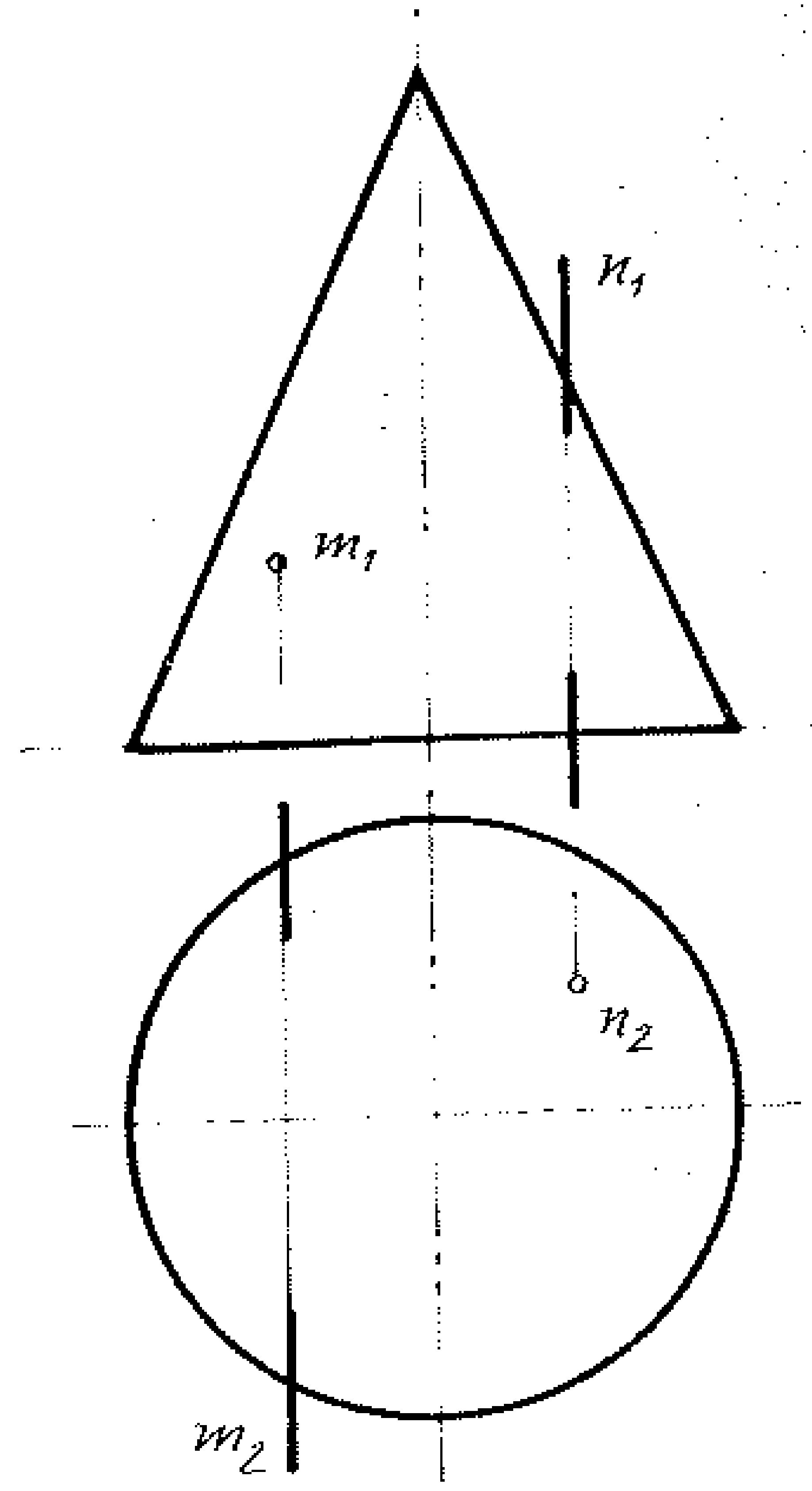
Hình 9-8

Bài 3 : Tìm giao điểm của các đường thẳng m, n với mặt nón (Hình 9-10 ; 9-11 ; 9-12 ; 9-13).

Bài 4 : Tìm giao điểm của các đường thẳng m, n với mặt trụ (Hình 9-14 ; 9-15 ; 9-16).



Hình 9-9



Hình 9-10

Bài 5 : Tìm giao điểm của các đường thẳng m, n với mặt cầu (Hình 9-17 ; 9-18 ; 9-19).

Bài 6 : Tìm giao điểm của đường thẳng m với mặt xuyến (Hình 9-20 ; 9-21).

Bài 7 : Tìm giao điểm của đường thẳng m với mặt parabôlôit eliptic (Hình 9-22).

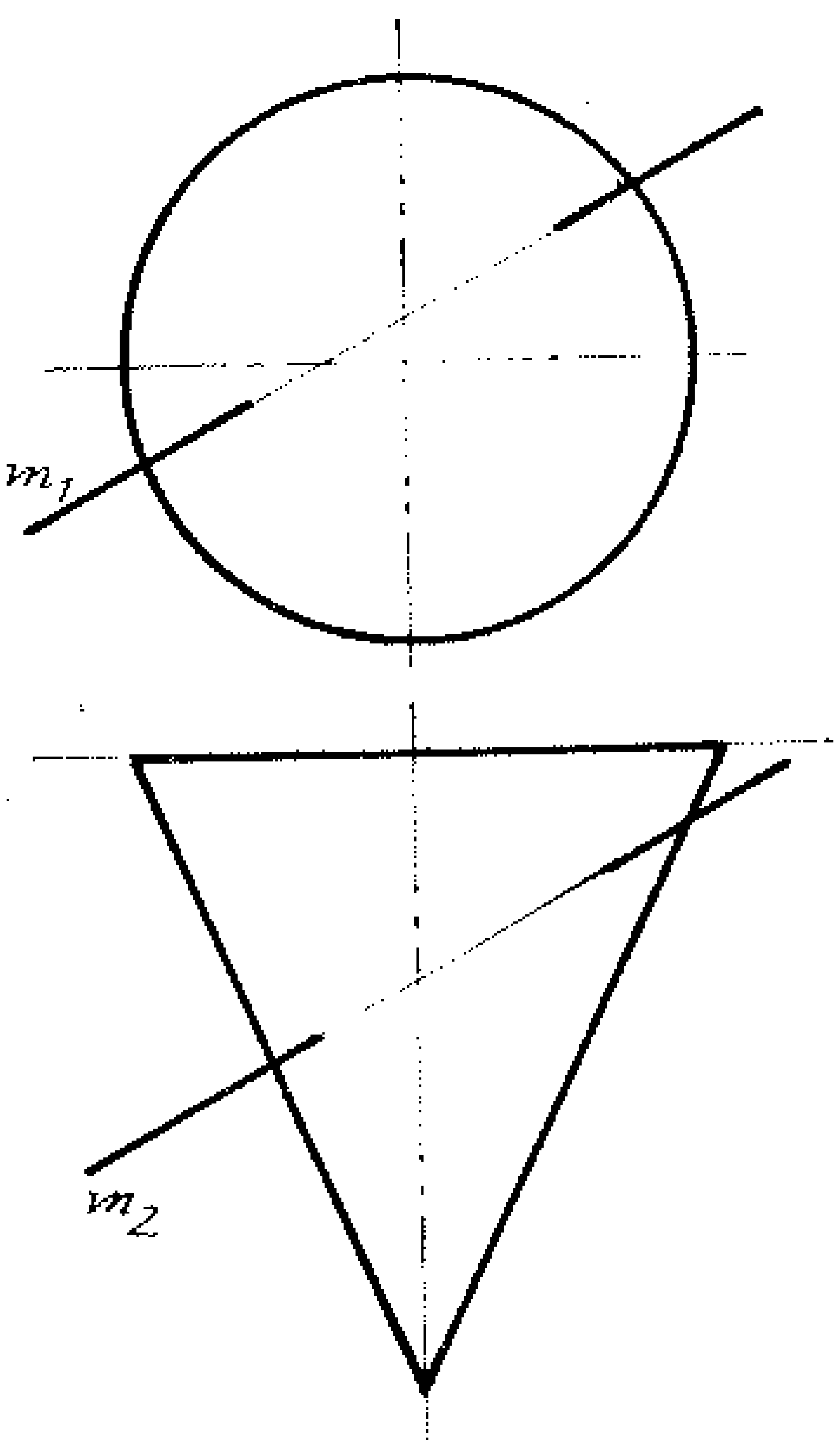
Bài 8 : Tìm giao điểm của đường thẳng m với mặt elipxôit tròn xoay (Hình 9-23).

Bài 9 : Cho đường thẳng m và điểm S không thuộc m. Hãy dựng đường thẳng qua S, cắt m và hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc 60^0 (Hình 9-24).

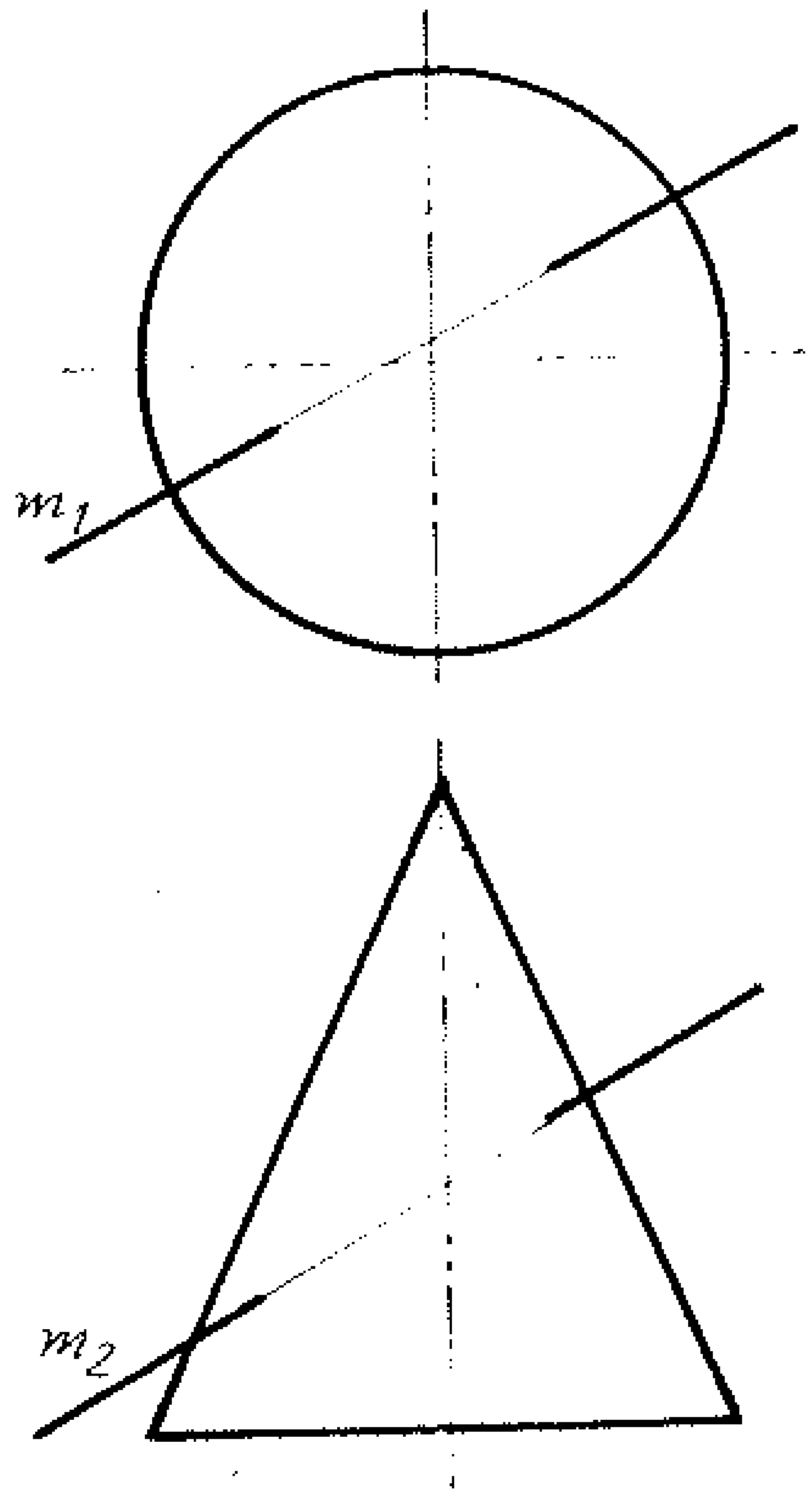
Bài 10 : Cho hai đường thẳng chéo nhau m và n. Tìm những điểm thuộc m và cách n một đoạn bằng 30 mm (Hình 9-25).

Bài 11 : Cho điểm O và đường thẳng m. Tìm những điểm thuộc m và cách O một đoạn bằng 25 mm (Hình 9-26).

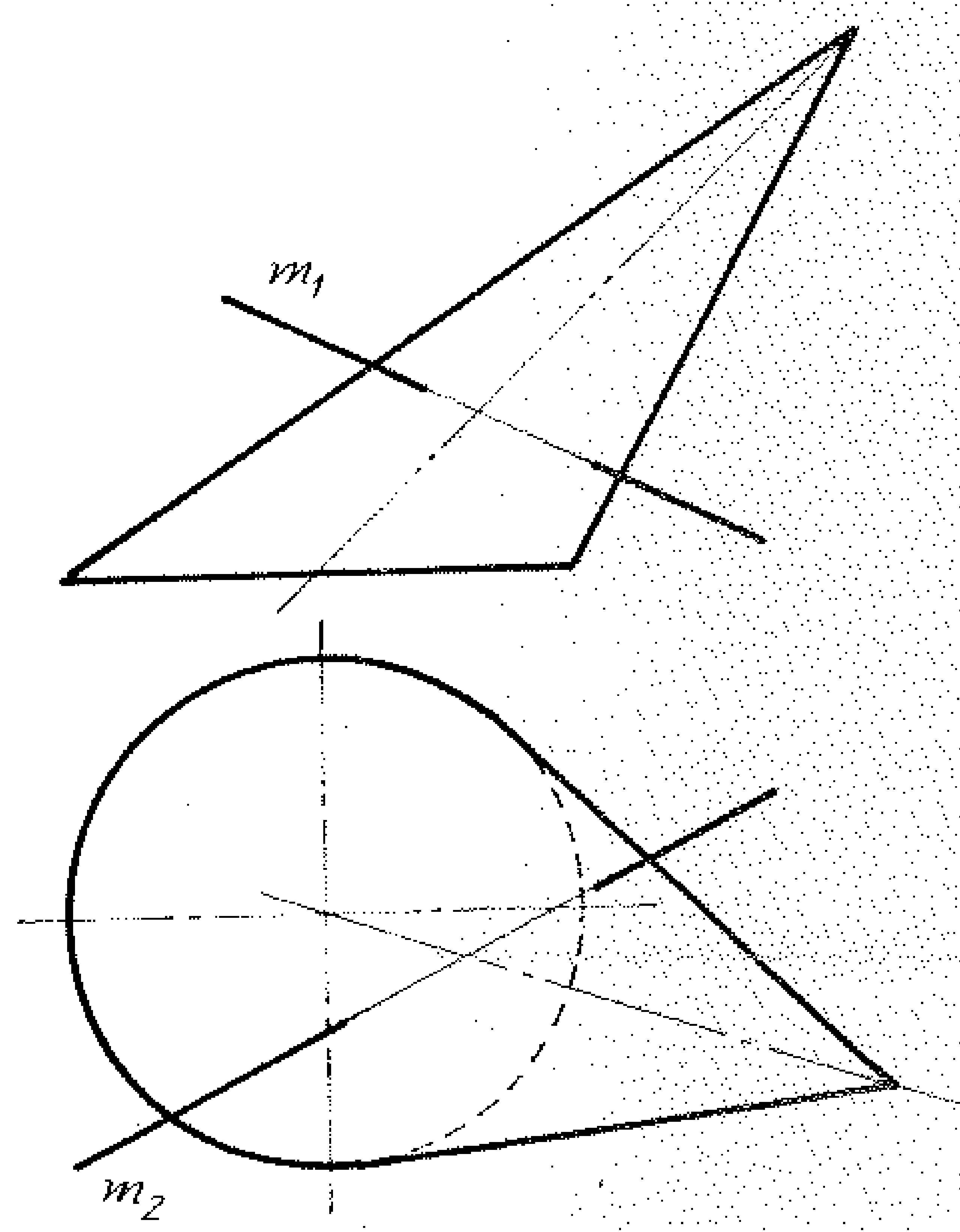
Bài 12 : Cho hai đường thẳng chéo nhau m, n và một điểm S ∈ m. Hãy vẽ các đường thẳng qua S, cắt n và hợp với m một góc 30^0 (Hình 9-27).



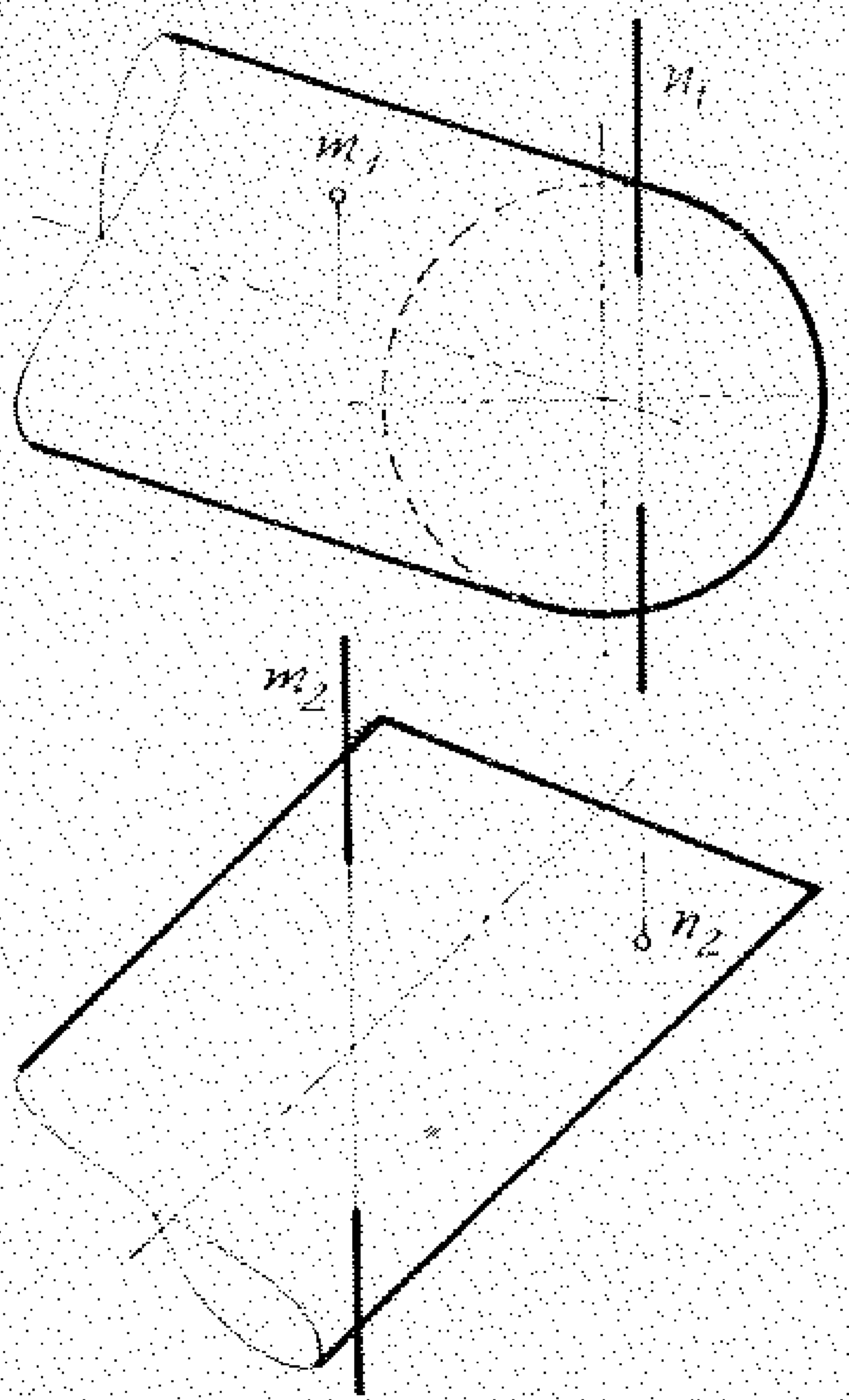
Hình 9-11



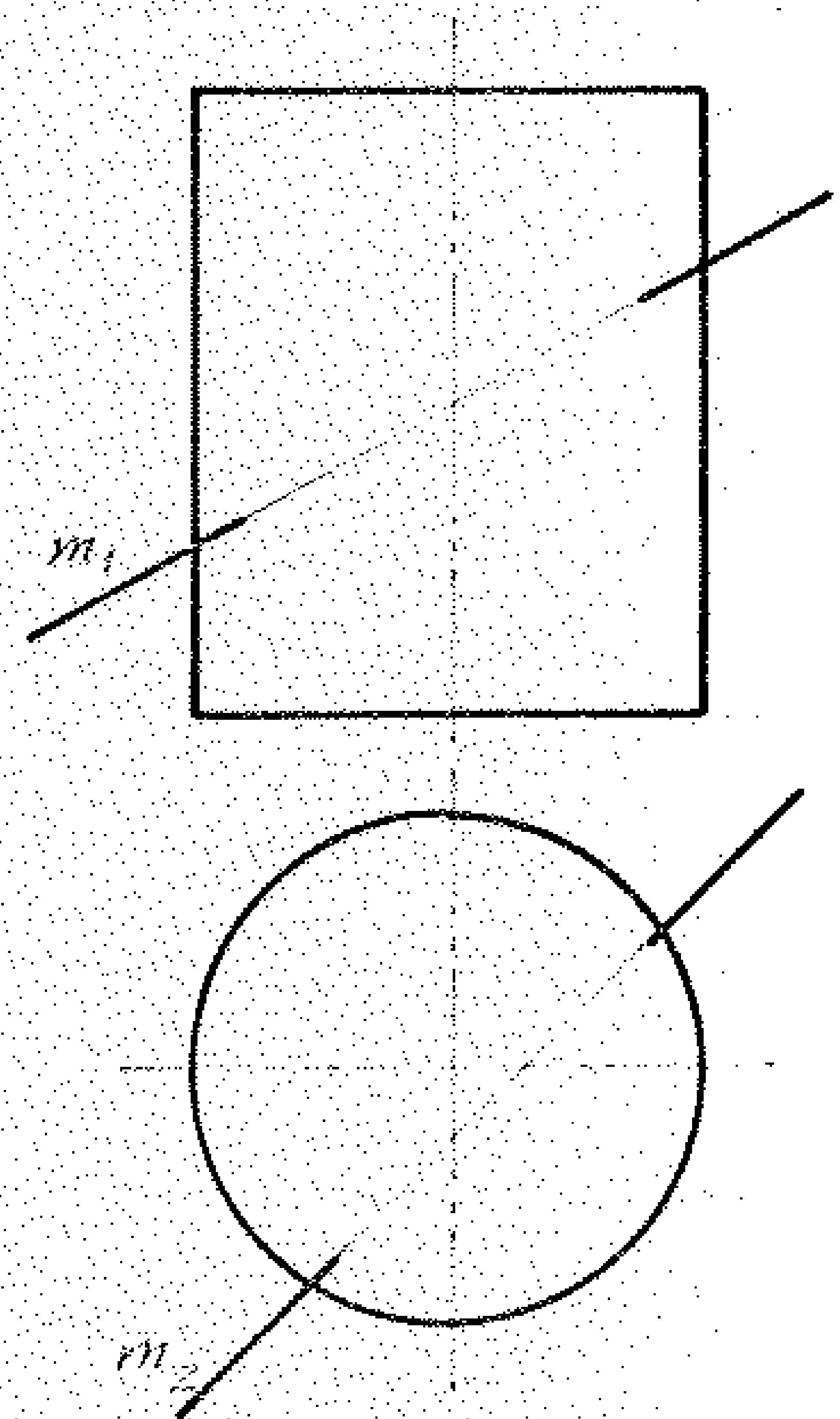
Hình 9-12



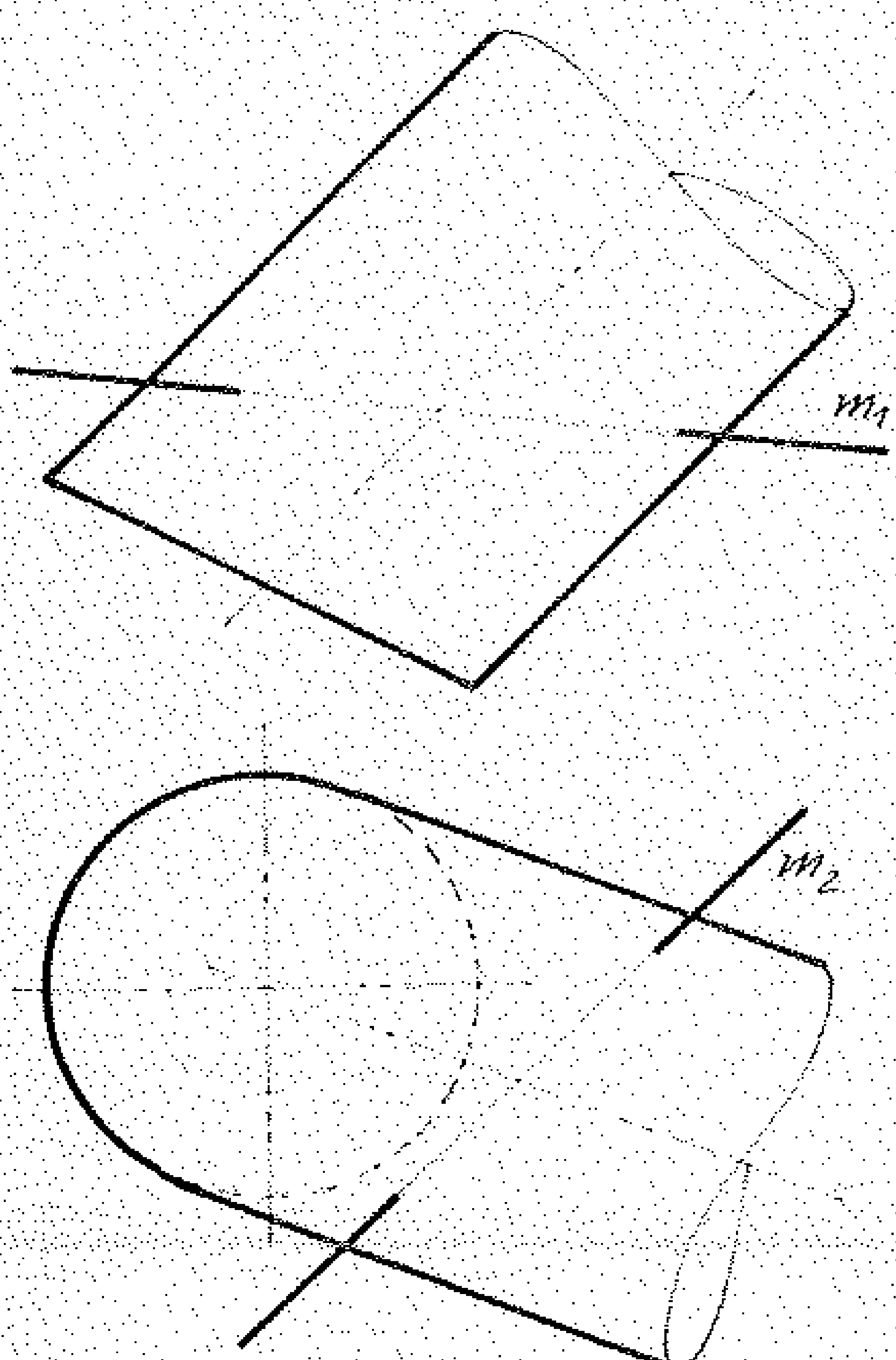
Hình 9-13



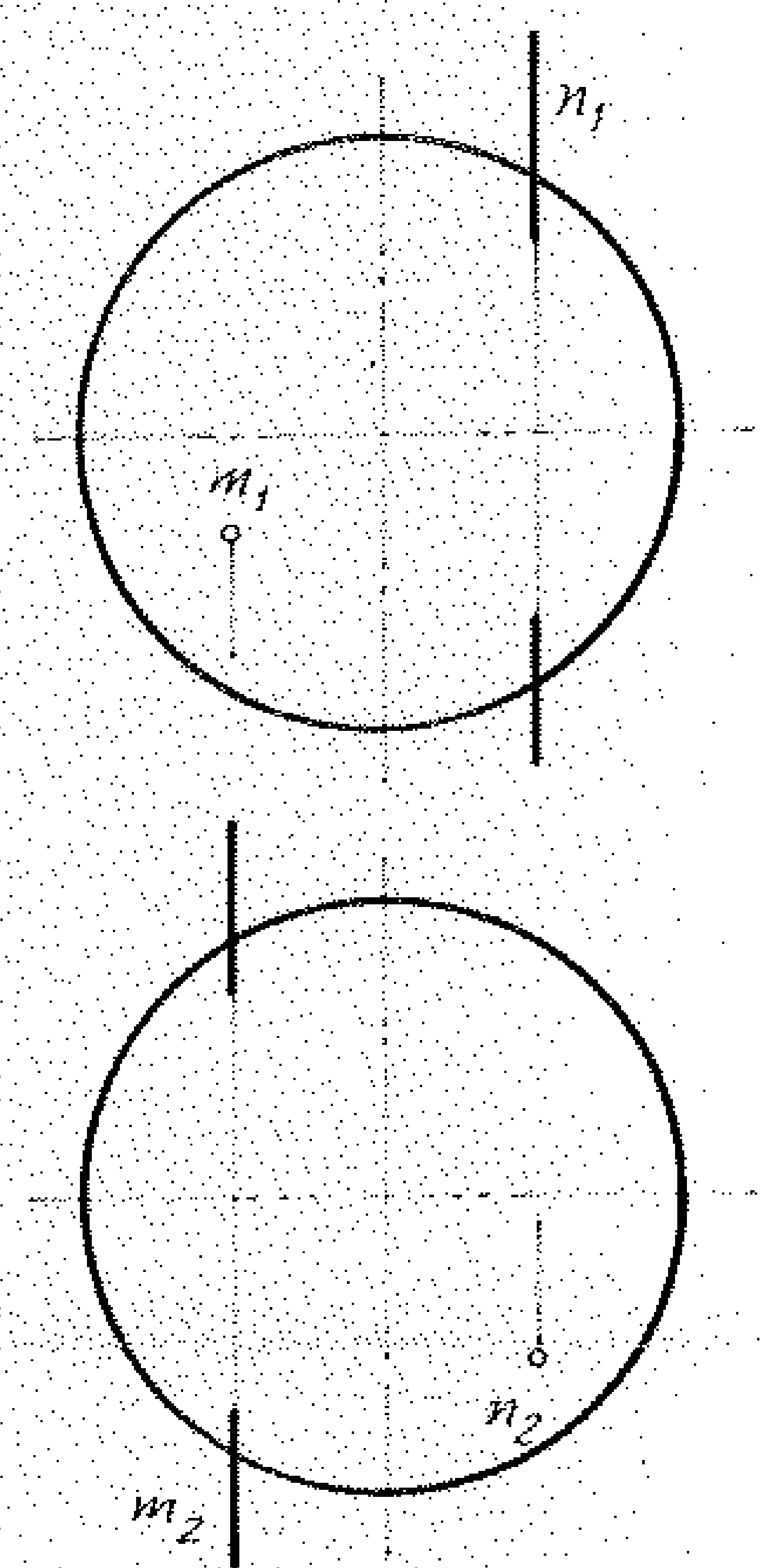
Hình 9-14



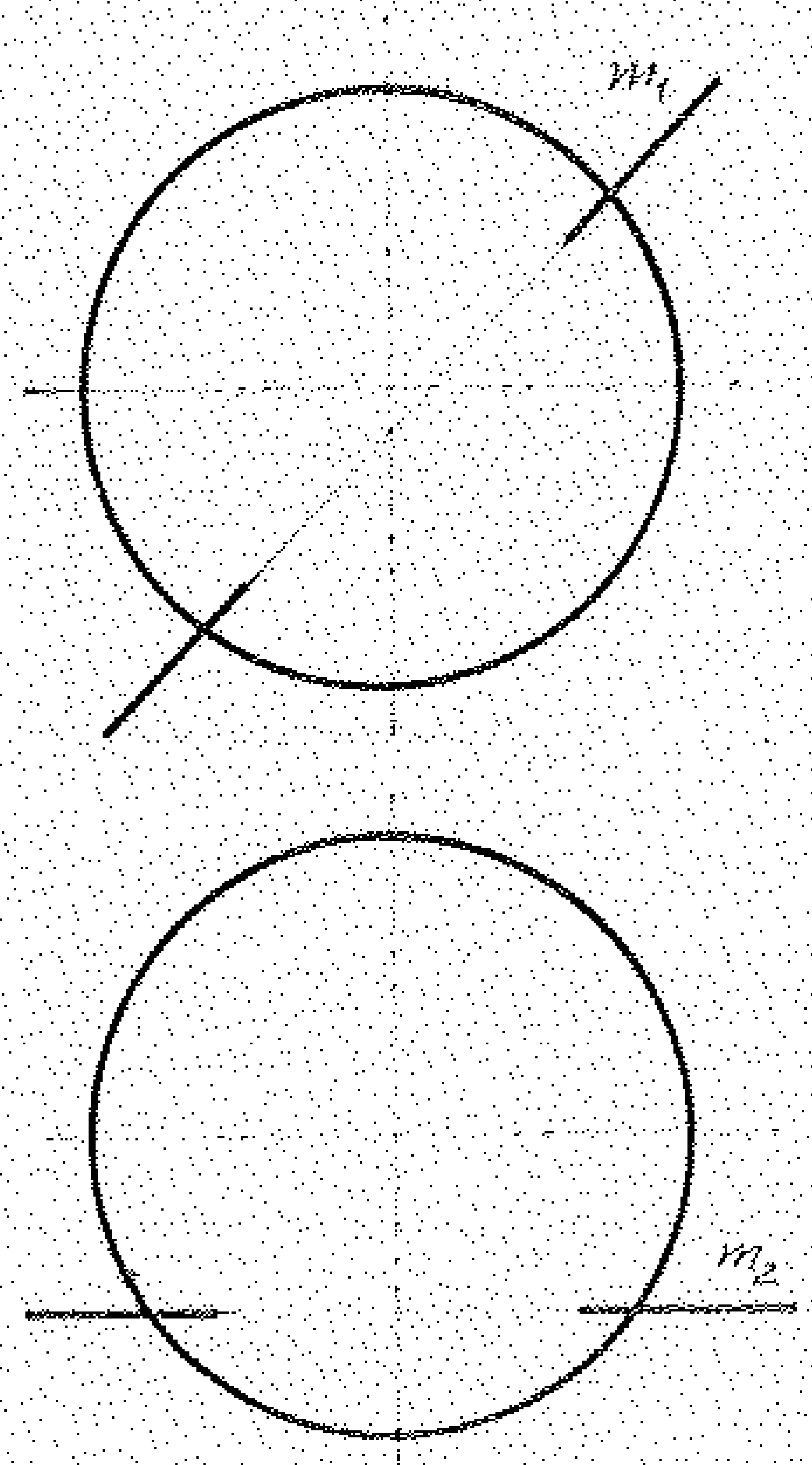
Hình 9-15



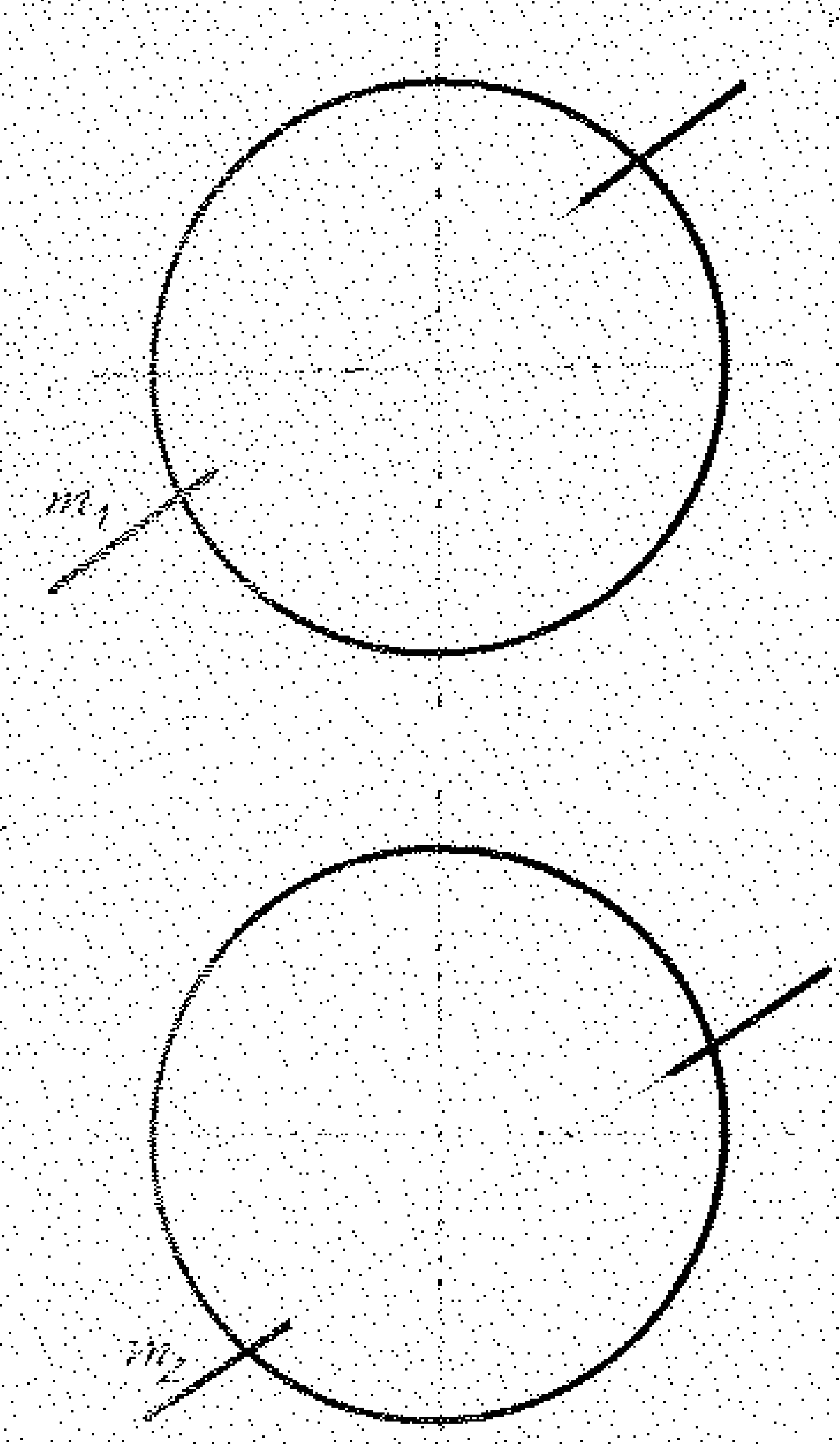
Hình 9-16



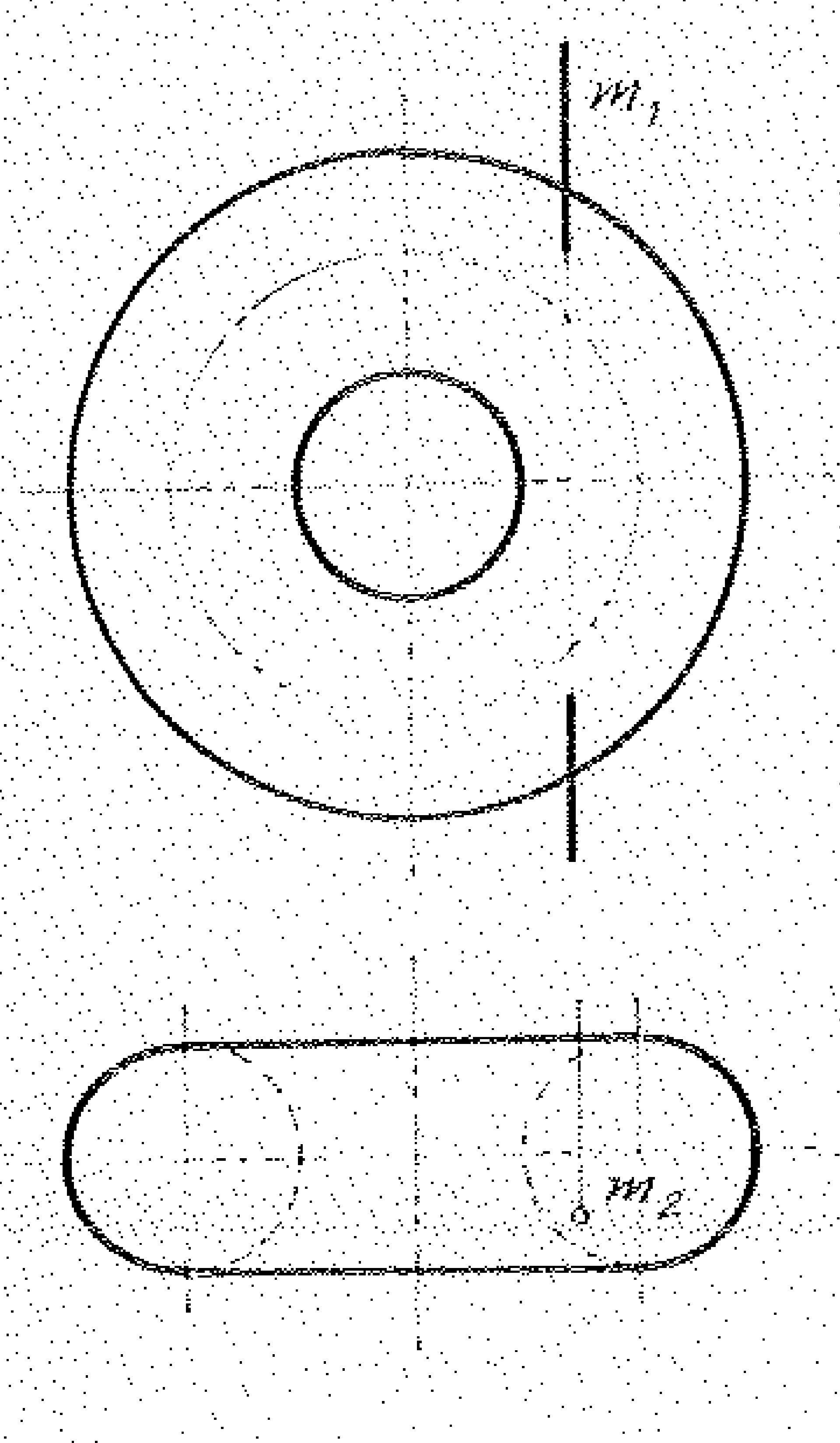
Hình 9-17



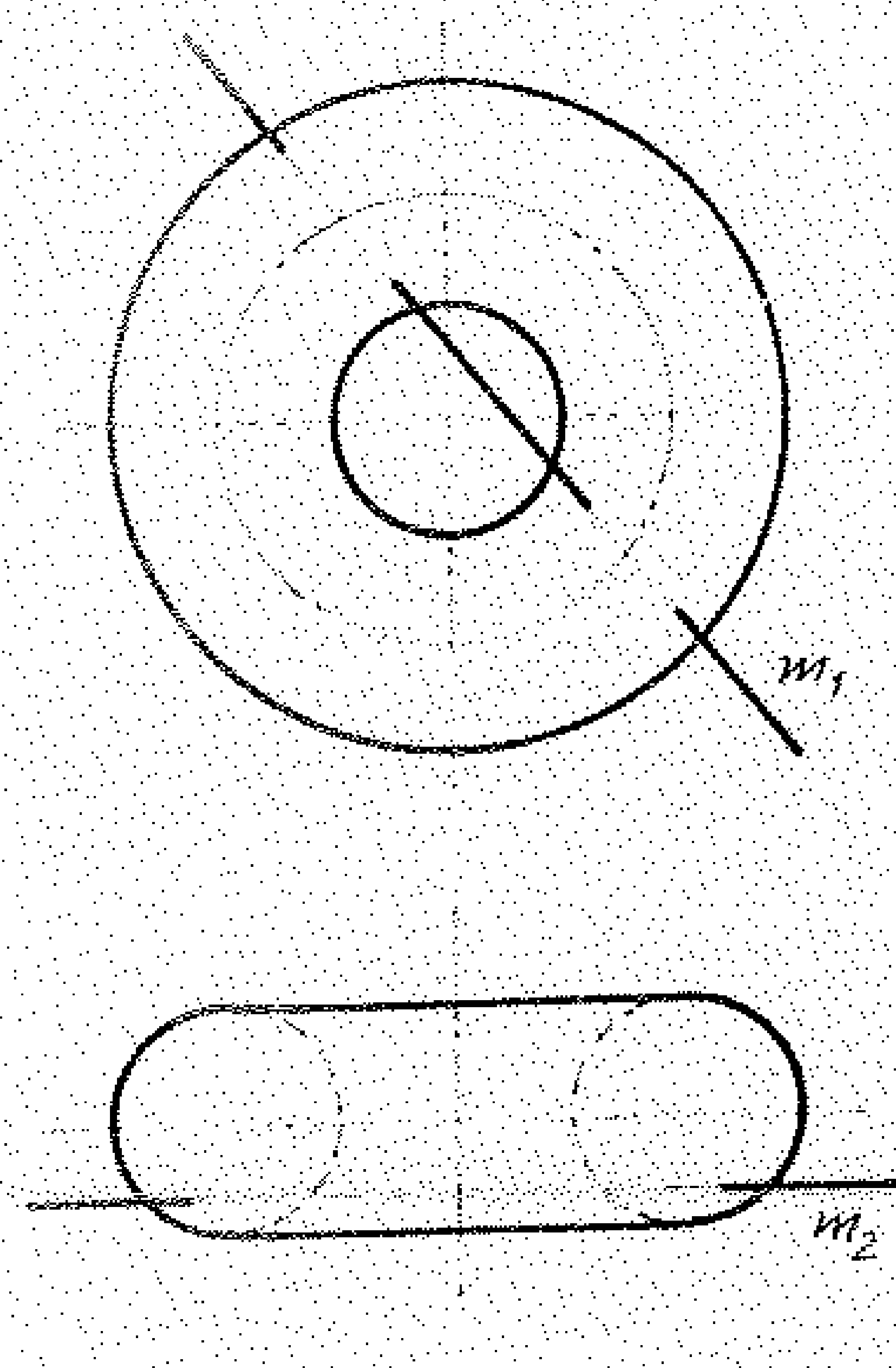
Hình 9-18



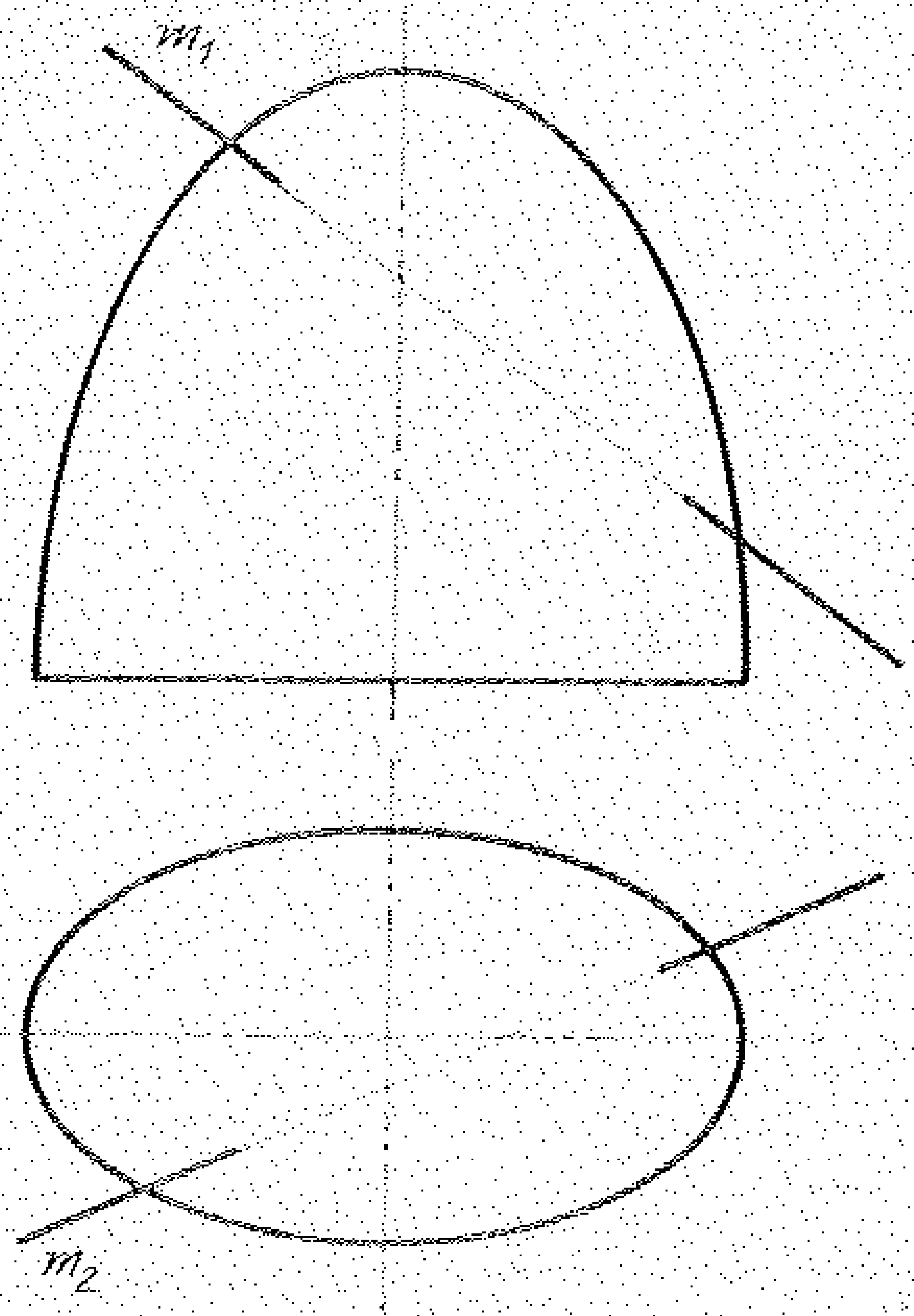
Hình 9-19



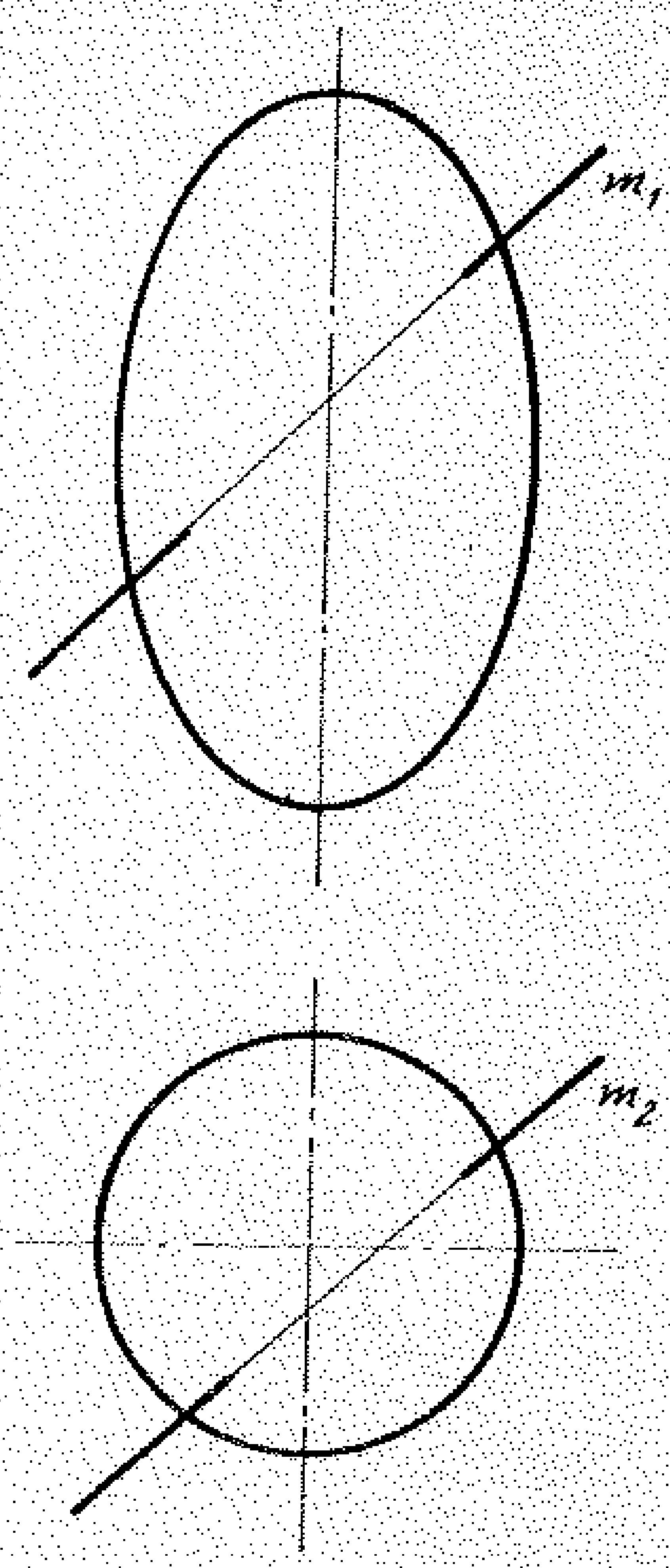
Hình 9-20



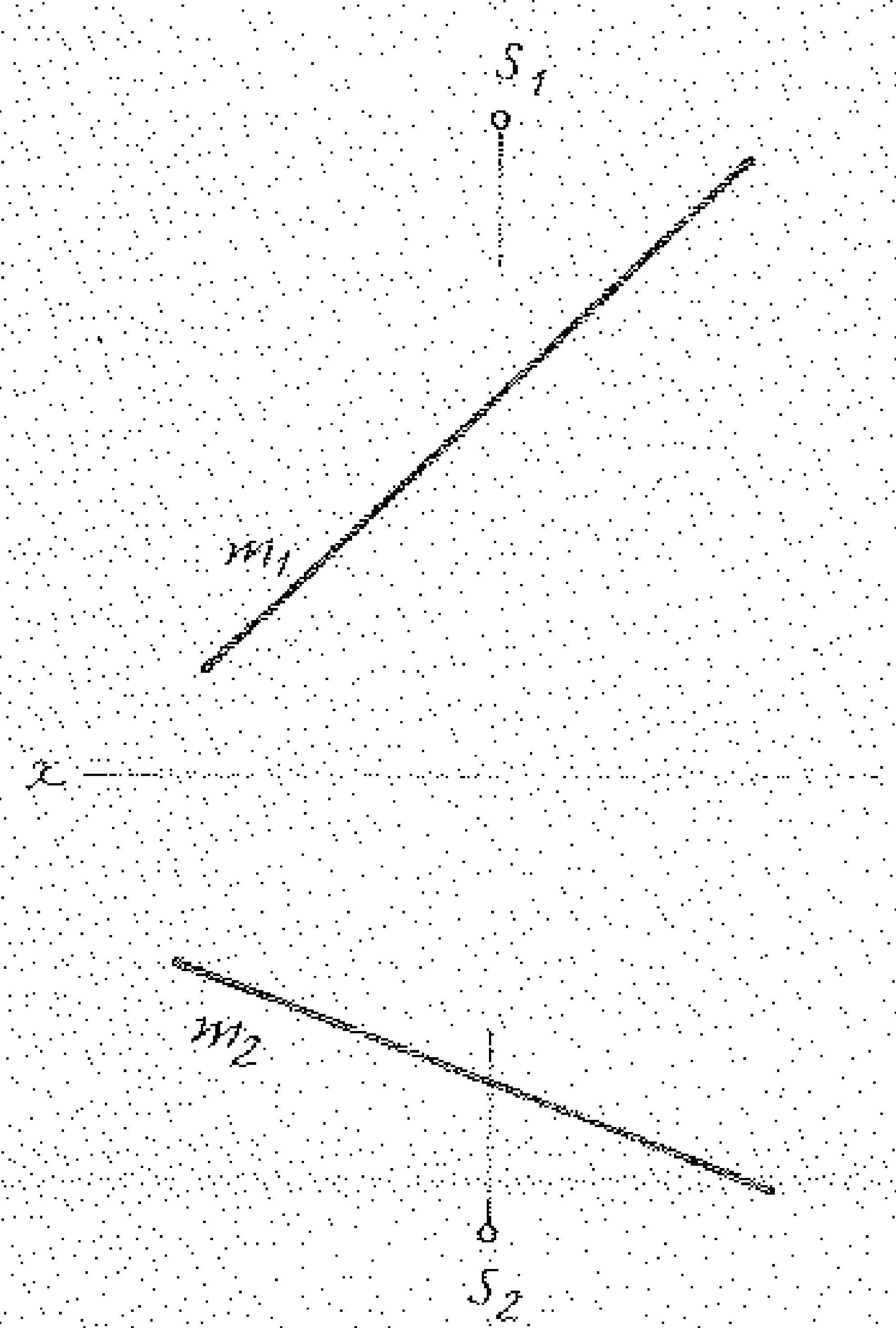
Hình 9-21



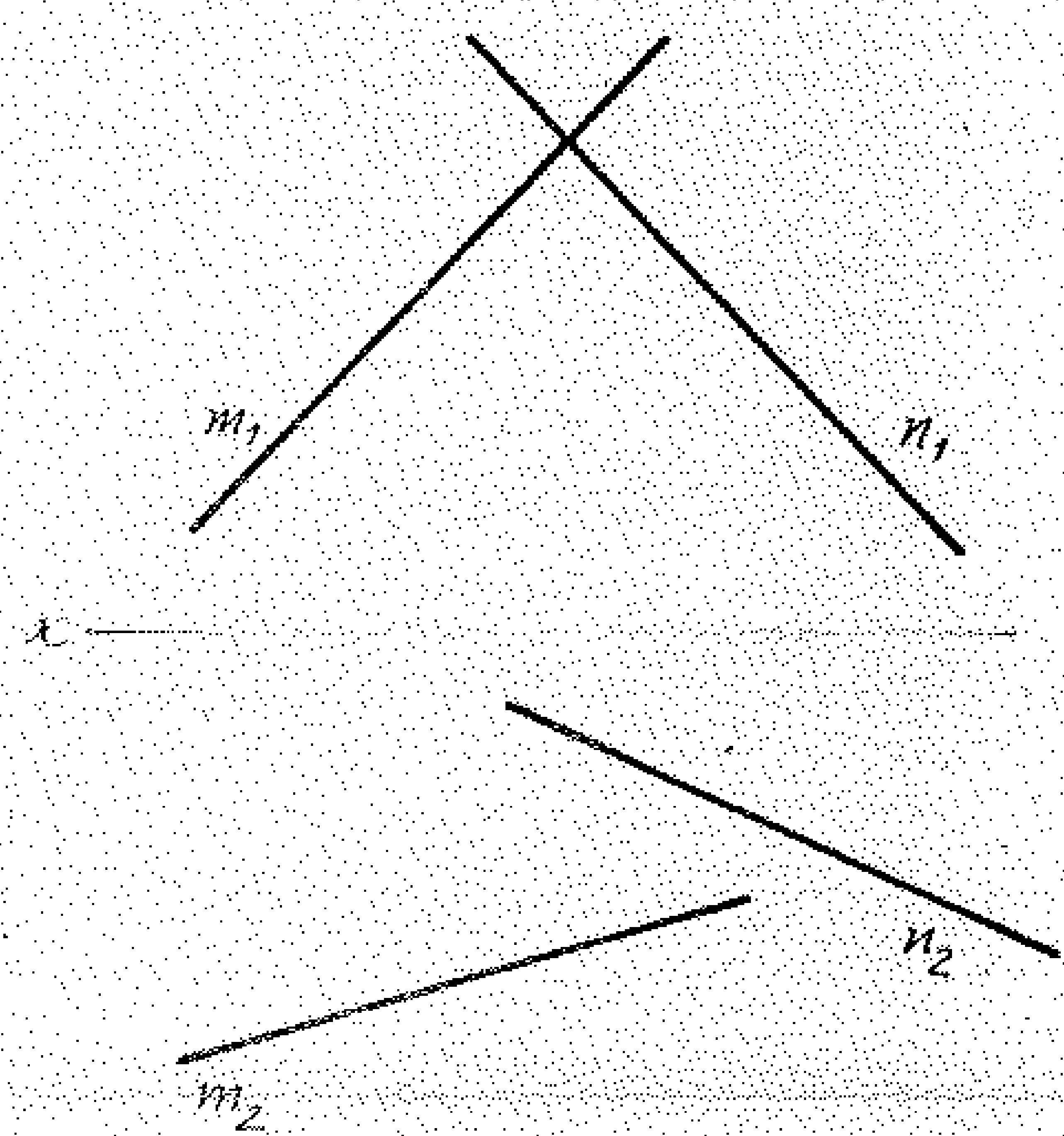
Hình 9–22



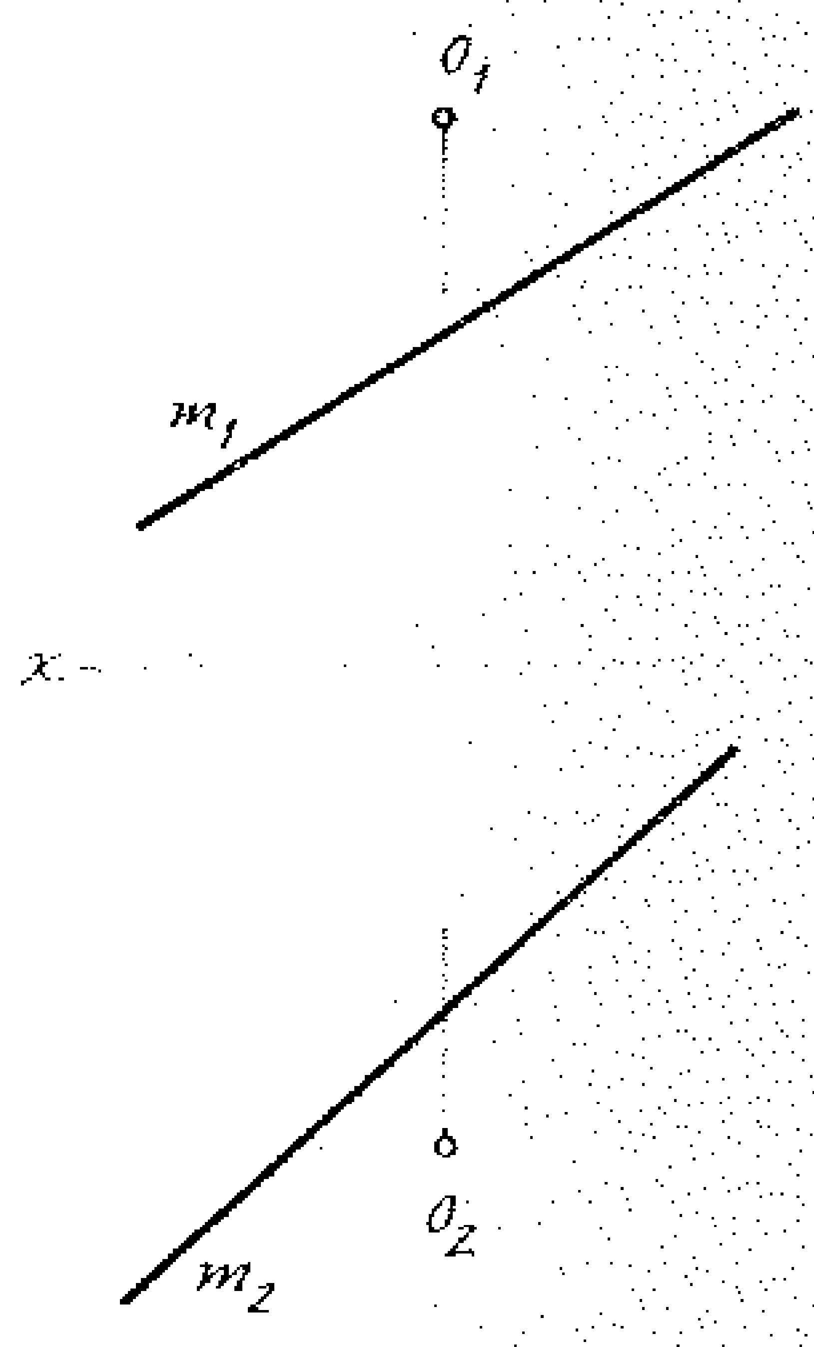
Hình 9–23



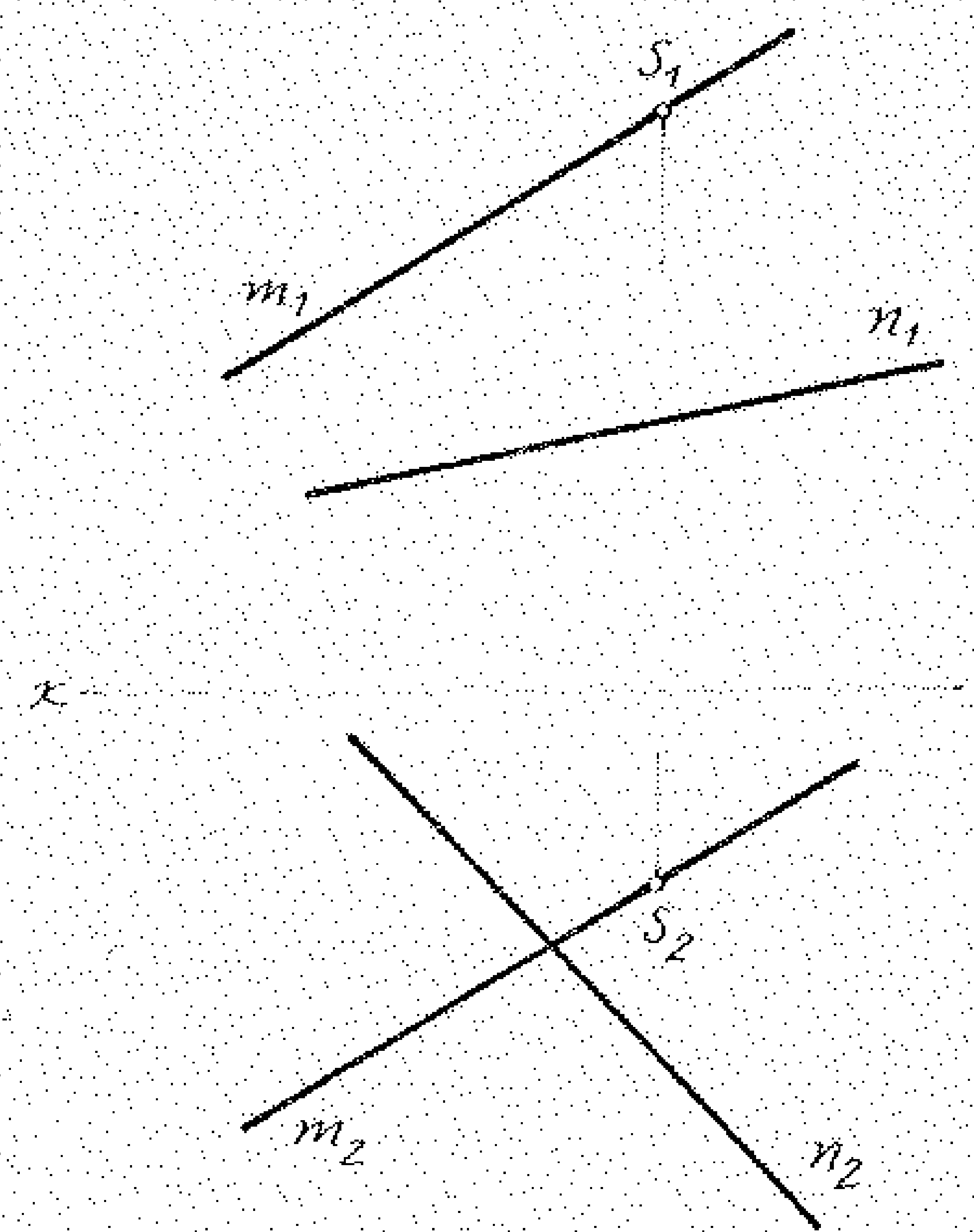
Hình 9–24



Hình 9–25



Hình 9-26



Hình 9-27

CHƯƠNG 10

GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT

10.1. Các thí dụ

+ *Dạng của giao tuyến*

– Giao tuyến của hai đa diện lồi là một hoặc hai đường gẫy khúc khép kín do các đoạn thẳng tạo thành. Mỗi đoạn của đường gẫy khúc này là giao tuyến của một mặt của đa diện này với một mặt của đa diện kia ; mỗi đỉnh của đường gẫy khúc là giao điểm của một cạnh của đa diện này với một mặt của đa diện kia.

– Giao tuyến của đa diện với mặt cong là một hoặc hai đường gẫy khúc khép kín do các đoạn cong phẳng tạo thành. Các đoạn cong phẳng đó là giao tuyến của các mặt của đa diện với mặt cong. Các điểm gãy khúc của giao tuyến là giao điểm của các cạnh của đa diện với mặt cong.

– Giao tuyến của hai mặt cong nói chung là đường cong ghềnh. Bậc của đường cong ghềnh đó bằng tích số bậc của hai mặt cong. Giao tuyến của hai mặt cong bậc hai nói chung là đường cong bậc bốn. Trong một số trường hợp đặc biệt, giao tuyến của hai mặt bậc hai là các đường cong phẳng.

+ *Cách chọn mặt cắt phụ trợ*

Nói chung các bài toán vẽ giao tuyến của hai mặt có thể đưa về một trong hai bài toán quen thuộc sau :

– Vẽ giao tuyến của mặt phẳng với các mặt.

– Vẽ giao điểm của đường thẳng với các mặt.

Ngoài ra khi vẽ giao tuyến của hai mặt cong thường phải xác định một số điểm của giao tuyến (tức là các điểm thuộc cả hai mặt cong đó) nhờ phương pháp mặt cắt phụ trợ.

Các mặt cắt phụ trợ được chọn sao cho giao tuyến phụ của nó với các mặt cong là các đường dễ vẽ (như đường thẳng, đường tròn).

Theo nguyên tắc đó, mặt cắt phụ trợ được chọn tùy thuộc từng loại mặt cong như sau :

– Đối với mặt nón, mặt cắt phụ trợ nên chọn là mặt phẳng chứa đỉnh nón.

– Đối với mặt trụ, mặt cắt phụ trợ nên chọn là mặt phẳng song song với đường sinh thẳng của mặt trụ.

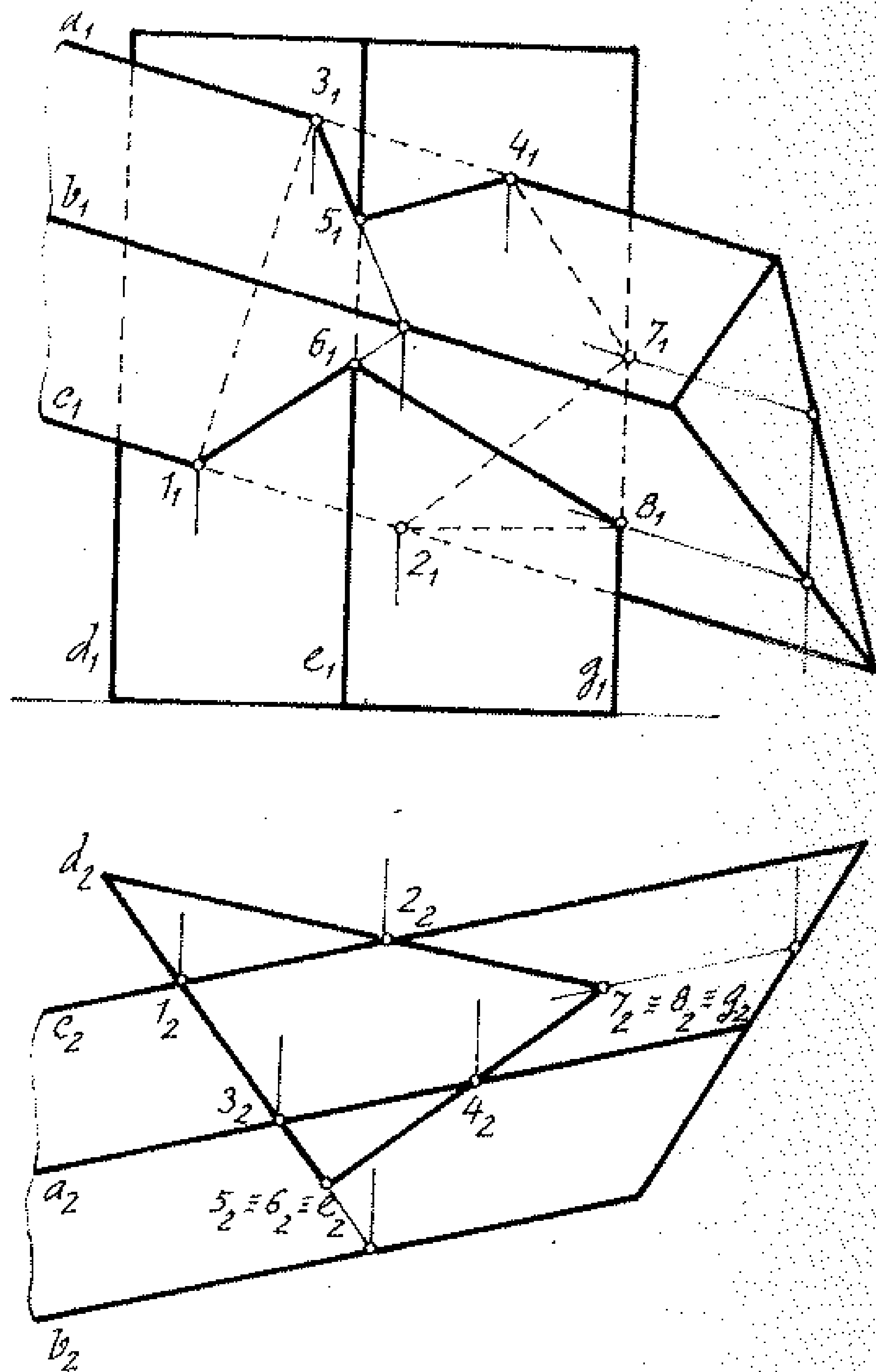
– Đối với mặt tròn xoay, mặt cắt phụ trợ nên chọn là mặt phẳng vuông góc với trục xoay hoặc là mặt cầu có tâm nằm trên trục xoay.

– Đối với mặt cầu, mặt cắt phụ trợ nên chọn là mặt phẳng chứa tâm cầu hoặc là các mặt phẳng đồng mức (tức là mặt phẳng song song với một mặt phẳng hình chiếu).

Thí dụ 1: Vẽ giao tuyến của mặt lăng trụ xiên (abc) và mặt lăng trụ đứng (deg), (Hình 10-1).

Giải : Giao tuyến là một đường gẫy khúc khép kín có hình chiếu bằng thuộc hình chiếu bằng của mặt lăng trụ đứng (deg) và ở trong giới hạn của hình chiếu bằng của mặt lăng trụ xiên (abc).

Dễ dàng suy ra hình chiếu đứng của giao tuyến bằng cách gắn nó vào các mặt của lăng trụ (abc) hoặc nói cách khác, tìm giao điểm của các cạnh a và c của mặt lăng trụ (abc) với mặt lăng trụ (deg) rồi tìm giao điểm của các cạnh e và g của mặt lăng trụ (deg) với mặt lăng trụ (abc).



Hình 10-1

Nối các giao điểm xác định được và xét thấy, khuất của giao tuyến theo quy tắc sau :

– Chỉ nối hai giao điểm nếu chúng cùng thuộc một mặt của đa diện thứ nhất, và cùng thuộc một mặt của đa diện thứ hai.

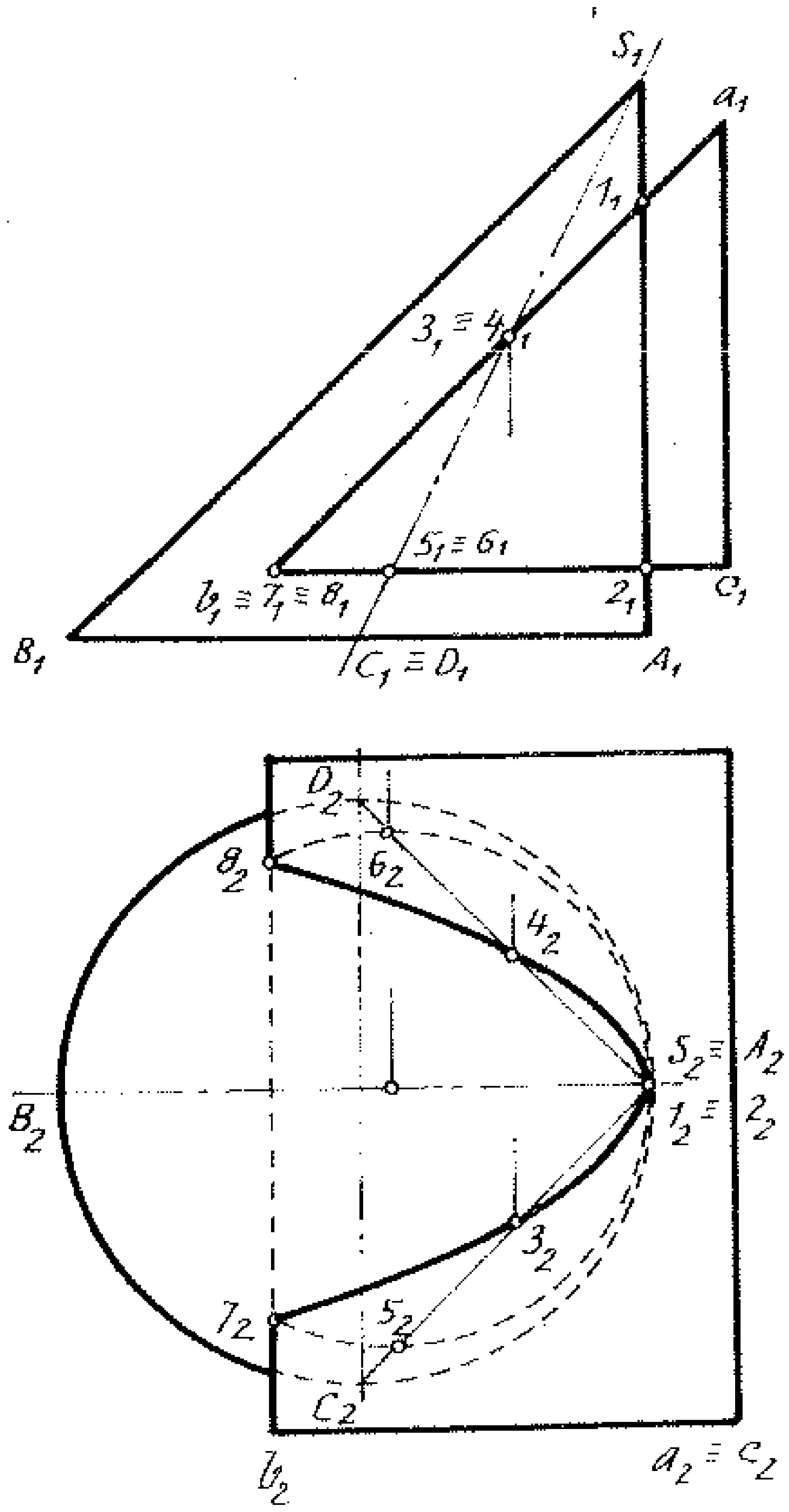
– Trên một hình chiếu nào đó, một đoạn thẳng của giao tuyến là thấy nếu nó thuộc hai mặt đều thấy của cả hai đa diện.

Trên hình vẽ, giao tuyến là đường gẫy khúc 1 3 5 4 7 2 8 6 1 và trên hình chiếu đứng, các đoạn $1_1 6_1 8_1$ và $3_1 5_1 4_1$ là thấy.

Bạn đọc hãy giải thích sự thấy, khuất của các cạnh của hai mặt lăng trụ trên hình chiếu đứng.

Thí dụ 2: Vẽ giao tuyến của mặt nón đỉnh S và mặt lăng trụ chiếu đứng (abc) (Hình 10-2).

Giải : Giao tuyến là một đường gẫy khúc khép kín có hình chiếu đứng thuộc hình chiếu



Hình 10-2

đứng của mặt lăng trụ (abc) và ở trong giới hạn của hình chiếu đứng của mặt nón.

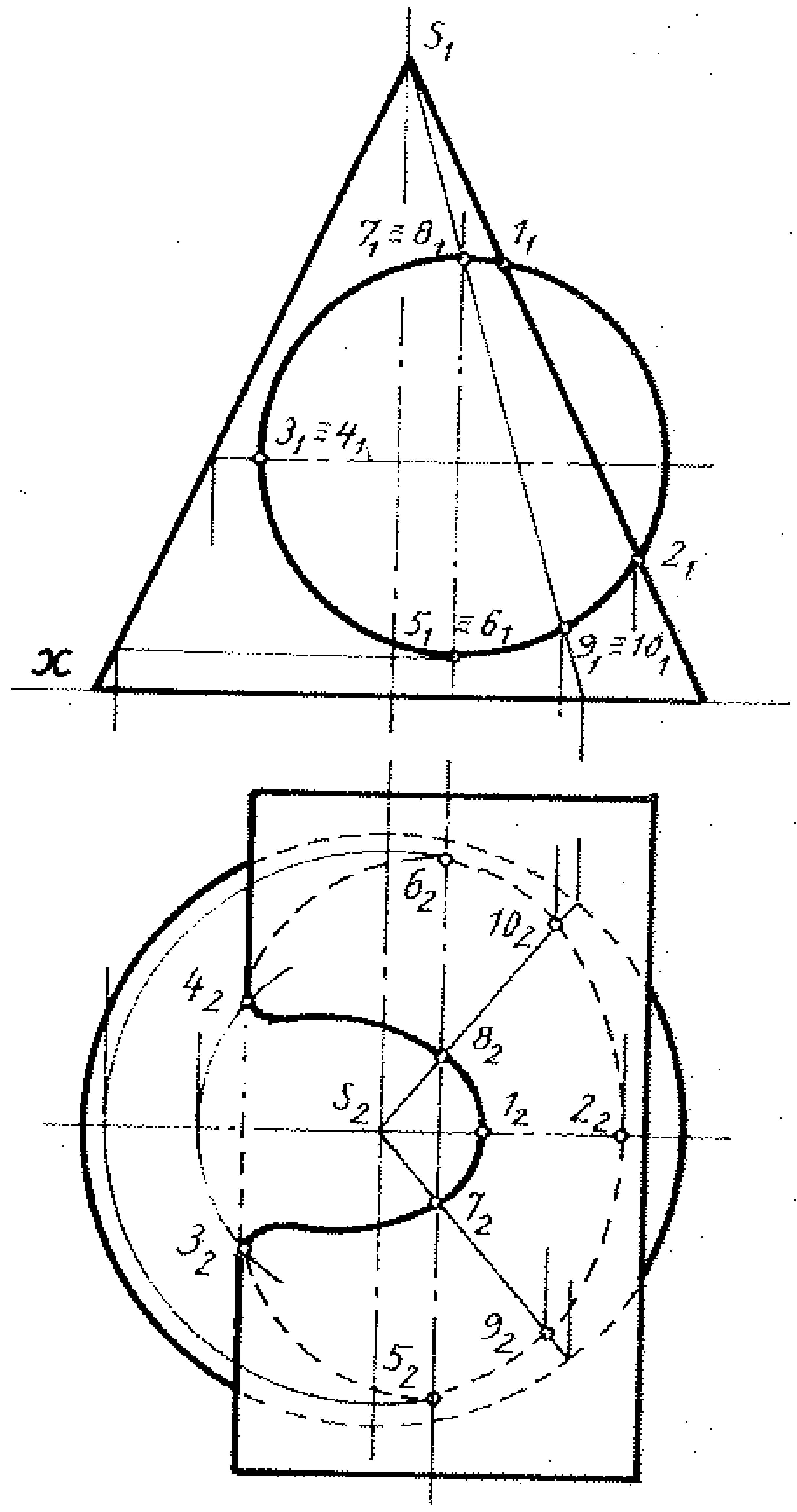
Hình chiếu bằng của giao tuyến gồm có cung parabôn $7_2 3_2 1_2 4_2 8_2$ – hình chiếu bằng của giao tuyến giữa mặt (ab) của lăng trụ với mặt nón và cung tròn $7_2 5_2 2_2 6_2 8_2$ – hình chiếu bằng của giao tuyến giữa mặt (bc) của lăng trụ với mặt nón. Các điểm gãy khúc 7 và 8 là giao điểm của cạnh b của lăng trụ với mặt nón.

Trên hình chiếu bằng cung parabôn thấy, cung tròn khuất.

Thí dụ 3: Vẽ giao tuyến của mặt nón đỉnh S và mặt trụ chiếu đứng (Hình 10–3).

Giải : Giao tuyến là một đường cong ghềnh bậc bốn có hình chiếu đứng là cung tròn lớn $1_1 2_1$ thuộc hình chiếu đứng của mặt trụ và nằm trong giới hạn của hình chiếu đứng của mặt nón.

Để vẽ hình chiếu bằng của giao tuyến ta có thể gắn một số điểm của nó vào mặt nón. Chẳng hạn trên hình vẽ, các điểm 3, 4 và 5, 6 được gắn vào các đường tròn vĩ tuyến của mặt nón ; các điểm 7, 8 và 9, 10 được gắn vào các đường sinh của mặt nón.



Hình 10 – 3

Cũng có thể nói rằng ta đã dùng các mặt phẳng phụ trợ để xác định một số điểm chung của hai mặt đã cho. Chẳng hạn mặt phẳng bằng chứa trục của mặt trụ cắt mặt nón theo một đường tròn vĩ tuyến, cắt mặt trụ theo hai đường sinh. Các giao tuyến phụ này cắt nhau tại hai điểm 3 và 4 – hai điểm thuộc giao tuyến cần vẽ. Ngoài ra các mặt phẳng chiếu đứng chứa đỉnh S của mặt nón sẽ cắt cả mặt nón và mặt trụ theo các đường sinh. Trên hình vẽ một mặt phẳng như vậy cho ta các điểm 7, 8 và 9, 10 thuộc giao tuyến.

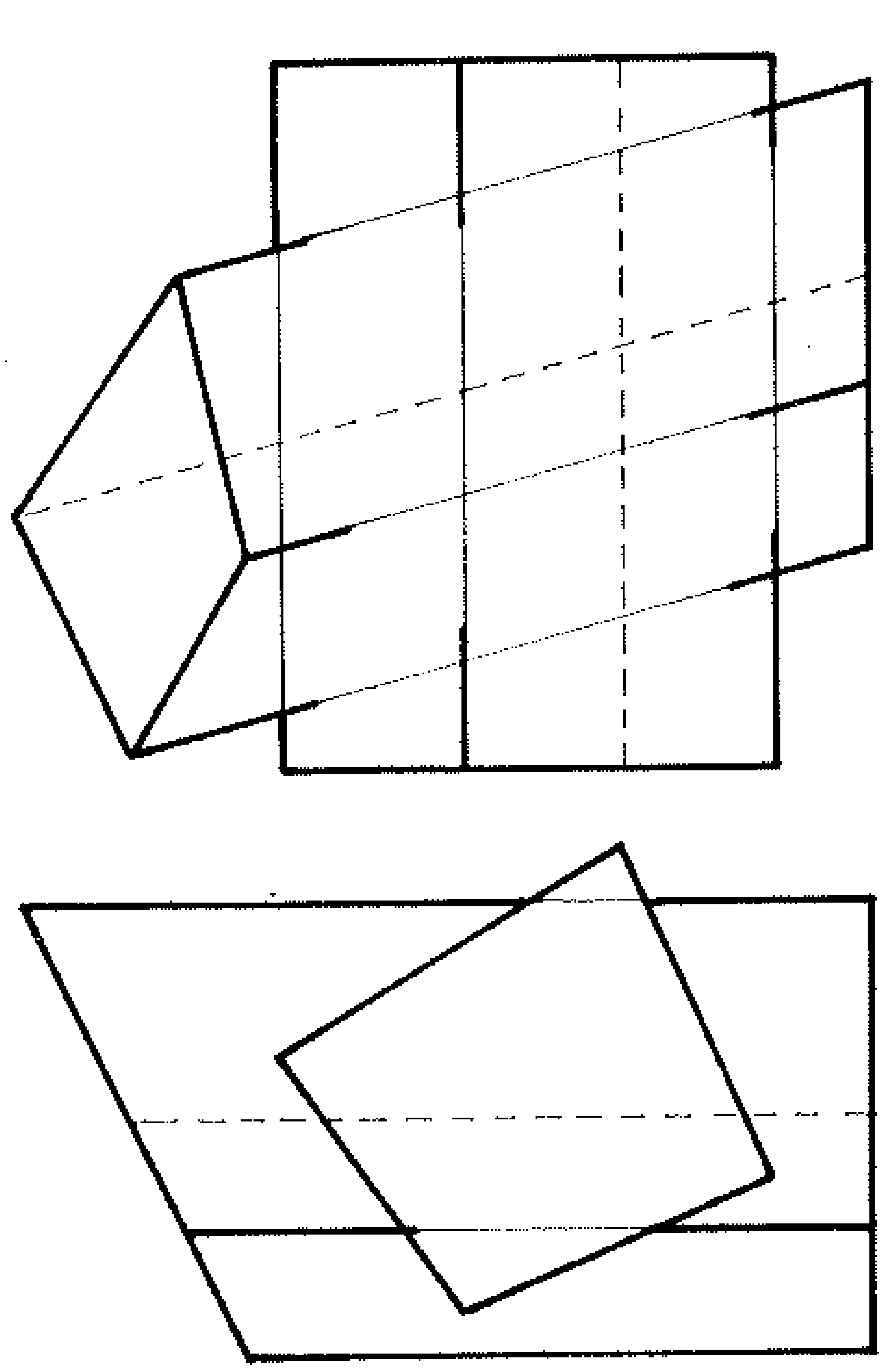
Nối các điểm $1_2 - 7_2 - 3_2 - 5_2 - 9_2 - 2_2 - 10_2 - 6_2 - 4_2 - 8_2 - 1_2$ bằng một đường cong trơn đều với chú ý rằng cung $3_2 - 7_2 - 1_2 - 8_2 - 4_2$ thấy, cung còn lại của giao tuyến bị khuất – Các điểm 3_2 và 4_2 là hai điểm giới hạn phần thấy và khuất các giao tuyến trên hình chiếu bằng, chúng cũng là các điểm tiếp xúc của giao tuyến và đường sinh bao của mặt trụ trên hình chiếu bằng.

10.2. Bài tập

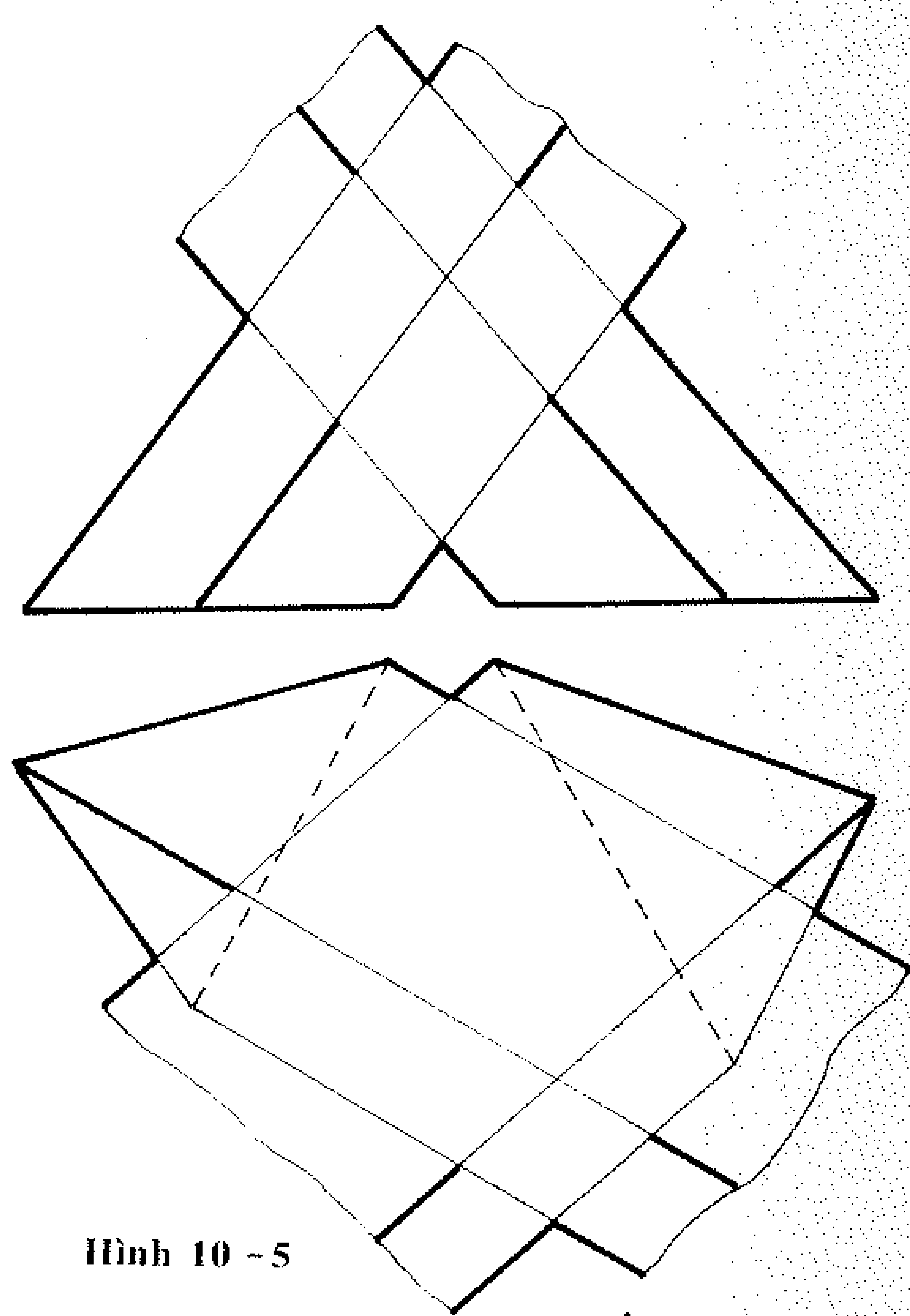
+ Giao tuyến của hai đa diện

Bài 1 : Vẽ giao tuyến của hai lăng trụ (Hình 10–4, 10–5).

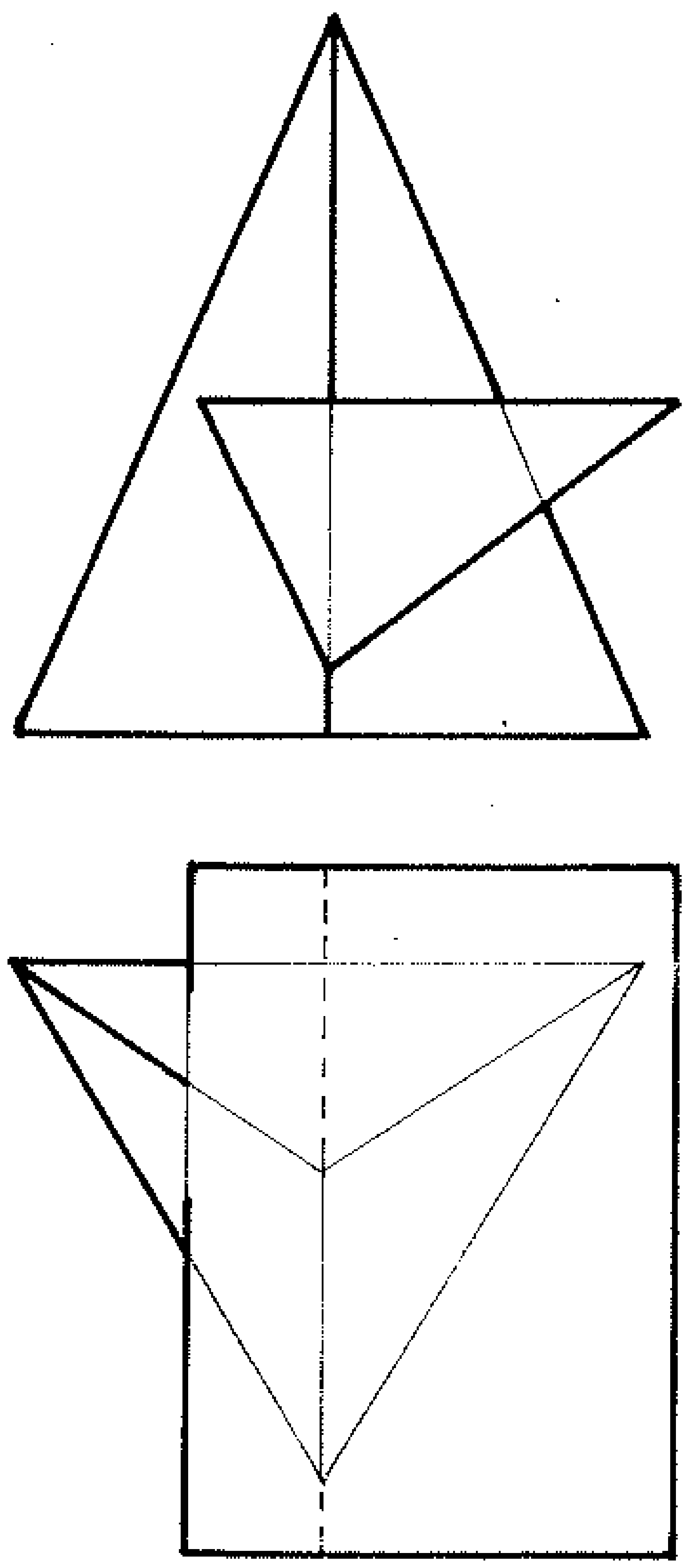
Bài 2 : Vẽ giao tuyến của lăng trụ và chóp (Hình 10–6 ; 10–7 , 10–8, 10–9, 10–10, 10–11).



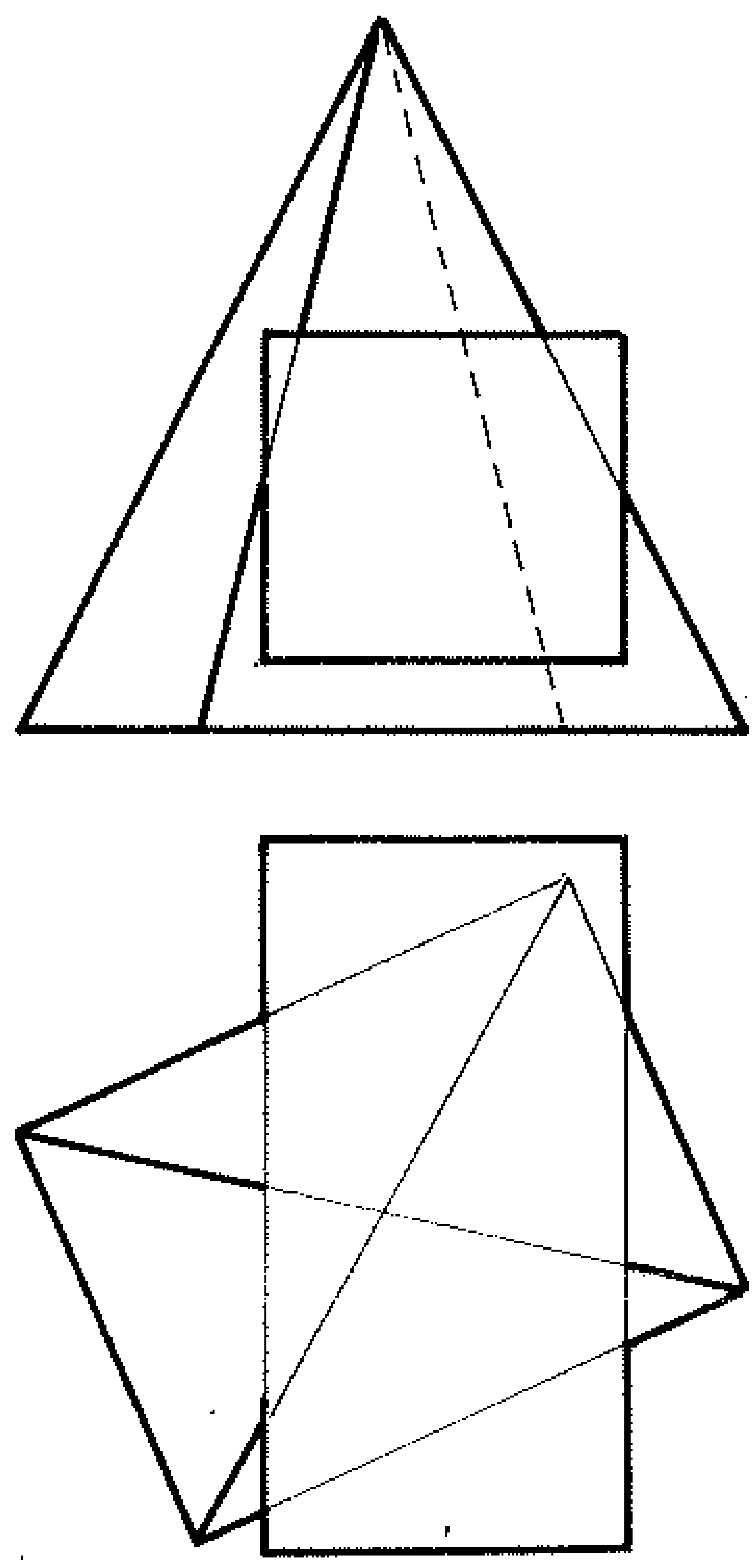
Hình 10 -4



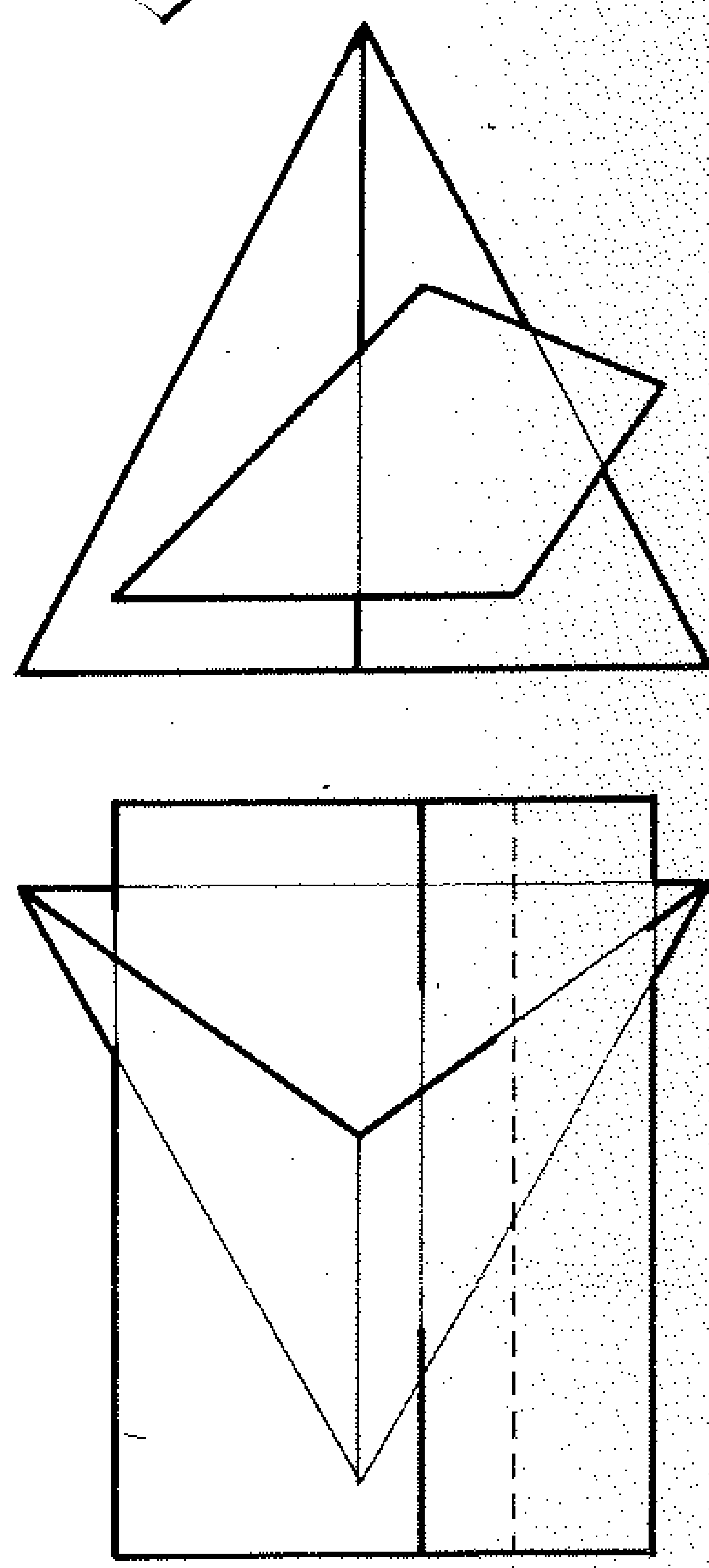
Hình 10 - 5



Hình 10 - 6

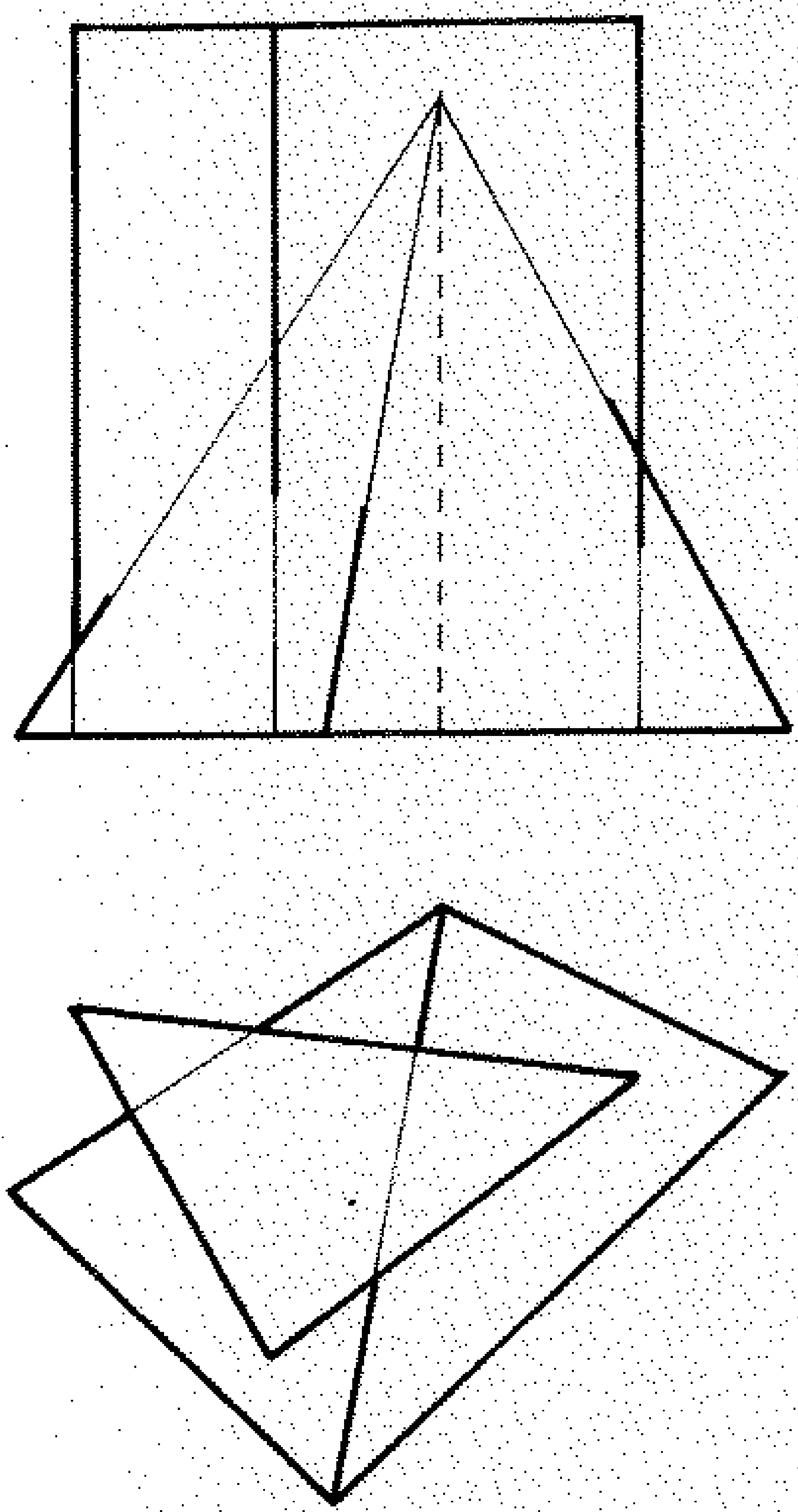


Hình 10 - 7

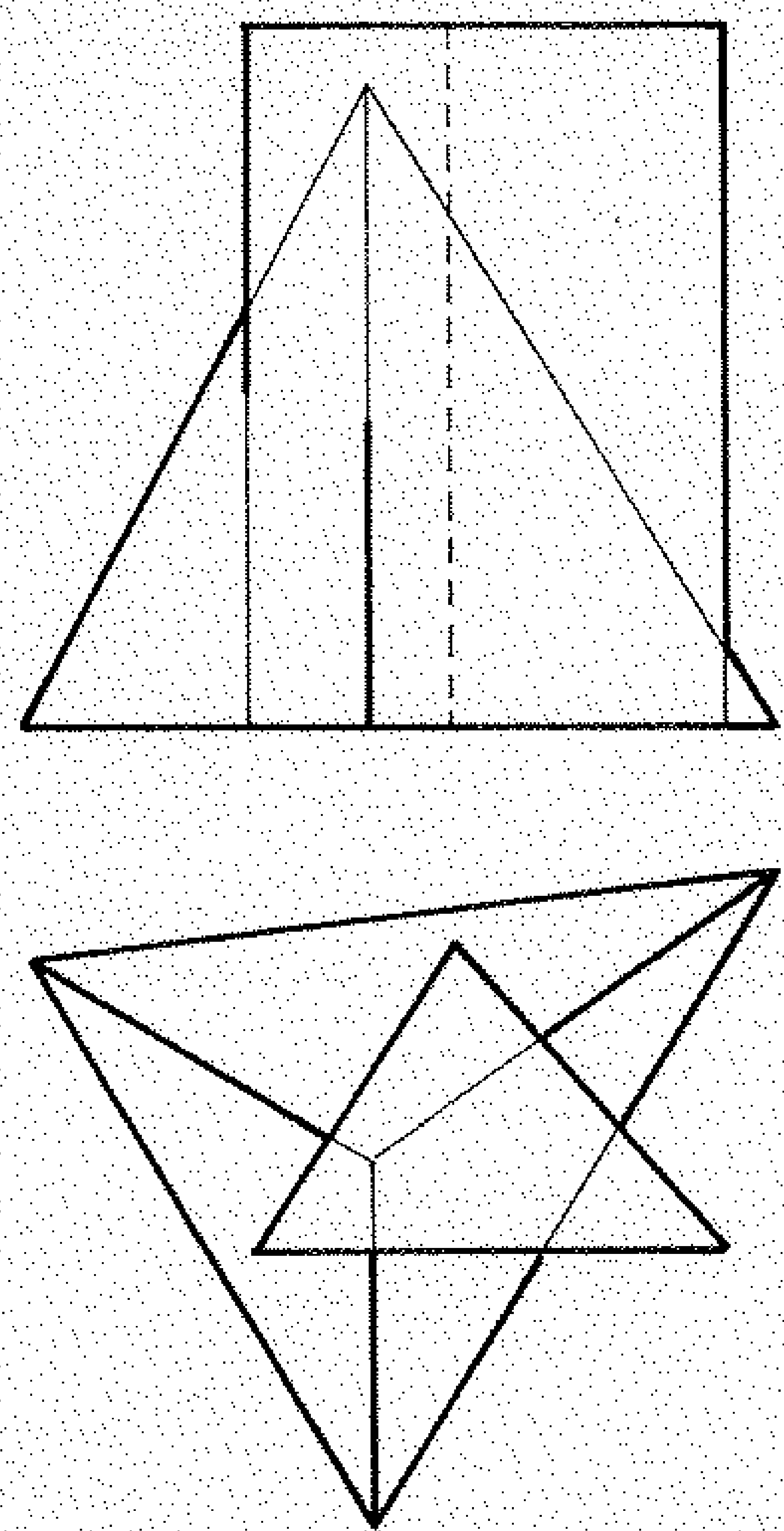


Hình 10 - 8

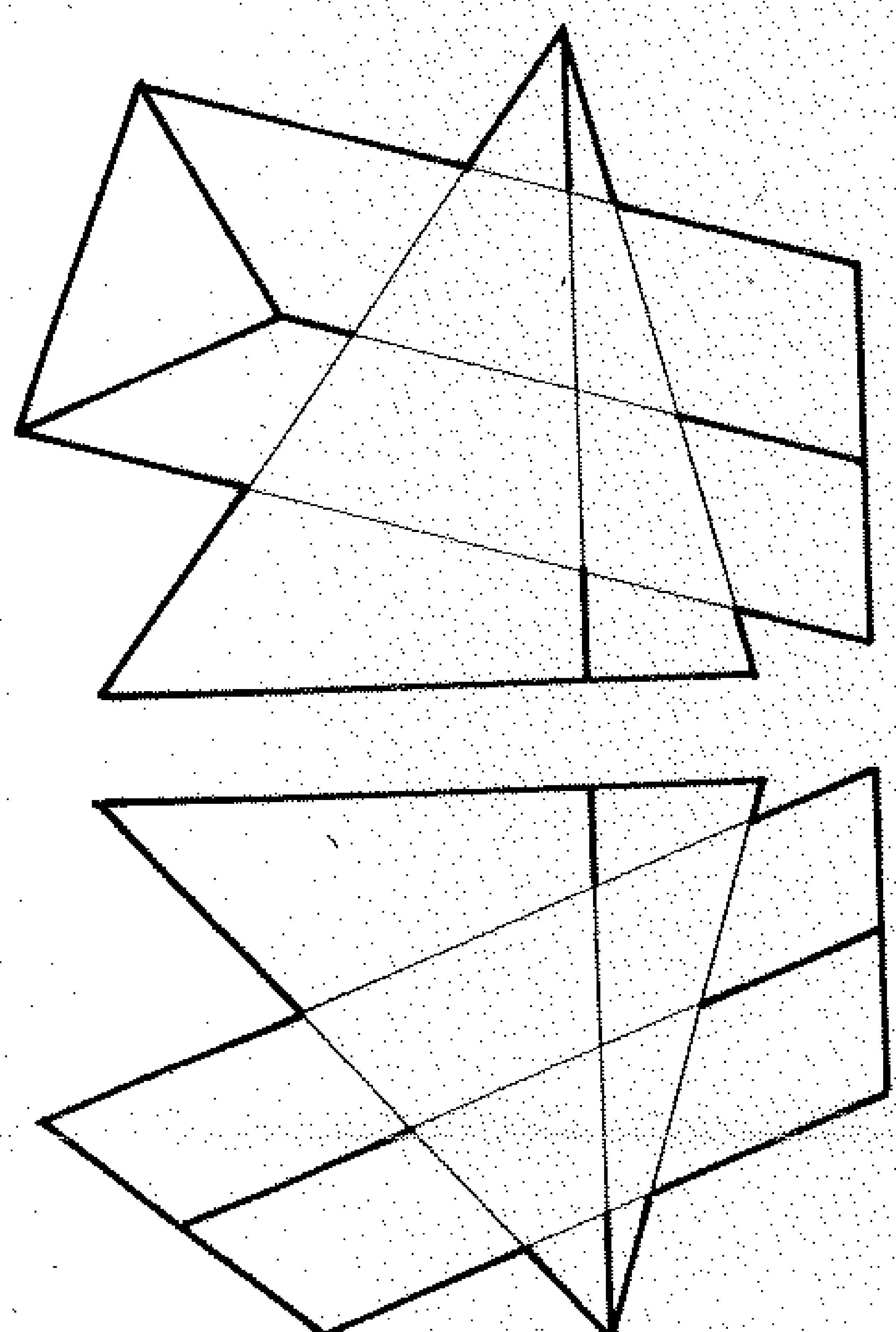
Bài 3 : Vẽ giao tuyến của hai chóp (Hình 10-12, 10-13).



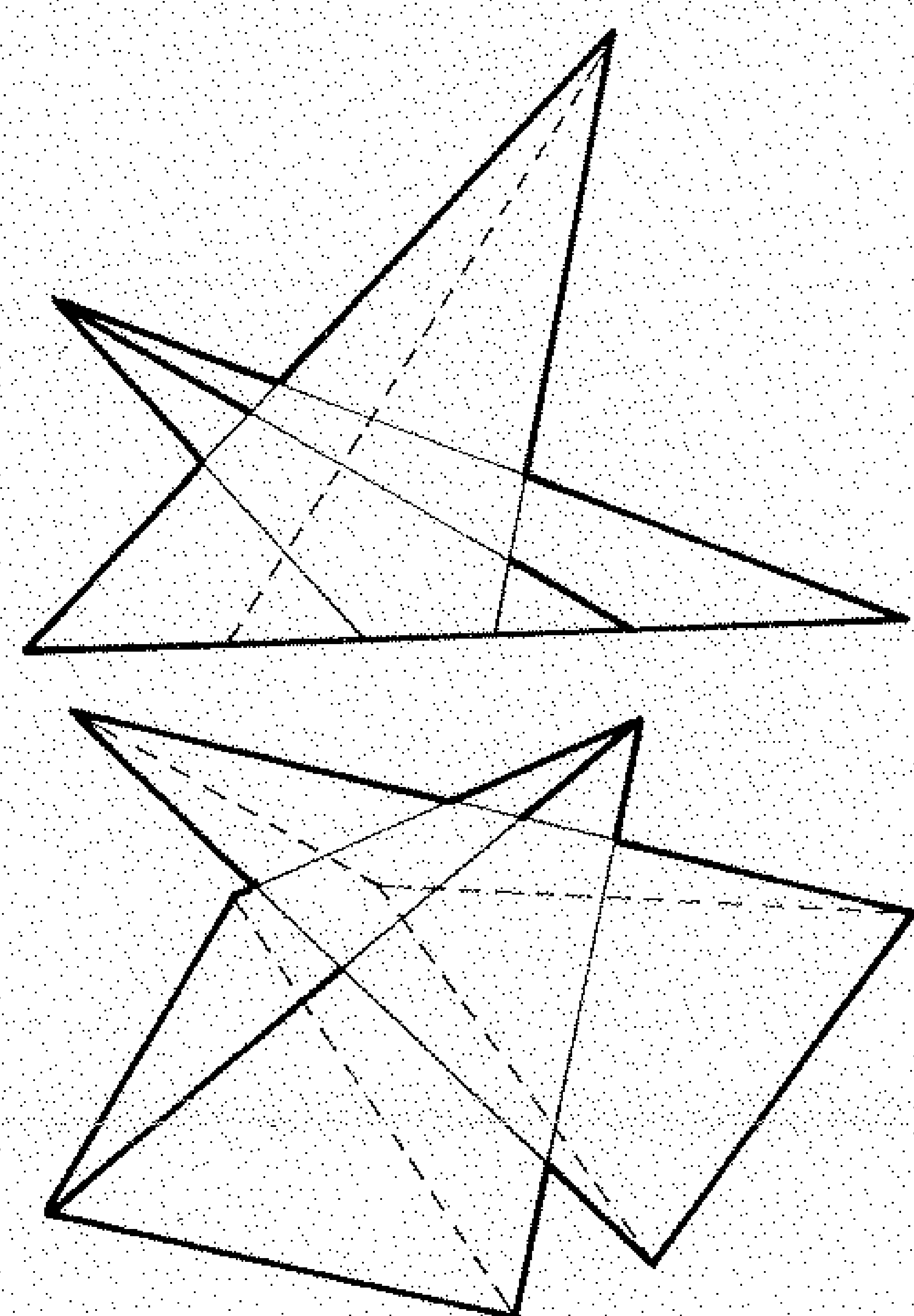
Hình 10 -9



Hình 10 -10



Hình 10 -11



Hình 10 -12

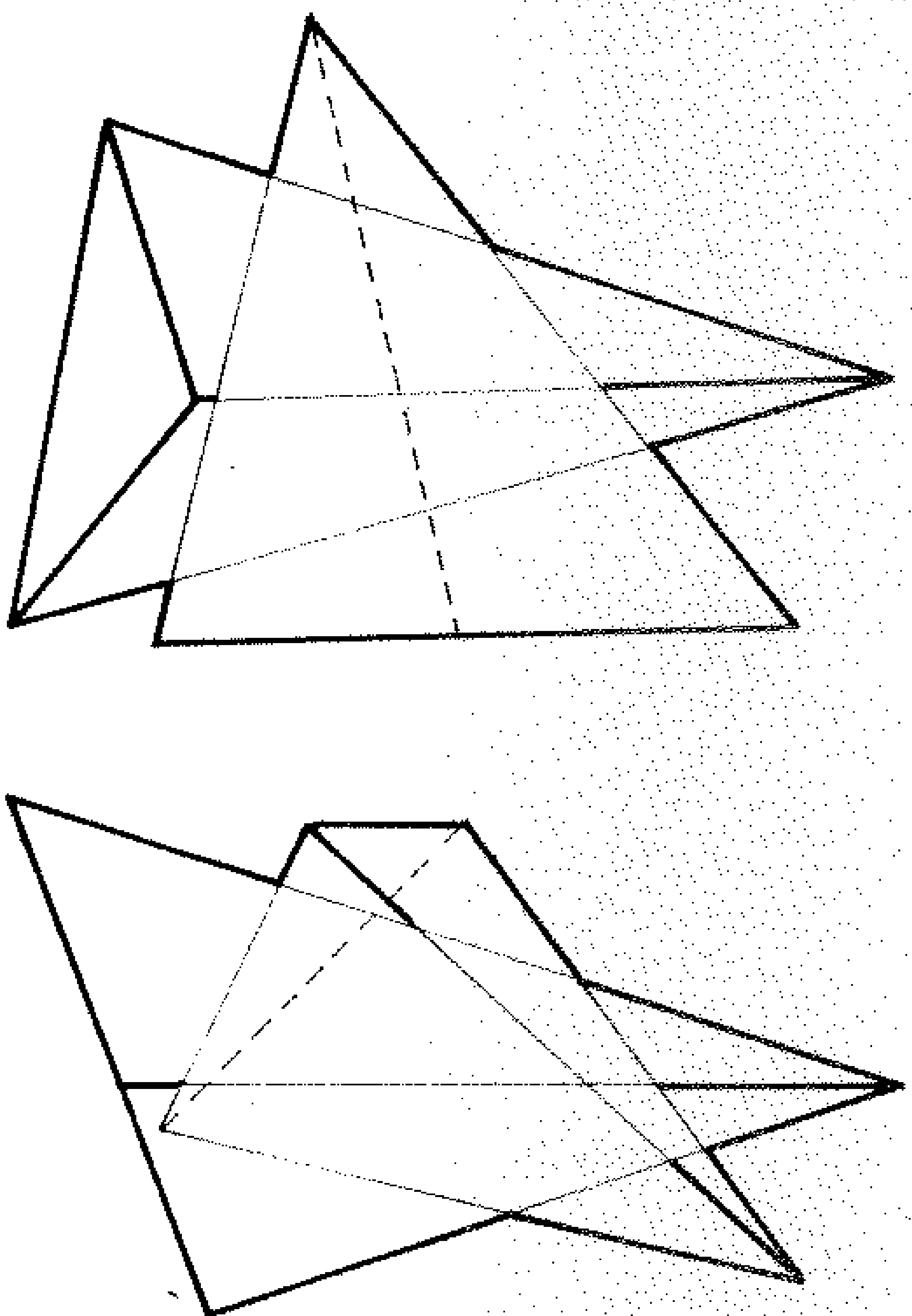
+ *Giao tuyến của đa diện và mặt cong.*

Bài 4 : Vẽ giao tuyến của lăng trụ và trụ (Hình 10–14, 10–15, 10–16).

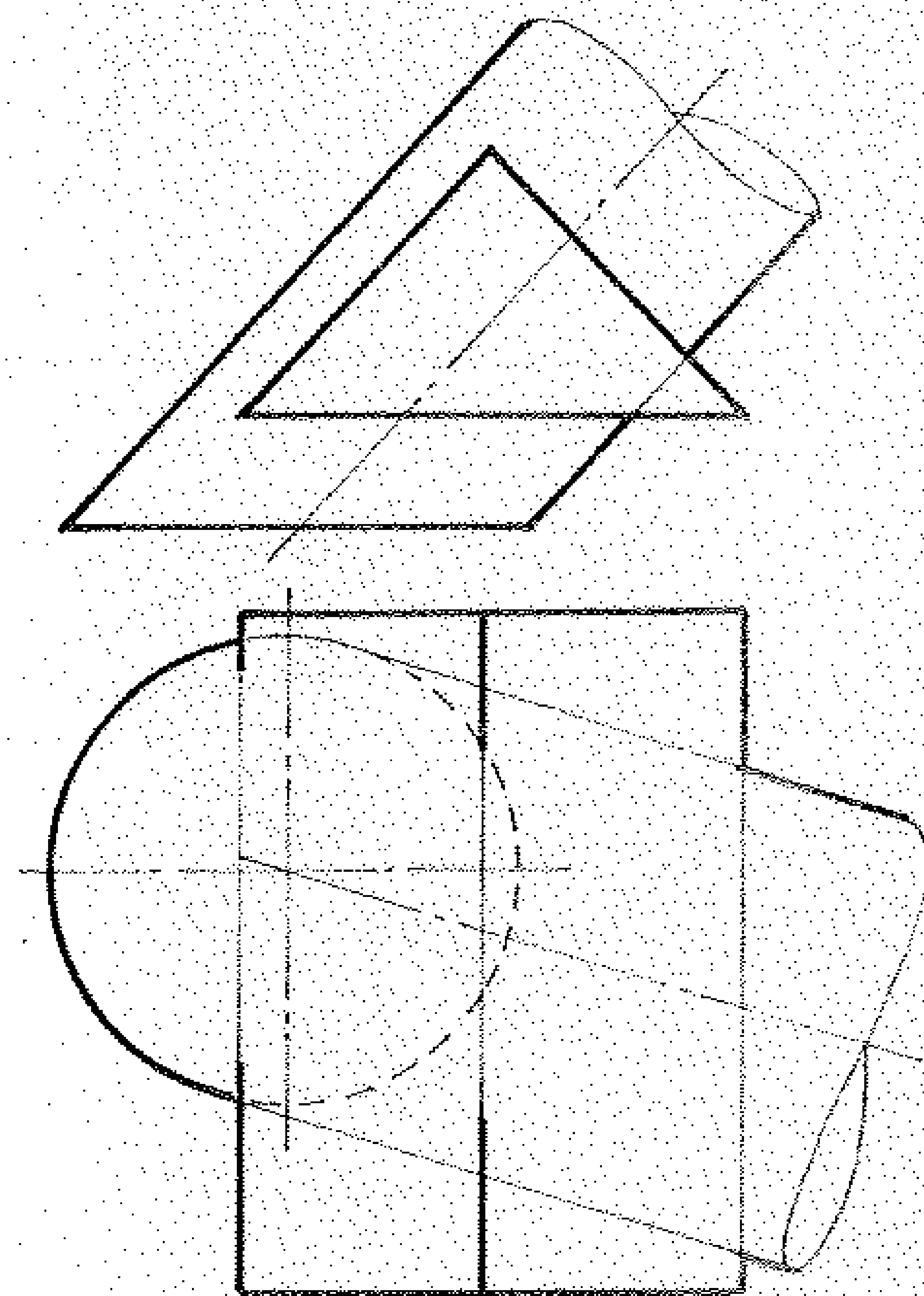
Bài 5 : Vẽ giao tuyến của lăng trụ và nón (Hình 10–17, 10–18).

Bài 6 : Vẽ giao tuyến của lăng trụ và cầu (Hình 10–19, 10–20).

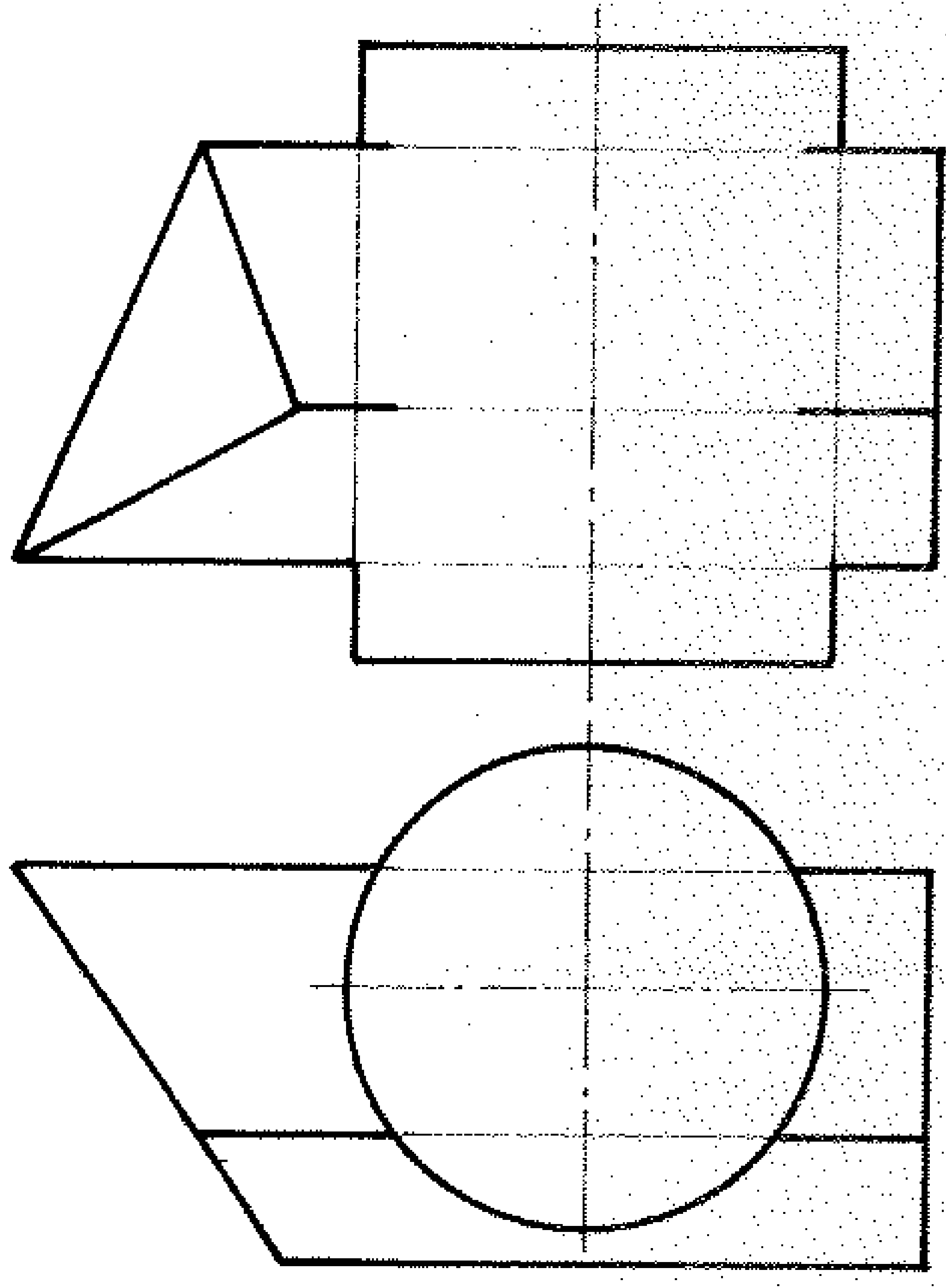
Bài 7 : Vẽ giao tuyến của lăng trụ và xuyến (Hình 10–21, 10–22).



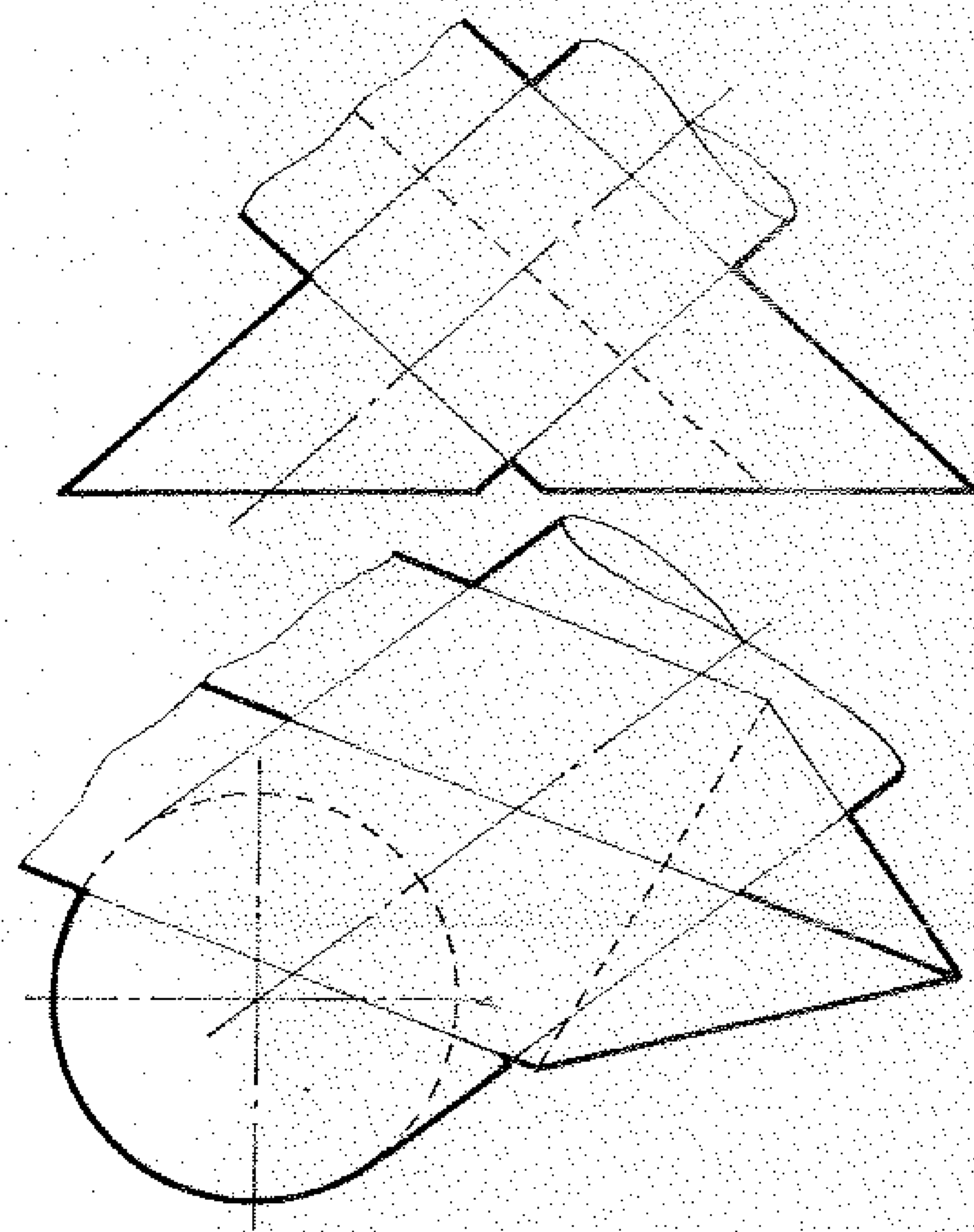
Hình 10 – 13



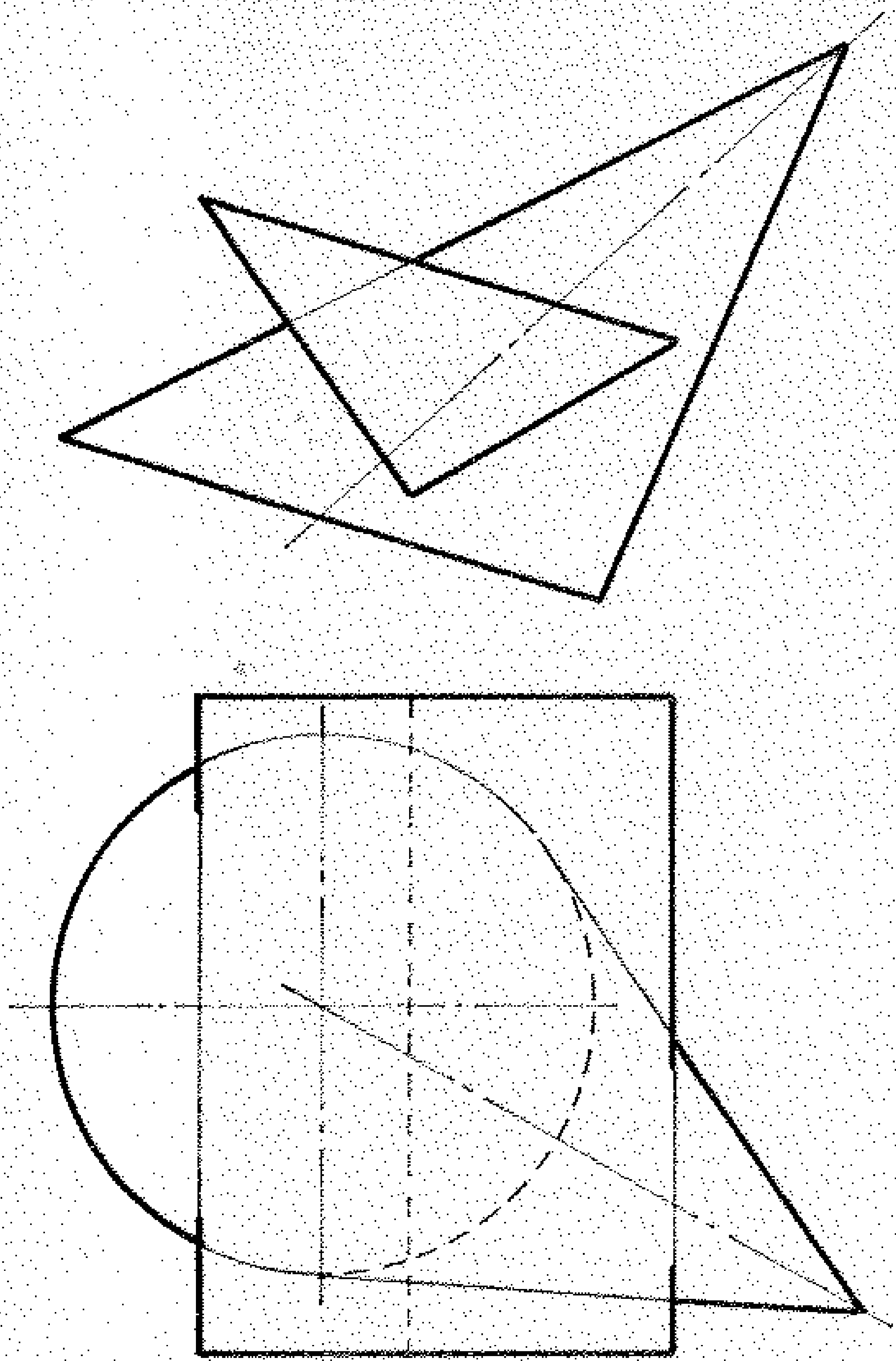
Hình 10 – 14



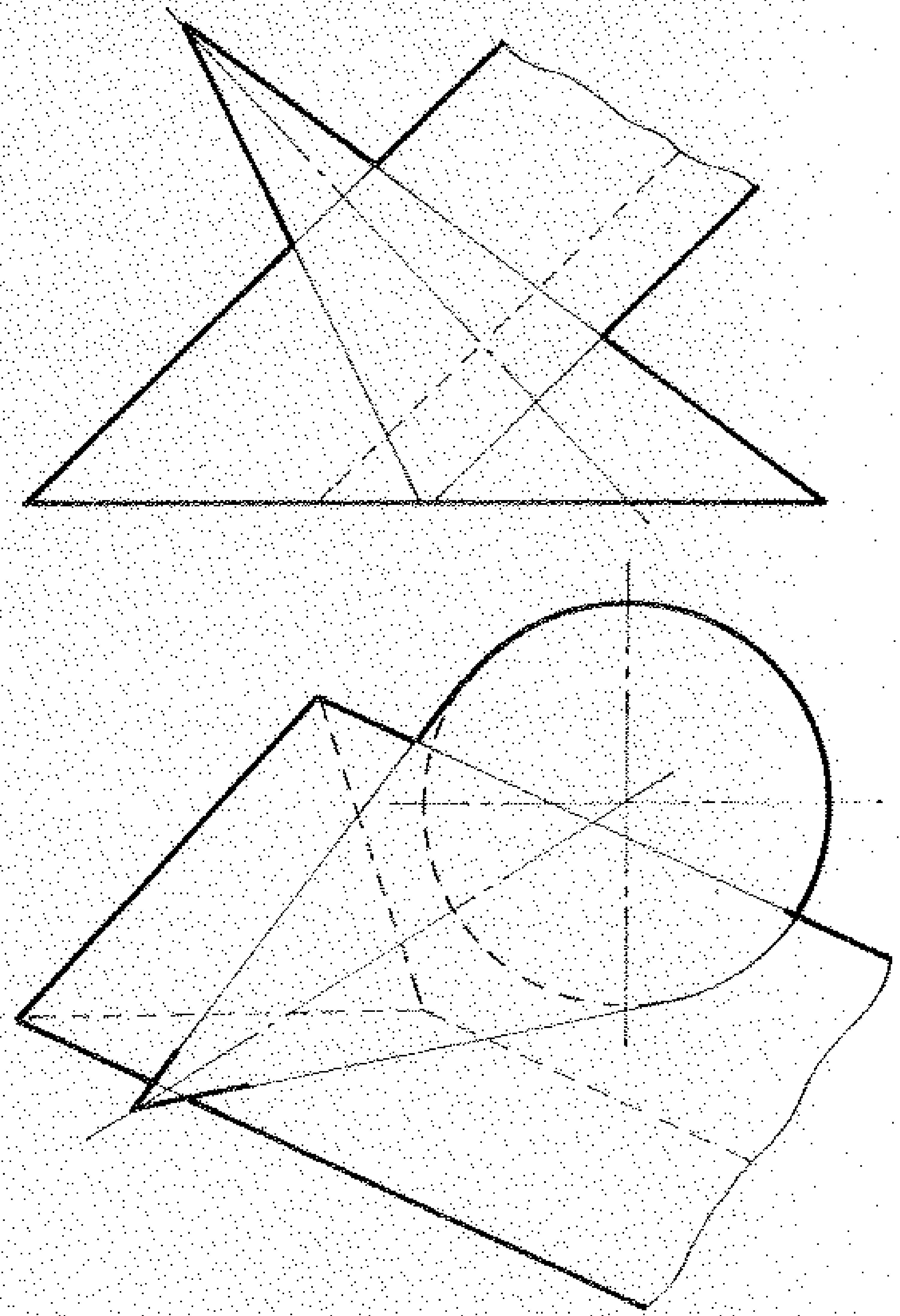
Hình 10 – 15



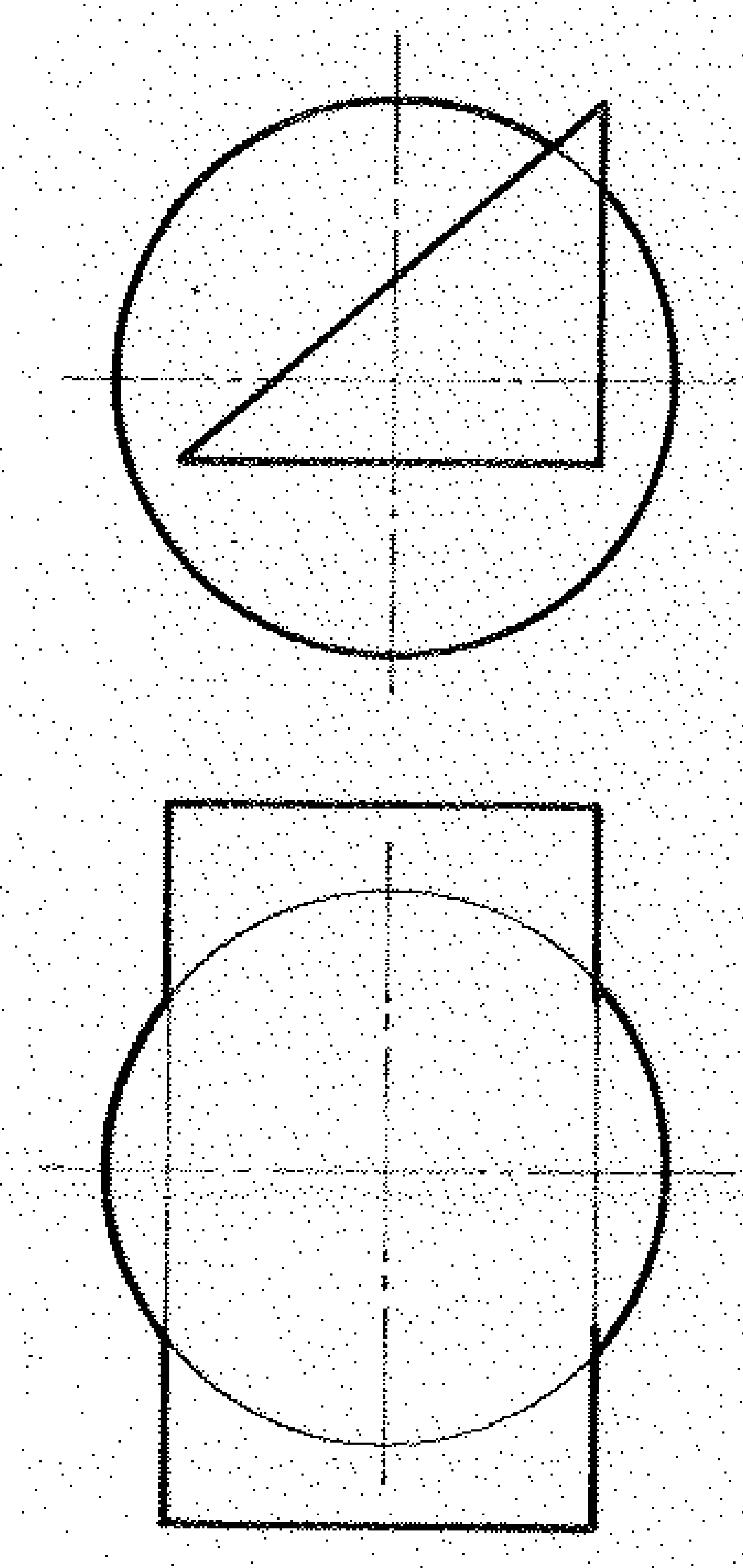
Hình 10 – 16



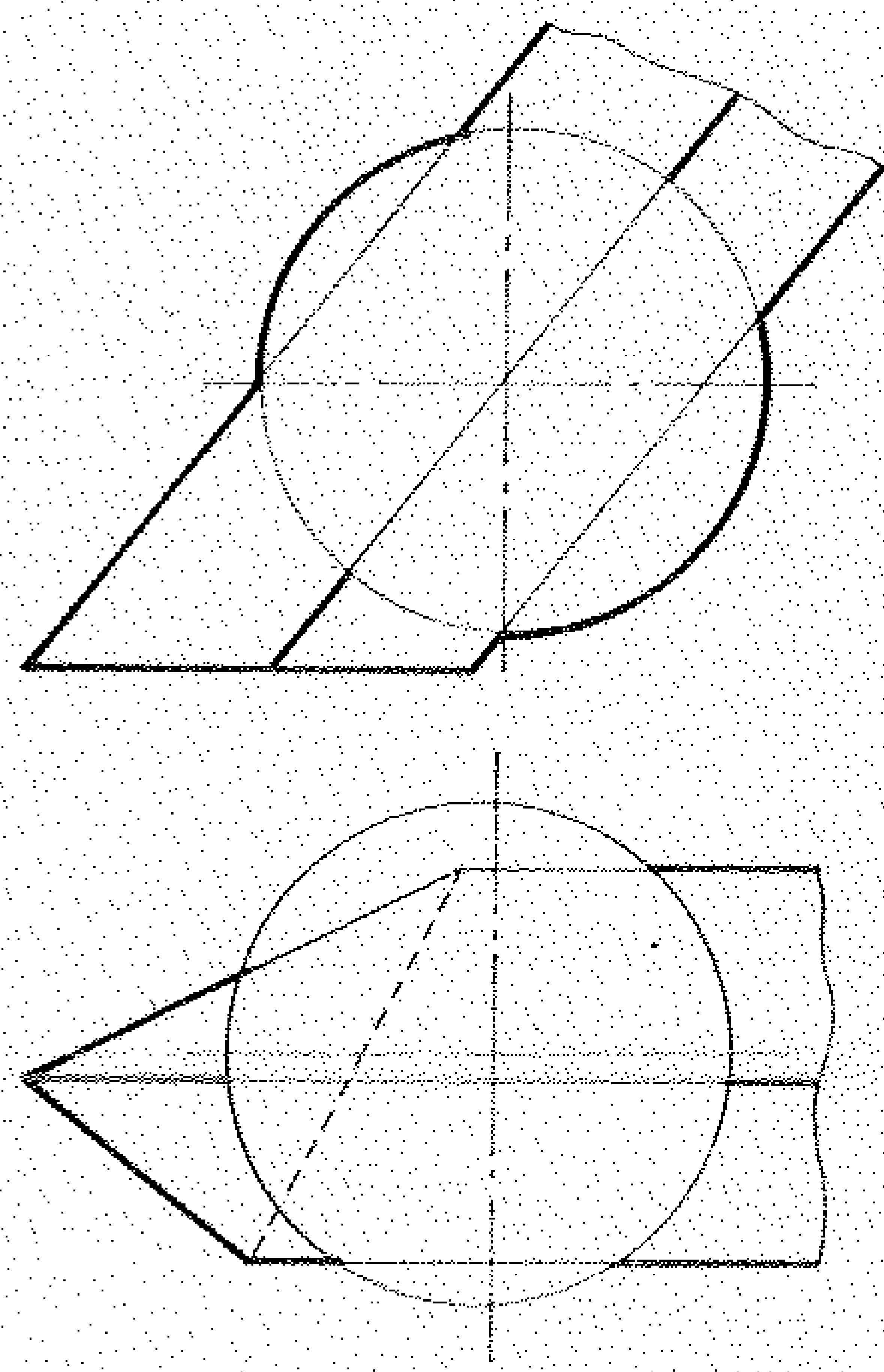
Hình 10 – 17



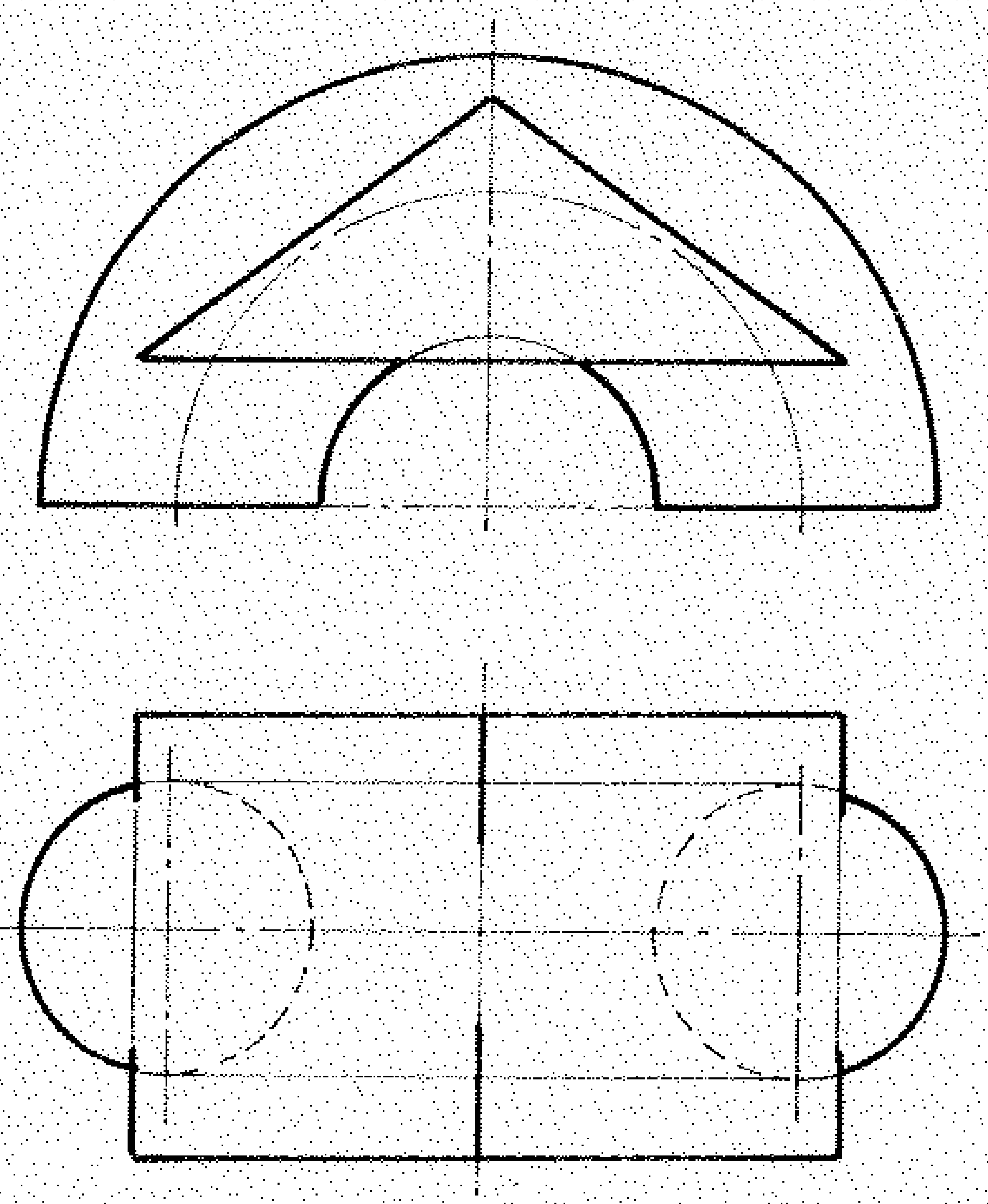
Hình 10 – 18



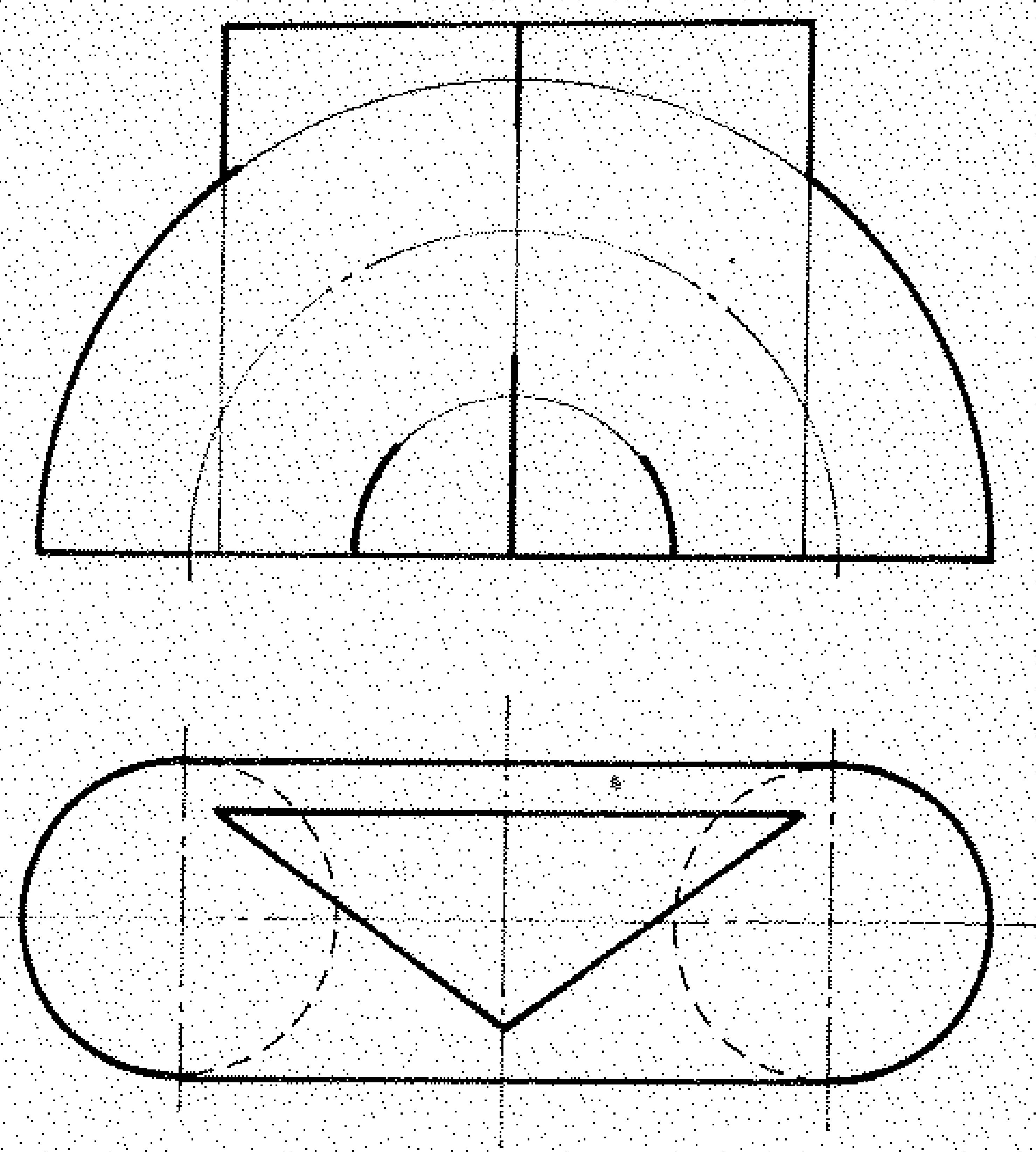
Hình 10 – 19



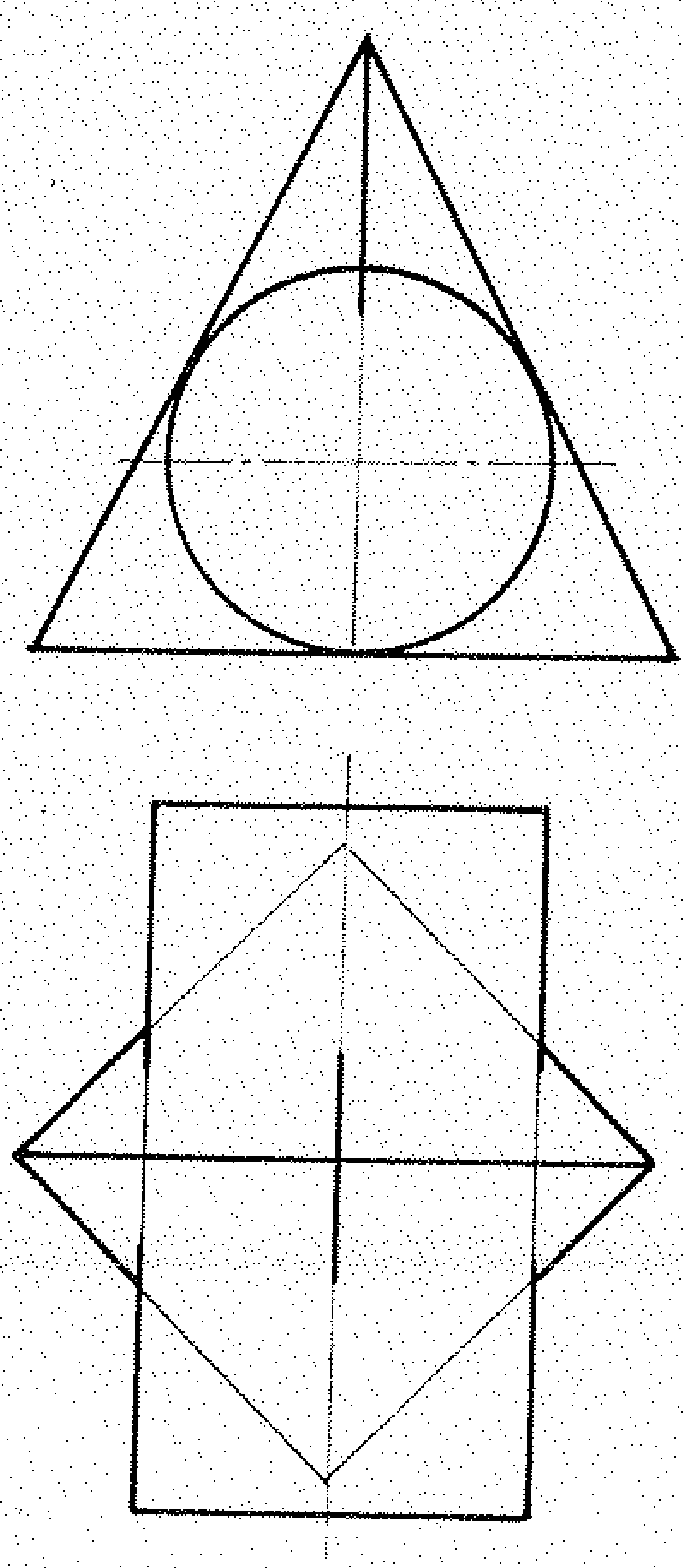
Hình 10 – 20



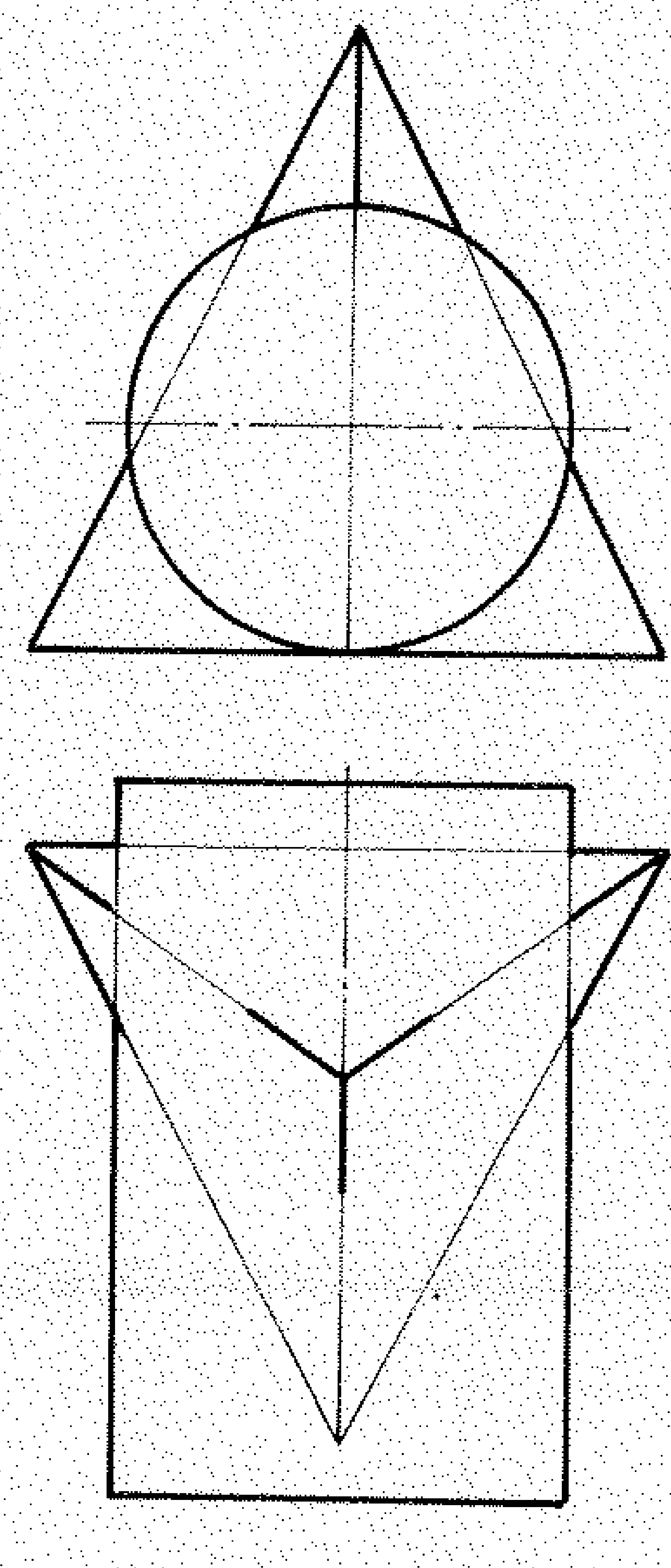
Hình 10 - 21



Hình 10 - 22



Hình 10 - 23



Hình 10 - 24

Bài 8 : Vẽ giao tuyến của chóp và trụ (Hình 10-23, 10-24, 10-25).

Bài 9 : Vẽ giao tuyến của chóp và cầu (Hình 10-26, 10-27)

+ *Giao tuyến của hai mặt cong.*

Bài 10 : Vẽ giao tuyến của hai trụ (Hình 10-28, 10-29, 10-30, 10-31).

Bài 11 : Vẽ giao tuyến của trụ và nón (Hình 10-32, 10-33, 10-34).

Bài 12 : Vẽ giao tuyến của trụ và cầu (Hình 10-35, 10-36).

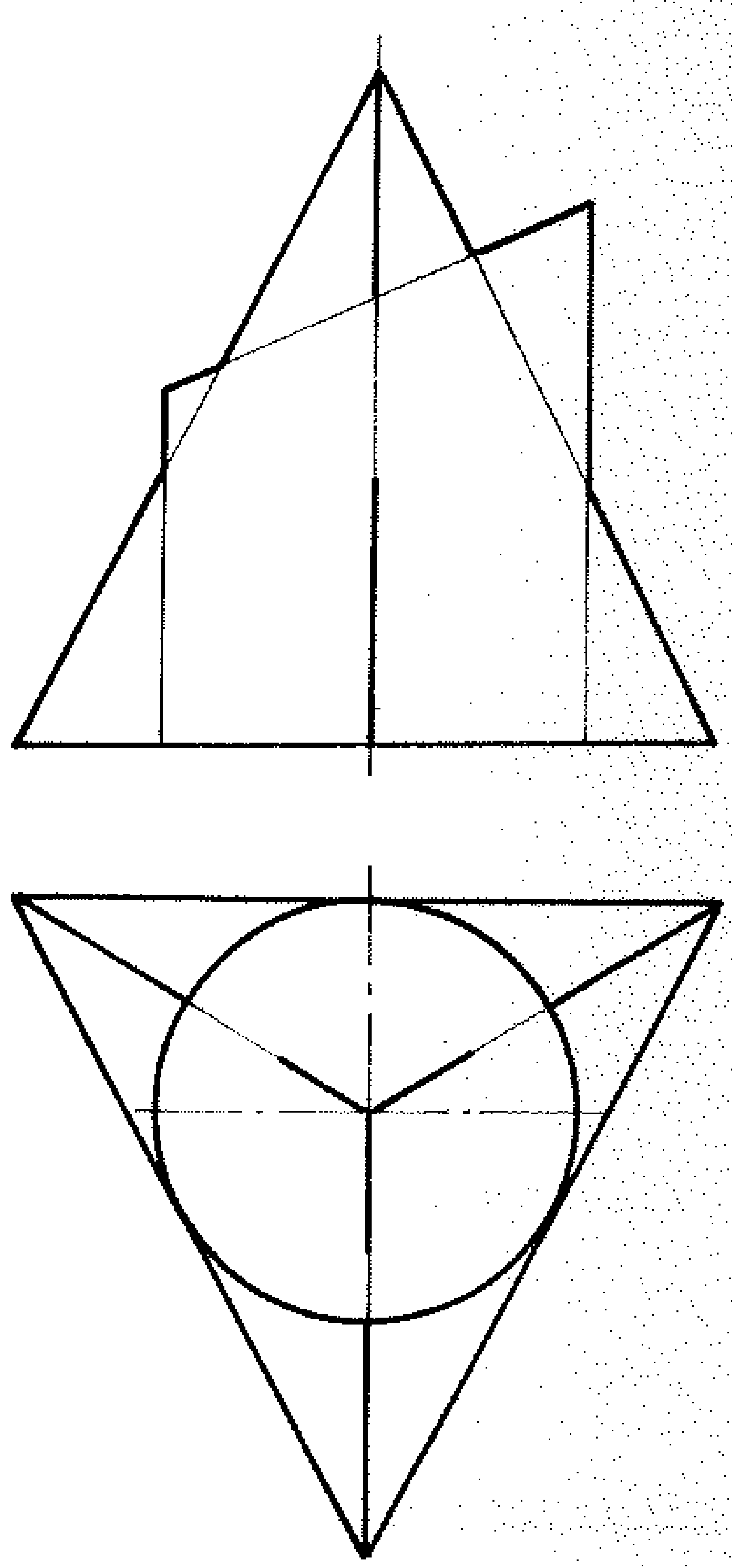
Bài 13 : Vẽ giao tuyến của trụ và một phần của xuyến (Hình 10-37, 10-38, 10-39).

Bài 14 : Vẽ giao tuyến của trụ và elipxôit (Hình 10-40, 10-41).

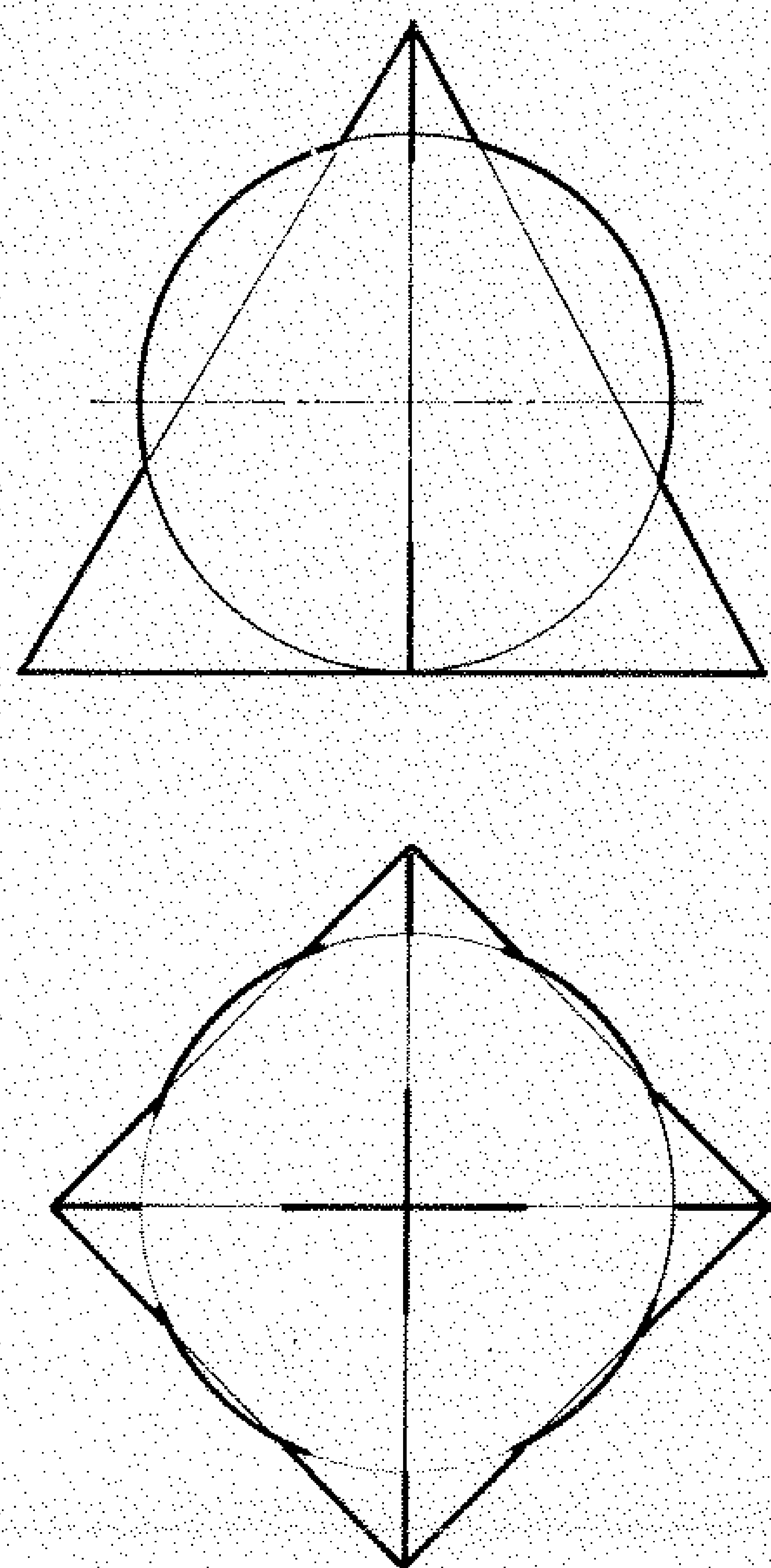
Bài 15 : Vẽ giao tuyến của nón và cầu (Hình 10-42, 10-43, 10-44, 10-45).

Bài 16 : Vẽ giao tuyến của nón và xuyến (Hình 10-46, 10-47).

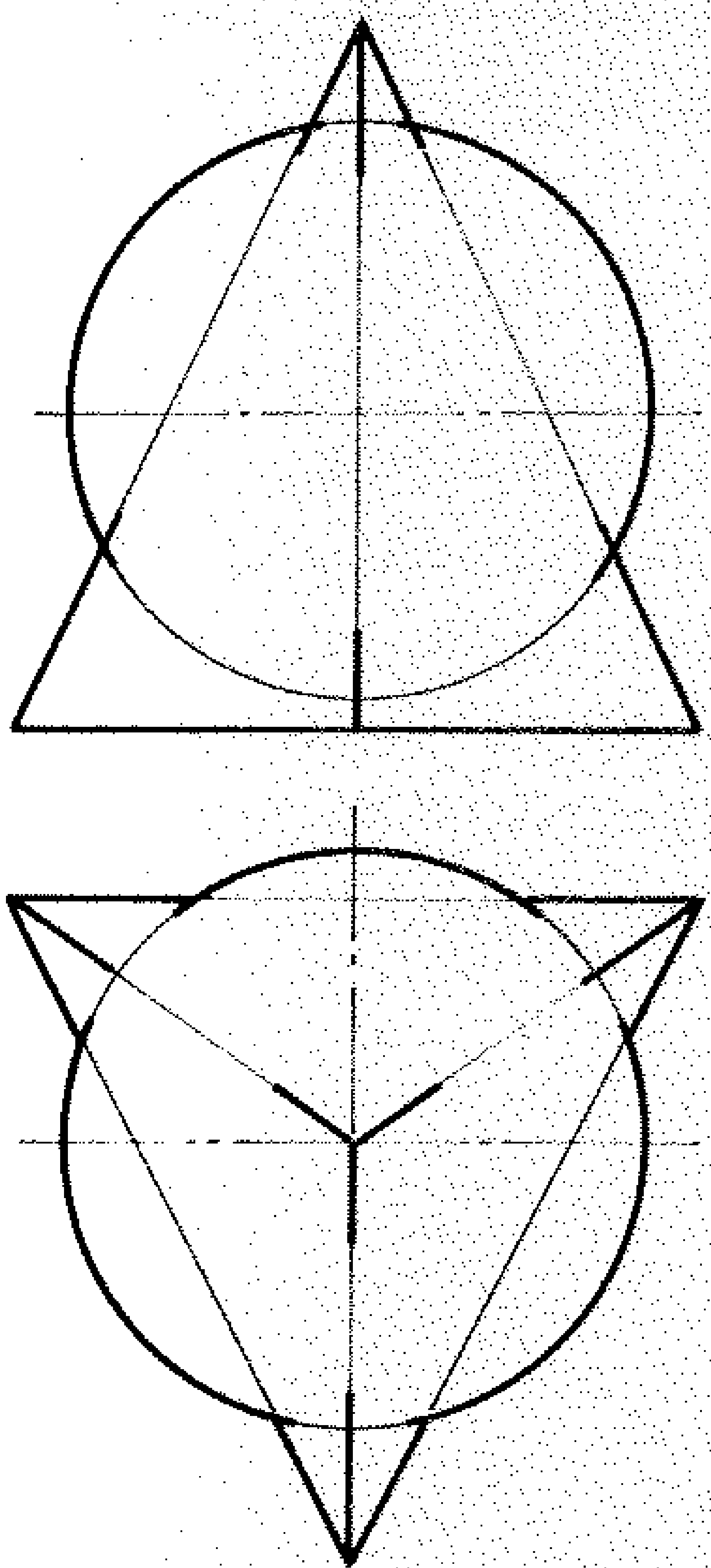
Bài 17 : Vẽ giao tuyến của cầu và xuyến (Hình 10-48).



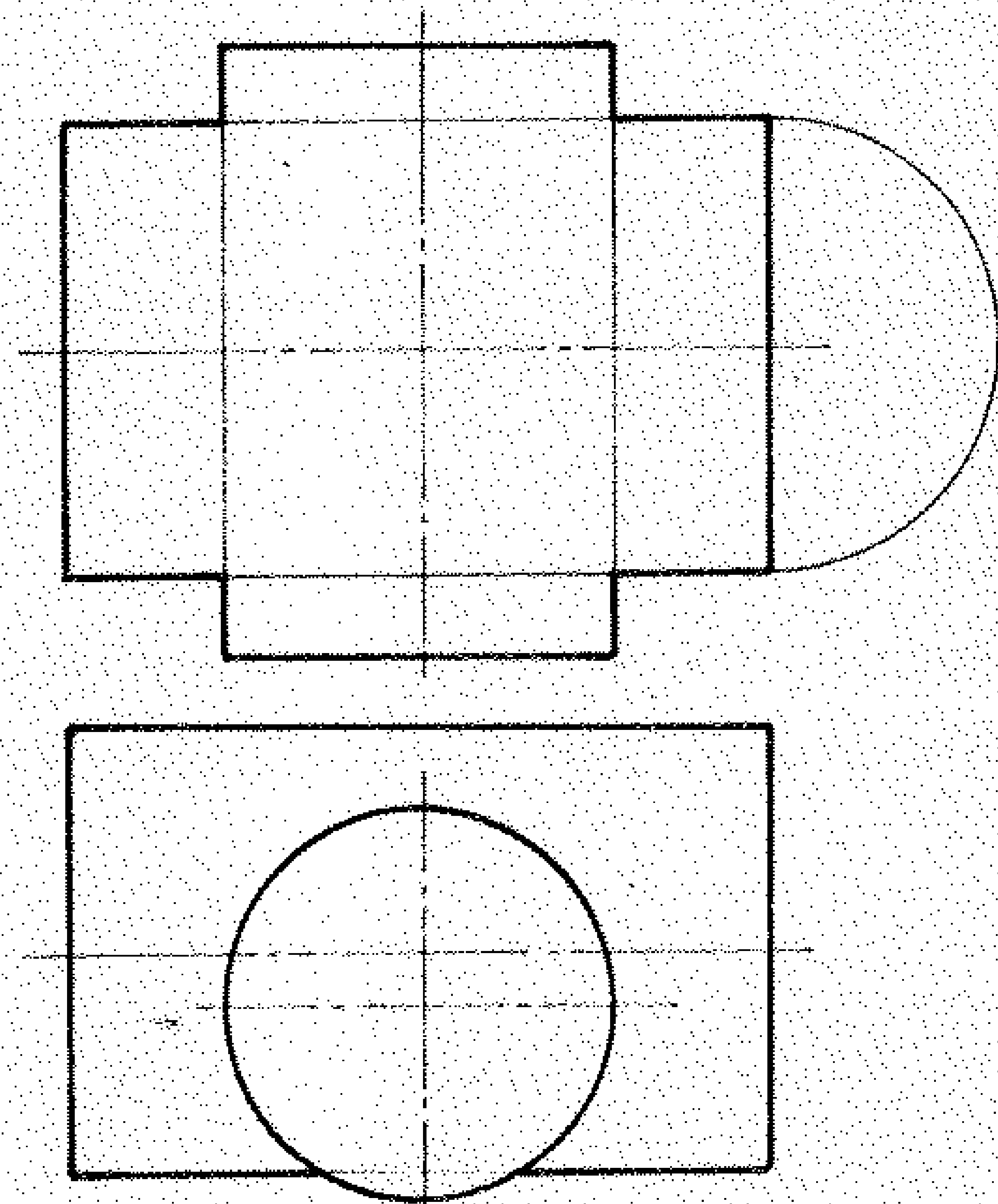
Hình 10-25



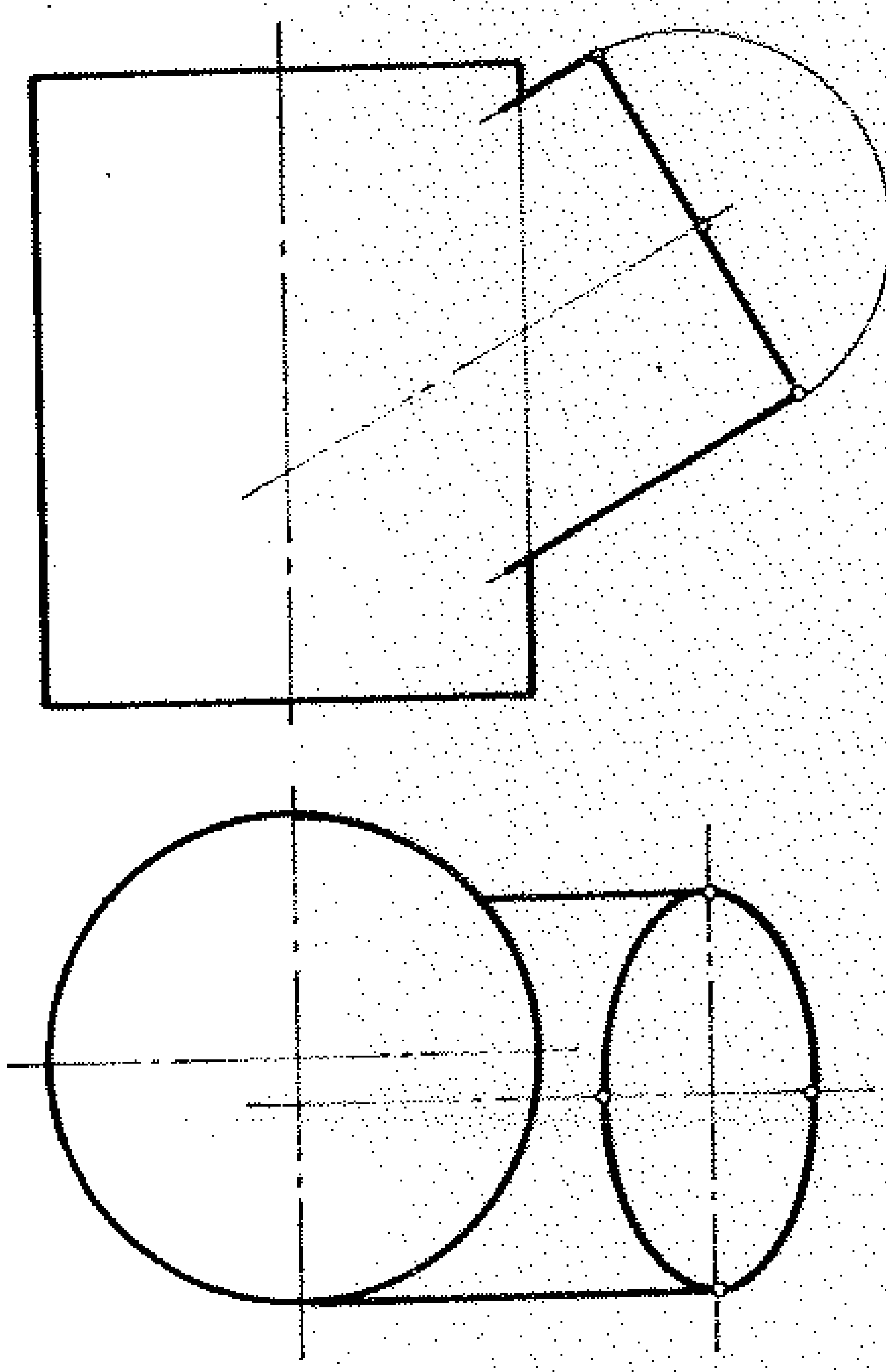
Hình 10-26



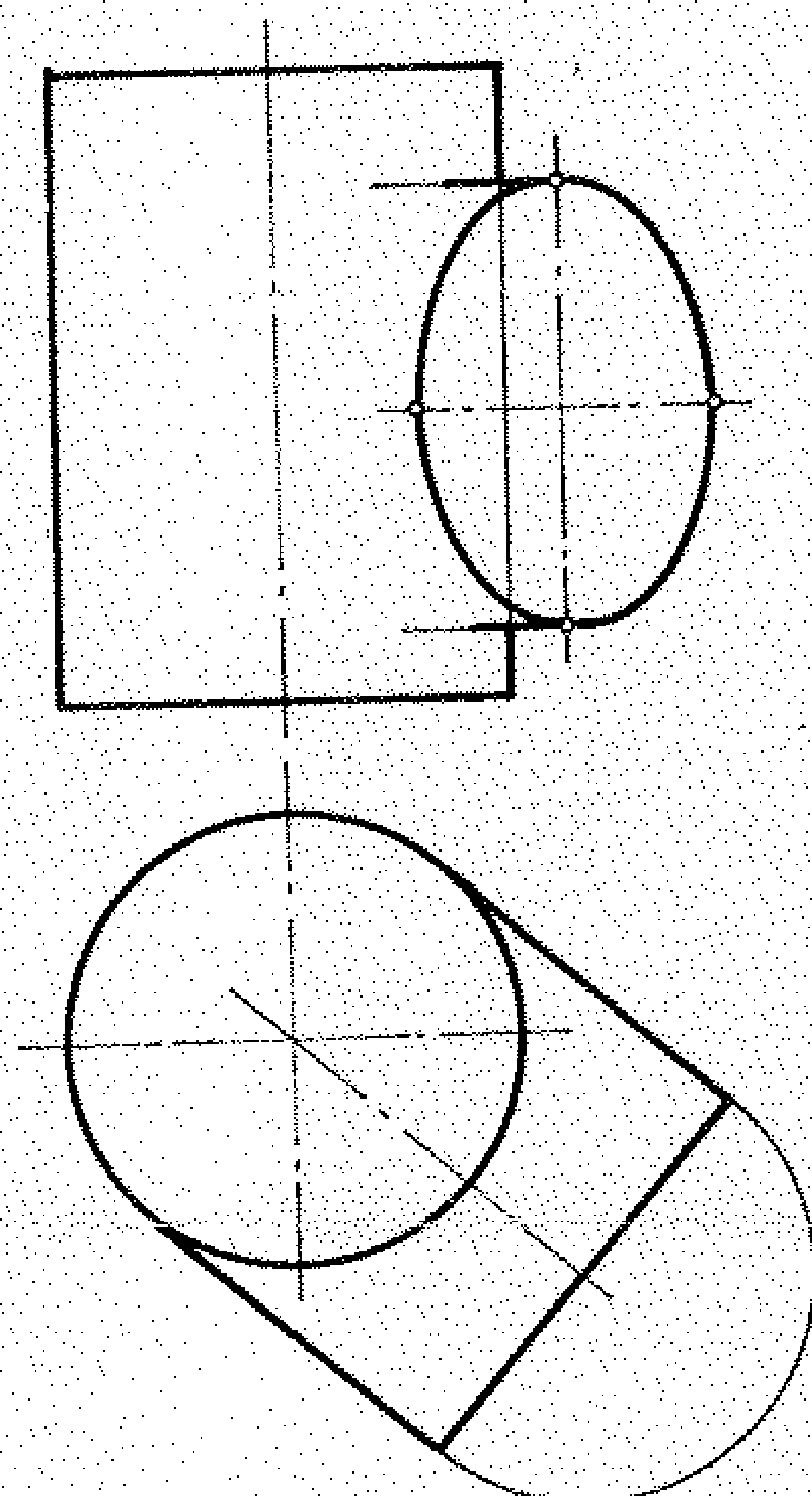
Hình 10 - 27



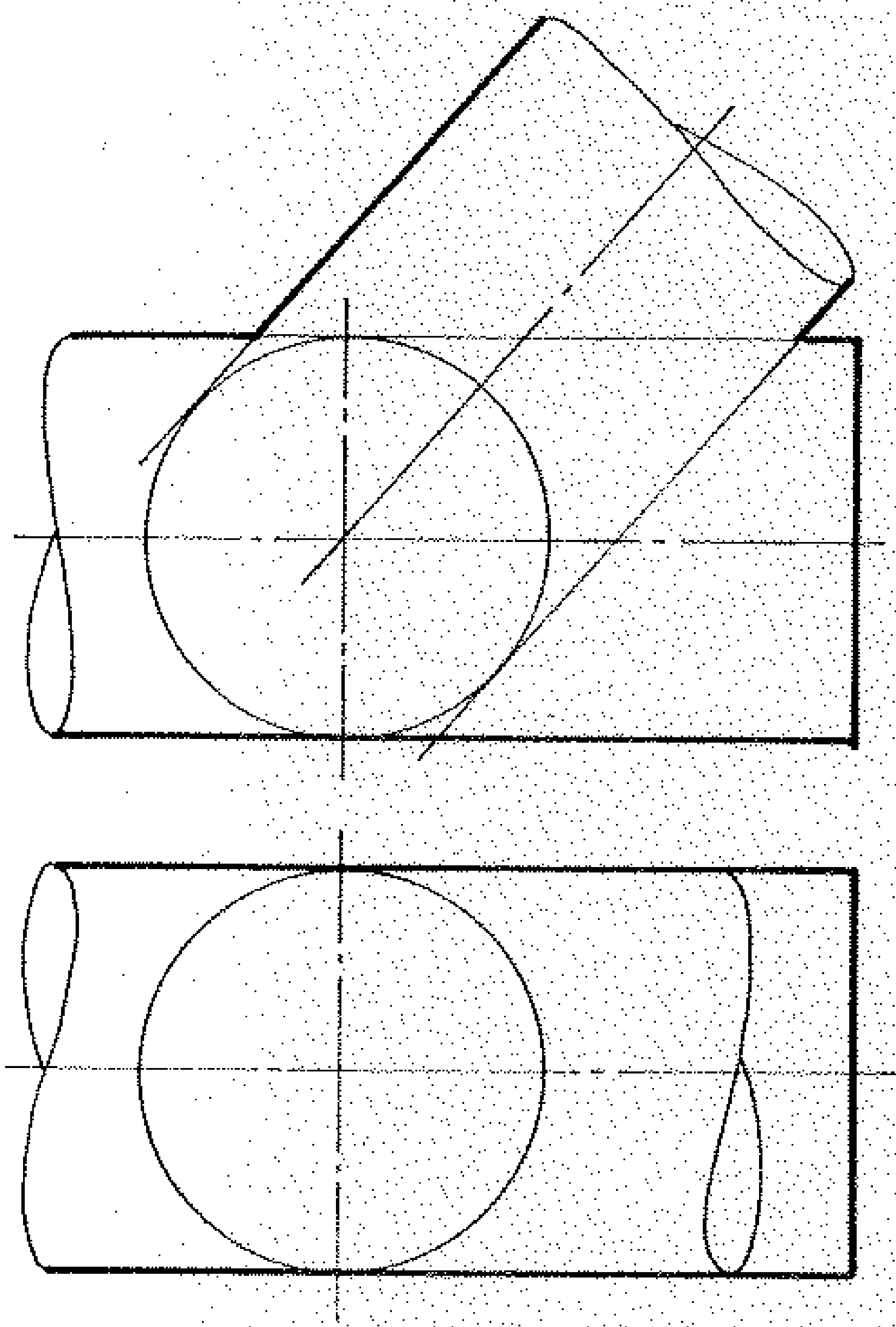
Hình 10 - 28



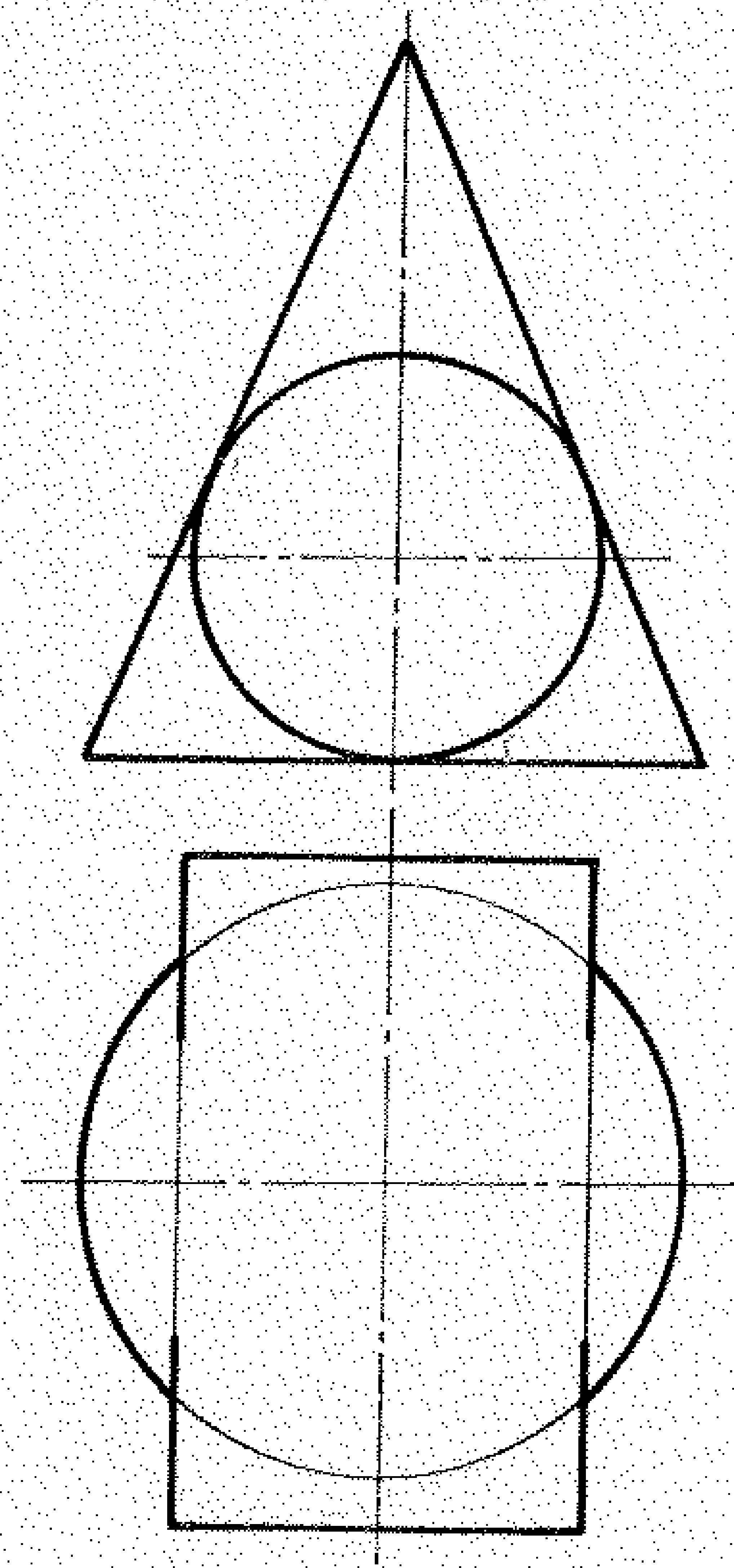
Hình 10 - 29



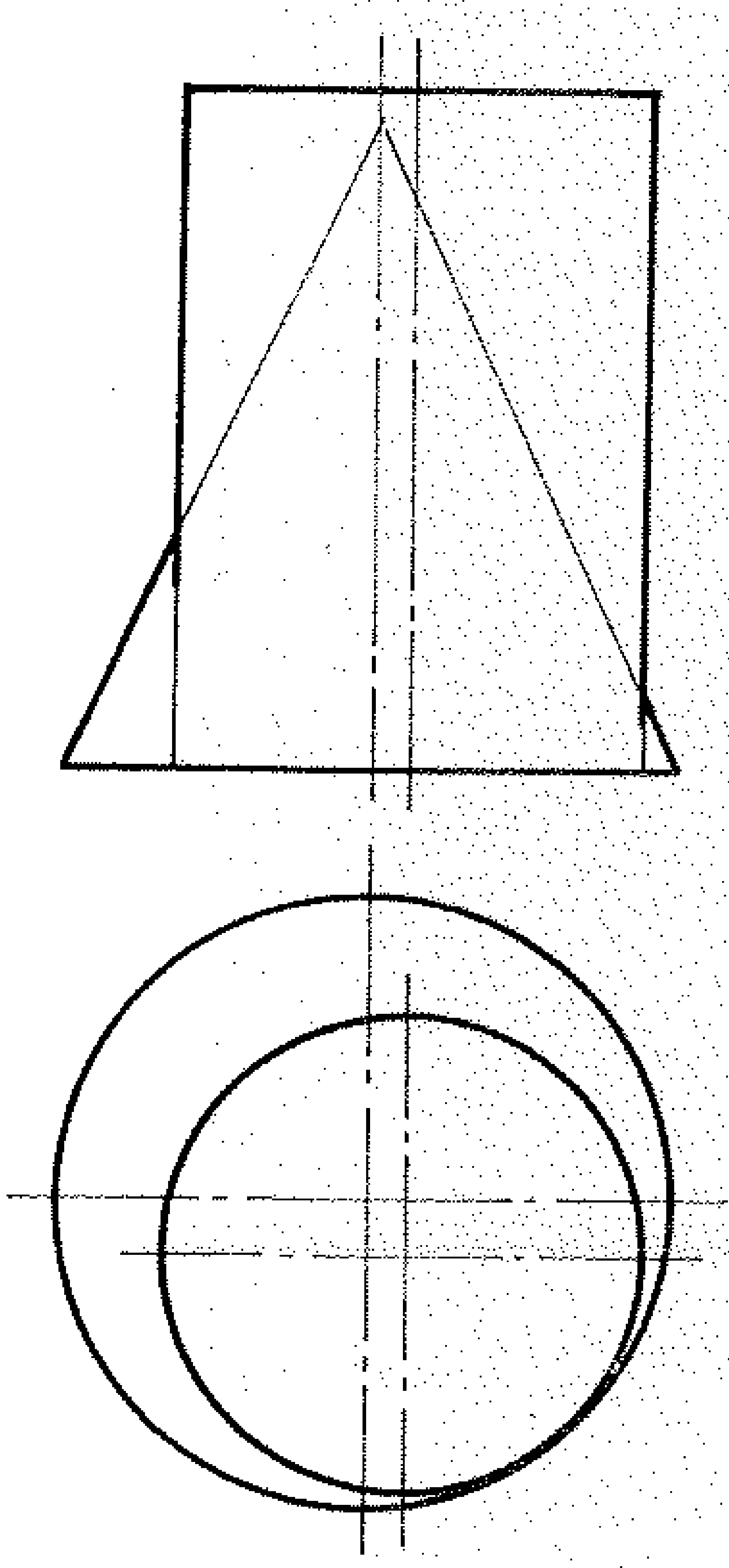
Hình 10 - 30



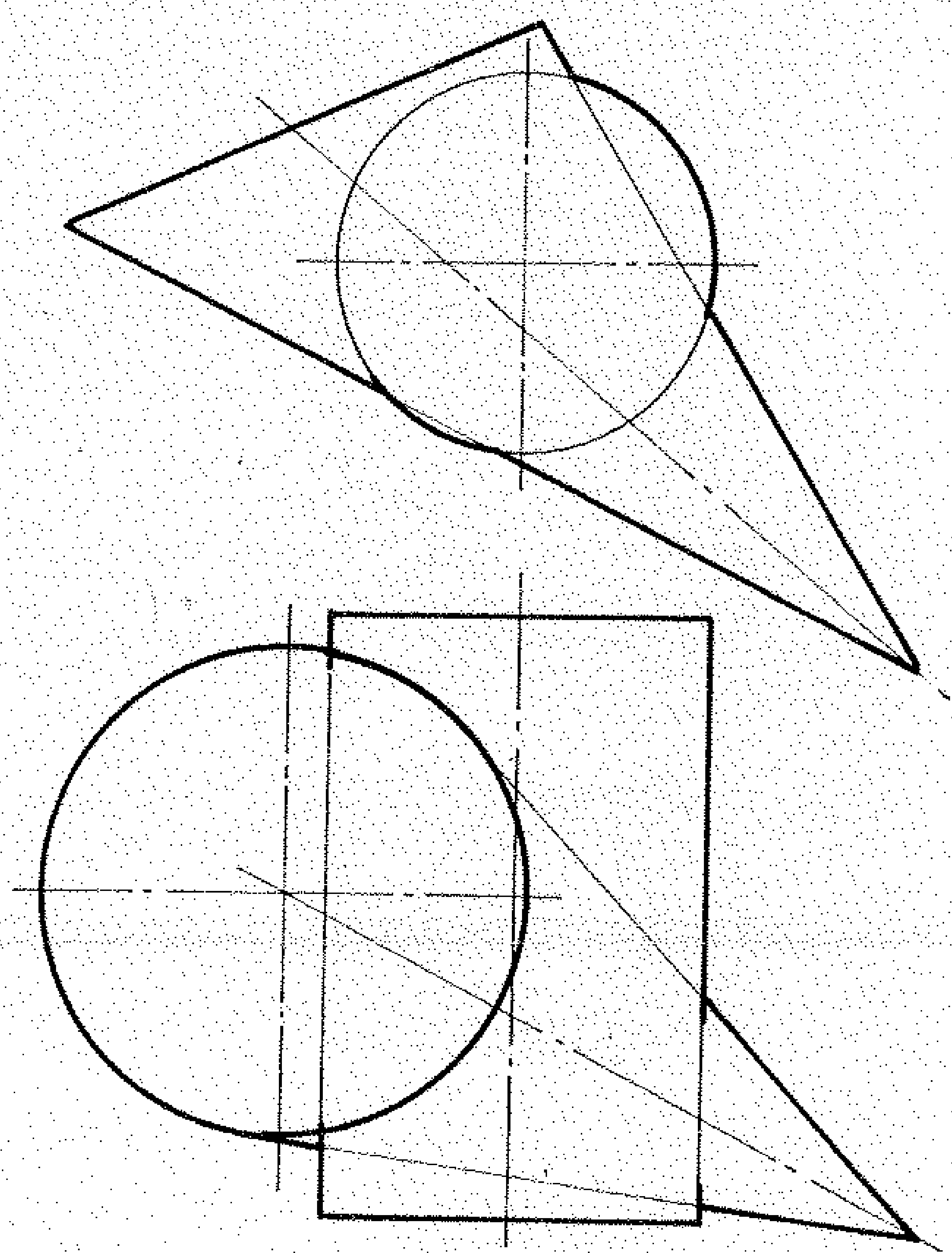
Hình 10 - 31



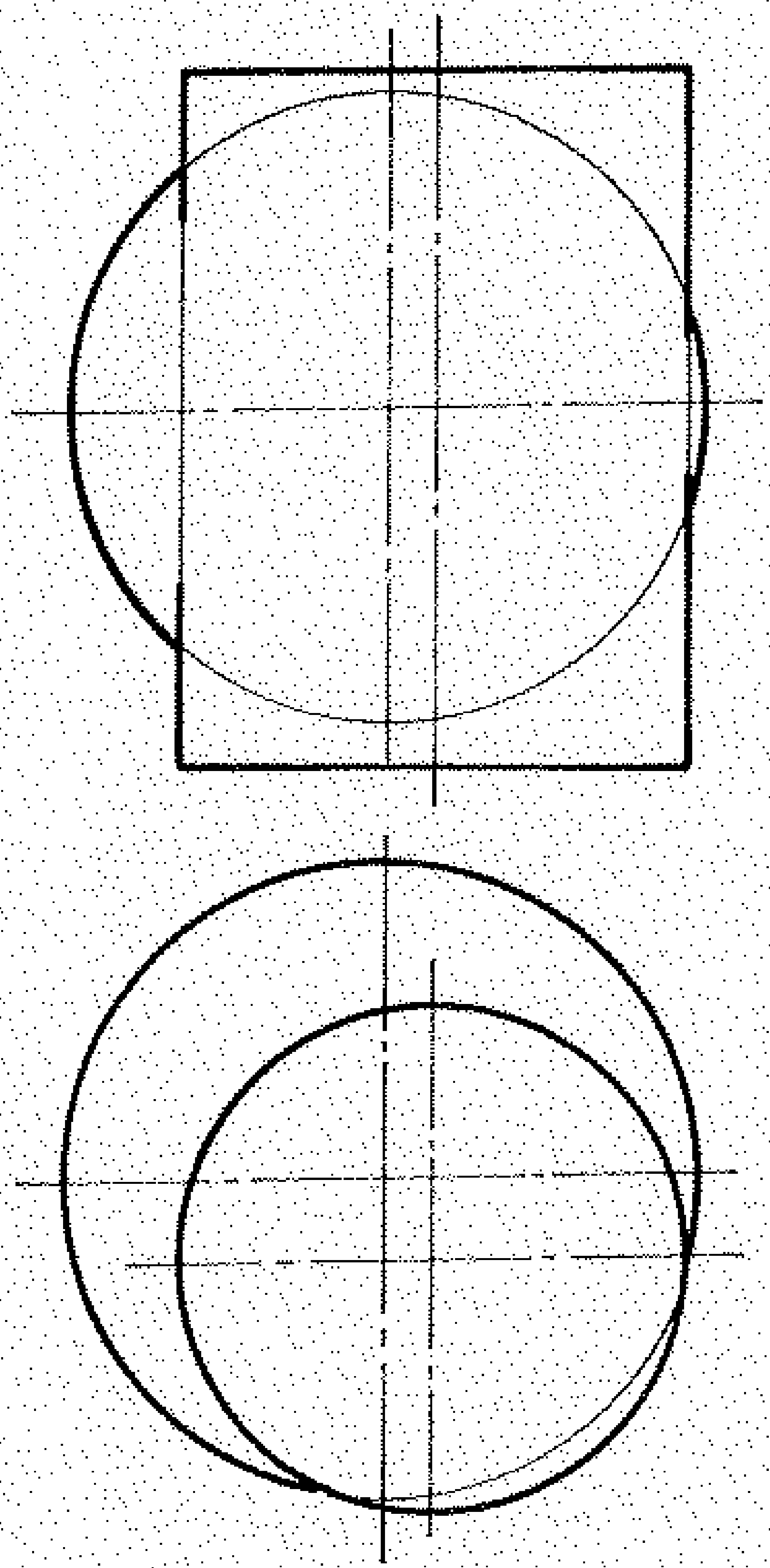
Hình 10 - 32



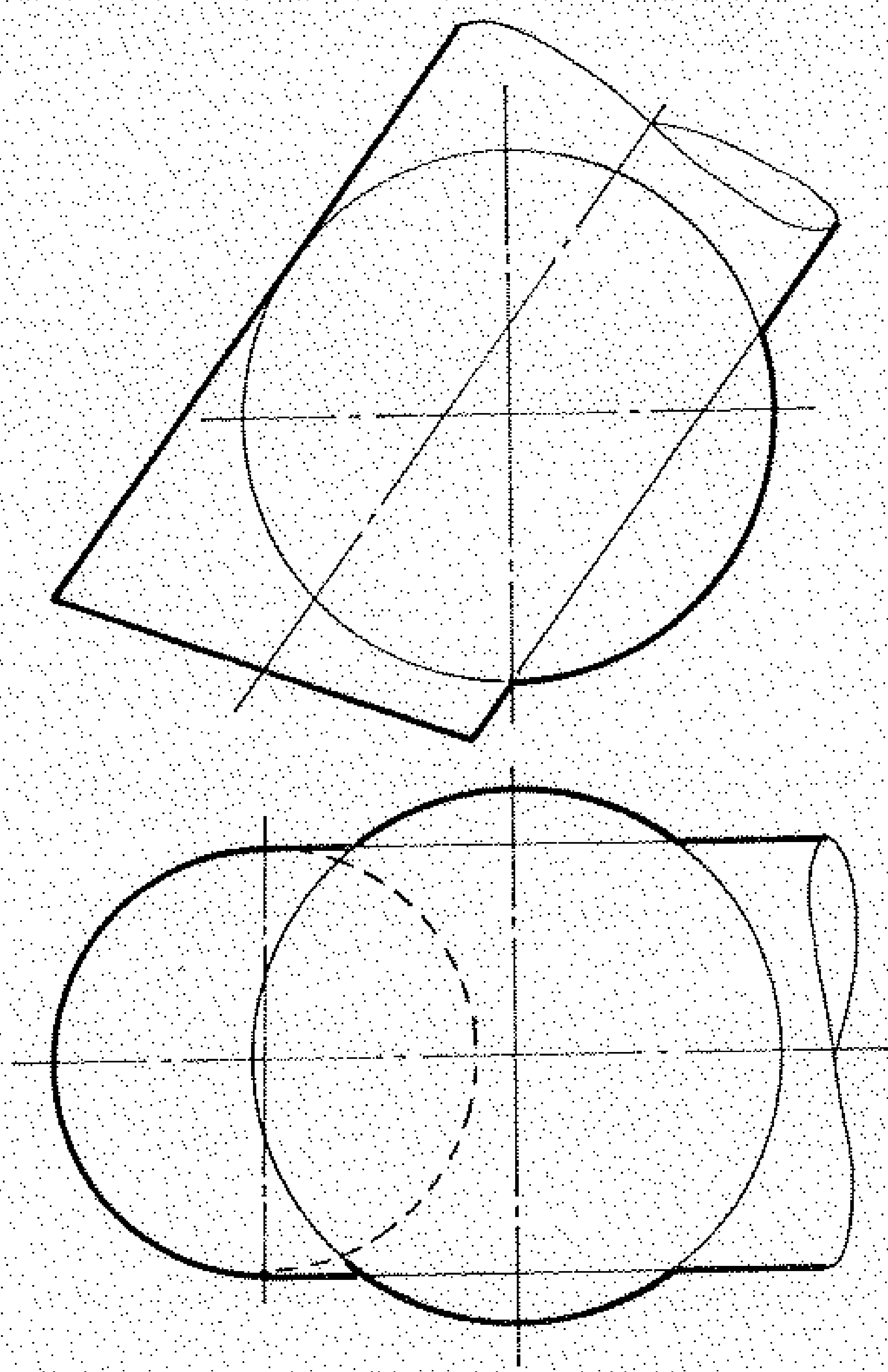
Hình 10 - 33



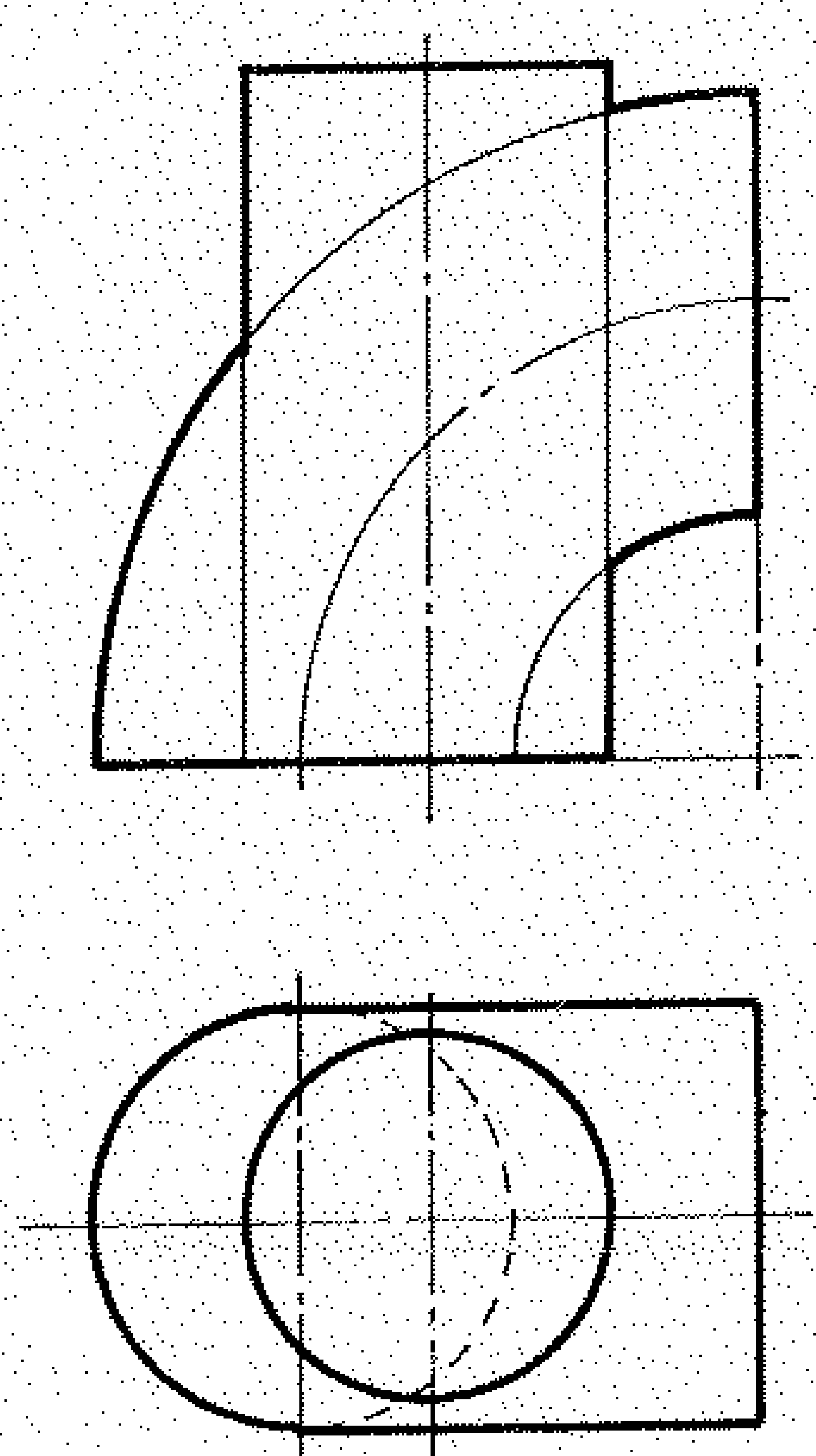
Hình 10 - 34



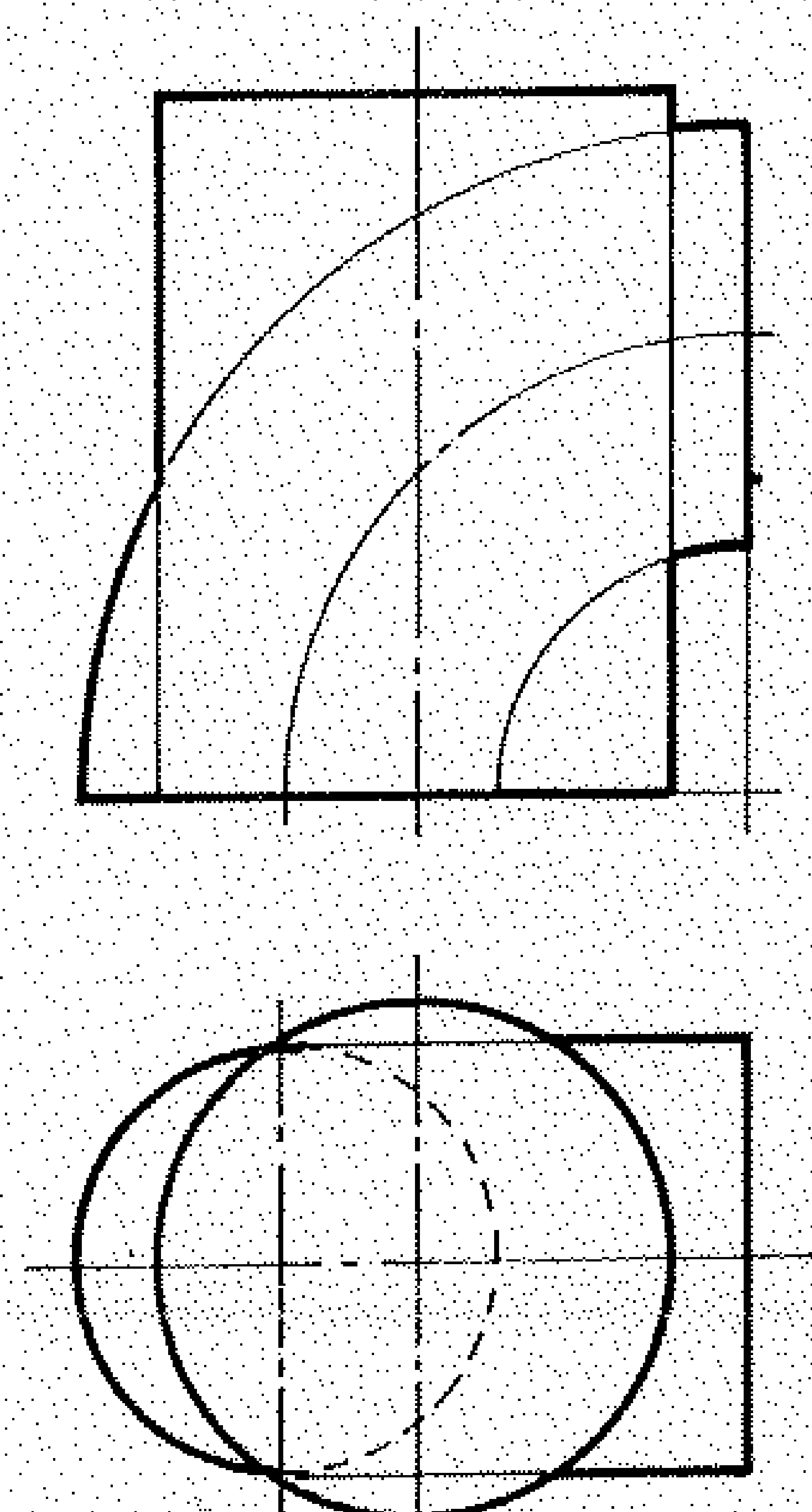
Hình 10 - 35



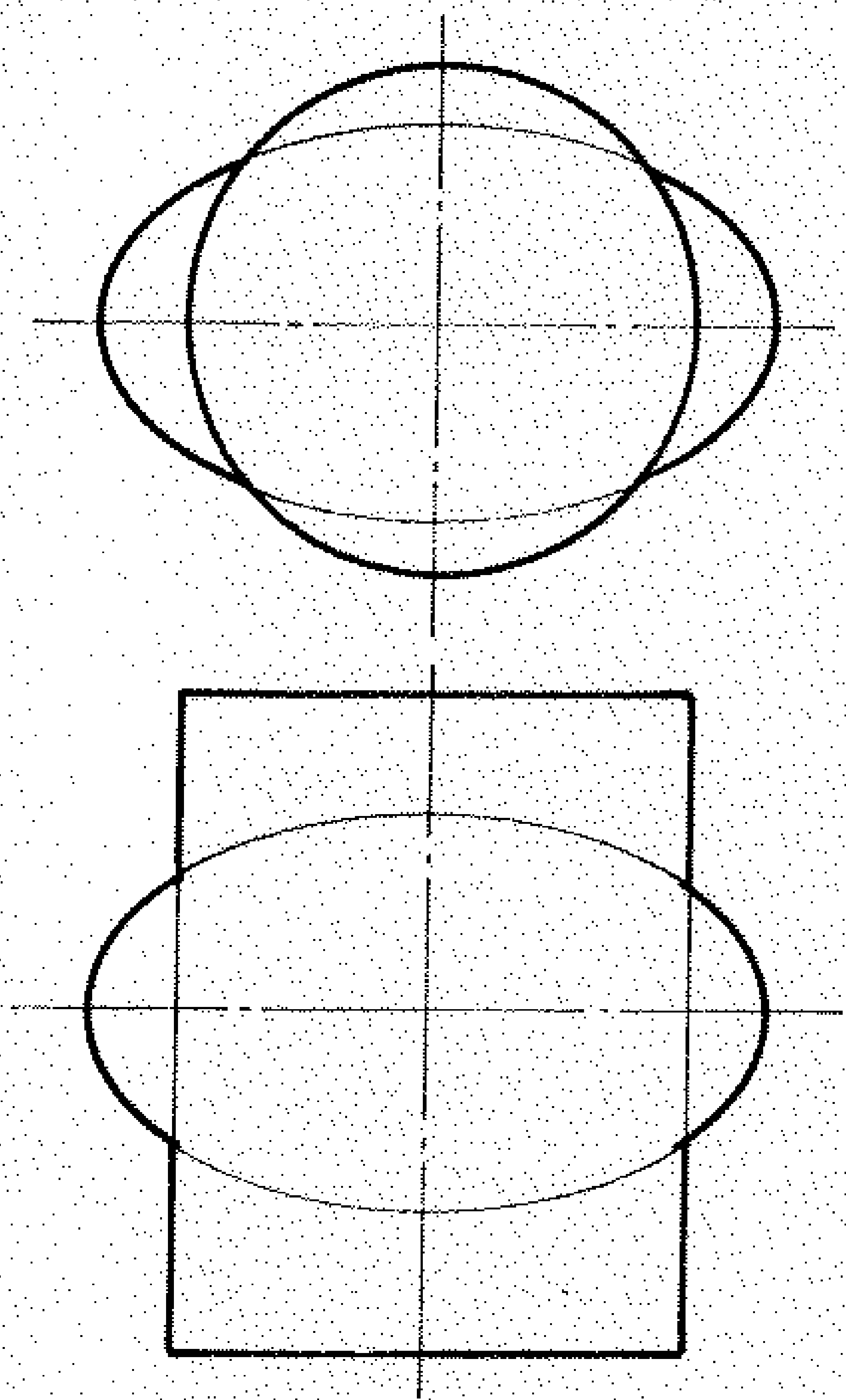
Hình 10 - 36



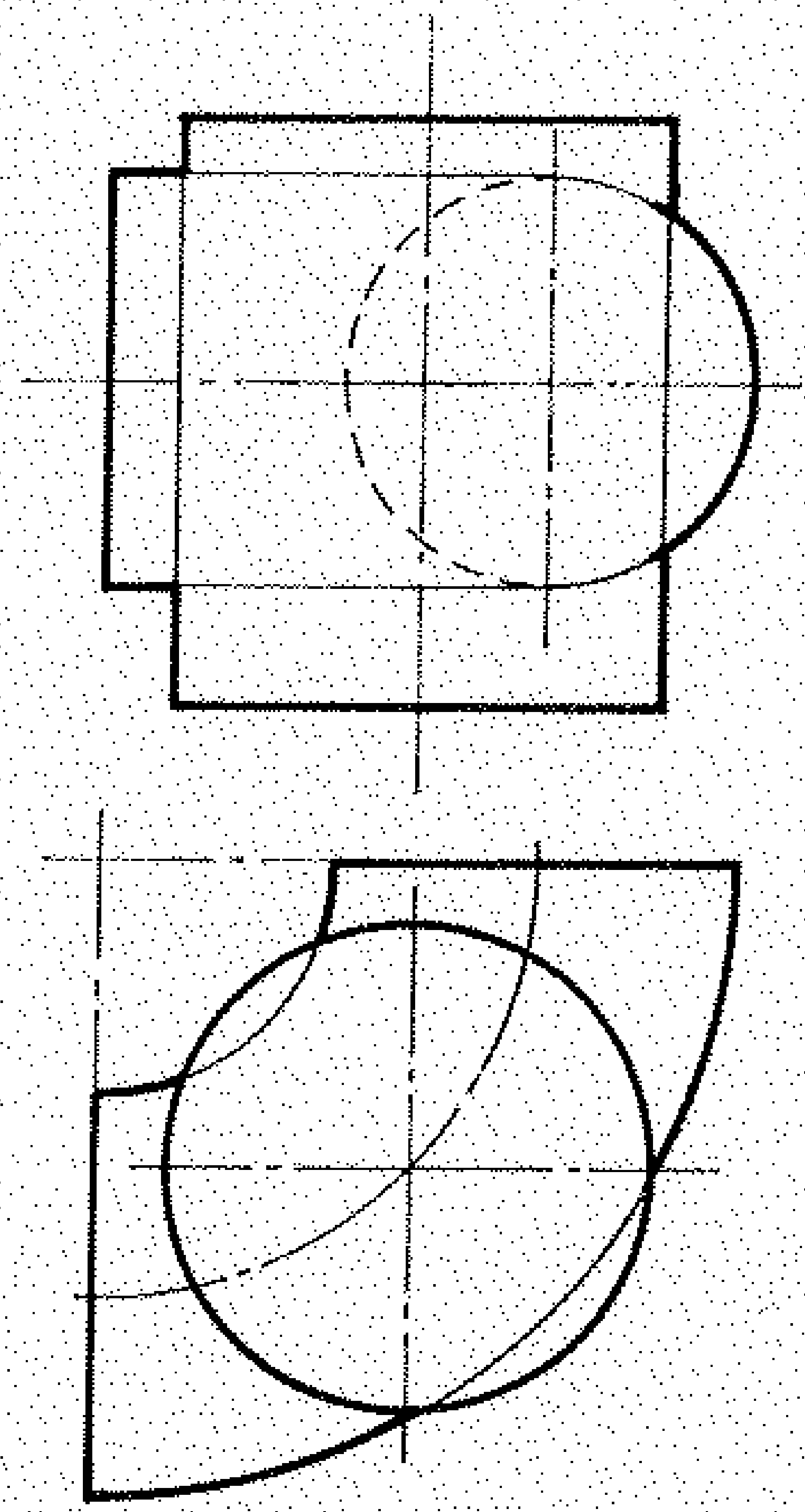
Hình 10 - 37



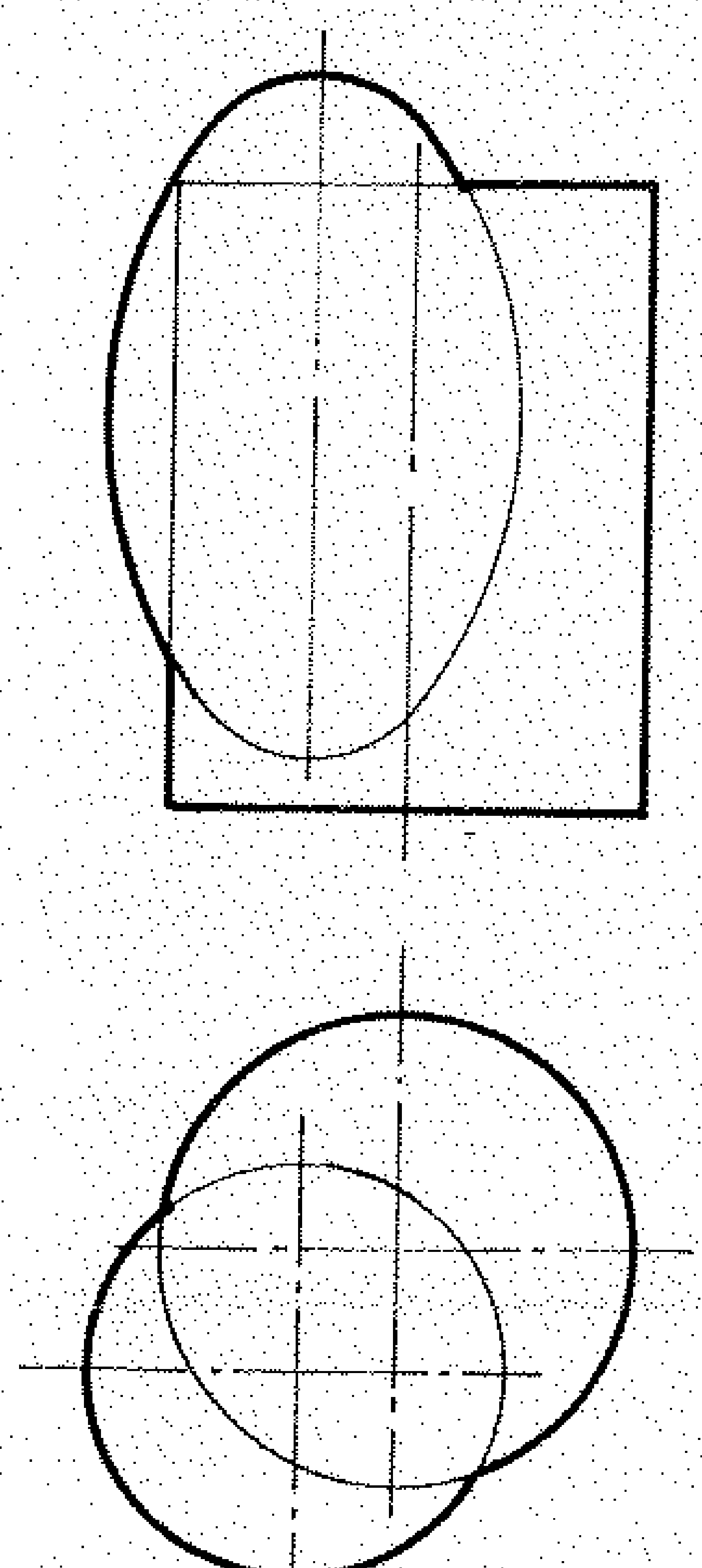
Hình 10 - 38



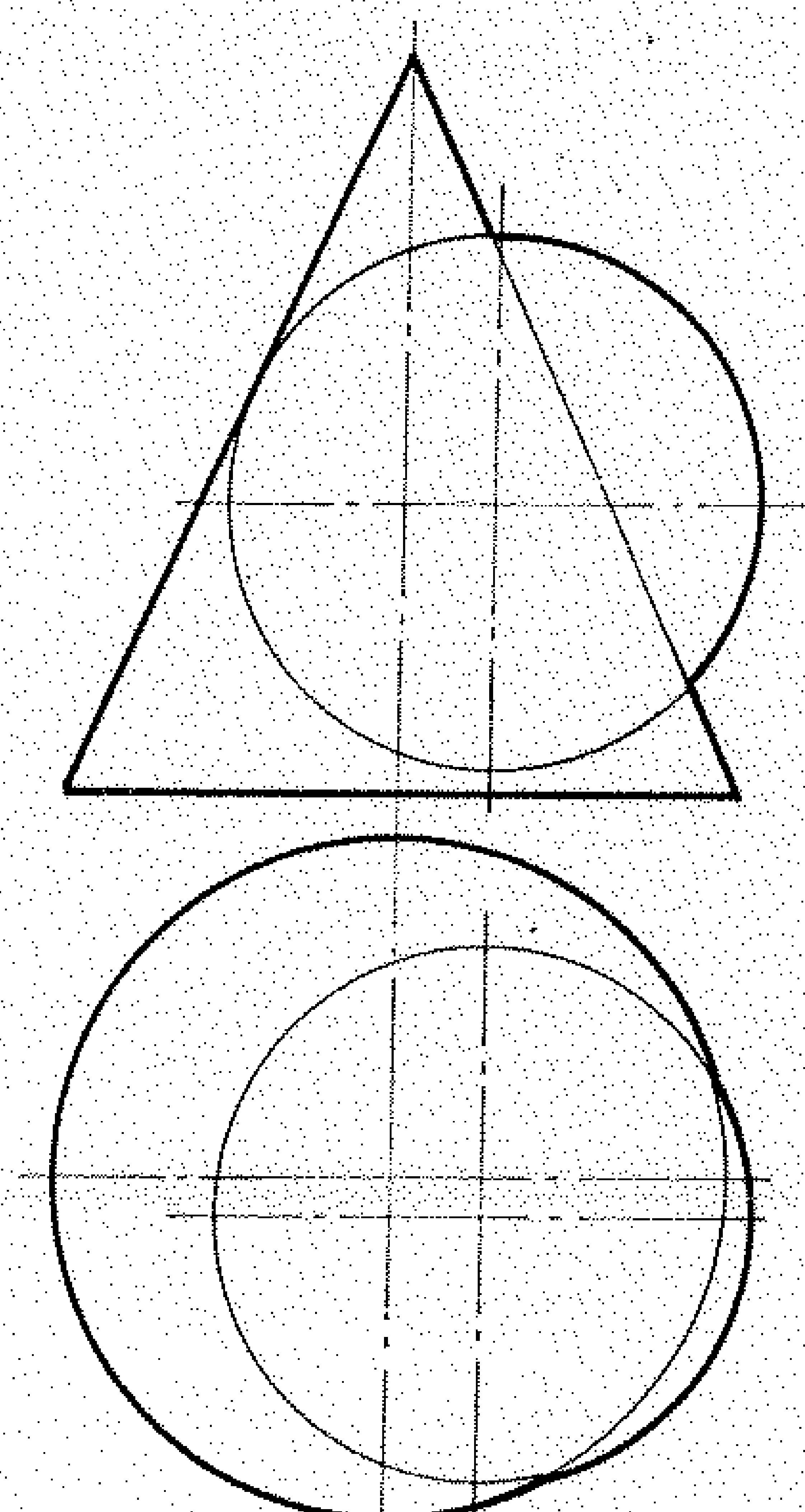
Hình 10 - 39



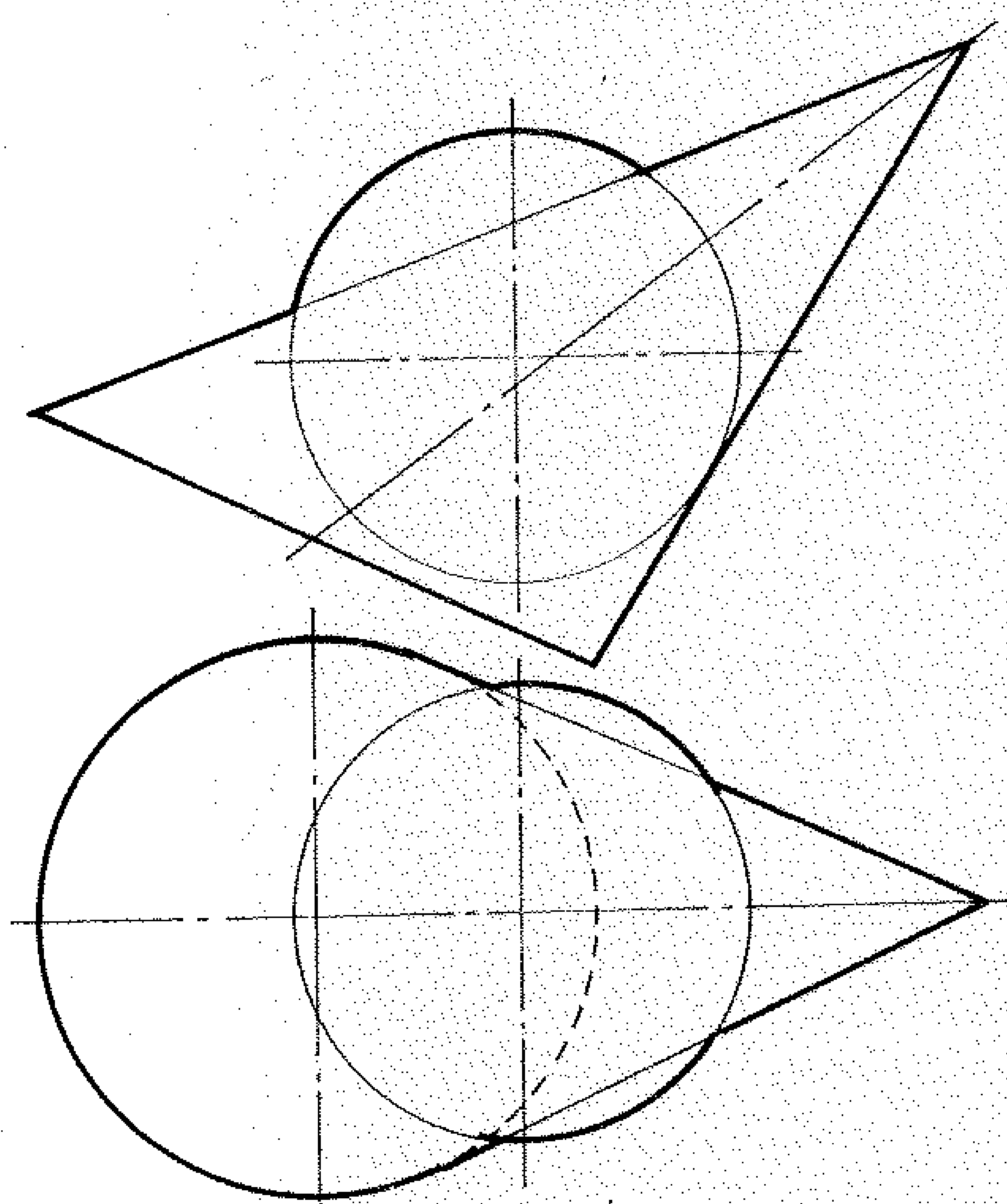
Hình 10 - 40



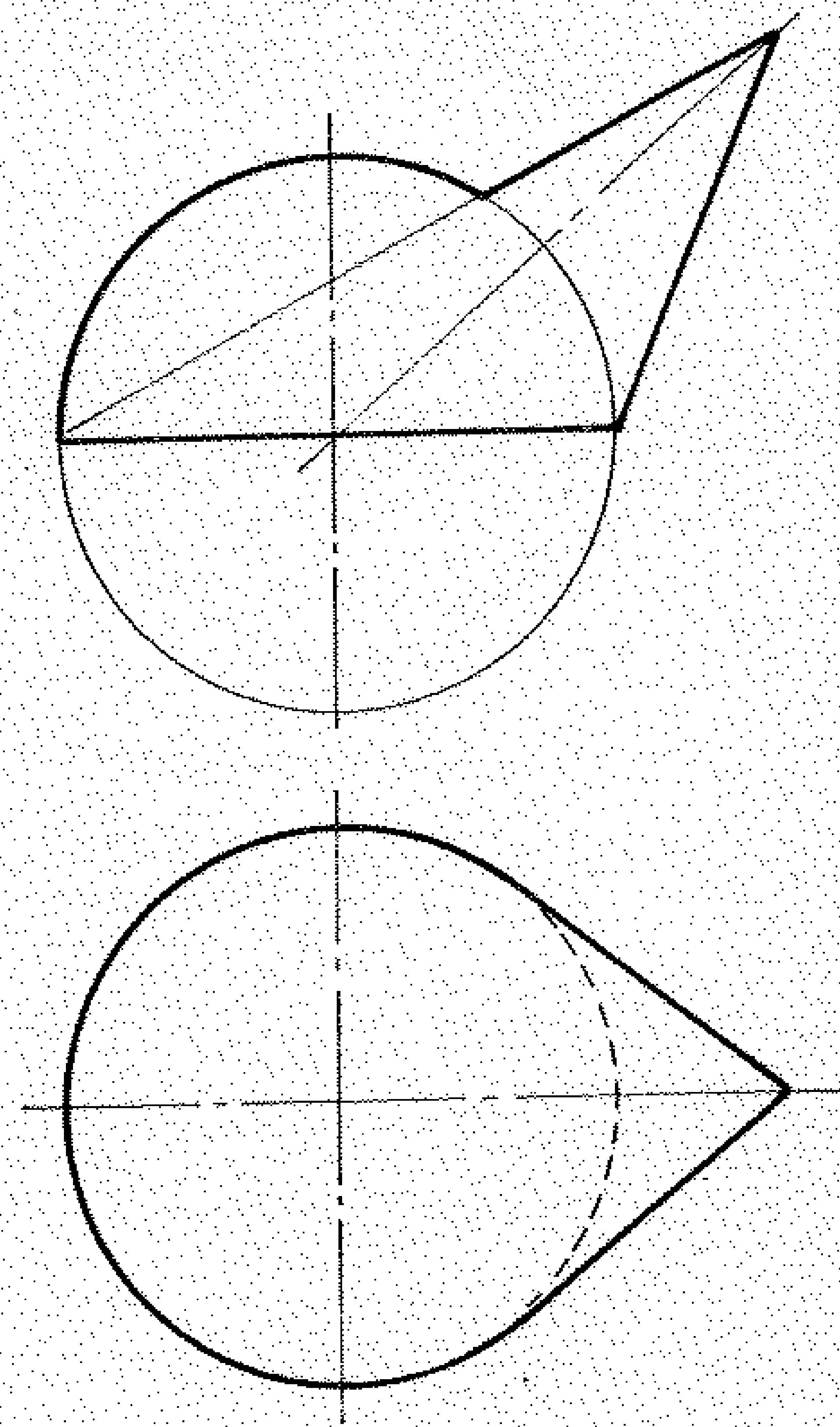
Hình 10 - 41



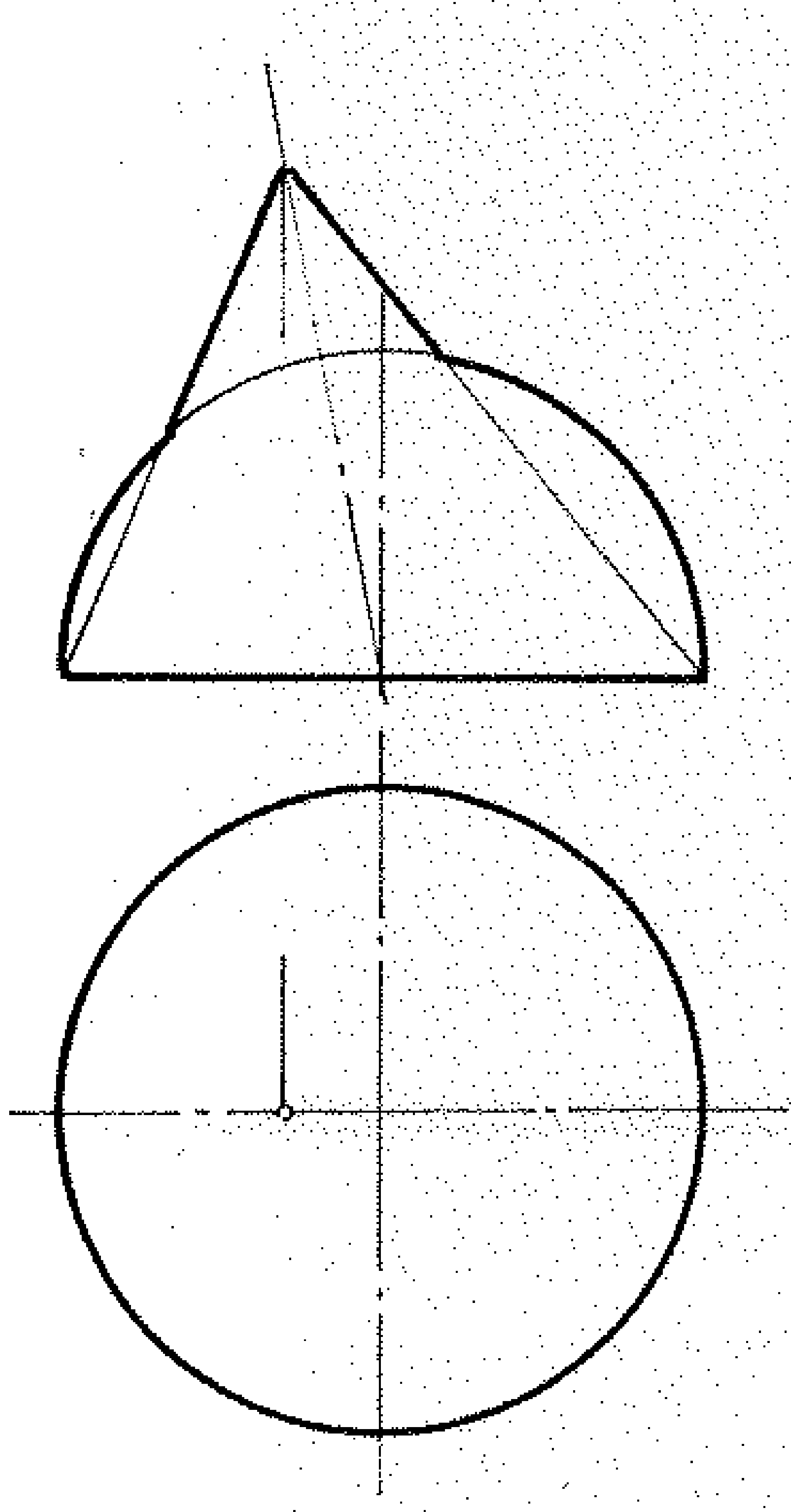
Hình 10 - 42



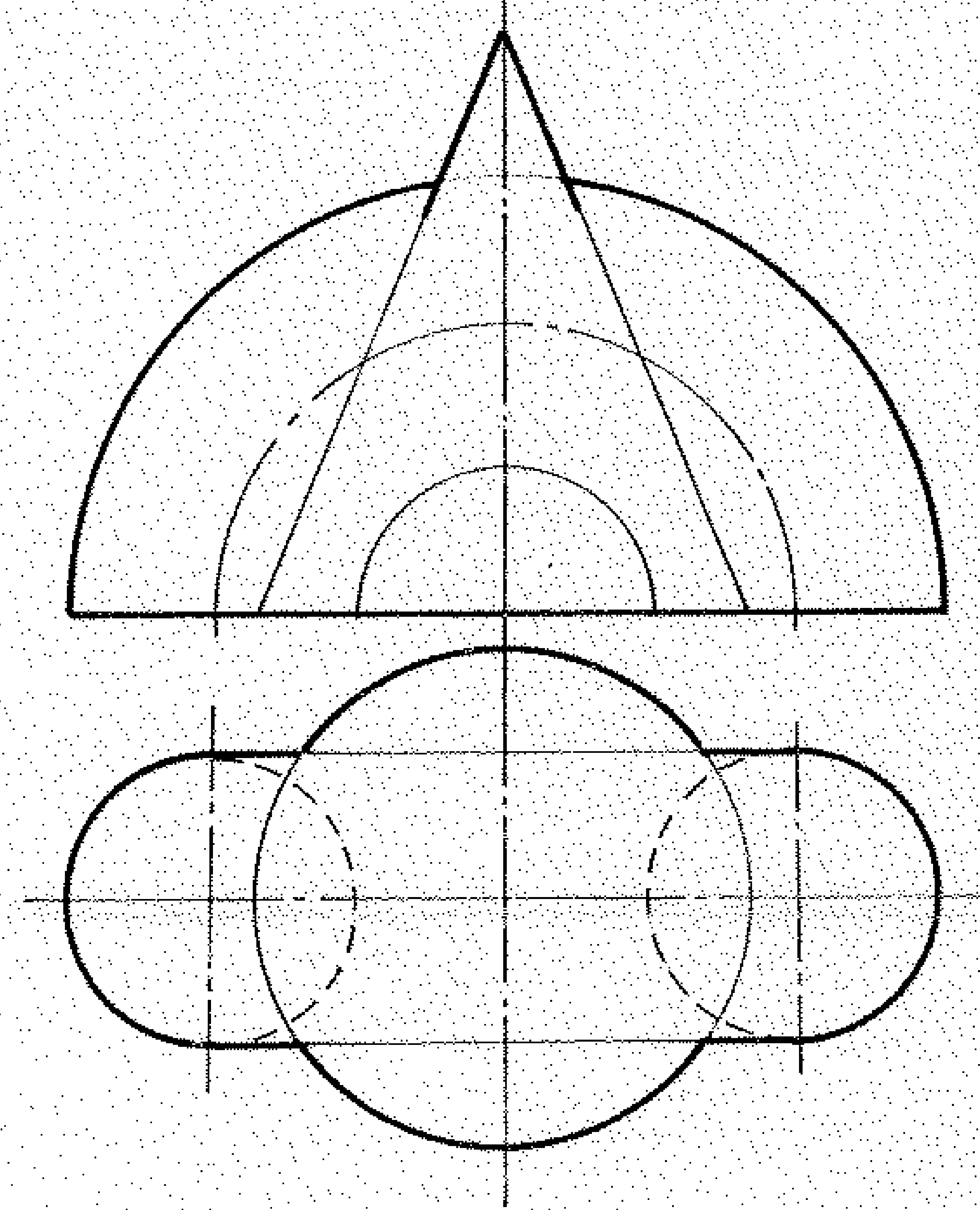
Hình 10 – 43



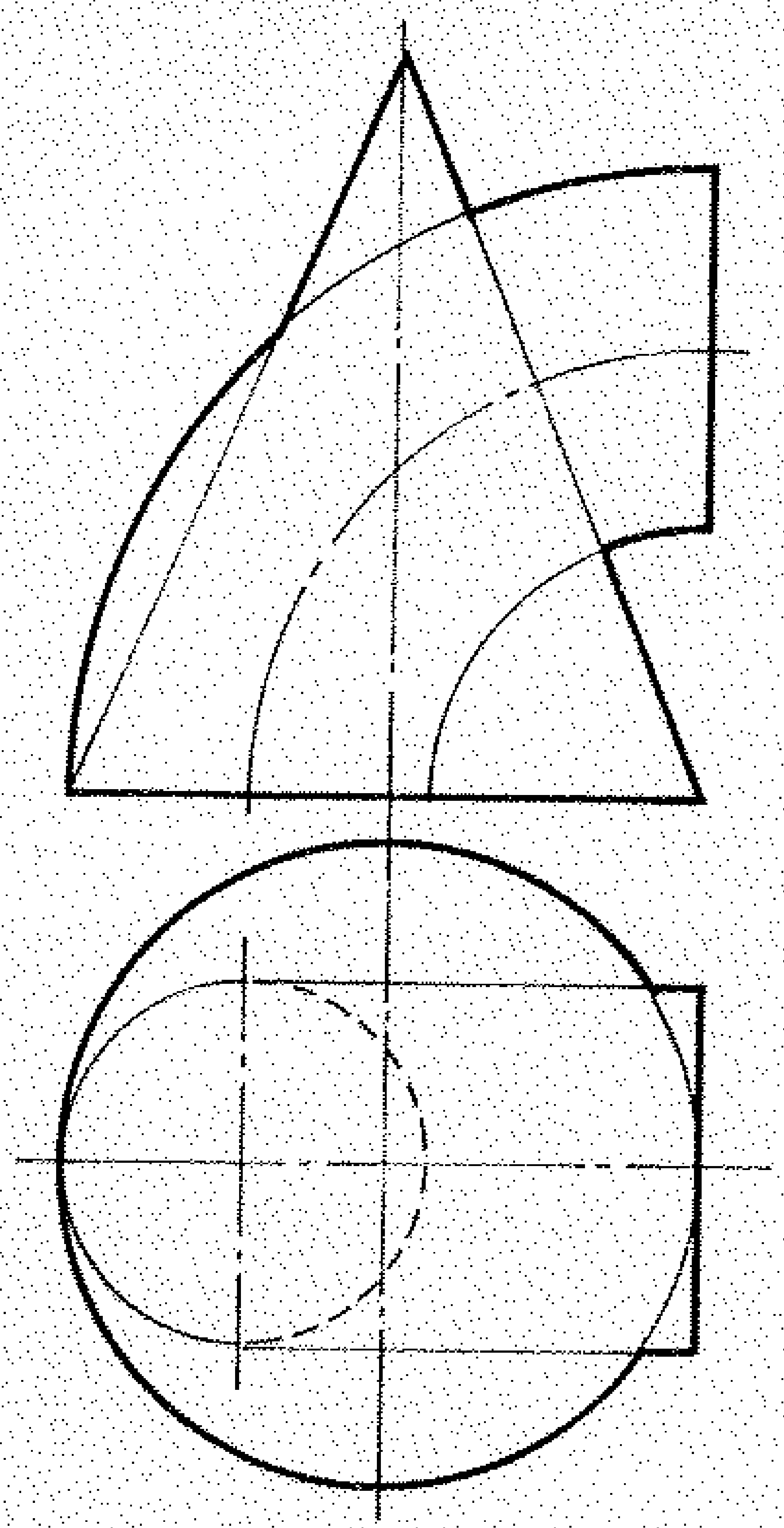
Hình 10 – 44



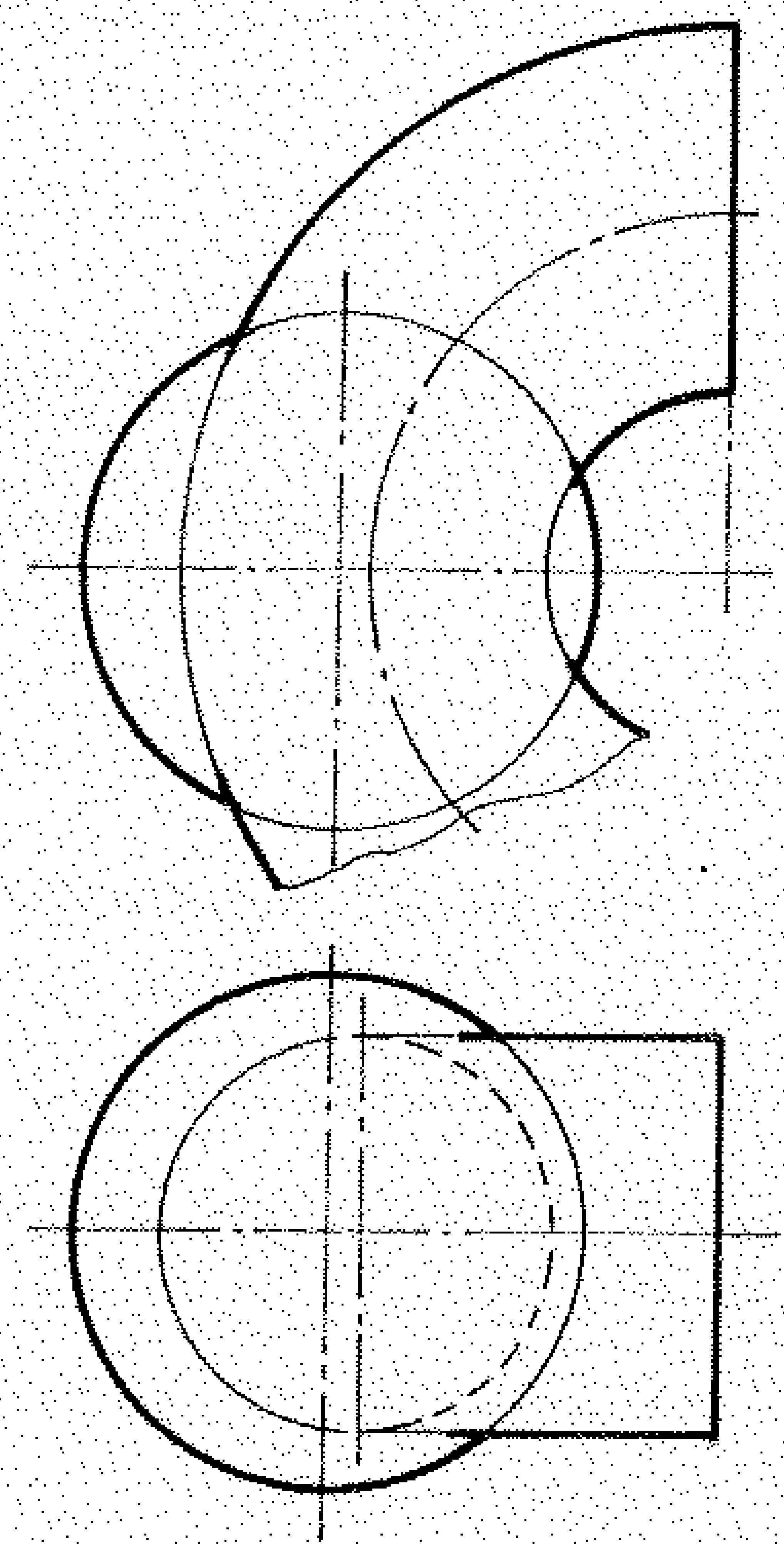
Hình 10 – 45



Hình 10 – 46



Hình 10 -47



Hình 10 -48

CHƯƠNG 11

KHAI TRIỂN CÁC MẶT

11. 1. Các thí dụ

Khai triển một mặt là trải mặt đó lên trên một mặt phẳng. Vấn đề cơ bản của bài toán vẽ hình khai triển của một mặt là xác định hình gốc (hình thực) của mặt đó.

Thí dụ 1: Vẽ hình khai triển của lăng trụ cụt ABCD. A'B'C'D' (Hình 11 – 1).

Giải : Vì các cạnh bên của lăng trụ song song với mặt phẳng hình chiếu đứng nên độ dài của chúng đã biết : $AA' = A_1A'_1$; $BB' = B_1B'_1$; $CC' = C_1C'_1$, $DD' = D_1D'_1$.

Để vẽ hình khai triển các mặt xung quanh của lăng trụ này ta có thể làm như sau :

– Xác định hình gốc (độ lớn) của một tiết diện thẳng của lăng trụ. Ở bài này, đáy ABCD của lăng trụ nằm trong mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{Q}$ vuông góc với các cạnh bên nên chính ABCD là một tiết diện thẳng của lăng trụ đã cho. Hình gốc của nó là $\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2\overline{D}_2$ được vẽ bằng cách chập mặt phẳng $\mathcal{Q}$ vào $\mathcal{P}^2$ quanh vết bằng v_a^2 của nó.

– Trên đường thẳng l_o đặt lần lượt các đoạn thẳng $A_oB_o = \overline{A}_2\overline{B}_2$, $B_oC_o = \overline{B}_2\overline{C}_2$, $C_oD_o = \overline{C}_2\overline{D}_2$ và $D_oA_o = \overline{D}_2\overline{A}_2$. Vẽ qua các điểm A_o, B_o, C_o, D_o các đường thẳng vuông góc với l_o và đặt trên đó các đoạn $A_oA'_o = A_1A'_1$, $B_oB'_o = B_1B'_1$, $C_oC'_o = C_1C'_1$ và $D_oD'_o = D_1D'_1$.

Hình khai triển mặt xung quanh của lăng trụ là hình phẳng hợp bởi bốn hình thang vuông $A_oB_oB'_oA'_o$, $B_oC_oC'_oB'_o$, $C_oD_oD'_oC'_o$ và $D_oA_oA'_oD'_o$.

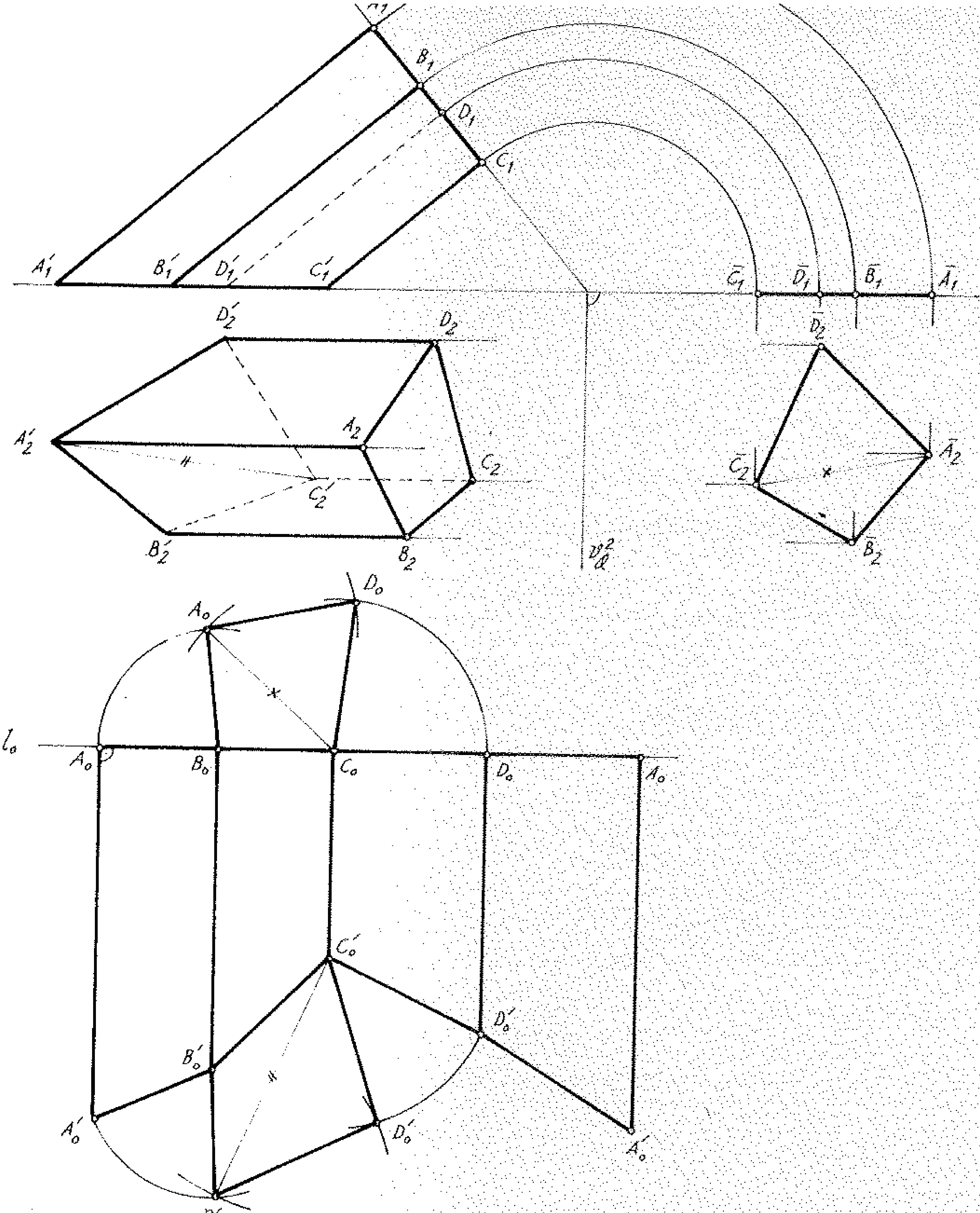
Hợp của hình khai triển mặt xung quanh của lăng trụ và hình gốc của hai đáy là hình khai triển của toàn bộ mặt lăng trụ.

Để dựng hình gốc của hai đáy cần phải dựng một trong hai đường chéo của chúng.

Chú ý : – Để xác định hình gốc của các mặt xung quanh của lăng trụ ta cũng có thể quay từng mặt bên quanh các cạnh bên là các đường mặt tới vị trí song song với $\mathcal{P}^1$.

– Nếu các cạnh bên của lăng trụ có vị trí bất kì thì có thể dùng các phép biến đổi hình chiếu để đưa chúng đến vị trí song song với một mặt phẳng hình chiếu rồi thực hiện việc khai triển như trên.

Thí dụ 2: Vẽ hình khai triển của một nón xiên đỉnh S, đáy tròn (Hình 11–2).



Hình 11 – 1

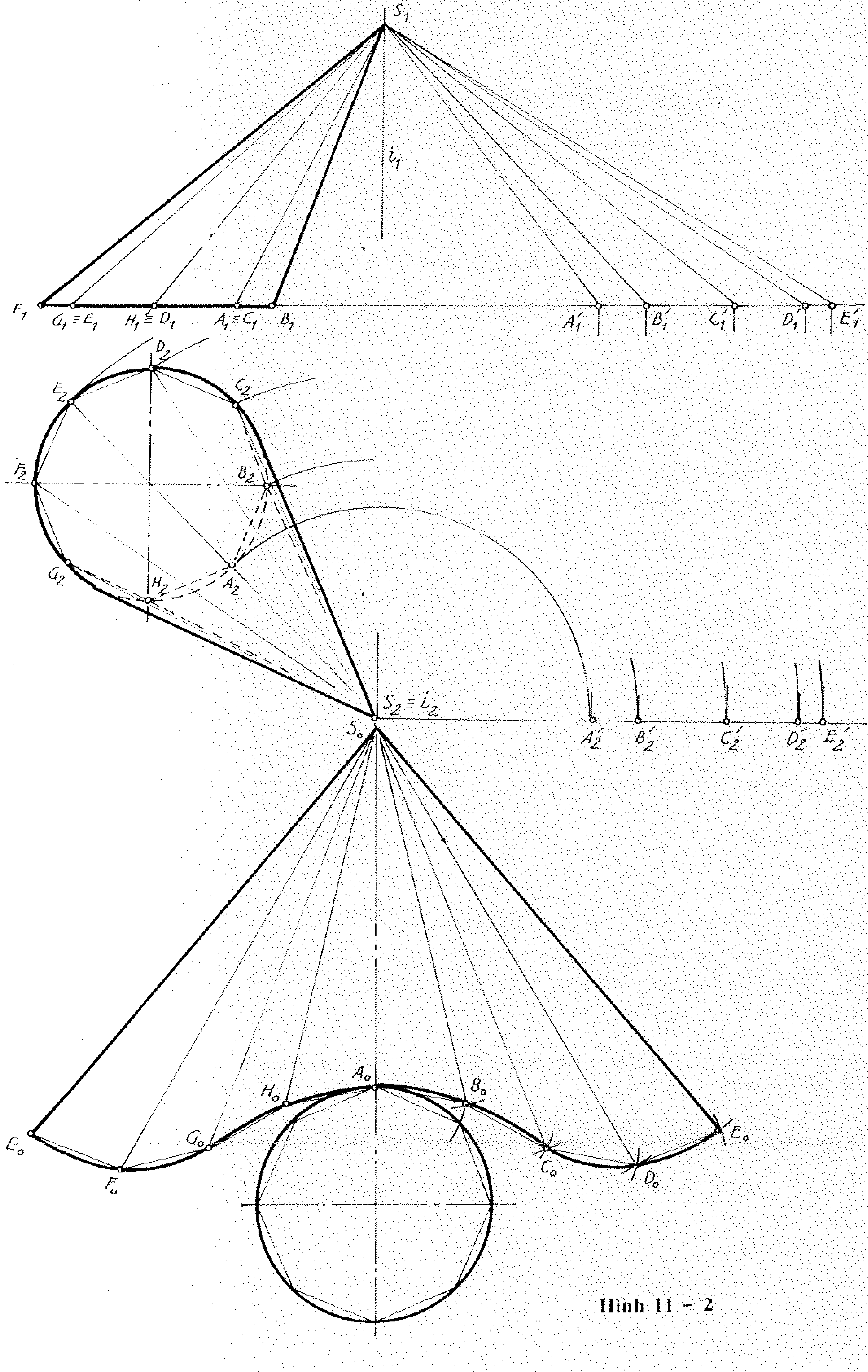
Giải : Mặt xung quanh của nón là mặt khai triển. Tuy nhiên để cho việc vẽ hình khai triển được thuận tiện ta sẽ khai triển gần đúng mặt xung quanh của nón. Cách làm như sau :

– Vẽ mặt chóp S. ABCDEFGH nội tiếp mặt nón, đáy chóp là bát giác đều nội tiếp hình tròn đáy nón.

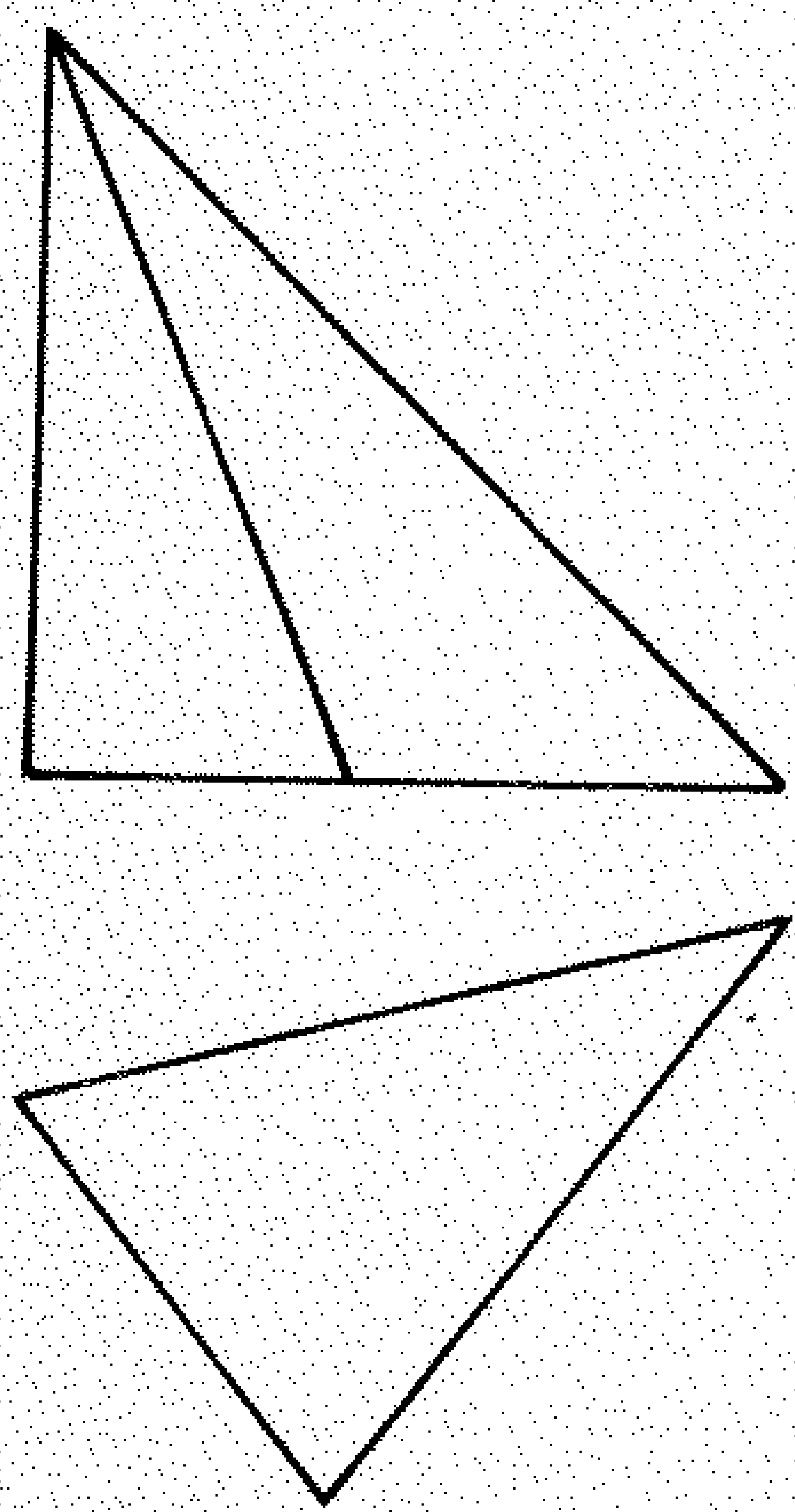
– Vẽ hình khai triển mặt xung quanh của chóp bằng cách xác định hình gốc của các mặt bên SAB, SBC, ..., SHA... Ở đây đáy chóp nằm trên mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$ nên độ dài các cạnh đáy đã biết. Để tìm độ dài các cạnh bên của mặt chóp ta có thể quay chúng quanh đường thẳng chiếu bằng i đi qua đỉnh S đến vị trí song song với $(\mathcal{P}^1)$.

Hình khai triển mặt xung quanh của mặt chóp là hình phẳng hợp bởi các tam giác $S_0A_0B_0$, $S_0B_0C_0$, $S_0C_0D_0$, $S_0D_0E_0$, $S_0E_0F_0$, $S_0F_0G_0$, $S_0G_0H_0$ và $S_0H_0A_0$.

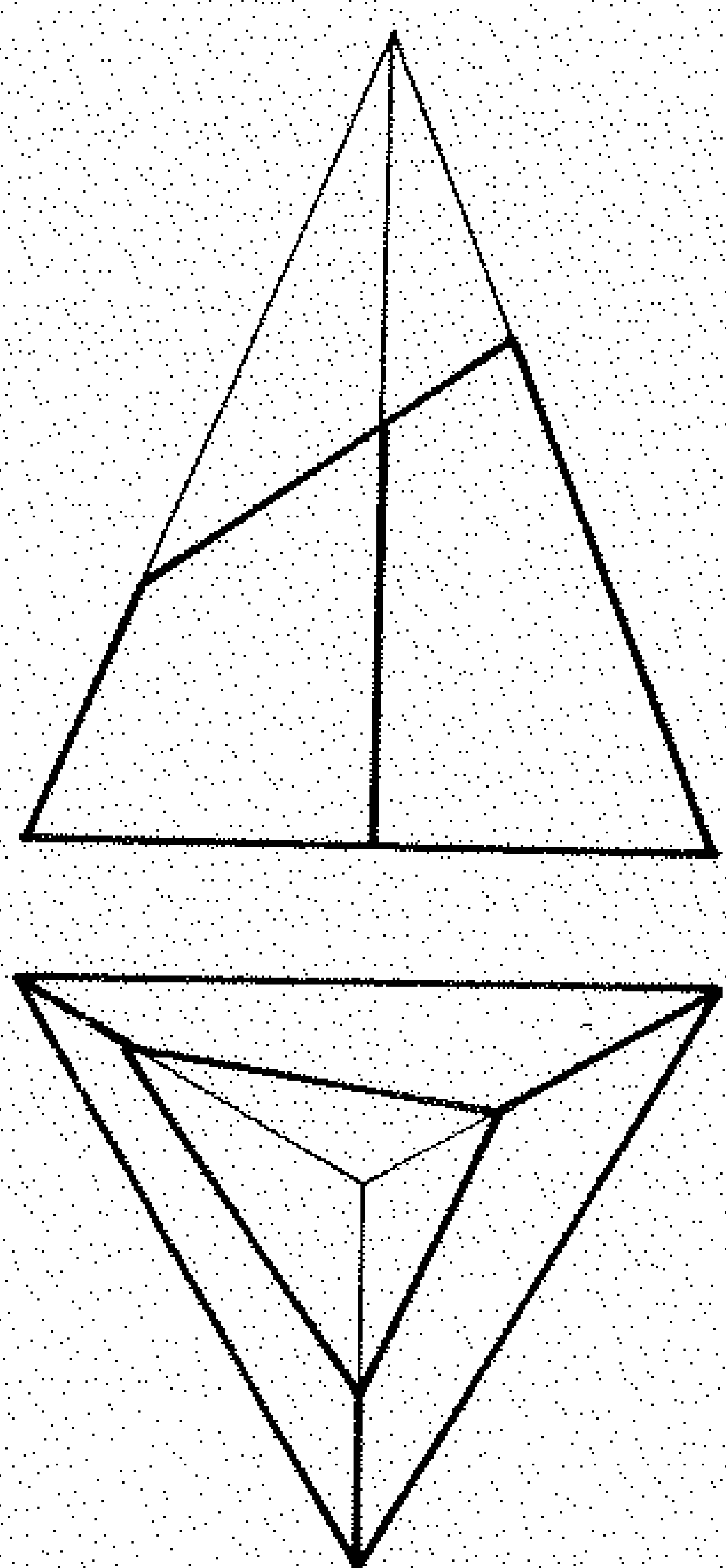
Qua các điểm E_o, D_o, C_o, B_o, A_o, H_o, G_o, F_o, E_o vẽ một đường cong trơn ta sẽ được hình khai triển gần đúng của mặt xung quanh của nón. Hợp của hình này và hình gốc của đáy nón là hình khai triển của mặt nón.



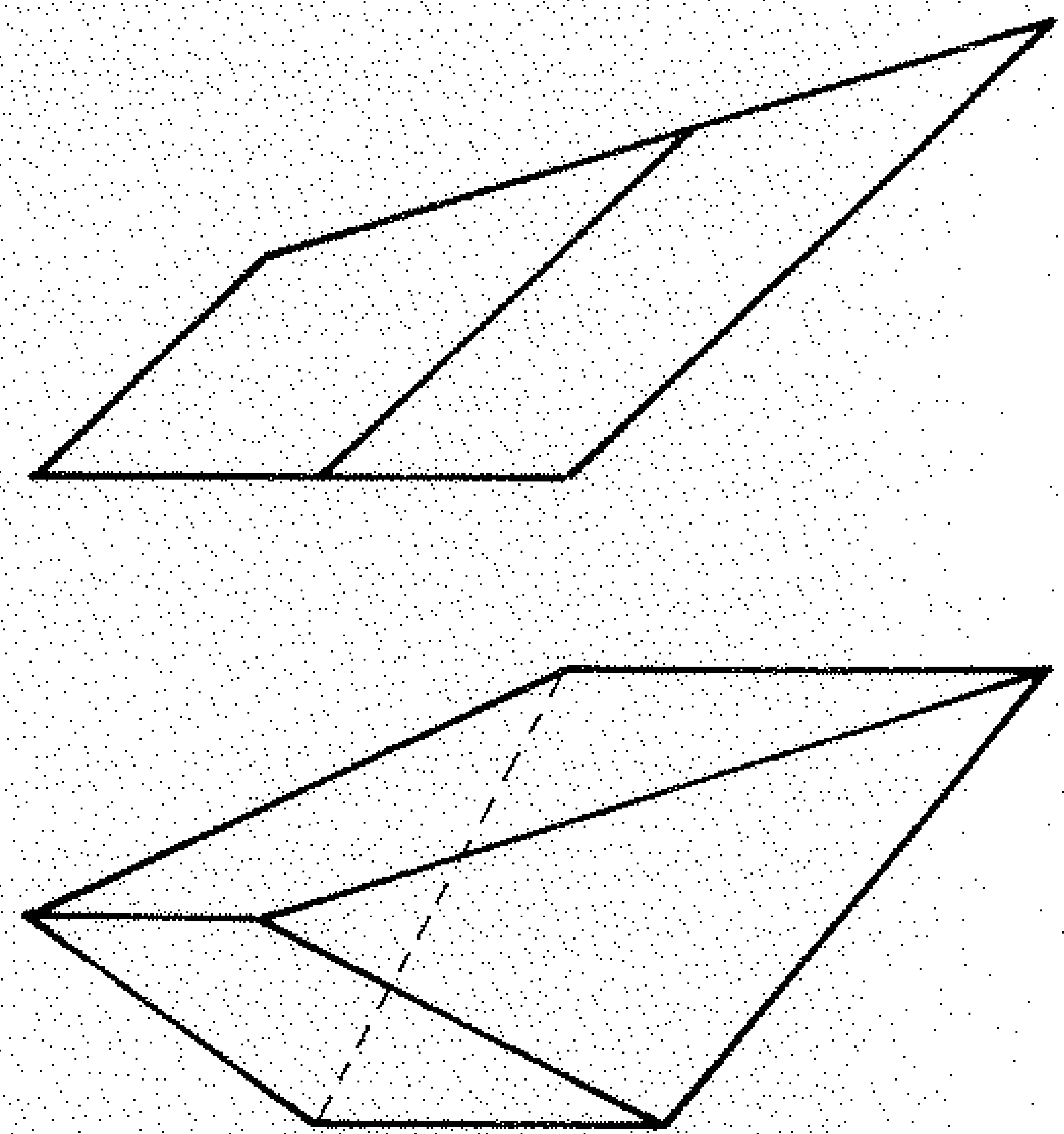
Hình 11 - 2



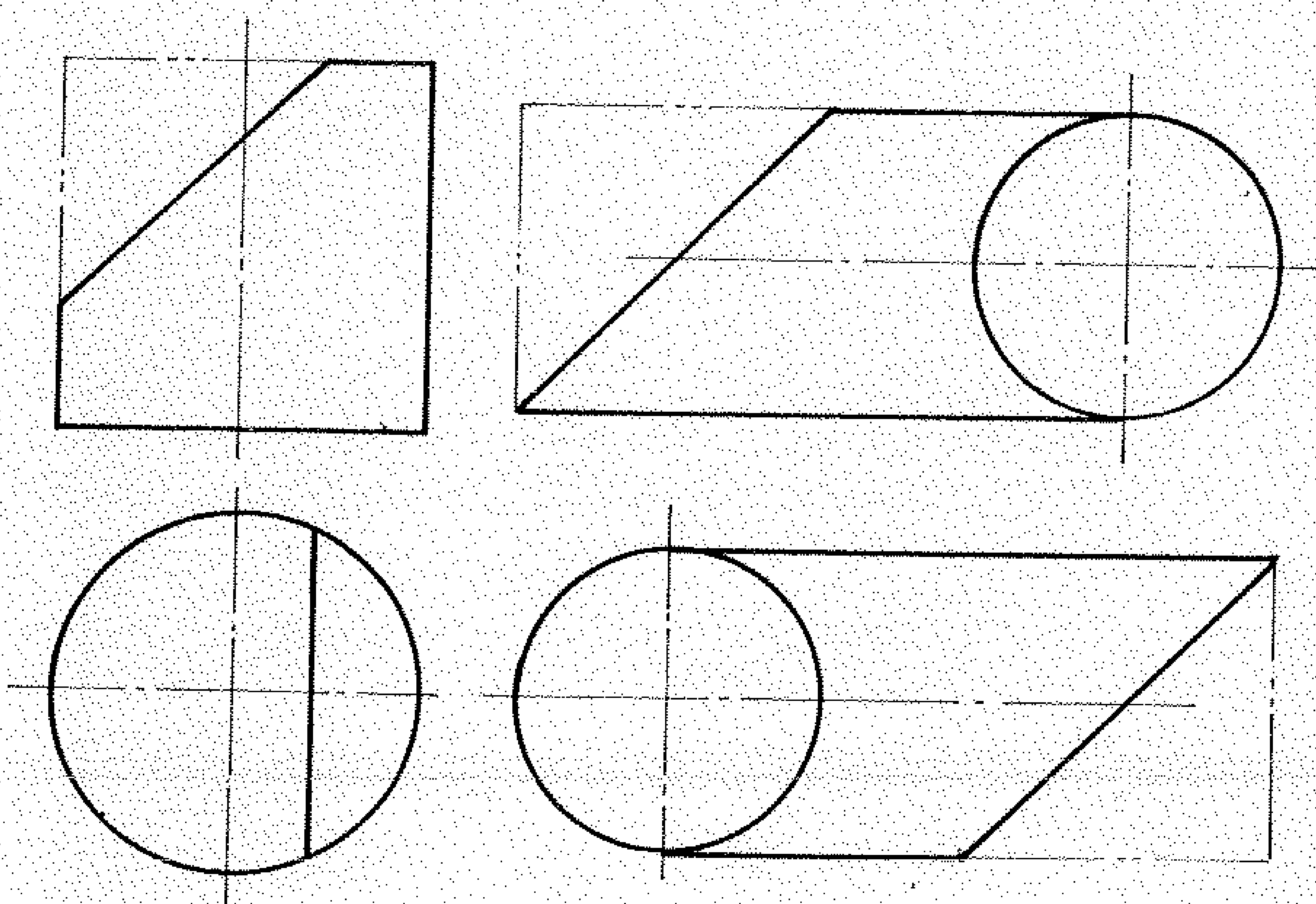
Hình 11 - 3



Hình 11 - 4

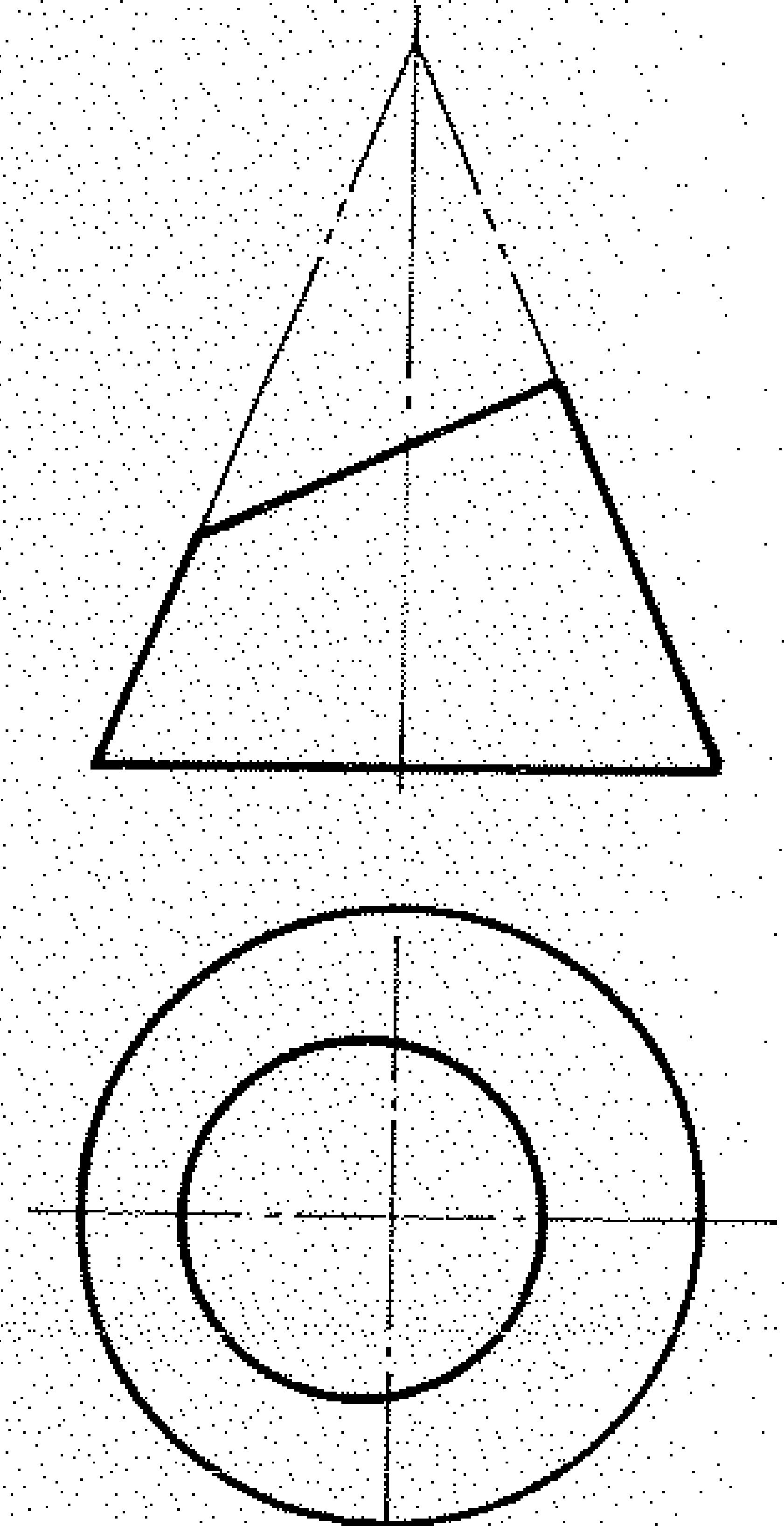


Hình 11 - 5



a)   b)

Hình 11 - 6



Hình 11 - 7

Chú ý : – Mặt phẳng (SAE) là mặt phẳng đối xứng chung của nón và chóp nội tiếp nên chỉ cần vẽ hình khai triển của một nửa mặt xung quanh của chúng rồi suy ra nửa còn lại nhờ phép đối xứng.

– Độ dài các cạnh đáy của mặt chóp nội tiếp càng nhỏ (tức là số cạnh của đa giác đều nội tiếp đường tròn đáy nón càng nhiều) thì hình khai triển gần đúng của mặt xung quanh của nón càng chính xác.

11. 2. Bài tập

Bài 1 : Vẽ hình khai triển của các mặt sau :

a– Lăng trụ (Hình 11 – 3)
b– Chóp (Hình 11 – 4)
c– Chóp cụt (Hình 11 – 5)
d– Trụ cụt (Hình 11 – 6 a, b)
e– Nón cụt (Hình 11 – 7).

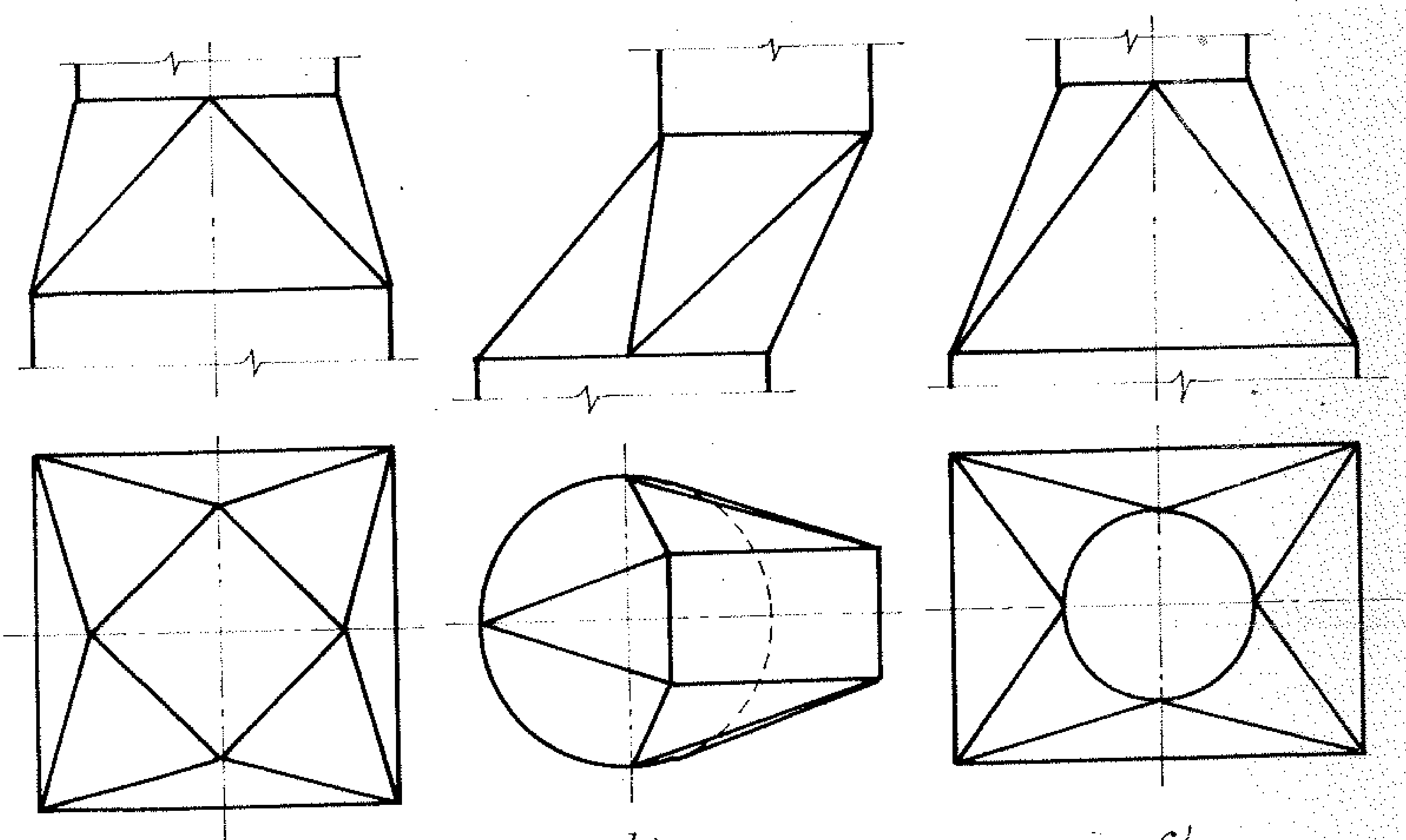
Bài 2 : Vẽ hình khai triển của phần còn lại ở phía dưới mặt phẳng cắt Q sau khi bị cắt bởi mặt phẳng này của các mặt dưới đây.

a– Chóp (Hình 8 – 6)
b– Lăng trụ (Hình 8 – 12)
c– Nón (Hình 8 – 16)
d– Trụ (Hình 8 – 17).

Bài 3 : Vẽ hình khai triển của hai mặt kèm giao tuyến của chúng :

a– Lăng trụ và chóp (Hình 10 – 6, 10 – 9, 10 – 11).
b– Chóp và trụ (Hình 10 – 23, 10 – 25).
c– Trụ và nón (Hình 10 – 32)
d– Trụ và trụ (Hình 10 – 30, 10 – 31).

Bài 4 : Vẽ hình khai triển của các mặt chuyển tiếp, (Hình 11 – 8a, b, c).



a)　　b)　　c)

Hình 11 – 8

CHƯƠNG 12

HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO

12. 1. Các thí dụ

Khi vẽ hình chiếu trục đo của các vật thể cần chú ý các vấn đề sau :

+ Trong kĩ thuật người ta thường dùng 5 loại hình chiếu trục đo (TCVN 11 - 78) sau, (Hình 12 - 1):

a– Hình chiếu trục đo vuông góc đều, p = q = r = 1

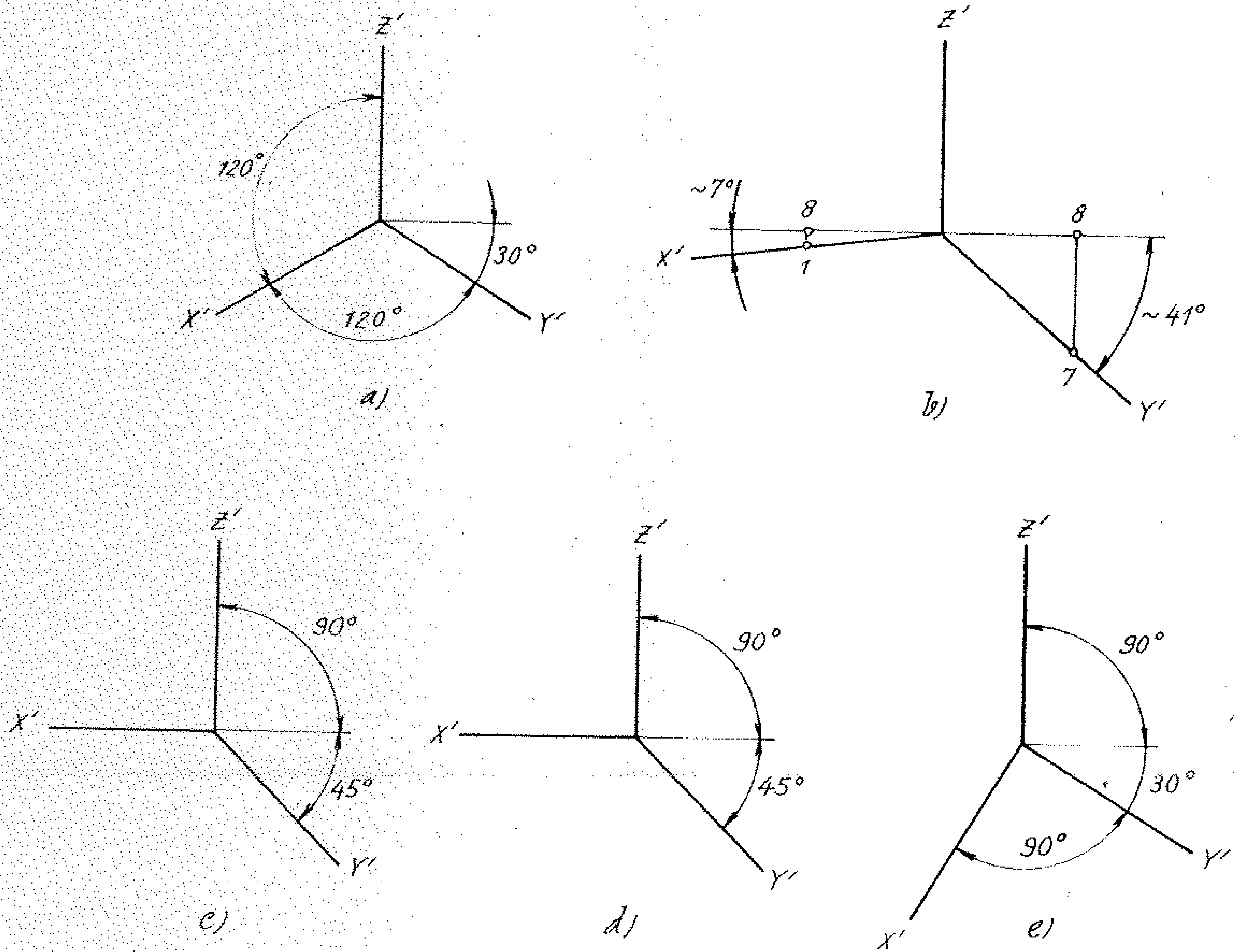
b– Hình chiếu trục đo vuông góc cân, p = r = 1; q = 0,5

c– Hình chiếu trục đo (xiên góc) đứng đều, p = 1 = r = 1,

d– Hình chiếu trục đo (xiên góc) đứng cân, p = r = 1; q = 0,5

e– Hình chiếu trục đo (xiên góc) bằng đều, p = q = r = 1

Ở đây p, q và r lần lượt là hệ số biến dạng theo các trục x, y và z.



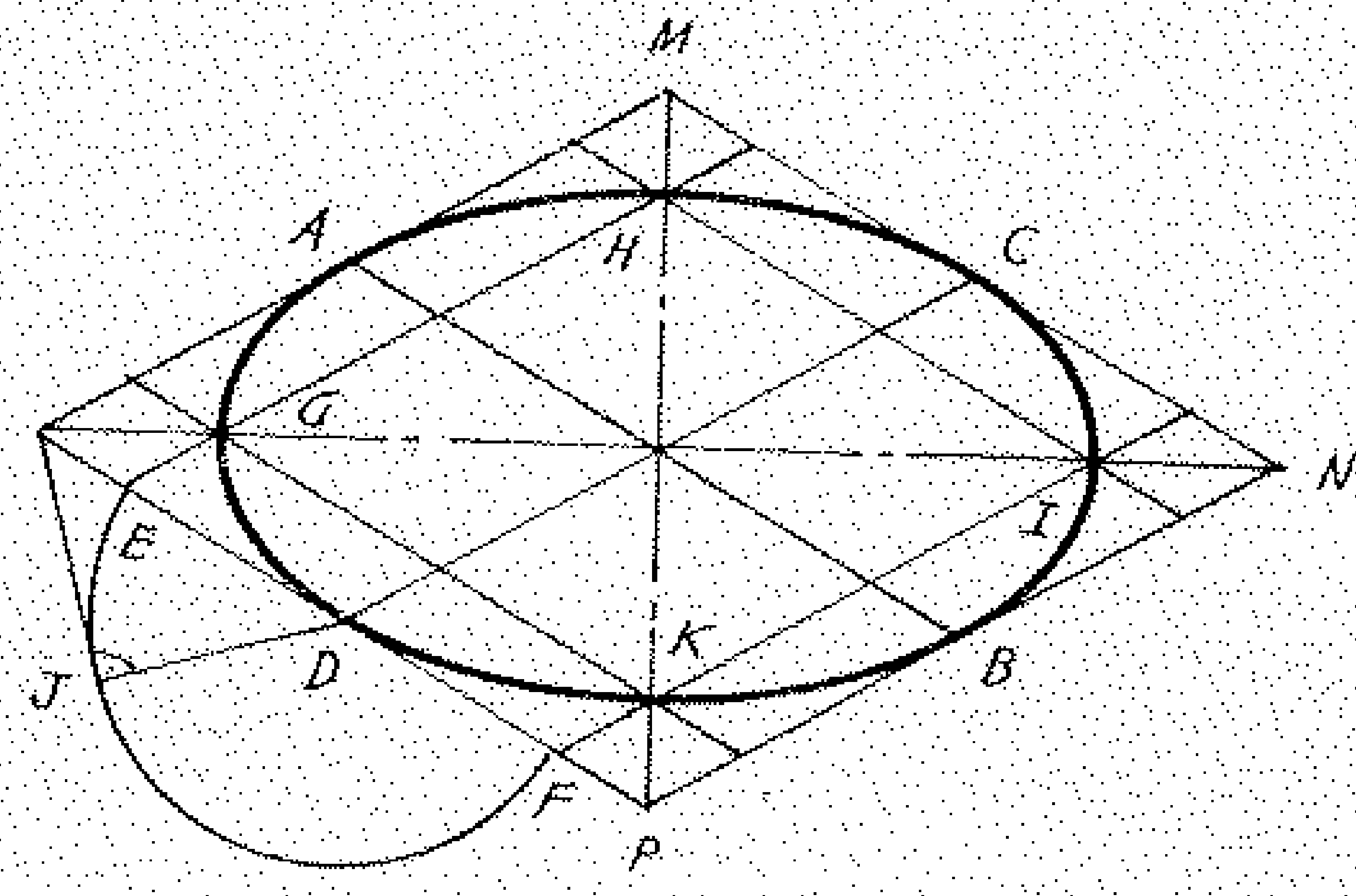
Hình 12 - 1

+ Để hình chiếu trục đo của vật thể có tính trực quan và đẹp cần phải :

– Chọn loại hình chiếu trục đo thích hợp

– Chọn hướng nhìn hợp lí (tức là đặt vật thể cần biểu diễn ở vị trí hợp lí trong hệ trục tọa độ).

+ Hình chiếu trục đo của đường tròn thường là elip. Biết hai đường kính liên hợp AB và CD của elip, người ta có thể vẽ elip bằng phương pháp 8 điểm (hoặc phương pháp hình bình hành) như sau (Hình 12 – 2).



Hình 12 – 2

– Vẽ hình bình hành MNPQ nhận AB và CD là hai đường trung bình.

– Vẽ tam giác vuông cân có cạnh huyền là $\frac{1}{2}$ cạnh nào đó của hình bình hành, thí dụ tam giác vuông cân DJQ.

– Vẽ cung tròn tâm D, bán kính DJ và xác định các giao điểm E và F của cung tròn này với cạnh PQ của hình bình hành.

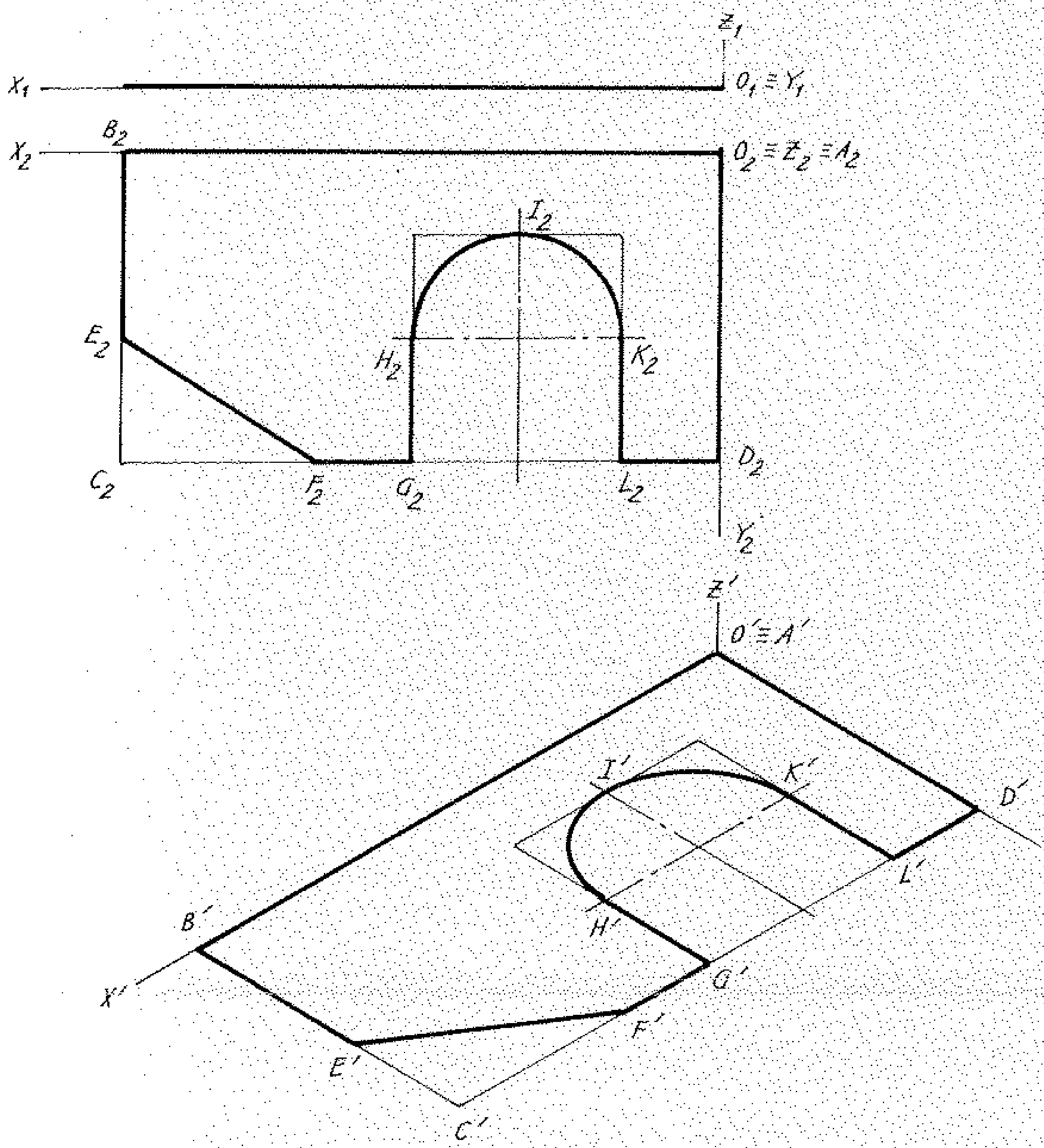
– Qua E và F vẽ các đường thẳng song song với CD và tìm các giao điểm G, H, I, K của chúng với hai đường chéo của hình bình hành.

– Vẽ elip qua 8 điểm A, B, C, D, G, H, I, K.

+ Trên hình chiếu trục đo người ta thường không thể hiện phần khuất của vật thể. Đối với các vật thể có cấu tạo rỗng người ta dùng hình cắt trục đo để thể hiện các phần rỗng đó (Hình 12 – 6b).

Trên hình cắt trục đo người ta dùng các mặt phẳng song song (hoặc trùng) với các mặt phẳng tọa độ để cắt bỏ một cách tưởng tượng một phần của vật thể cần biểu diễn.

Thí dụ 1: Cho một tấm phẳng nằm trong



Hình 12 – 3

mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$. Vẽ hình chiếu trục đo vuông góc đều của tấm phẳng đó (Hình 12 - 3).

Giải : Chọn một hệ tọa độ OXYZ sao cho (XOY) ≡ ($\mathcal{P}^2$) và hai trục OX, OY chứa hai cạnh của tấm phẳng (Hình 12 - 3, a).

Vẽ hình chiếu trục đo của hình bao ngoài của tấm phẳng, đó là hình bình hành A'B'C'D' với A'B' = A_2B_2 và A'D' = A_2D_2.

Cạnh vát E'F' có thể xác định nhờ hai kích thước C'E' = C_2E_2 và C'F' = C_2F_2.

Chỗ lõm gồm một phần là hình chữ nhật có hình chiếu trục đo là hình bình hành G'H'K'L' và một phần là nửa đường tròn có hình chiếu trục đo là một nửa elip H'I'K'.

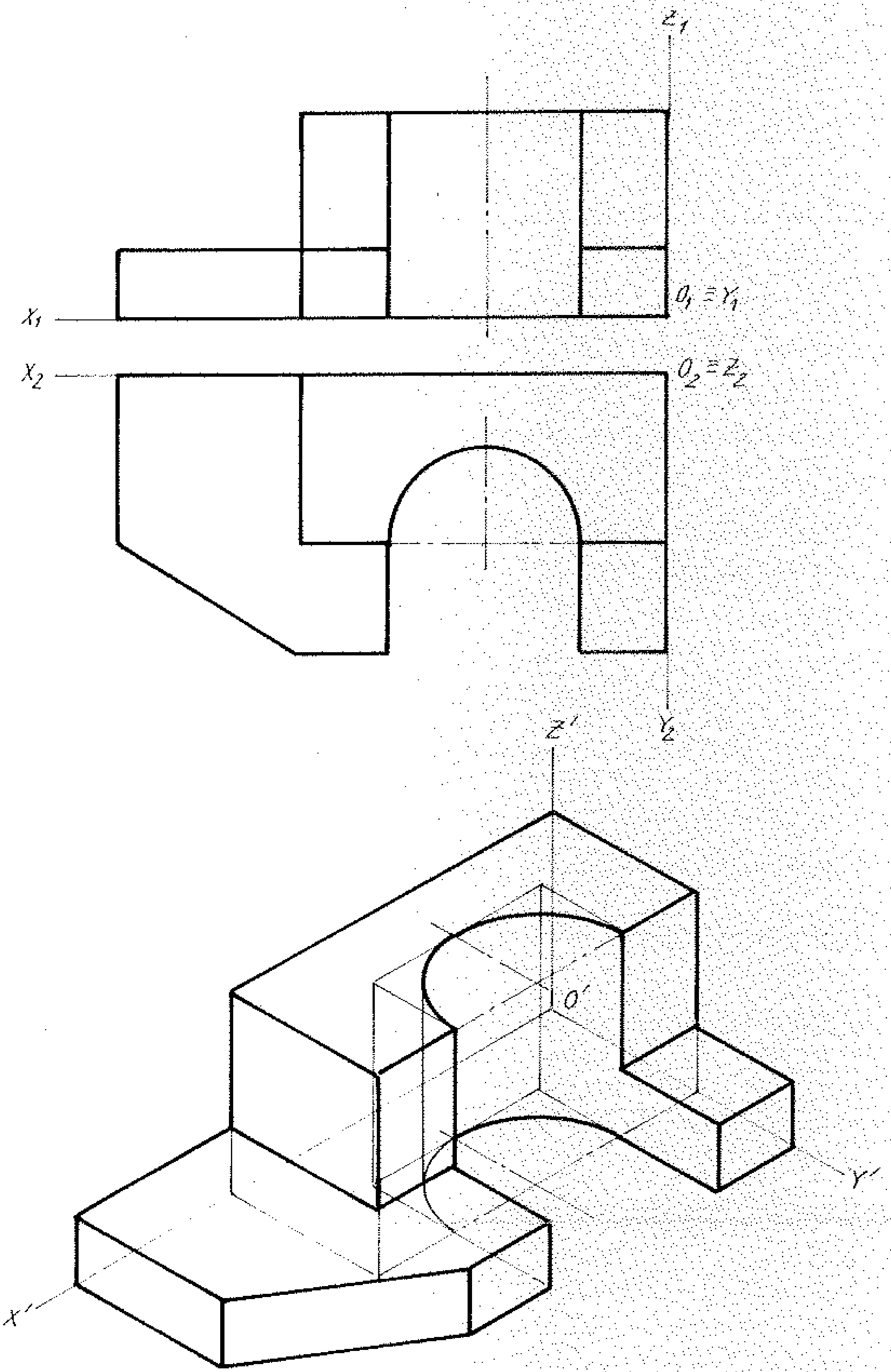
Thí dụ 2: Cho hai hình chiếu thẳng góc của một vật thể. Vẽ hình chiếu trục đo vuông góc đều của vật thể đó (hình 12 - 4).

Giải : - Dựng hình chiếu trục đo của hình chiếu bằng của vật thể (như thí dụ 1).

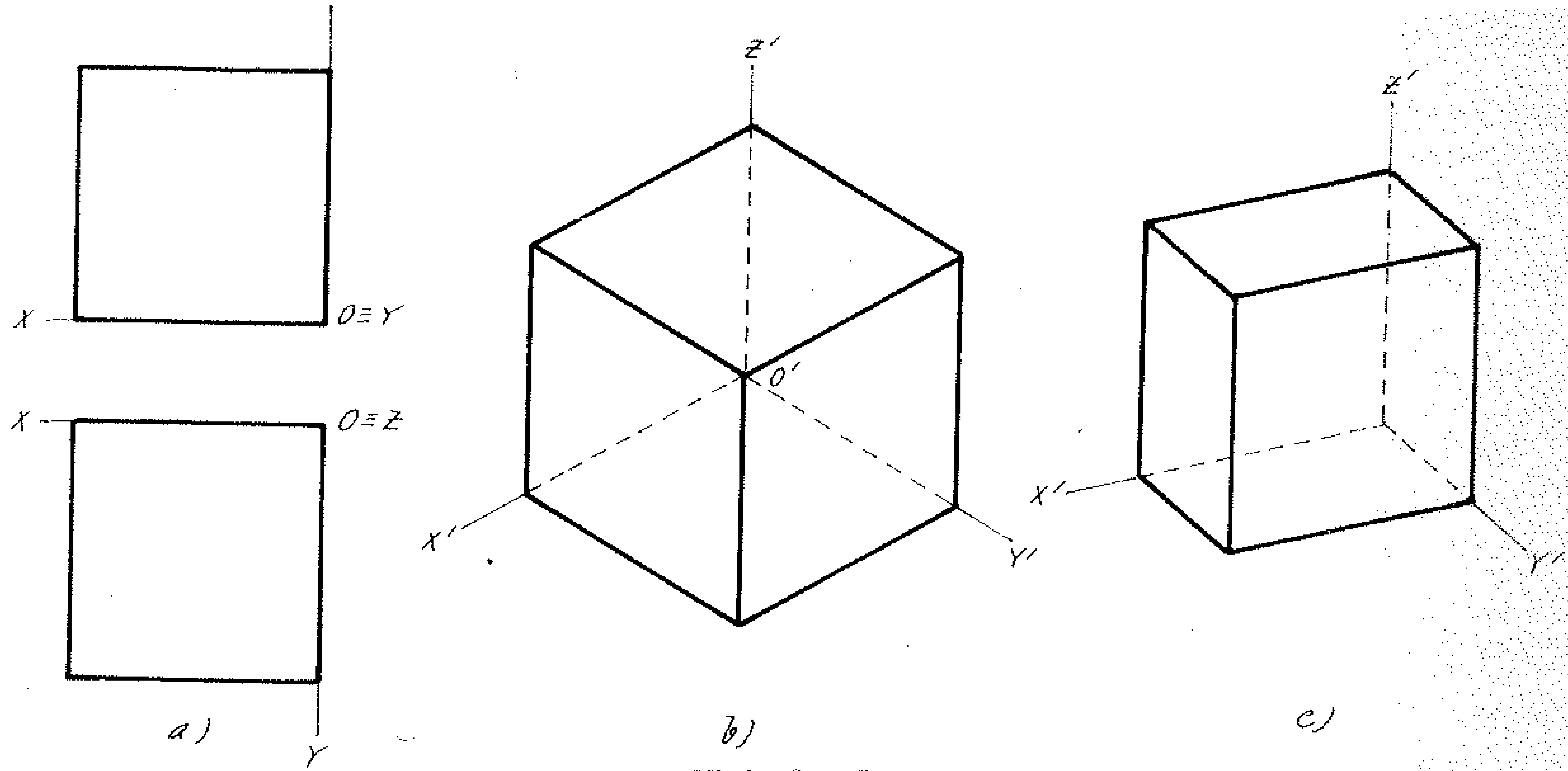
- Lần lượt dựng độ cao của hai bộ phận tạo thành vật thể đã cho bằng cách tịnh tiến theo trục O'Z' hình chiếu trục đo của hình chiếu bằng các bộ phận đó lên các độ cao tương ứng.

Thí dụ 3: Cho hình chiếu thẳng góc của một hình lập phương (Hình 12 - 5,a). Hãy chọn loại hình chiếu trục đo hợp lí và vẽ hình chiếu trục đo của nó.

Giải : Hình chiếu trục đo vuông góc đều của hình lập phương không cho ta cảm giác là một hình biểu diễn nổi (Hình 12 - 5, b). Trong trường hợp này nên dùng loại hình chiếu trục đo vuông góc cân (Hình 12 - 5, c).



Hình 12 - 4

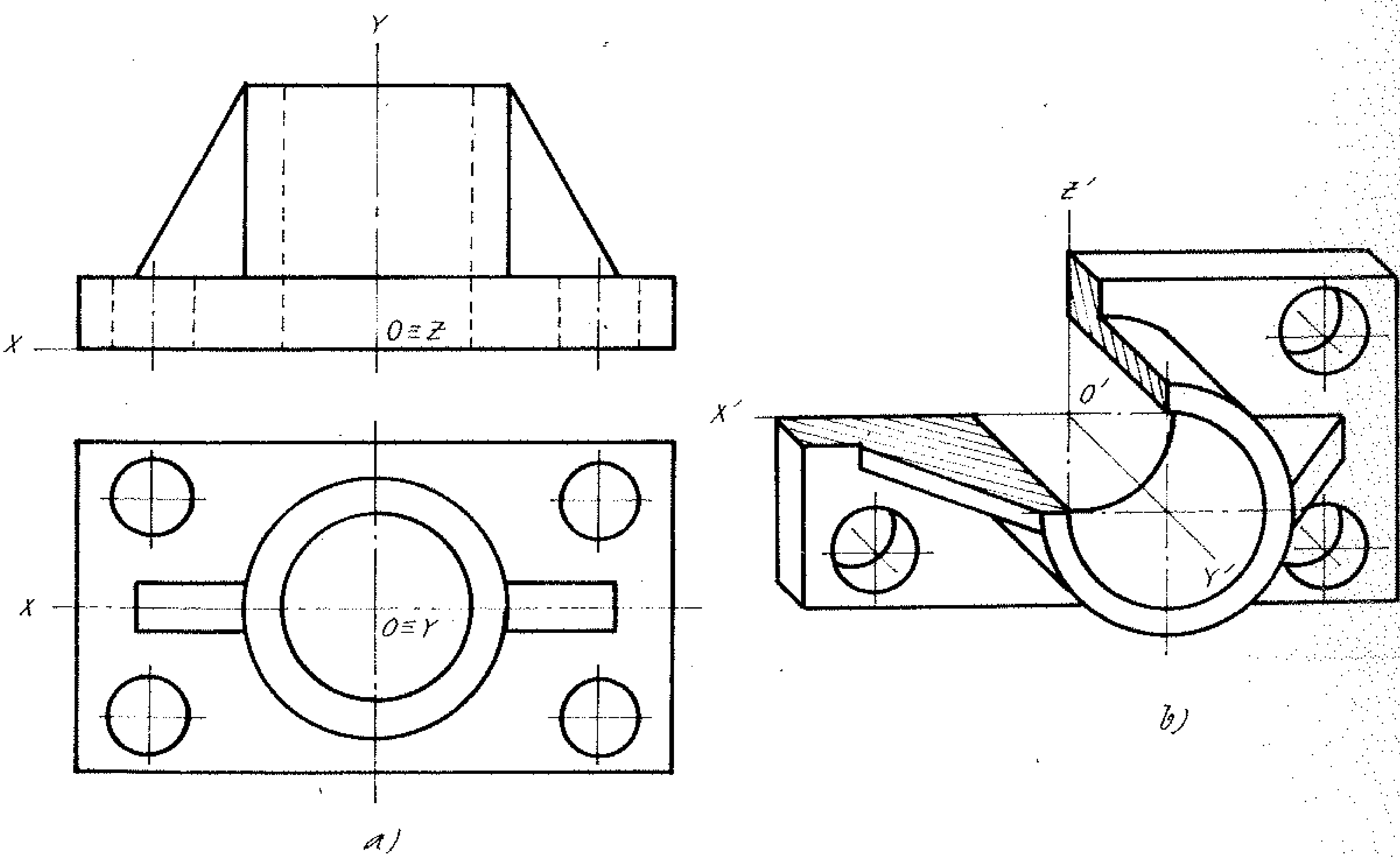


Hình 12 - 5

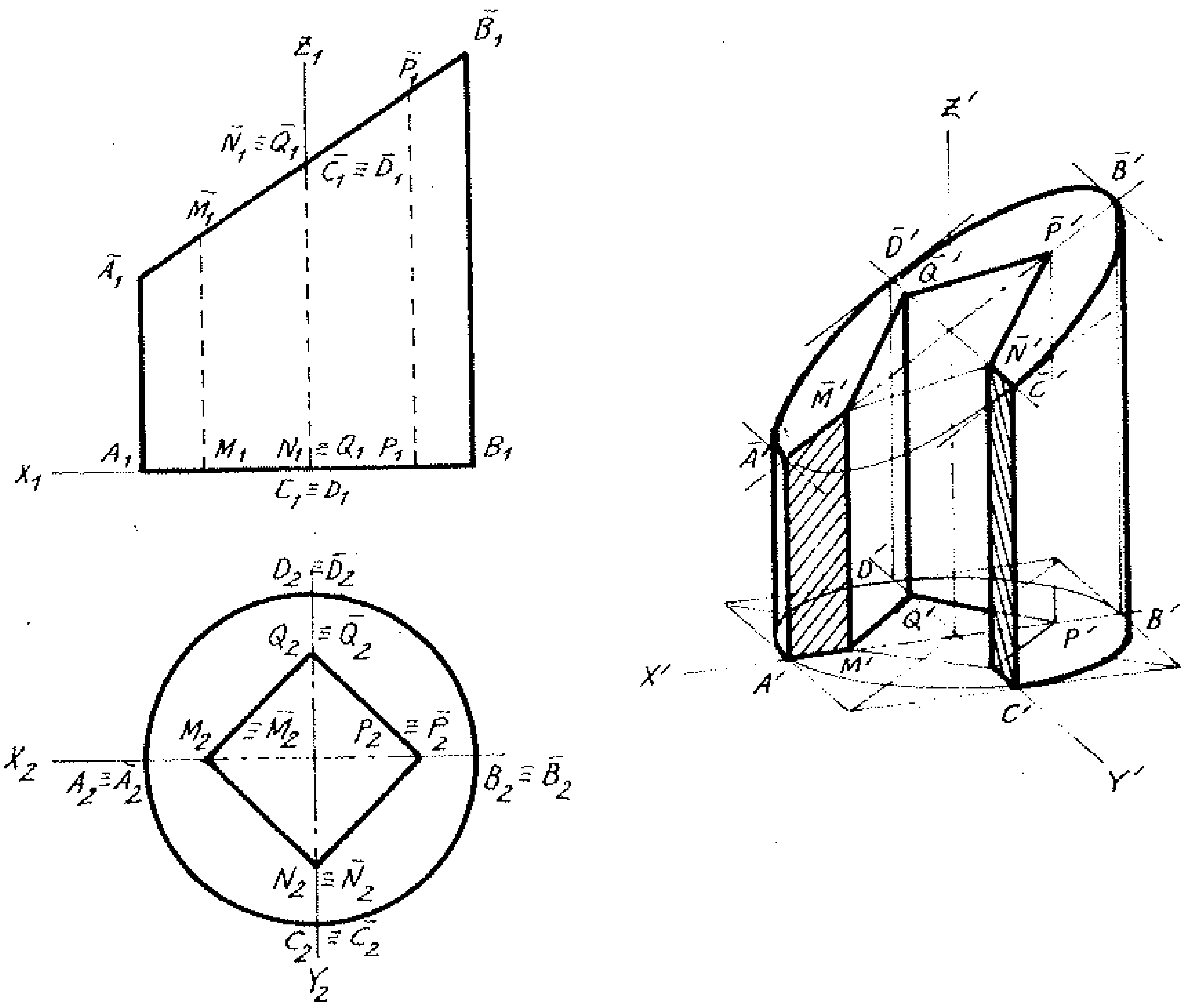
Thí dụ 4: Cho hình chiếu thẳng góc của một vật thể (Hình 12 - 6, a). Hãy chọn loại hình chiếu trục đo hợp lí và vẽ hình chiếu trục đo của vật thể đó.

Giải : Nhận xét rằng vật thể đã cho có 6 hình trụ tròn xoay, trục của chúng song song nhau. Ta sẽ chọn loại hình chiếu trục đo đứng đều (hoặc đứng cân) và đặt vật thể trong hệ trục tọa độ sao cho trục OY song song với trục của các hình trụ. Khi đó hình chiếu trục đo của các đường tròn đáy của các hình trụ vẫn là các đường tròn (Hình 12 - 6, b). Ở đây dùng hình cắt trục đo để thể hiện rõ cấu tạo của vật thể.

Thí dụ 5: Cho hình chiếu thẳng góc của một hình trụ cụt có lỗ rống hình lăng trụ đáy vuông (Hình 12 - 7). Hãy vẽ hình chiếu trục đo hợp lí của nó.



Hình 12 - 6 (a,b)

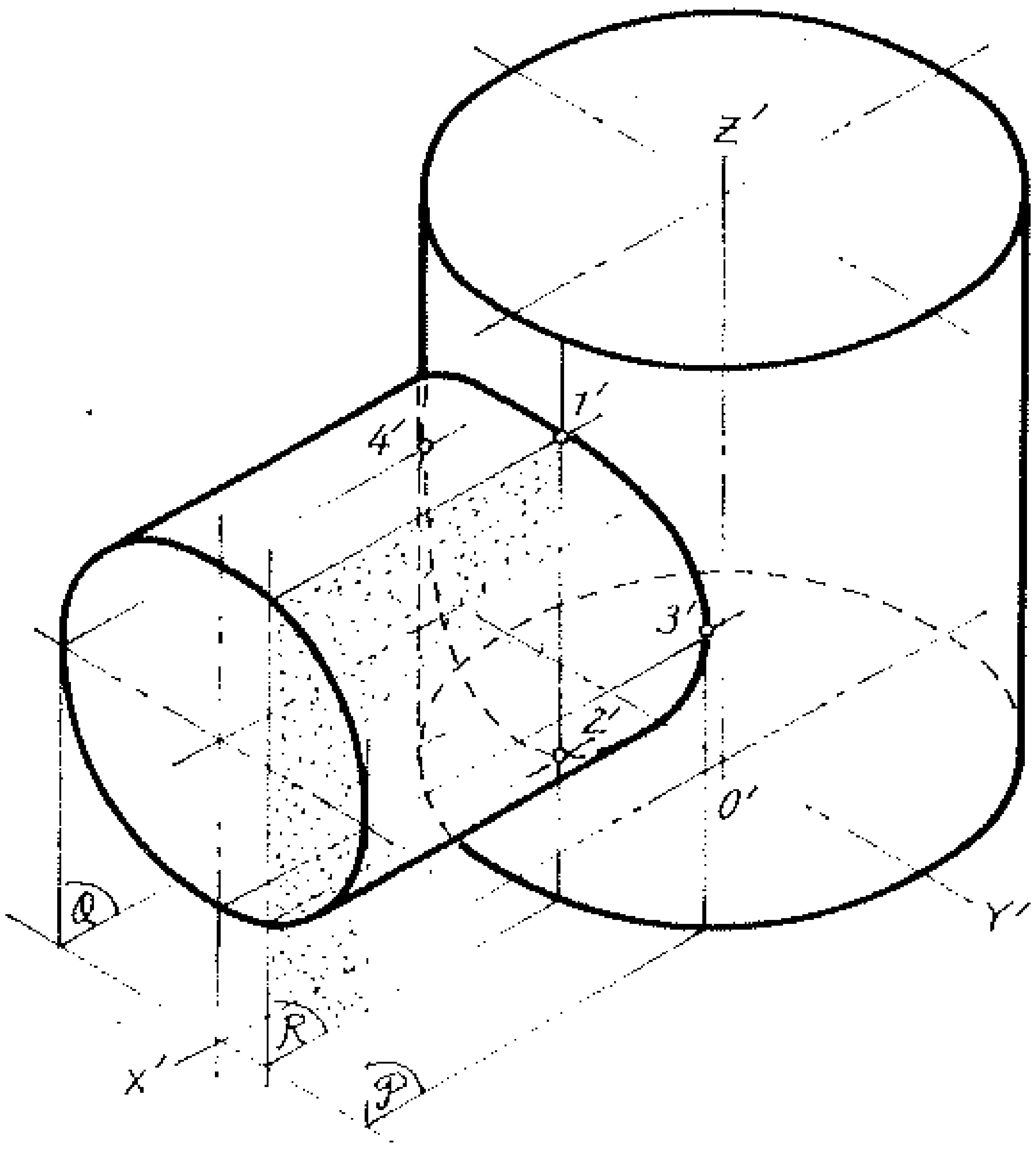


Hình 12 - 7

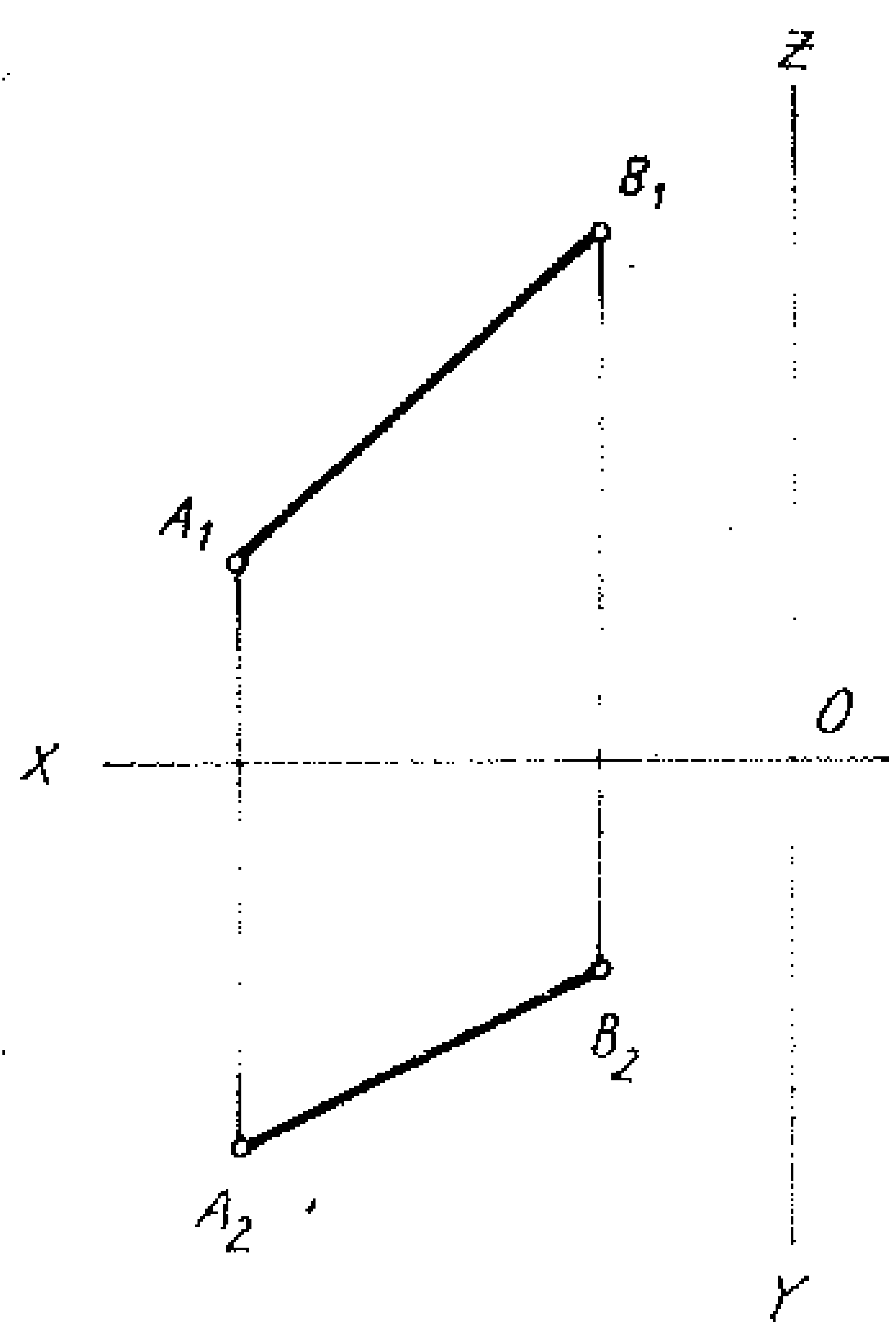
Giải : Vì đáy của lăng trụ là hình vuông nên ta dùng loại hình chiếu trục đo vuông góc cân để không có mặt bên nào của lăng trụ bị suy biến. Hình chiếu trục đo của đường tròn đáy dưới của trụ là một elip, vẽ bằng phương pháp 8 điểm. Hình chiếu trục đo của elip đáy trên của trụ cũng là một elip. Hai đường kính liên hợp của nó là $\overline{A'}\,\overline{B'}$ và $\overline{C'}\,\overline{D'}$ dễ dàng được xác định bằng cách đặt lần lượt trên các đường sinh vẽ qua A', B', C' và D' các đoạn $A'\overline{A'} = A_1\overline{A}_1$, $B'\overline{B'} = B_1\overline{B}_1$, $C'\overline{C'} = C_1\overline{C}_1$ và $D'\overline{D'} = D_1\overline{D}_1$. Đáy trên của lăng trụ là $\overline{M'}\,\overline{N'}\,\overline{P'}\,\overline{Q'}$, xác định bằng cách tìm giao điểm của $\overline{A'B'}$ và $\overline{C'D'}$ với các cạnh bên tương ứng của lăng trụ.

Để thể hiện lỗ rỗng hình lăng trụ người ta dùng hình cắt trục đo. Ở đây dùng các mặt phẳng tọa độ trục đo X'O'Z' và Y'O'Z' để tưởng tượng cắt bỏ một phần của vật thể hướng về phía người quan sát.

Thí dụ 6: Cho hình chiếu trục đo của hai mặt trụ (Hình 12 - 8). Vẽ giao tuyến của chúng.



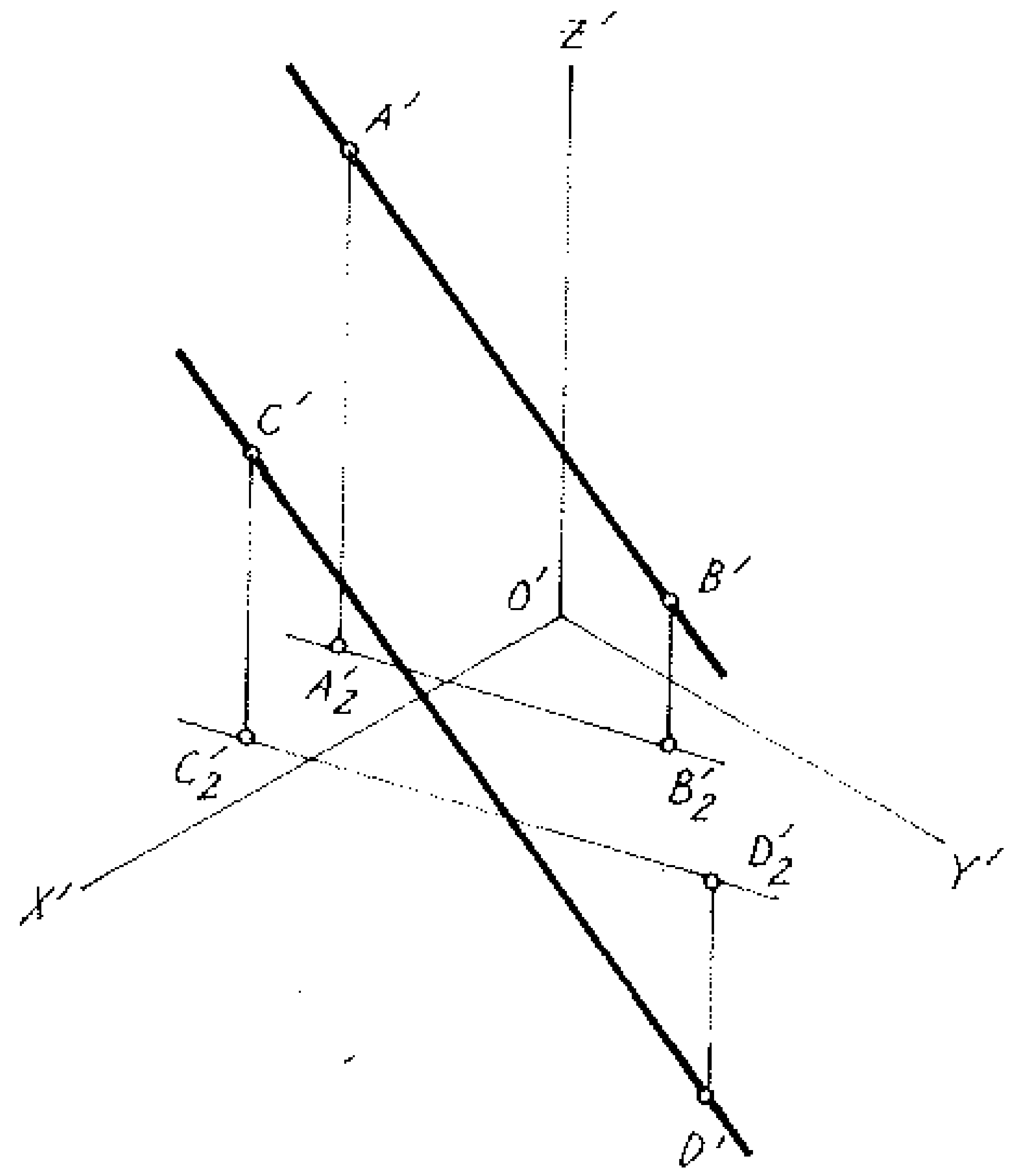
Hình 12 - 8



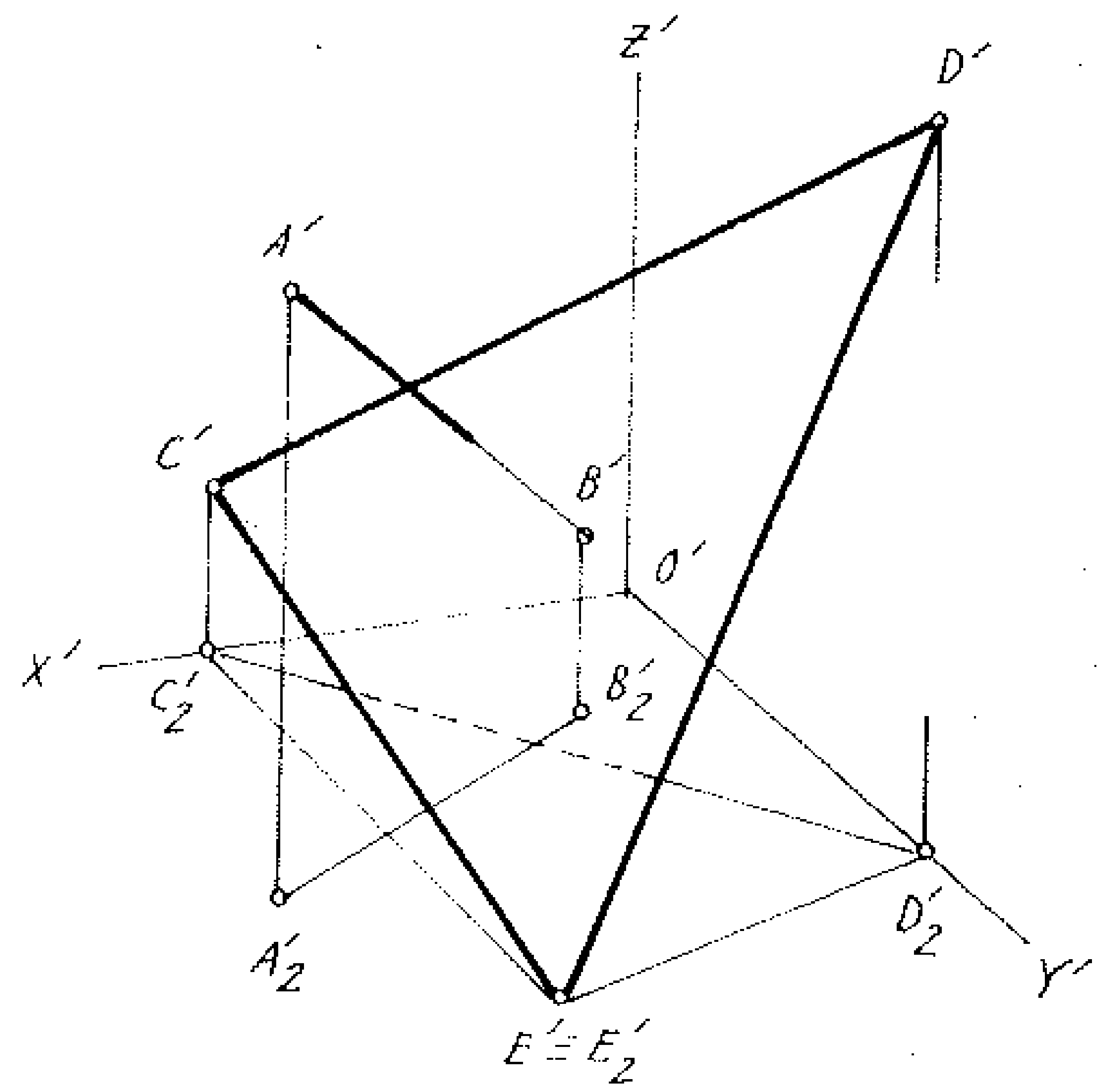
Hình 12 - 9

Giải : Để xác định các điểm của giao tuyến ta dùng các mặt phẳng phụ trợ song song với trục của cả hai mặt trụ để giao tuyến phụ của mặt phẳng phụ trợ với hai mặt trụ là các đường sinh. Đó là các mặt phẳng song song với mặt phẳng tọa độ X'O'Z'. Chẳng hạn dùng mặt phẳng $\mathcal{R}$ ta xác định được các điểm 1' và 2' của giao tuyến. Các mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ tiếp xúc với mặt trụ nằm ngang cho ta điểm gần nhất 3' và xa nhất 4' của giao tuyến theo hướng nhìn song song với trục O'Y'.

Giao tuyến là đường cong ghềnh bậc bốn.



Hình 12 - 10



Hình 12 - 11

12. 2. Bài tập

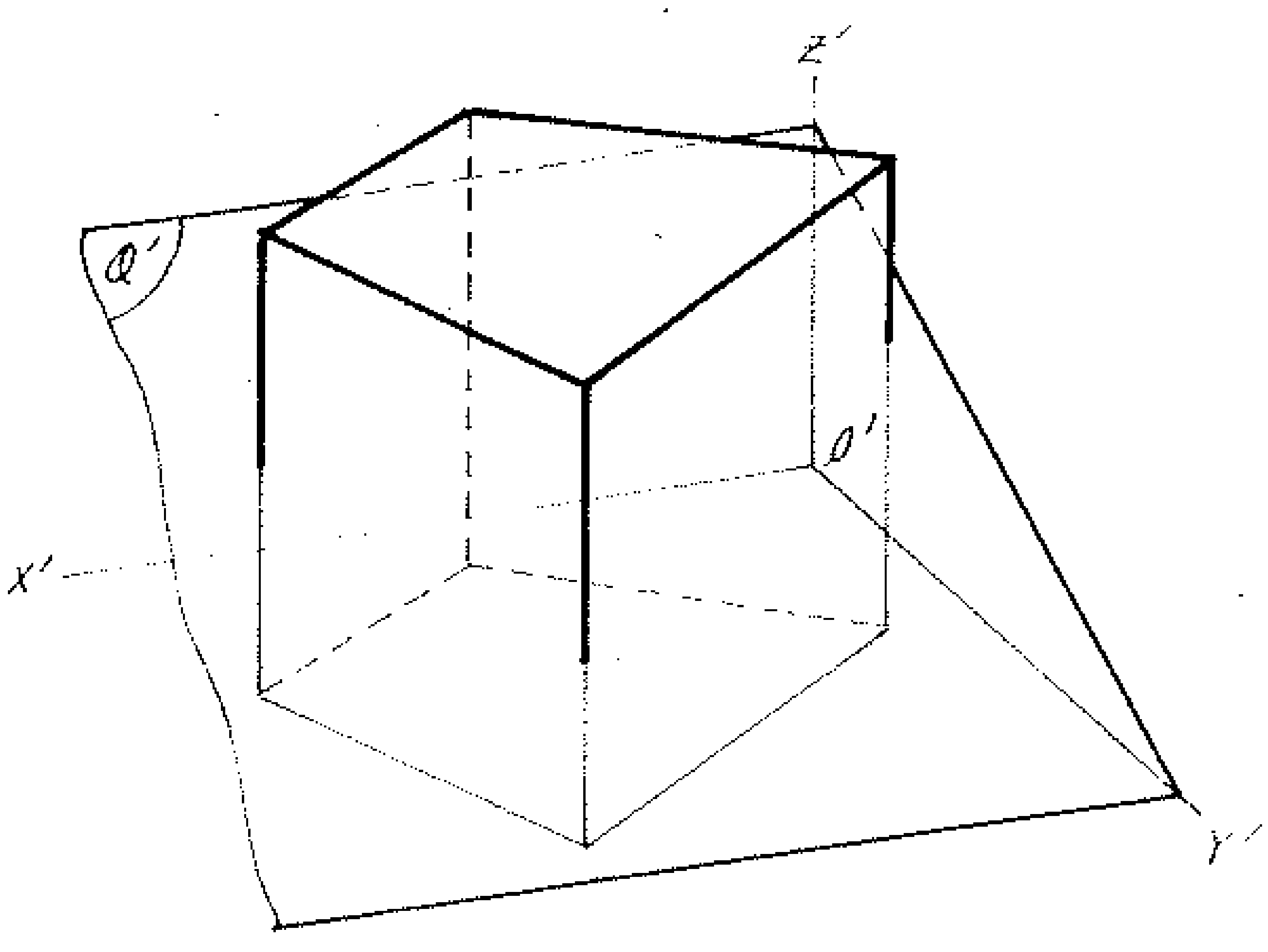
Bài 1 : Dựng hình chiếu trục đo vuông góc đều của đoạn thẳng AB, (Hình 12 - 9).

Bài 2 : Vẽ các vết của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (AB // CD), (Hình 12 - 10).

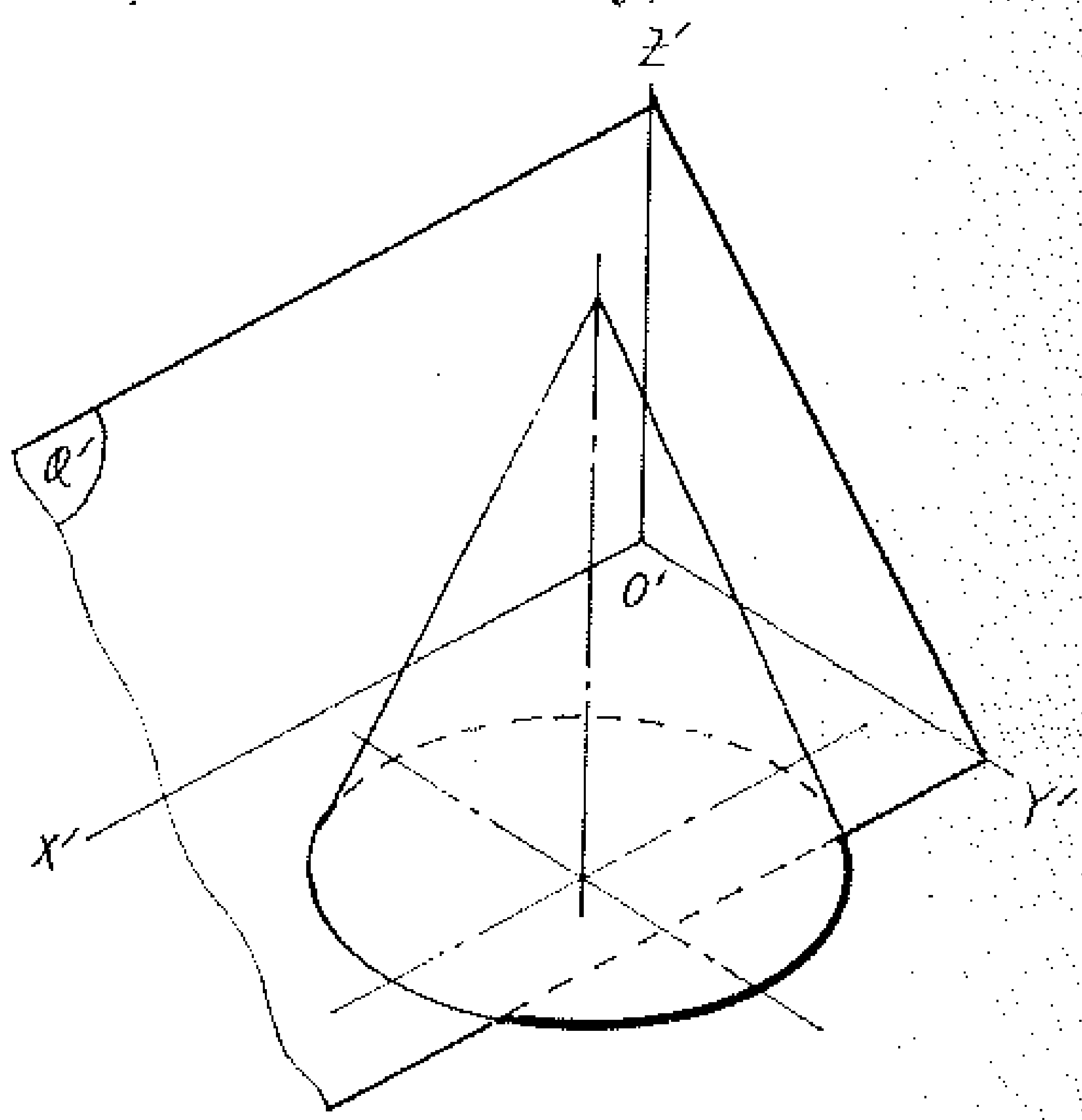
Bài 3 : Tìm giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (C, D, E), (Hình 12 - 11).

Bài 4 : Tìm giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với mặt lăng trụ. (Hình 12 - 12).

Bài 5 : Tìm giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với mặt nón tròn xoay, (Hình 12 - 13).



Hình 12 - 12

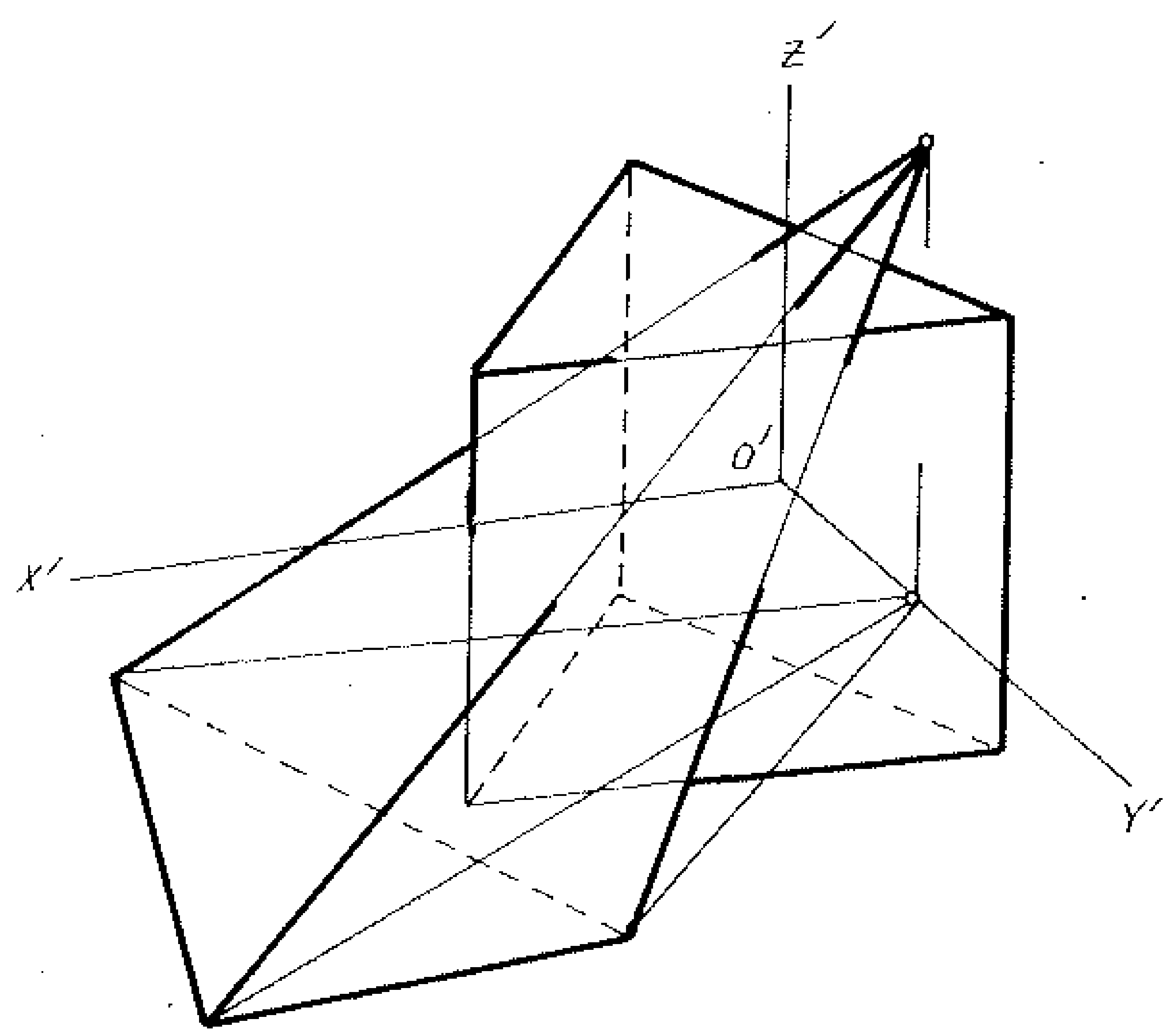


Hình 12 - 13

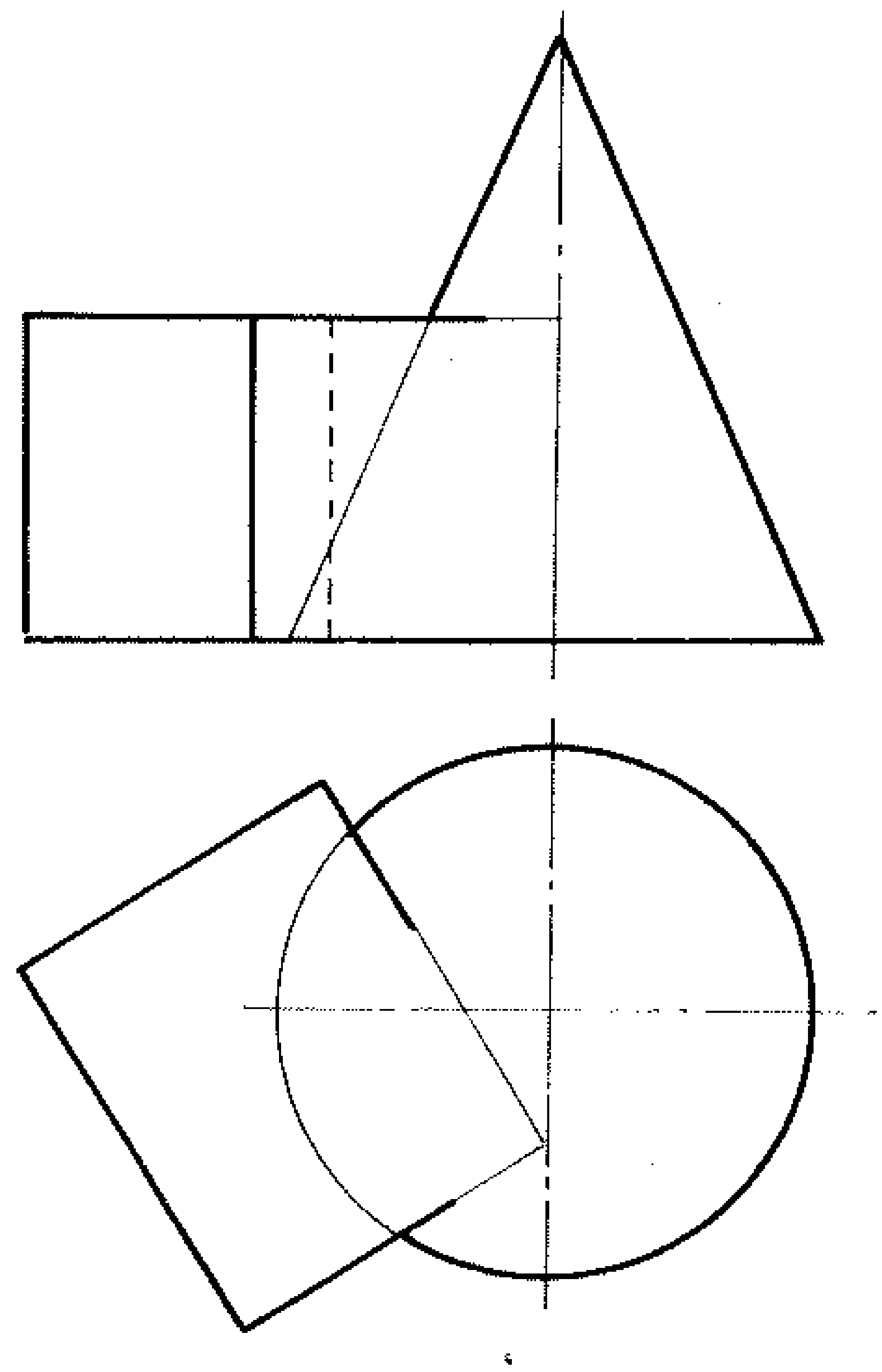
Bài 6 : Vẽ giao tuyến của mặt chóp và mặt lăng trụ, (Hình 12 - 14).

Bài 7 : Cho hình chiếu thẳng góc của một hình hộp chữ nhật và một mặt nón tròn xoay, (Hình 12 - 15).

Vẽ hình chiếu trục đo của hai mặt đó và giao tuyến của chúng.



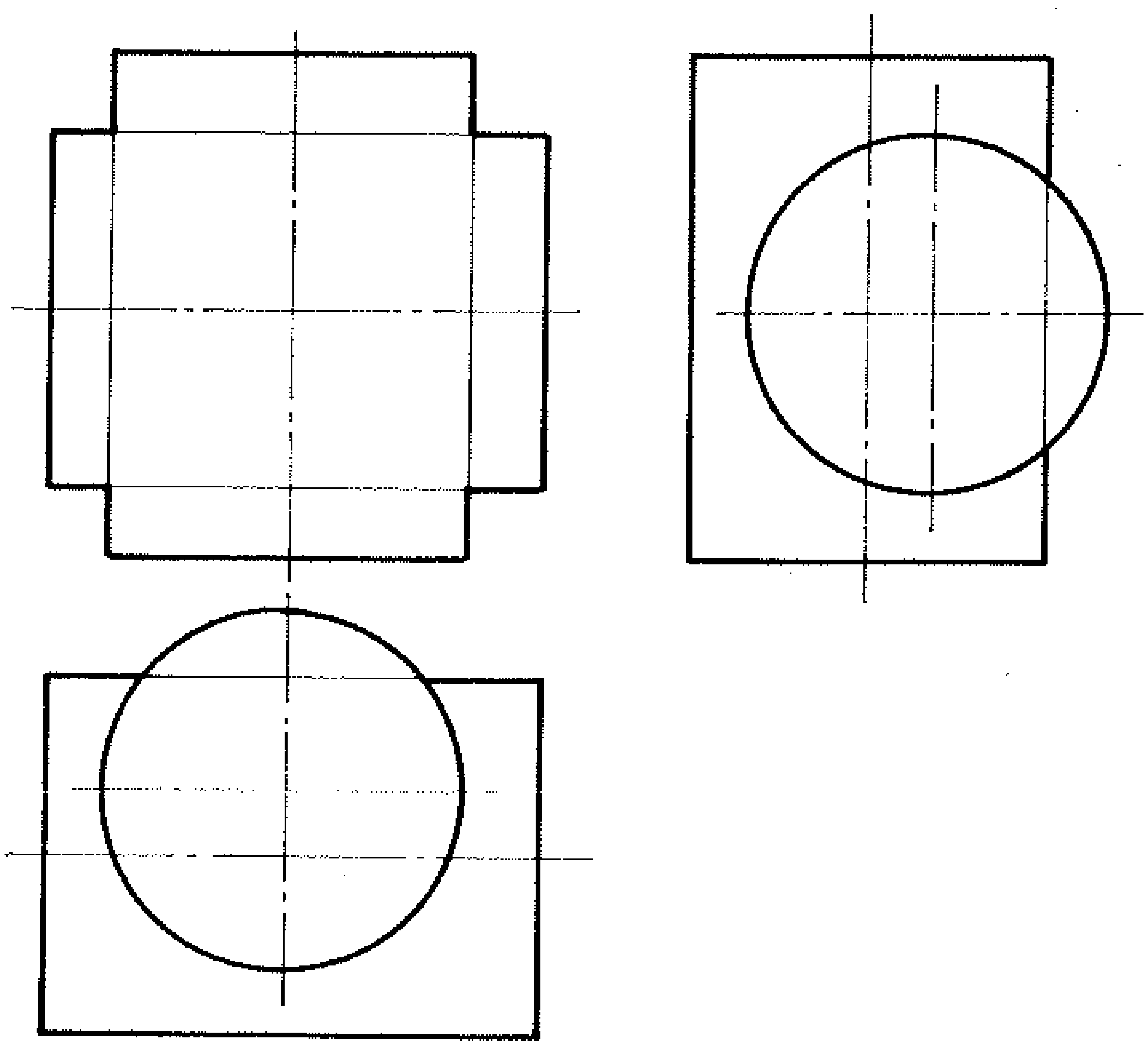
Hình 12 - 14



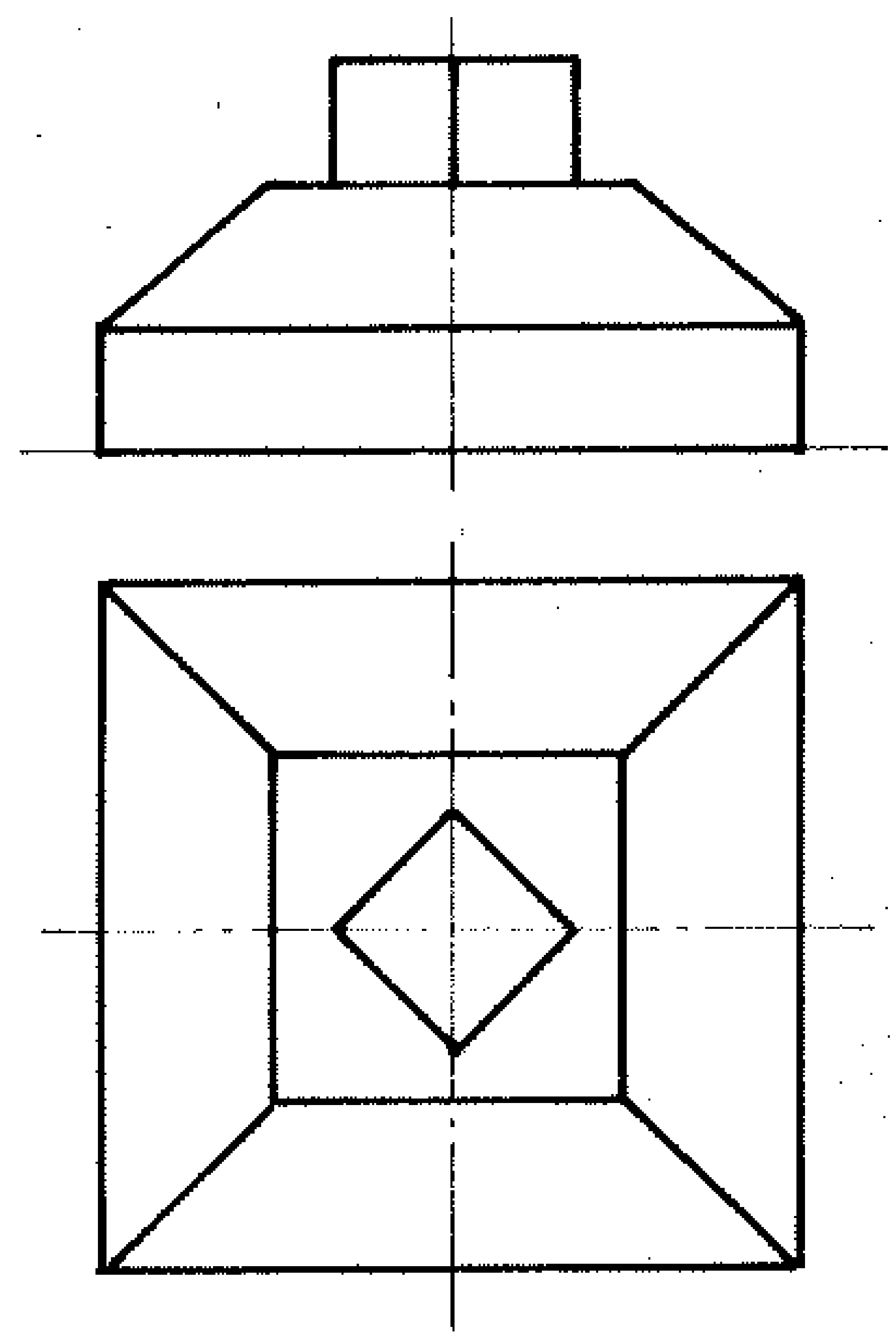
Hình 12 - 15

Bài 8 : Cho hình chiếu thẳng góc của hai mặt trụ tròn xoay (Hình 12 - 16). Vẽ hình chiếu trục đo vuông góc đều của hai mặt trụ và giao tuyến của chúng.

Bài 9 : Cho hình chiếu thẳng góc của một vật thể (Hình 12 - 17). Chọn loại hình chiếu trục đo hợp lí và vẽ hình chiếu trục đo của vật thể đó.

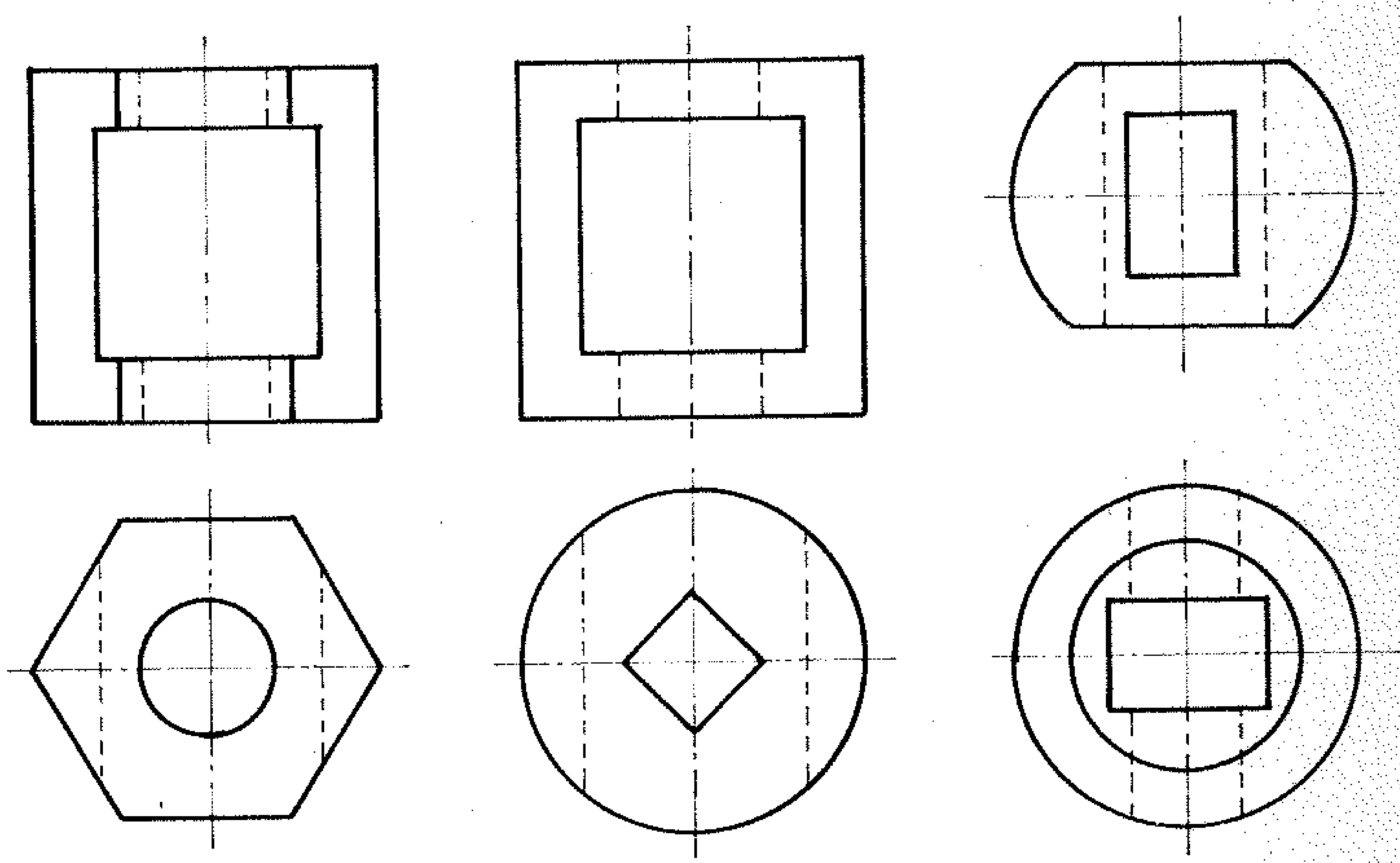


Hình 12 - 16



Hình 12 - 17

Bài 10 : Vẽ hình chiếu trục đo vuông góc cân của các vật thể cho trên hình 12 - 18, trên đó có dùng hình cắt trục đo.



a) b) c)

Hình 12 - 18

PHẦN II

HƯỚNG DẪN

CHƯƠNG 1

PHÉP CHIẾU

Bài 1 : Hình chiếu xuyên tâm từ S lên mặt phẳng $\mathcal{P}$ của đường thẳng a có thể xác định bằng hình chiếu của 2 điểm thuộc nó, chẳng hạn : điểm A' – hình chiếu của $A = a \cap (\mathcal{P})$ với $A' = A$ và điểm C – hình chiếu của điểm vô tận của a. Do đó hình chiếu của a là a' (CA).

Tương tự như vậy hình chiếu của b là b' (CB).

a' // b' khi C là điểm vô tận của ($\mathcal{P}$), nói một cách khác là a, b và c phải song song với ($\mathcal{P}$).

Bài 2 và Bài 3: Dùng tính chất của phép chiếu song song : Phép chiếu song song bảo tồn tỉ số đơn của 3 điểm thẳng hàng và bảo tồn tính song song của 2 đường thẳng.

Bài 4 : Hình chiếu song song của đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD là elip nội tiếp hình bình hành A'B'C'D' – hình chiếu song song của hình vuông nói trên . Ngoài 4 điểm tiếp xúc của elip với 4 cạnh của hình bình hành, có thể xác định thêm 4 điểm của elip nằm trên 2 đường chéo của hình bình hành –hình chiếu của 4 điểm thuộc đường tròn đã cho nằm trên 2 đường chéo của hình vuông .

Qua 8 điểm vừa xác định được vẽ một đường cong trơn đều nhận 4 cạnh của hình bình hành là các tiếp tuyến.

Bài 5: Gọi $M = AB \cap CD$ và $N = AD \cap BC$.

Để hình chiếu của ABCD từ S lên ($\mathcal{P}$) là hình bình hành thì hình chiếu của M và N phải là các điểm vô tận của ($\mathcal{P}$). Suy ra ($\mathcal{P}$) phải song song với SM và SN.

Bài 6: a – Tâm chiếu S có thể chọn là một điểm tùy ý không thuộc mặt phẳng của ABCD. Mặt phẳng hình chiếu P được xác định như ở bài 5.

b– Để hình chiếu của ABCD là một hình chữ nhật, ngoài điều kiện cần thỏa mãn như ở câu a– thì hai hướng AM và AN phải được chiếu thành hai hướng $A'M'_\infty$ và $A'N'_\infty$ vuông góc nhau. Suy ra S phải nhìn đoạn MN dưới một góc vuông.

c– Để hình chiếu của ABCD là một hình vuông, ngoài điều kiện phải thỏa mãn như ở câu b– , hai đường chéo AC và BD phải được chiếu thành hai đường thẳng A' C' và B'D' vuông góc nhau. Suy ra S phải nhìn đoạn IK dưới một góc vuông, ở đó :

$$I = AC \cap MN$$
$$K = BD \cap MN .$$

Bạn đọc tự kết luận về quỹ tích của tâm chiếu S.

Bài 7: Gọi X = Ox ∩ ($\mathcal{P}$) và Y = Oy ∩ ($\mathcal{P}$) và O' là hình chiếu song song ; của O lên ($\mathcal{P}$). Nếu hình chiếu XO'Y của góc $\widehat{xOy}$ là một góc vuông thì O' nhìn đoạn thẳng XY dưới một góc vuông.

Bạn đọc suy ra quĩ tích của các hướng chiếu cần tìm.

Giả sử Oy // ($\mathcal{P}$), nói khác đi Oy cắt ($\mathcal{P}$) tại điểm Y_∞. Khi đó đường tròn đường kính XY_∞ trở thành đường thẳng đi qua X và vuông góc với XY_∞.

– Giả sử Oy// ($\mathcal{P}$) và $\widehat{xOy} = 90^0$. Bạn đọc hãy chứng minh các hướng chiếu cần tìm thuộc mặt phẳng vuông góc với Oy tại O.

CHƯƠNG 2

BIỂU DIỄN ĐIỂM - ĐƯỜNG THẲNG - MẶT PHẲNG

2.1. Điểm

Bài 3 : Điểm A ∈ ($\mathcal{P}^1$) → độ xa của nó là $y_A = 0$. Điểm B ∈ ($\mathcal{P}^2$) → độ cao của nó là $z_B = 0$. Điểm C ∈ mặt phẳng phân giác của góc tư I và III → $y_C = z_C$

Bạn đọc tự suy ra vị trí của trục hình chiếu trong mỗi trường hợp.

Bài 4: Hình chiếu đứng của A và hình chiếu bằng của B phải ở 2 phía khác nhau và cách đều trục hình chiếu.

Bài 5: Theo hình biểu diễn của điểm A xác định được trục hình chiếu x, từ đó vẽ hình chiếu bằng của điểm B với chú ý là các điểm thuộc mặt phẳng phân giác của các góc tư I và III có hai hình chiếu đối xứng nhau qua trục x.

Bài 6 : Trục hình chiếu cần tìm là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn bán kính bằng 15mm và có tâm lần lượt là A_1 và B_2 . Bài toán có hai nghiệm.

Dễ dàng thấy rằng các hình chiếu A_2 của A và B_1 của B phải nằm trên trục hình chiếu.

Bài 7 và Bài 8: Vẽ hình chiếu cạnh của các điểm dựa vào các nhận xét sau :

– Hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh của một điểm nằm trên một đường gióng ngang song song với trục hình chiếu x.

– Độ xa của một điểm được thể hiện ở khoảng cách từ hình chiếu bằng của nó tới trục x hoặc từ hình chiếu cạnh của nó tới trục z.

Nếu độ xa của một điểm là > 0 thì hình chiếu bằng của nó nằm phía dưới của trục x và hình chiếu cạnh của nó nằm bên phải trục z.

2.2. Đường thẳng

Bài 11: a– Điểm có 2 hình chiếu trùng nhau của PQ là điểm vừa thuộc PQ vừa thuộc mặt phẳng phân giác của các góc tư II và IV b– Điểm có 2 hình chiếu đối xứng nhau qua trục x của PQ là điểm vừa thuộc PQ vừa thuộc mặt phẳng phân giác của các góc tư I và III.

Có thể dùng hình chiếu cạnh để xác định các điểm đó.

Cũng có thể áp dụng phép chiếu song song như sau :

a – Chọn một hướng chiếu tùy ý l (l_1, l_2) và một mặt phẳng hình chiếu tùy ý, chẳng hạn mặt phẳng phân giác $\mathcal{G}$ của góc tư II và IV.

Chiếu song song PQ theo hướng l lên $\mathcal{G}$ ta có P_oQ_o . Giao điểm của P_oQ_o với đường gióng chứa hai hình chiếu của PQ là điểm có hai hình chiếu trùng nhau của PQ.

b– Cũng chiếu song song như trên đường thẳng P'Q' có các hình chiếu $P'_1Q'_1$ và $P'_2Q'_2$ đối xứng nhau qua trục x, ngoài ra $P'_1Q'_1 \equiv P_1Q_1$. Hình chiếu nhận được của P'Q' là $P'_oQ'_o$.

Bằng phép chiếu song song ngược lại từ giao điểm của P_oQ_o và $P'_oQ'_o$ suy ra điểm có hai hình chiếu đối xứng nhau qua trục x của PQ.

Bạn đọc tự giải thích ý nghĩa của cách làm nói trên.

Bài 13 : a– Đường thẳng cần vẽ là một đường mặt. Trước tiên vẽ hình chiếu bằng của nó – đường thẳng song song và cách trục hình chiếu một khoảng bằng độ xa cho trước.

b– Đường thẳng cần vẽ là một đường bằng . Trước tiên vẽ hình chiếu đứng của nó – đường thẳng song song và cách trục hình chiếu x một khoảng bằng độ cao cho trước.

c– Tìm điểm nằm trên mặt phẳng phân giác thứ hai của p và q rồi nối bằng đường thẳng .

Bài 14: a – Chú ý rằng p là đường thẳng chiếu đứng. Đường thẳng cần vẽ có hình chiếu đứng đi qua các điểm A_1 và p_1.

b– p là đường thẳng chiếu bằng . Đường thẳng cần vẽ có hình chiếu bằng đi qua các điểm A_2 và p_2.

Bài 15: Dựng đường thẳng cạnh NM// PQ, ở đó điểm N $\in$ a. Như vậy từ hình chiếu đứng M_1 N_1 và hình chiếu bằng N_2 đã có , dễ dàng vẽ được hình chiếu bằng M_2 của M với chú ý là để cho 2 đường cạnh MN và PQ song song thì 2 đường thẳng NP và MQ phải đồng phẳng (song song hoặc cắt nhau).

Bài 16 : Vẽ hình chiếu bằng M_2N_2 của đường thẳng MN// a, ở đó $N_2 \in P_2Q_2$. Xác định $N_1 \in P_1Q_1$ rồi suy ra hình chiếu đứng M_1N_1 của MN.

Bài 17 : a– Đường thẳng cần vẽ là một đường thẳng mặt, hình chiếu bằng qua điểm b_2 và song song với trục hình chiếu.

b – Đường thẳng cần vẽ có hình chiếu bằng song song với c_2 và qua điểm b_2.

2.3. Mặt phẳng

Bài 20 : Đường thẳng cần vẽ phải song song với đường bằng hoặc vết bằng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$.

Bài 21 : Mặt phẳng $\mathcal{Q}$ cần dựng có thể được xác định bằng 2 đường thẳng cắt nhau tại điểm A và lần lượt song song với p và q.

Bài 22 : a– A_1B_1 // $v^1_{\mathcal{Q}}$.

b- và c- Vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{Q}$ một đường thẳng có hình chiếu đứng song song (hoặc trùng) với hình chiếu đứng của AB.

Bài 23: Dùng các điều kiện liên thuộc của điểm và đường thẳng với mặt phẳng.

Bài 25: a- $v_{\mathcal{Q}}^1 \equiv a_1$

b- $v_{\mathcal{Q}}^2 \equiv a_2$

c- Các vết của ($\mathcal{Q}$) là đường thẳng nối vết đứng và vết bằng của đường thẳng a.

Bài 27 : Vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{Q}$ hai đường thẳng lần lượt song song với hai cạnh nào đó của tam giác ABC.

Bài 28: Đường thẳng cần vẽ là đường thẳng nối M với điểm đồng quy của hai vết của mặt phẳng (M, a) và trục x.

Bài toán đưa tới việc vẽ vết của mặt phẳng này .

CHƯƠNG 3

CÁC BÀI TOÁN VỀ VỊ TRÍ

Bài 4 : Đường thẳng cần vẽ song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$.

Bài 5: Qũy tích cần tìm là giao tuyến của hai mặt phẳng (A, p) và (B, q).

Bài 6: Đường thẳng cần vẽ sẽ đi qua giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng dựng qua M và song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$ đã cho.

Bài 7: Cách làm tương tự như ở bài 6 nhưng phải tìm giao điểm của đường thẳng d lần lượt với các mặt phẳng dựng qua M và song song với mặt phẳng phân giác của góc tư II và IV rồi góc tư I và III.

Bài 8 : Qua giao điểm của 2 vết đứng của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) vẽ giao tuyến của chúng song song với d (d_1, d_2). Tìm vết bằng của giao tuyến đó và suy ra các vết bằng của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$).

Bài 9 : Trong một trong hai mặt phẳng đã cho vẽ một đường thẳng song song với đường thẳng d rồi suy ra vết còn lại của mặt phẳng đó.

Bài 10 : Để cho giao tuyến của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{Q}$) là một đường bằng thì các vết bằng của chúng phải song song nhau . Tìm các vết của đường thẳng d và suy ra các vết của mặt phẳng $\mathcal{Q}$.

Bài 11 : Dựng qua AB một mặt phẳng song song với trục hình chiếu và tìm giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng đó.

Bài 12 : Tìm các giao điểm của hai đường thẳng b và c với mặt phẳng dựng qua A và song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$ đã cho.

Bài 13 : Đường thẳng cần vẽ là đường thẳng nối giao điểm của d với mặt phẳng $\mathcal{P}$ và điểm vết chân chung của ($\mathcal{P}$).

Bài 14: Đường thẳng cần dựng là giao tuyến của hai mặt phẳng (M, p) và (M, q). Đó cũng là đường thẳng nối điểm M với giao điểm của p (hoặc q) với mặt phẳng (M, q) (hoặc mặt phẳng (M, p)).

Bạn đọc cũng có thể giải bài này nhờ phép chiếu xuyên tâm hoặc phép chiếu song song.

– Dùng phép chiếu xuyên tâm : Chọn M làm tâm chiếu và mặt phẳng hình chiếu có thể là ($\mathcal{P}^1$) hoặc $\mathcal{P}^2$, hoặc $\mathcal{G}$...) . Vẽ hình chiếu của p và q từ M lên mặt phẳng hình chiếu đã chọn. Giao điểm của các hình chiếu của p và q là hình chiếu của đường thẳng cần dựng. Bằng phép chiếu ngược lại dễ dàng suy ra đường thẳng cắt cả p và q, đi qua M.

– Dùng phép chiếu song song : Chọn hướng chiếu song song với một trong hai đường thẳng đã cho, chẳng hạn song song với p. Chiếu cả p, q và M lên một mặt phẳng nào đó ($\mathcal{P}^1$), $\mathcal{P}^2$ hoặc $\mathcal{G}$...). Khi đó hình chiếu của p là một điểm . Đường thẳng nối hình chiếu của p và của điểm M sẽ cắt hình chiếu của q. Nhờ phép chiếu song song ngược lại sẽ suy ra đường thẳng cần vẽ.

Bài 15: Đây là một trường hợp của bài tập (Bài 14) khi M là một điểm ở xa vô tận biểu diễn bằng đường thẳng d.

Đường thẳng cần vẽ là giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt dựng qua p và q và cùng song song với đường thẳng d.

Cũng có thể nói rằng đó là đường thẳng song song với d vẽ trong mặt phẳng dựng qua p (hoặc q), song song với d và đi qua giao điểm của q (hoặc p) với mặt phẳng dựng ở trên.

Bài 16 : Bóng của AB đổ lên các mặt phẳng hình chiếu sẽ thuộc giao tuyến của mặt phẳng tia sáng chứa AB với hai mặt hình chiếu.

CHƯƠNG 4

CÁC BÀI TOÁN VỀ LƯỢNG

Bài 2 : b– Quỹ tích (tập hợp) của B_2 là một đường tròn tâm A_2. Quĩ tích (tập hợp) của B_1 là một đoạn thẳng song song với trục x và có độ dài bằng đường kính của đường tròn trên.

Bài 4 : Dựng tam giác vuông có góc nhọn bằng 30^0 và cạnh đối diện với góc đó bằng hiệu độ xa của hai điểm A, B. Cạnh góc vuông thứ hai là độ dài của đoạn thẳng AB.

Bài 6 : Đỉnh D nằm trong mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

Bài 8 : Vẽ đoạn thẳng AH $\perp$ m (H $\in$ m) và đặt trên m các đoạn thẳng HB = HC = AH.

Bài 13: Dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ chứa đường thẳng m và song song với đường thẳng n rồi tìm khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc n đến ($\mathcal{Q}$) .

Bài 16 : Vẽ đường dốc nhất AB của $\mathcal{Q}$ so với ($\mathcal{P}^2$) với A nằm trên vết đứng và B nằm trên vết bằng.

Bài 17: Lấy một điểm $A \in v^1_{\mathcal{Q}}$. Dựng một tam giác vuông có đỉnh góc vuông là A_2, một cạnh góc vuông bằng đoạn A_1A_2 và góc đối diện với cạnh này là 30^0. Vết bằng của ($\mathcal{Q}$) là tiếp tuyến của đường tròn tâm A_2, bán kính bằng cạnh góc vuông thứ hai của tam giác trên.

Bài 18 : Đường thẳng cần dựng là giao tuyến của hai mặt phẳng qua A : một mặt phẳng vuông góc với b và một mặt phẳng song song với ($\mathcal{Q}$).

Bài 19 : Tìm vết đứng A và vết bằng B của đường dốc nhất đã cho. Vết bằng của mặt phẳng cần dựng là đường thẳng qua B và vuông góc với A_2B_2.

Bài 20 : Gọi B là vết bằng của đường thẳng cần dựng . Tìm độ dài l của hình chiếu bằng A_2B_2 của đoạn thẳng AB.

Hình chiếu bằng B_2 của điểm B là giao điểm của đường tròn tâm A_2, bán kính l với đường thẳng $\overline{x}$ là ảnh của x trong phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{A_1A_2}$.

CHƯƠNG 5

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI HÌNH CHIẾU

Bài 10: Thay liên tiếp các mặt phẳng $\mathcal{P}^1$ và $\mathcal{P}^2$ để m trở thành đường thẳng chiếu bằng. Khi đó hình chiếu bằng của A nằm cách hình chiếu bằng của m (đã suy biến thành một điểm) một đoạn bằng 25 mm.

Bài 11: Thay liên tiếp hai mặt phẳng hình chiếu để một trong hai đường thẳng trở thành đường thẳng chiếu.

Bài 13: Giả sử chọn phép thay mặt phẳng hình chiếu đứng $\mathcal{P}^1$ bằng $\overline{\mathcal{P}}^1$. Cần xác định trục $\overline{x} = \mathcal{P}^2 \cap \overline{\mathcal{P}}^1$. Gọi A là vết bằng của m, B là 1 điểm bất kì thuộc m và độ cao của B là a.

a- và c.- Trục $\overline{x}$ là đường thẳng đi qua A_2 tiếp xúc với đường tròn (B_2, a)

b - Trục $\overline{x}$ là đường thẳng đi qua B_2 và tiếp xúc với đường tròn (A_2,a).

Bài 16: Chiếu m và n theo phương m lên ($\mathcal{P}^2$) . Hình chiếu phụ của A là A' trùng với hình chiếu phụ m' của m (đã suy biến thành một điểm). Hình chiếu phụ của B là giao điểm B' của n' (hình chiếu phụ của n) với đường tròn tâm A', bán kính bằng 25mm.

CHƯƠNG 6

BIỂU DIỄN ĐƯỜNG CONG VÀ CÁC MẶT

Bài 3: Mỗi cặp đường kính liên hợp của elíp (e) có hình chiếu bằng là một cặp đường kính vuông góc của đường tròn tâm O_2 (là hình chiếu bằng của (e)) và có hình chiếu đứng là một cặp đường kính liên hợp của elíp hình chiếu đứng của (e).

Bài 4: ΔABC nằm trong mặt phẳng qua A và vuông góc với AA'.

Bài 5: Điểm cao nhất và thấp nhất của (v) nằm trên đường dốc nhất của ($\mathcal{Q}$) so với mặt phẳng hình chiếu bằng và đi qua O. Điểm gần nhất và xa nhất của (v) nằm trên đường dốc nhất của (v) so với mặt phẳng hình chiếu đứng và đi qua O.

Có thể dùng phép biến đổi để có hình thực của (v).

Bài 6: Chân đường cao của hình chóp kẻ từ S là trực tâm của ΔABC. Có thể giải bài toán bằng cách chập mặt bên của hình chóp vào mặt đáy.

Bài 7: Quay l quanh t đến tận vị trí // $\mathcal{P}^1$.Vẽ một số vĩ tuyến của (Φ), chẳng hạn vĩ tuyến cao và thấp nhất, vĩ tuyến lớn nhất (xích đạo) và nhỏ nhất (đường yết hầu)... Sau đó vẽ các kinh tuyến chính của (Φ) – hợp hai vị trí song song với $\mathcal{P}^1$ của l. Đó chính là đường bao quanh hình chiếu đứng của (Φ).

Bài 8: Gắn điểm M vào vĩ tuyến của ($\overline{\Phi}$). Chú ý : vĩ tuyến của ($\overline{\Phi}$) nằm trong mặt phẳng chiếu đứng.

Bài 10: Đáy hình trụ (Φ) qua điểm A là hình tròn nằm trong mặt phẳng chiếu đứng qua A vuông góc với m và có tâm là giao điểm của m với mặt phẳng nói trên.

Bài 13: Gọi S là điểm thuộc ($\mathcal{Q}$). ($\mathcal{Q}$) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón tròn xoay đỉnh S và có đường sinh là những đường thẳng hợp với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc 45^o.

Bài 17: Đặt trên bốn tia Sa, Sb, Sc và Sd các đoạn thẳng SA = SB = SC = SD. Chỉ tồn tại mặt nón tròn xoay khi hai điều kiện sau được thỏa mãn :

– 4 điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn (v)

– S nằm trên trục của (v)

CHƯƠNG 7

MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VỚI MẶT CONG

Bài 1: Bán kính của mặt cầu cần tìm có chiều dài bằng khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng $\mathcal{P}$

Bài 2: Đường sinh tiếp xúc của mặt nón cần tìm với mặt phẳng $\mathcal{Q}$ là đường dốc nhất đối với mặt phẳng hình chiếu bằng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Tất nhiên đường dốc nhất đó phải đi qua giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng $\mathcal{Q}$

Bài 3: Mặt phẳng cần dựng phải chứa đường thẳng b đi qua đỉnh nón và song song với đường thẳng a. Mặt phẳng đó cũng phải chứa một tiếp tuyến của đường cong đáy nón. Vì vậy, qua giao điểm I của đường thẳng b với mặt phẳng đáy nón ta vẽ tiếp tuyến IM với đường cong đáy nón. Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng b và IM chính là mặt phẳng cần tìm.

Bài toán chỉ có nghiệm khi vẽ được tiếp tuyến IM, và số tiếp tuyến của đường cong đáy nón vẽ qua I cho ta số nghiệm của bài toán.

Bài 4: Vẽ mặt phẳng song song với đường bằng của mặt phẳng $\mathcal{P}$ và tiếp xúc với mặt nón (xem bài 3). Các đường sinh tiếp xúc của các mặt phẳng đó với mặt nón sẽ chứa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của giao tuyến giữa mặt phẳng $\mathcal{P}$ và mặt nón.

Bài 5: Trước hết, dựng mặt nón ngoại tiếp mặt cầu, có trục song song với trục mặt nón đã cho và đồng dạng với mặt nón đó. Như vậy, mặt phẳng cần dựng sẽ chứa đường thẳng đi qua hai đỉnh của hai mặt nón và tiếp xúc với cả hai mặt nón đó.

Bài 6: Trước hết dựng mặt nón ngoại tiếp cả hai mặt cầu. Mặt phẳng cần dựng sẽ chứa điểm A và tiếp xúc với mặt nón vừa dựng.

Vì trục mặt nón vừa dựng là đường bằng nên tiết diện tròn của mặt nón đó sẽ thuộc mặt phẳng chiếu bằng.

Nếu đường thẳng nối tâm hai mặt cầu đã cho không phải đường thẳng đồng mức thì, trước hết có thể dựng hai mặt nón có chung đỉnh A và mỗi mặt nón ngoại tiếp một mặt cầu đã cho. Khi đó mặt phẳng cần dựng là mặt phẳng tiếp xúc chung của hai mặt nón vừa dựng. Từ bài toán này ta đưa về bài toán trên.

Bài 7: Bài này có nhiều cách giải. Ở đây nêu một trong những cách giải đó.

Trước hết dựng mặt nón ngoại tiếp hai trong ba mặt cầu đã cho. Khi đó mặt phẳng cần dựng là mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón vừa dựng và mặt cầu còn lại (xem bài 5).

Bài 8 và Bài 9: Đường bao hình chiếu bằng của mặt tròn xoay là đường bao hình chiếu bằng của các mặt cầu nội tiếp mặt tròn xoay đã cho.

CHƯƠNG 8

GIAO CỦA MẶT PHẲNG VỚI ĐA DIỆN VÀ MẶT CONG

Bài 6: Vì ABCD. A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên hình chiếu bằng của giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với lăng trụ trùng với hình chiếu bằng của lăng trụ $(A_2B_2C_2D_2)$. Vẽ hình chập (là hình vuông) của giao tuyến vào mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$ quanh vết bằng $v^2_{\mathcal{Q}}$ của mặt phẳng $\mathcal{Q}$, từ đó suy ra vết đứng $v^1_{\mathcal{Q}}$ và hình chiếu đứng của giao tuyến.

Bài 7: Mặt phẳng $\mathcal{Q}$ cần dựng đi qua d và đỉnh nón. Xác định vết bằng $v^2_{\mathcal{Q}}$ của mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Qua các giao điểm (nếu có) của $v^2_{\mathcal{Q}}$ với đường tròn đáy nón vẽ được các đường sinh – giao tuyến của ($\mathcal{Q}$) và mặt nón.

Bài 8: Mặt phẳng $\mathcal{Q}$ phải song song với một đường sinh của mặt nón. Có thể thay mặt phẳng hình chiếu đứng để ($\mathcal{Q}$) trở thành mặt phẳng chiếu đứng. Khi đó vết đứng mới của ($\mathcal{Q}$) phải song song với một trong hai đường sinh bao quanh hình chiếu đứng mới của mặt nón. Từ đó suy ra vết đứng của mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Bài toán có 2 nghiệm.

Bài 9: Các đường thẳng cần dựng là giao tuyến của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ với mặt nón tròn xoay đỉnh S và có các đường sinh nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng góc 45°.

Bài 10: Cần xác định bán kính của mặt cầu. Có thể quay m quanh đường bằng (hoặc đường mặt) vẽ qua O của mặt phẳng (O, m) để đưa m tới song song với một mặt phẳng hình chiếu.

Bạn đọc cũng có thể dùng phép thay mặt phẳng hình chiếu để đạt mục đích nói trên.

CHƯƠNG 9

GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI CÁC MẶT

Bài 9: Tìm giao điểm của đường thẳng m với mặt nón tròn xoay đỉnh S, trục là đường thẳng chiếu bằng và có đường sinh nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng $\mathcal{P}^2$ một góc bằng 60°.

Bài 10: Tìm giao điểm của đường thẳng n với mặt trụ tròn xoay có trục là đường thẳng m và thiết diện thẳng là đường tròn bán kính R = 30 mm.

Bài 11: Tìm giao điểm của đường thẳng m với mặt cầu tâm O, bán kính R = 35 mm.

Bài 12: Tìm giao điểm của đường thẳng n với mặt nón tròn xoay đỉnh S, trục m và đường sinh nghiêng với trục một góc α.

CHƯƠNG 10

GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT

Bài 1: Hình 10-4 : Giao tuyến là một đường gẫy khúc ghềnh khép kín gồm 12 đỉnh và có hình chiếu bằng trùng với hình chiếu bằng của lăng trụ đứng ở trong giới hạn hình chiếu bằng của lăng trụ xiên. Dễ dàng xác định được hình chiếu đứng của 6 điểm gẫy khúc thuộc các cạnh của lăng trụ xiên. Để xác định 6 điểm gẫy khúc thuộc các cạnh của lăng trụ đứng có thể gắn các điểm đó vào các đường thẳng thuộc các mặt bên và song song với các cạnh bên của lăng trụ xiên.

Cũng có thể vẽ hình chiếu đứng của giao tuyến bằng cách tìm giao tuyến của từng mặt bên của lăng trụ đứng (là các mặt phẳng chiếu bằng) với lăng trụ xiên.

Hình 10-5 : Lần lượt tìm giao điểm các cạnh của lăng trụ này với lăng trụ kia bằng phương pháp mặt phẳng phụ trợ (nên chọn là các mặt phẳng chiếu).

Cũng có thể dùng phương pháp chiếu phụ song song với hướng chiếu phụ song song với cạnh của một trong hai lăng trụ và mặt phẳng hình chiếu phụ là mặt phẳng đáy chung của chúng.

Bài 2 : Hình 10-6 – 10-8 : Hình chiếu đứng của giao tuyến trùng với hình chiếu đứng của lăng trụ và ở trong giới hạn hình chiếu đứng của chóp.

Hình 10-9 – 10-10 : Hình chiếu bằng của giao tuyến trùng với hình chiếu bằng của lăng trụ và ở trong giới hạn hình chiếu bằng của chóp.

Hình 10-11 : Lần lượt tìm giao điểm các cạnh của lăng trụ với chóp và ngược lại bằng phương pháp mặt phẳng phụ trợ. Riêng đối với cạnh của chóp là đường cạnh có thể tìm giao điểm của nó với lăng trụ bằng cách chiếu phụ lên mặt đáy bên trái của lăng trụ (là mặt phẳng chiếu bằng) theo hướng chiếu phụ song song với cạnh của lăng trụ đó. Nói khác đi ta dùng mặt phẳng phụ trợ chứa cạnh bên là đường cạnh của chóp và song song với cạnh của lăng trụ để tìm giao điểm của cạnh bên đó với lăng trụ.

Bài 3 : Lần lượt tìm giao điểm các cạnh của mặt chóp này với mặt chóp kia và ngược lại bằng phương pháp mặt phẳng phụ trợ.

Mặt phẳng phụ trợ có thể là mặt phẳng chiếu hoặc là mặt phẳng chứa đỉnh của cả hai mặt chóp.

Bài 4 : Hình 10-14 : Hình chiếu đứng của giao tuyến trùng với hình chiếu đứng của lăng trụ và ở trong giới hạn hình chiếu đứng của mặt trụ.

Giao tuyến gồm có :

– Một cung elip – giao tuyến của mặt trụ với mặt bên phía phải của lăng trụ.

– Hai đoạn thẳng – giao tuyến của mặt trụ với mặt bên phía trái của lăng trụ (song song với trục của mặt trụ).

– Một cung tròn – giao tuyến của mặt trụ với mặt bên phía dưới của lăng trụ.

Hình 10-15 : Hình chiếu bằng của giao tuyến trùng với hình chiếu bằng của trụ và ở trong giới hạn hình chiếu bằng của lăng trụ.

Giao tuyến gồm 4 cung elip – giao tuyến của 3 mặt bên của lăng trụ với mặt trụ.

Dễ dàng vẽ được hình chiếu đứng của các cung elip đó bằng cách gắn một số điểm của chúng vào các đường thẳng thuộc các mặt bên và song song với các cạnh bên của lăng trụ.

Cần phải xác định các điểm gẫy khúc của giao tuyến – giao điểm hai cạnh của lăng trụ với mặt trụ – và các điểm của giao tuyến nằm trên hai đường sinh bao hình chiếu đứng của trụ – các điểm tiếp xúc của elip với các đường sinh đó.

Hình 10-16 : Các mặt bên của lăng trụ xiên góc bất kỳ với trục của trụ nên cắt trụ theo các cung elip. Để vẽ các giao tuyến elip đó có thể tìm giao điểm của một số đường sinh của trụ với các mặt bên của lăng trụ.

Cần phải xác định các điểm gẫy khúc của giao tuyến - giao điểm nếu có của các cạnh lăng trụ với mặt trụ.

Bài toán có thể được giải bằng phép chiếu phụ song song lên mặt phẳng đáy chung của hai mặt.

Bài 5 : Hình 10-17 : Giao tuyến là một đường gẫy khúc khép kín gồm hai cung elip - giao tuyến của mặt bên phía trên và phía trái của lăng trụ với nón - và hai cung parabôn - giao tuyến của mặt bên phía phải của lăng trụ với nón.

Hình chiếu đứng của giao tuyến trùng với hình chiếu đứng của lăng trụ và ở trong giới hạn hình chiếu đứng của mặt nón.

Để vẽ hình chiếu bằng của giao tuyến có thể gắn một số điểm của nó vào các đường sinh của nón.

Cần phải xác định các điểm của giao tuyến nằm trên hai đường sinh bao hình chiếu bằng của nón và trên các cạnh của lăng trụ.

Hình 10-18 : Làm tương tự bài 10-4 (Hình 10-16). Bài toán có thể giải bằng phép chiếu phụ song song lên mặt phẳng đáy chung của hai mặt.

Bài 6 : Hình 10-19 : Giao tuyến là đường gẫy khúc khép kín do các cung tròn - giao tuyến của ba mặt bên của lăng trụ với mặt cầu - tạo thành.

Hình chiếu đứng của giao tuyến trùng với hình chiếu đứng của lăng trụ và ở trong giới hạn hình chiếu đứng của mặt cầu.

Dễ dàng vẽ được hình chiếu bằng của các cung tròn giao tuyến của các mặt bên phía dưới và phía bên phải của lăng trụ với mặt cầu, riêng cung tròn giao tuyến của mặt bên phía trái của lăng trụ với cầu có hình chiếu bằng là cung elip.

Hình 10-20 : Giao tuyến là đường gẫy khúc do các cung tròn - giao tuyến của các mặt bên của lăng trụ với mặt cầu - tạo thành - Hai hình chiếu của các cung tròn đó đều là các cung elip. Có thể xác định một số điểm của các elip đó nhờ phương pháp mặt phẳng phụ trợ (nên chọn là mặt phẳng bằng hoặc mặt phẳng mặt).

Bài 7 : Để xác định một số điểm của giao tuyến nên dùng các mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng mặt hoặc đưa về bài toán "sự liên thuộc của điểm với mặt xuyến".

Bài 8 : Hình 10-23 : Giao tuyến gồm hai đường khép kín, mỗi đường do hai nửa elip - giao tuyến của mặt trụ với một mặt bên của chóp - tạo thành. Cần phải xác định các điểm gẫy khúc của giao tuyến - giao điểm của cạnh phía trước và phía sau của chóp với mặt trụ - và các điểm của giao tuyến thuộc các đường sinh bao của mặt trụ trên hình chiếu bằng.

Hình 10-24 : Giao tuyến gồm hai phần :

- Một đường gẫy khúc tạo bởi ba cung elip do nửa phía trên của trụ cắt ba mặt bên của chóp.

- Một đường gẫy khúc thứ hai cũng tạo bởi ba cung elip do nửa phía dưới của trụ cắt ba mặt bên của chóp.

Cần phải xác định các điểm gẫy khúc của giao tuyến.

Hình 10-25 : Ngoài đường gẫy khúc gồm ba cung elip do mặt trụ cắt ba mặt bên của chóp, giao tuyến còn có một tam giác - giao tuyến của đáy trên của trụ cắt mặt chóp - và một đường tròn - giao tuyến của trụ với đáy của chóp.

Chú ý rằng các giao điểm của ba cạnh của chóp với trụ có cùng độ cao, do đó dễ dàng vẽ được hình chiếu đứng của giao điểm của trụ với cạnh bên là đường thẳng cạnh của chóp.

Bài 9 : Các mặt bên của chóp cắt mặt cầu theo các cung tròn mà hình chiếu của chúng là các cung elip. Có thể xác định một số điểm của các cung elip đó nhờ các mặt phẳng bằng phụ trợ.

Cũng có thể thay mặt phẳng hình chiếu để đưa một mặt bên của chóp thành mặt phẳng chiếu, vẽ giao tuyến của mặt bên đó với cầu trên hình vừa biến đổi rồi đưa kết quả về hình chiếu ban đầu - Do tính đối xứng sẽ suy ra giao tuyến của cầu với các mặt bên còn lại của chóp.

Bài 10 : Hình 10-28 và 10-29 : Giao tuyến là đường cong ghềnh bậc 4. Có thể xác định một số điểm của giao tuyến nhờ phương pháp mặt phẳng phụ trợ (Hình 10-28 : mặt phẳng phụ trợ có thể là mặt phẳng bằng hoặc mặt phẳng mặt ; Hình 10-29 : chỉ có thể dùng mặt phẳng mặt phụ trợ).

Cũng có thể chuyển về bài toán "điểm liên thuộc mặt trụ" để vẽ hình chiếu còn thiếu của giao tuyến.

Hình 10-30 và 10-31 : Vì hai mặt trụ tròn xoay có đường kính bằng nhau (cùng ngoại tiếp một mặt bậc hai thứ ba - ở đây là một mặt cầu) nên giao tuyến là hai đường cong bậc hai, ở đây là hai elip.

Bài 11 : Hình 10-32 : Vì trụ và nón cùng ngoại tiếp một mặt cầu nên giao tuyến của chúng là hai đường cong bậc hai, ở đây là hai elip mà hình chiếu đứng trùng với hình chiếu đứng của mặt trụ.

Hình 10-33 : Giao tuyến gồm một đường cong ghềnh bậc 4 và một đường tròn - giao của trụ với đáy nón. Để vẽ hình chiếu đứng của đường cong bậc 4 có thể dùng các mặt phẳng phụ trợ chiếu bằng chứa trục của nón.

Hình 10-34 : Giao tuyến gồm hai đường cong ghềnh khép kín có hình chiếu đứng là hai cung tròn trùng với hình chiếu đứng của trụ vào ở trong giới hạn hình chiếu đứng của các nón.

Để xác định hình chiếu bằng của giao tuyến có thể dùng các mặt phẳng phụ trợ chiếu đứng đi qua đỉnh nón. Nói cách khác là gắn các điểm của giao tuyến vào một số đường sinh của nón.

Cần xác định các điểm của giao tuyến thuộc các đường sinh bao hình chiếu bằng của cả nón và trụ.

Bài 12 : Hình 10-35 : Giao tuyến là một đường cong ghềnh khép kín, có hình chiếu bằng trùng với hình chiếu bằng của trụ và ở trong giới hạn hình chiếu bằng của mặt cầu. Để vẽ hình chiếu đứng của giao tuyến có thể dùng các mặt phẳng phụ trợ là mặt phẳng bằng hoặc mặt phẳng mặt.

Hình 10-36: Giao tuyến là đường cong ghềnh bậc 4. Để xác định các điểm của giao tuyến nên dùng các mặt phẳng mặt phụ trợ. Hình chiếu đứng của giao là một parabôn (hai mặt đã cho có mặt phẳng đối xứng chung song song với mặt phẳng hình chiếu đứng). Hình chiếu bằng của giao tuyến có một điểm tự cắt (điểm tiếp xúc của mặt cầu và mặt trụ).

Bài 13 : Hình 10-37: Giao tuyến gồm có :

- Một cung tròn là giao tuyến của trụ với mặt phẳng của thiết diện ngang của xuyến.

- Hai đường cong ghềnh là giao tuyến của trụ với mặt phía ngoài và mặt phía trong của xuyến.

Hình chiếu bằng của giao tuyến trùng với hình chiếu bằng của trụ.

Phần giao tuyến là đường cong ghềnh có hình chiếu đứng là một cung hypecbôn (thuộc mặt phía ngoài của xuyến) và một cung elip (thuộc mặt phía trong của xuyến).

Để xác định hình chiếu đứng của giao tuyến có thể dùng các mặt phẳng mặt phụ trợ.

Hình 10 - 38 : Làm tương tự bài ở hình 10-37.

Hình 10-39 : Giao tuyến gồm hai đường cong ghềnh khép kín có hình chiếu đứng trùng với hình chiếu đứng của trụ và ở trong giới hạn hình chiếu đứng của xuyến.

Để vẽ hình chiếu bằng của giao tuyến cũng nên dùng các mặt phẳng mặt phụ trợ.

Bài 14 : Hình 10-40 : Giao tuyến gồm hai đường cong ghềnh khép kín có hình chiếu bằng trùng với hình chiếu bằng của trụ và ở trong giới hạn hình chiếu bằng của elipxôit - Hình chiếu đứng của giao tuyến là hai nhánh của một hypecbôn.

Ngoài các điểm của giao tuyến là giao điểm của các đường bao hình chiếu đứng của hai mặt, để xác định hình chiếu đứng một vài điểm trung gian khác ta có thể dùng mặt cầu phụ trợ có tâm là giao điểm của hai trục cua hai mặt đã cho.

Hình 10-41 : Giao tuyến gồm một phần của đường cong ghềnh bậc 4 và một cung tròn - giao tuyến của elipxôit với đáy trên của trụ.

Để vẽ hình chiếu đứng của giao tuyến là đường cong ghềnh, có thể dùng các mặt phẳng bằng phụ trợ.

Bài 15 : Hình 10-42 : Giao tuyến là một đường cong ghềnh bậc 4 - Có thể dùng các mặt phẳng bằng phụ trợ để xác định các điểm của nó. Điểm cao nhất và thấp nhất của giao tuyến nằm trên mặt phẳng chứa trục của nón và tâm của cầu.

Hình 10-43 : Giao tuyến là đường cong ghềnh. Có thể dùng mặt phẳng phụ trợ là các mặt phẳng chiếu chứa đỉnh nón. Để xác định giao điểm của giao tuyến phụ giữa các mặt phẳng phụ trợ với nón và cầu phải thực hiện một phép quay quanh đường thẳng chiếu để đưa các giao tuyến phụ đến vị trí song song với một mặt phẳng hình chiếu.

Hình chiếu đứng của giao tuyến là một parabôn, hình chiếu bằng của nó có một điểm tự cắt (điểm tiếp xúc của nón và cầu).

Hình 10-44 và 10-45 : Mặt nón và mặt cầu đã có chung một đường tròn (đáy nón) nên chúng còn cắt nhau theo một đường tròn nữa (ở hình 10-44 là một cung tròn)

Cả hai đường tròn đều thuộc các mặt phẳng chiếu đứng.

Bài 16 : Hình 10-46 : Để xác định các điểm thuộc giao tuyến có thể dùng các mặt cầu phụ trợ bán kính thay đổi và tâm là giao điểm của trục xoay của hai mặt.

Hình chiếu đứng của giao tuyến là hai cung hypecbôn.

Hình 10-47 : Cũng dùng các mặt cầu phụ trợ có tâm nằm trên trục của nón (để chúng cắt nón theo các đường tròn vĩ tuyến) và chứa hai đường tròn sinh nào đó của xuyến. Chẳng hạn muốn dựng một mặt cầu phụ trợ như vậy, trên hình chiếu đứng trước hết vẽ một đường tròn sinh của mặt xuyến - đó là một đoạn thẳng hướng vào tâm hình chiếu đứng của xuyến - Vẽ trung trực của đoạn thẳng này, đó là hình chiếu đứng của trục của đường tròn sinh nói trên. Giao điểm của đường trung trực vừa dựng với trục của nón là tâm của một mặt cầu phụ trợ.

Bài 17 : Dùng các mặt phẳng mặt phụ trợ hoặc các mặt cầu phụ trợ có tâm là giao điểm của trục xoay của xuyến với mặt phẳng đối xứng chung của hai mặt đã cho.

Hình chiếu đứng của giao tuyến là hai cung của một parabôn.

CHƯƠNG 11

KHAI TRIỂN CÁC MẶT

Bài 1 : a- Có thể xác định độ lớn của các mặt bên của lăng trụ bằng cách quay từng mặt bên đó quanh các cạnh là các đường mặt của lăng trụ.

b- Có thể xác định độ lớn của ba mặt bên của chóp bằng nhiều cách, chẳng hạn :

- Tìm độ dài các cạnh bên của chóp bằng cách quay chung quanh cạnh thẳng đứng cho tới song song với mặt phẳng hình chiếu đứng.

Chú ý rằng đáy chóp có độ lớn bằng hình chiếu bằng của nó.

- Gập ba mặt bên của chóp quanh các cạnh đáy của chúng cho tới trùng với mặt phẳng đáy chóp.

c- Khai triển mặt chóp và xác định vị trí ba đỉnh của thiết diện trên hình khai triển , từ đó suy ra độ lớn của thiết diện (tức đáy trên của chóp cụt).

d- Khai triển mặt trụ và xác định vị trí một số điểm đặc biệt của thiết diện (là elip) trên hình khai triển. Độ lớn của các thiết diện có thể xác định bằng cách chiếu phụ chúng lên các mặt phẳng song song với chính các thiết diện đó.

e- Khai triển mặt nón và xác định vị trí một số điểm đặc biệt của thiết diện elip (tức đáy trên của nón cụt) trên hình khai triển.

Bài 2 : Làm tương tự bài 1. Khai triển các mặt đã cho rồi xác định thiết diện do mặt phẳng $\mathcal{Q}$ tạo nên trên hình khai triển của các mặt đó.

Bài 3: Làm tương tự hai bài trên. Vẽ hình khai triển của từng mặt và xác định trên hình khai triển của chúng các điểm thuộc giao tuyến.

Riêng bài 3a để xác định hình khai triển của giao tuyến chỉ việc xác định các đỉnh của đường gẫy khúc – giao tuyến của lăng trụ và chóp – đó là giao điểm của các cạnh của mặt này với mặt kia.

Bài 4: a – Mặt chuyển tiếp gồm 8 tam giác. Để vẽ hình khai triển của mặt chuyển tiếp chỉ cần xác định độ lớn của 2 tam giác kề nhau và từ đó suy ra độ lớn của các tam giác còn lại.

b– Mặt chuyển tiếp gồm 4 tam giác và 4 phần mặt nón và có mặt phẳng đối xứng là mặt phẳng mặt. Các phần mặt nón được khai triển gần đúng.

c– Mặt chuyển tiếp gồm 4 tam giác và 4 phần mặt nón và có hai mặt phẳng đối xứng. Cách làm tương tự bài 4b.

CHƯƠNG 12

HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO

Bài 2 : Các vết của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ là giao tuyến của $\mathcal{Q}$ với các mặt phẳng tọa độ trục đo.

Để vẽ vết bằng của ($\mathcal{Q}$) (giao tuyến của ($\mathcal{Q}$) với mặt phẳng tọa độ X'O'Y') có thể tìm vết bằng của A'B' và C'D', tức là tìm giao điểm của A'B' và C'D' với mặt phẳng X'O'Y'.

Chú ý rằng hai vết của một mặt phẳng cắt nhau tại một điểm trên một trục tọa độ trục đo.

Bài 3: Dùng phương pháp mặt phẳng phụ trợ. Ở đây có thể lập mặt phẳng phụ trợ chứa A'B' và vuông góc với mặt phẳng tọa độ X'O'Y'.

Bài 4: Có thể tìm giao tuyến của các mặt bên của lăng trụ với mặt phẳng $\mathcal{Q}$ hoặc tìm giao điểm của các cạnh của lăng trụ với mặt phẳng $\mathcal{Q}$. Chú ý rằng các cạnh của lăng trụ song song với trục O'Z' do đó hình chiếu lần thứ hai trên mặt phẳng X'O'Y'của giao tuyến trùng với đáy của lăng trụ.

Bài 5: Vì mặt phẳng $\mathcal{Q}$ song song với trục O'X' nên có thể vẽ hình chiếu lần thứ hai của mặt nón trên mặt phẳng tọa độ Y'O'Z' (là một tam giác) và dùng các mặt phẳng phụ trợ chứa đỉnh nón và song song với trục O'X' để tìm giao điểm của một số đường sinh của mặt nón với mặt phẳng $\mathcal{Q}$.

Giao tuyến là một cung elíp có hình chiếu theo phương O'X' lên mặt phẳng Y'O'Z' trùng với vết của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ trên mặt phẳng tọa độ này.

Bài 6: Tương tự như bài 3, dùng phương pháp mặt phẳng phụ trợ để xác định giao điểm các cạnh của mặt chóp với mặt lăng trụ. Ngoài ra vì mặt lăng trụ có các cạnh song song với trục O'Z' nên dễ dàng xác định được giao điểm (nếu có) của cạnh lăng trụ với mặt chóp .

Bài 7: Sau khi vẽ hình chiếu trục đo của hình hộp chữ nhật và mặt nón, vẽ giao tuyến của chúng bằng cách dùng các mặt phẳng phụ trợ chứa trục của mặt nón để tìm giao điểm của một số đường sinh của nón với mặt bên của hình hộp.

Bạn đọc có thể vẽ giao tuyến của hai mặt trên hình chiếu thẳng góc rồi vẽ hình chiếu trục đo của giao tuyến đó.

Bài 8: Sau khi vẽ hình chiếu trục đo của hai mặt trụ, vẽ giao tuyến của chúng nhờ các mặt phẳng phụ trợ song song với trục của hai mặt trụ.

Bài 9 : Nên dùng loại hình chiếu trục đo vuông góc cân.

Bài 10: Gắn các vật thể đã cho vào hệ trục tọa độ thẳng góc OXYZ sao cho trục OZ trùng với trục đối xứng thẳng đứng của chúng và các mặt phẳng tọa độ XOZ và YOZ trùng với hai mặt phẳng đối xứng thẳng đứng của các vật thể đó.

Để vẽ hình cắt trục đo của các vật thể này, dùng các mặt phẳng tọa độ X'O'Y' và Y'O'Z' làm các mặt phẳng cắt tưởng tượng.

PHẦN III

PHỤ LỤC

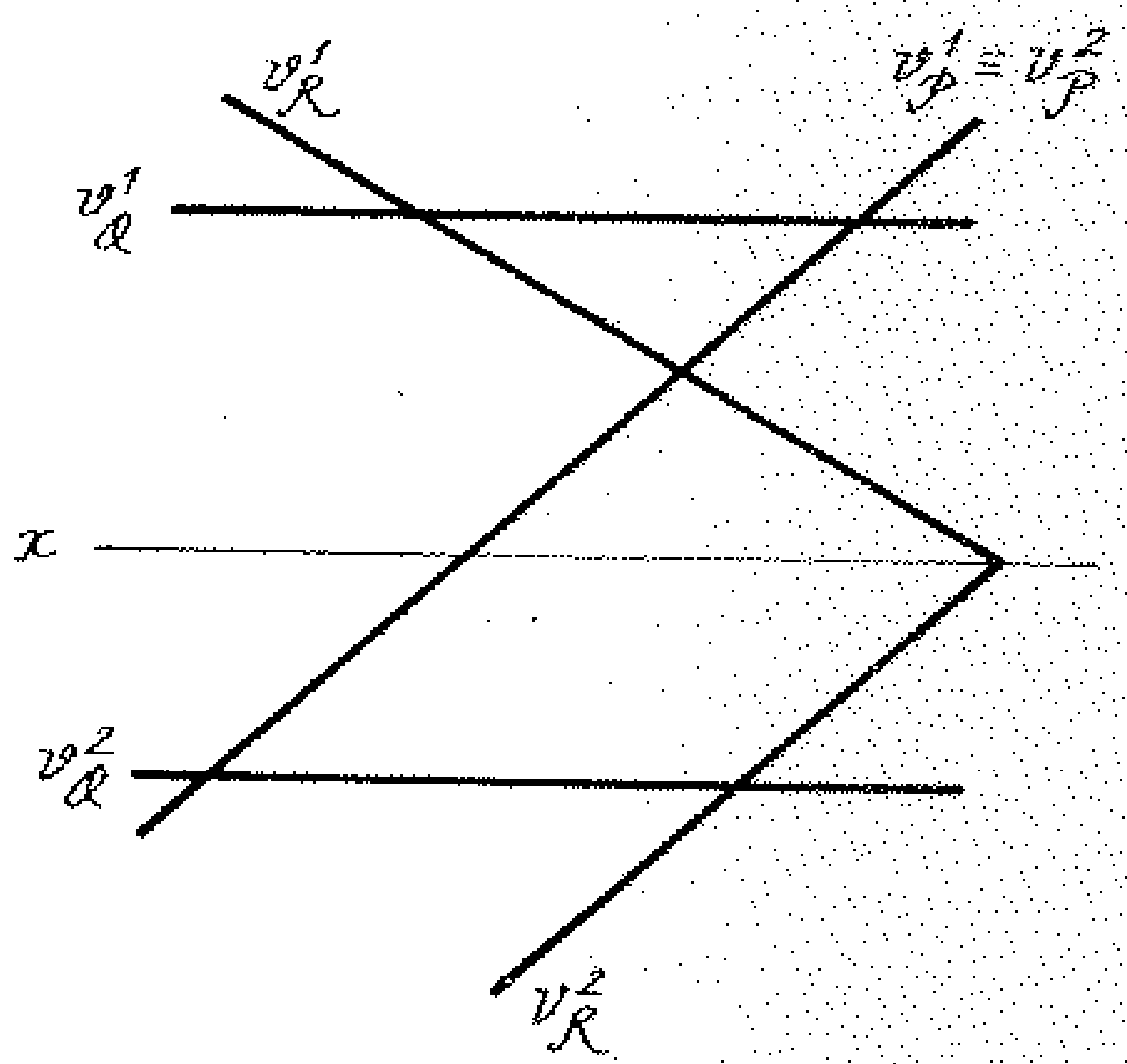
PHỤ LỤC 1

CÁC BÀI TOÁN TỔNG HỢP

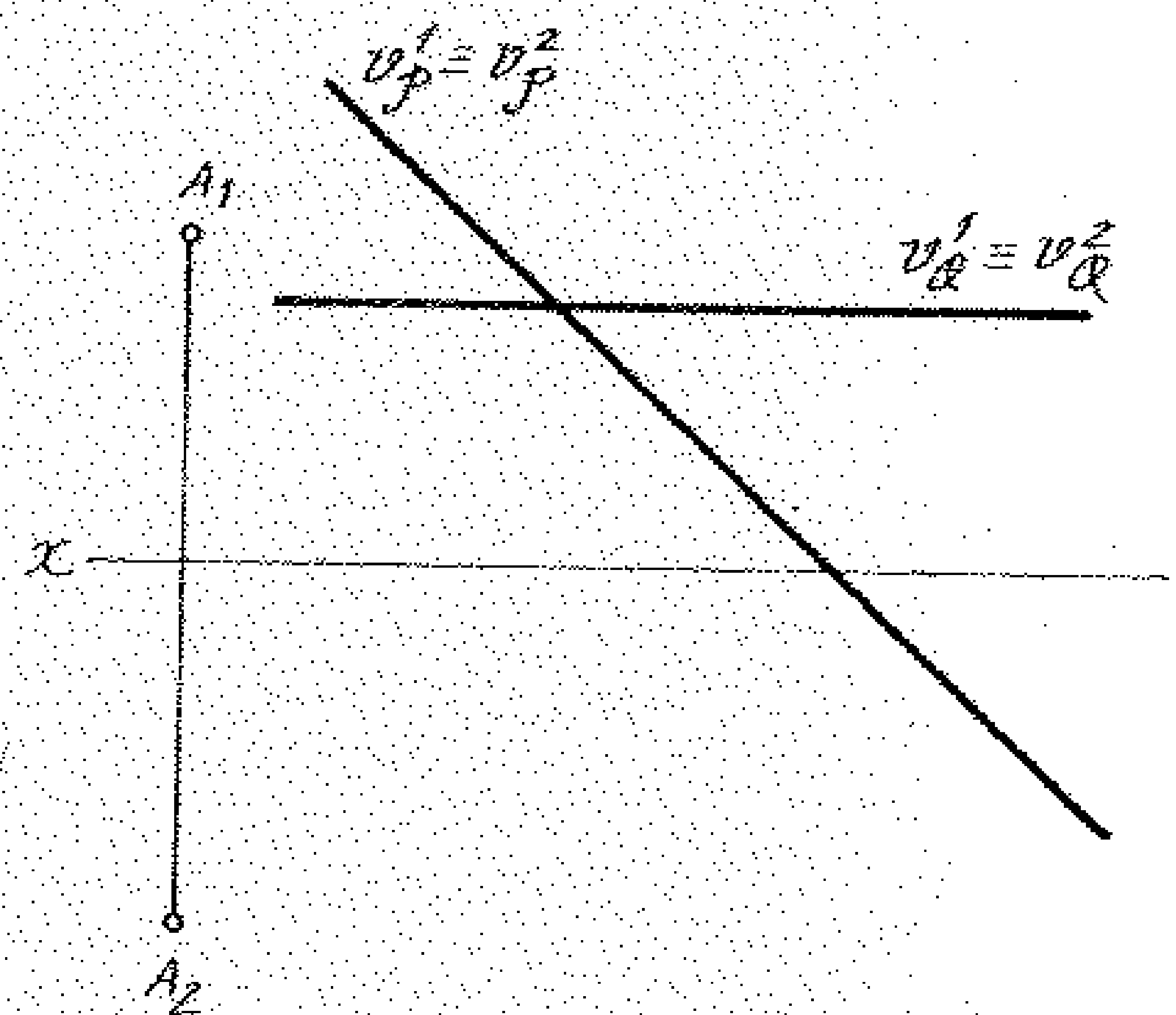
Các bài toán tổng hợp dưới đây có thể được giải bằng bất kì phương pháp nào đã trình bày trong giáo trình hình học họa hình. Chúng giúp người học làm quen với việc sử dụng tổng hợp các kiến thức đã tích lũy được để giải các bài toán hình họa.

Bài 1 : Vẽ giao điểm của ba mặt phẳng $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ và $\mathcal{R}$ (Hình PL 1 – 1).

Bài 2: Qua điểm A vẽ đường thẳng song song với hai mặt phẳng $\mathcal{P}$ và $\mathcal{Q}$ (Hình PL 1 – 2).



Hình PL 1 – 1



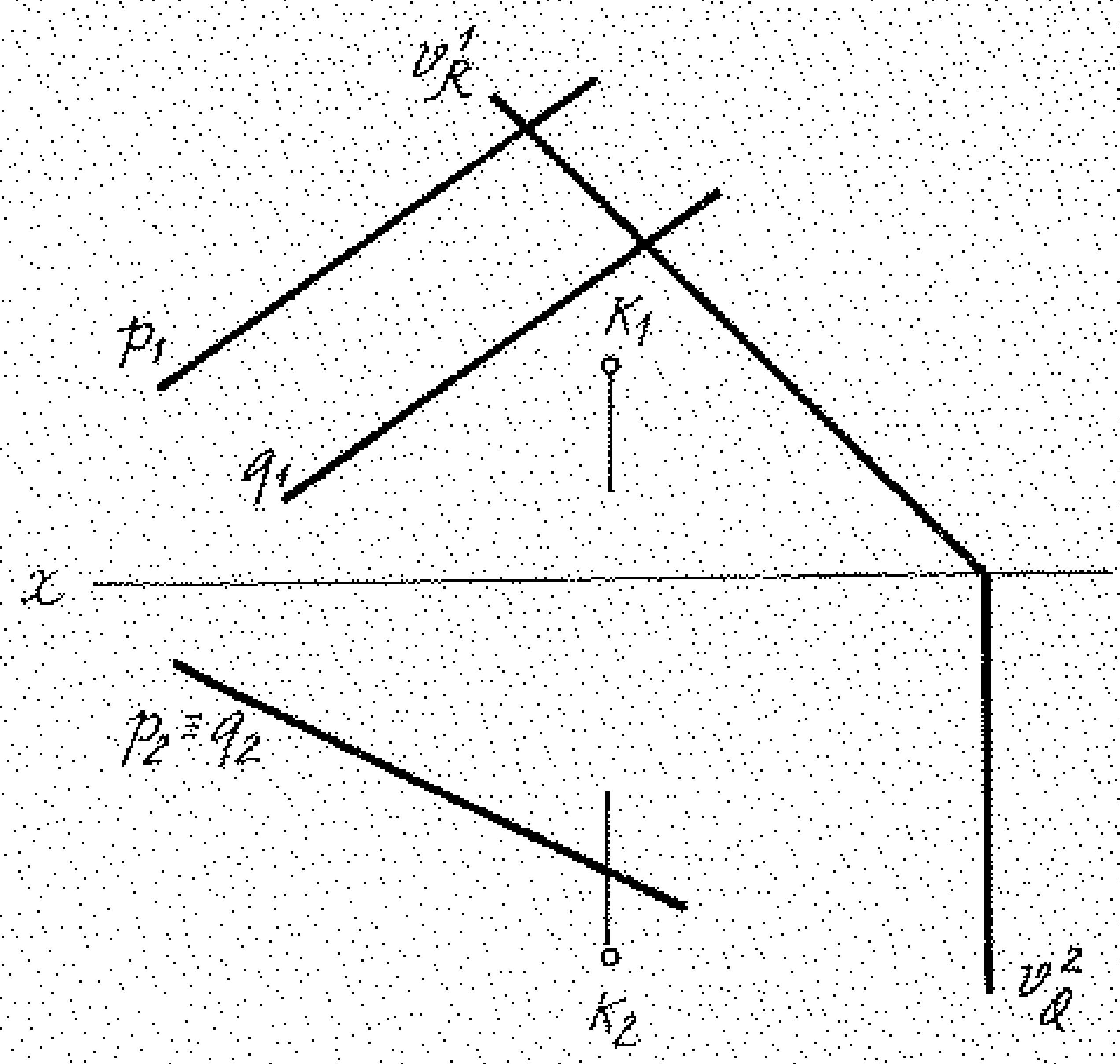
Hình PL 1 – 2

Bài 3 : Qua điểm K vẽ đường thẳng song song với mặt phẳng chiếu đứng $\mathcal{R}$ và mặt phẳng $\mathcal{Q}$ (p//q), (Hình PL 1 – 3).

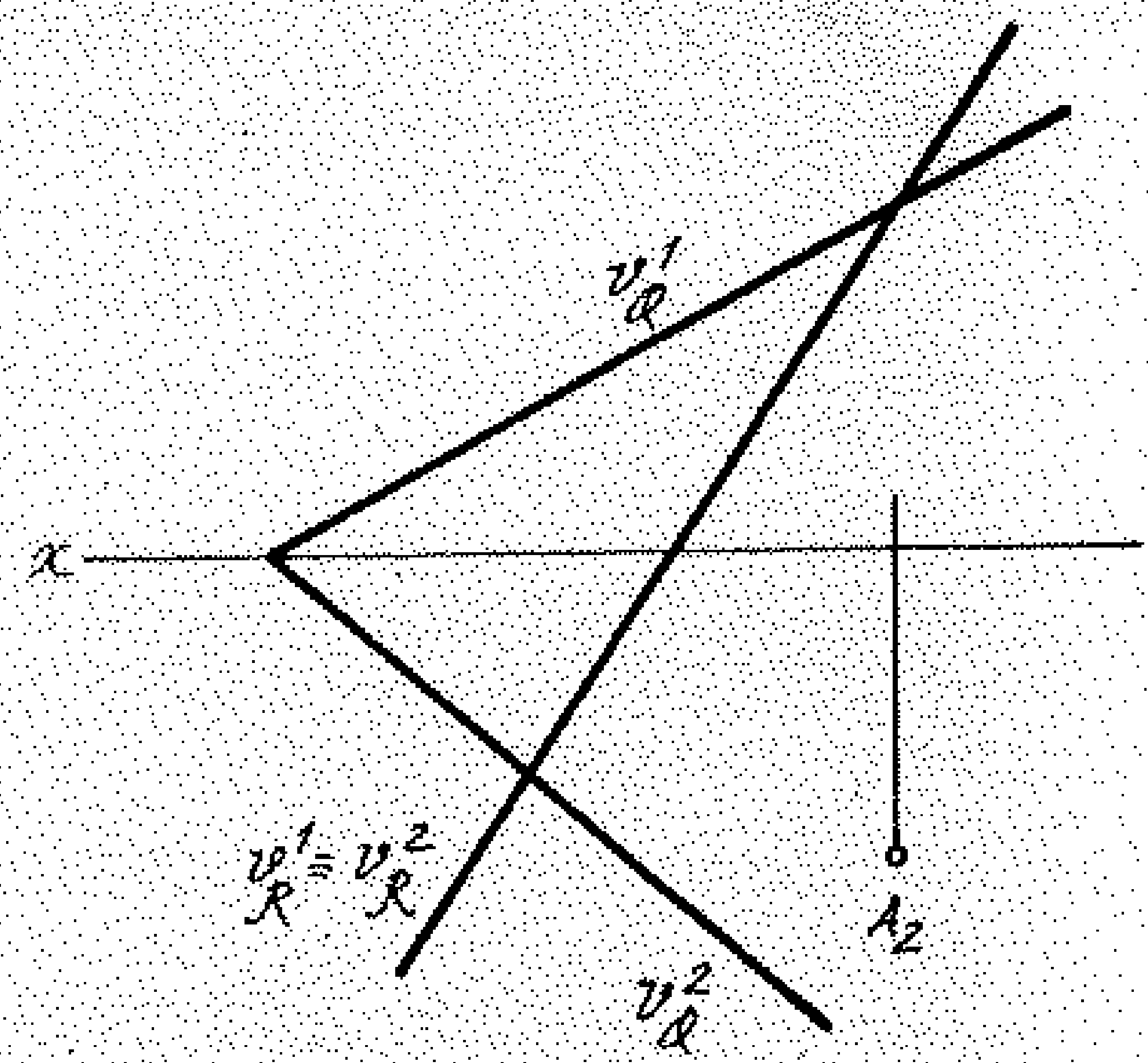
Bài 4: Qua điểm A thuộc mặt phẳng $\mathcal{Q}$ vẽ đường thẳng thuộc ($\mathcal{Q}$) và song song với mặt phẳng $\mathcal{R}$ (Hình PL 1– 4).

Bài 5 : Vẽ một đường thẳng song song với đường thẳng d và cắt hai đường thẳng p, q (M,N), (Hình PL 1 – 5).

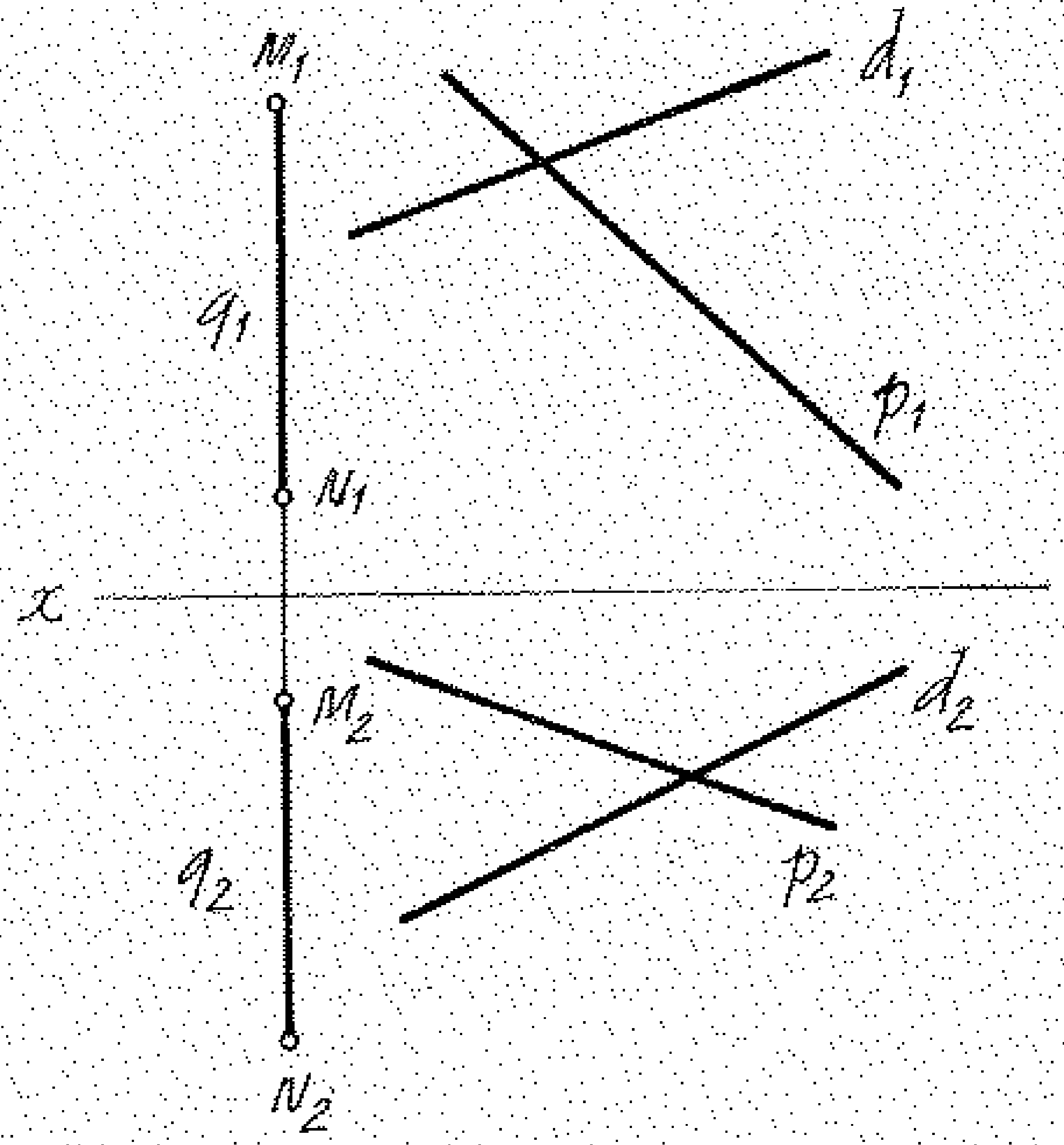
Bài 6 : Qua điểm K vẽ đường thẳng cắt hai đường thẳng p và q (Hình PL 1– 6).



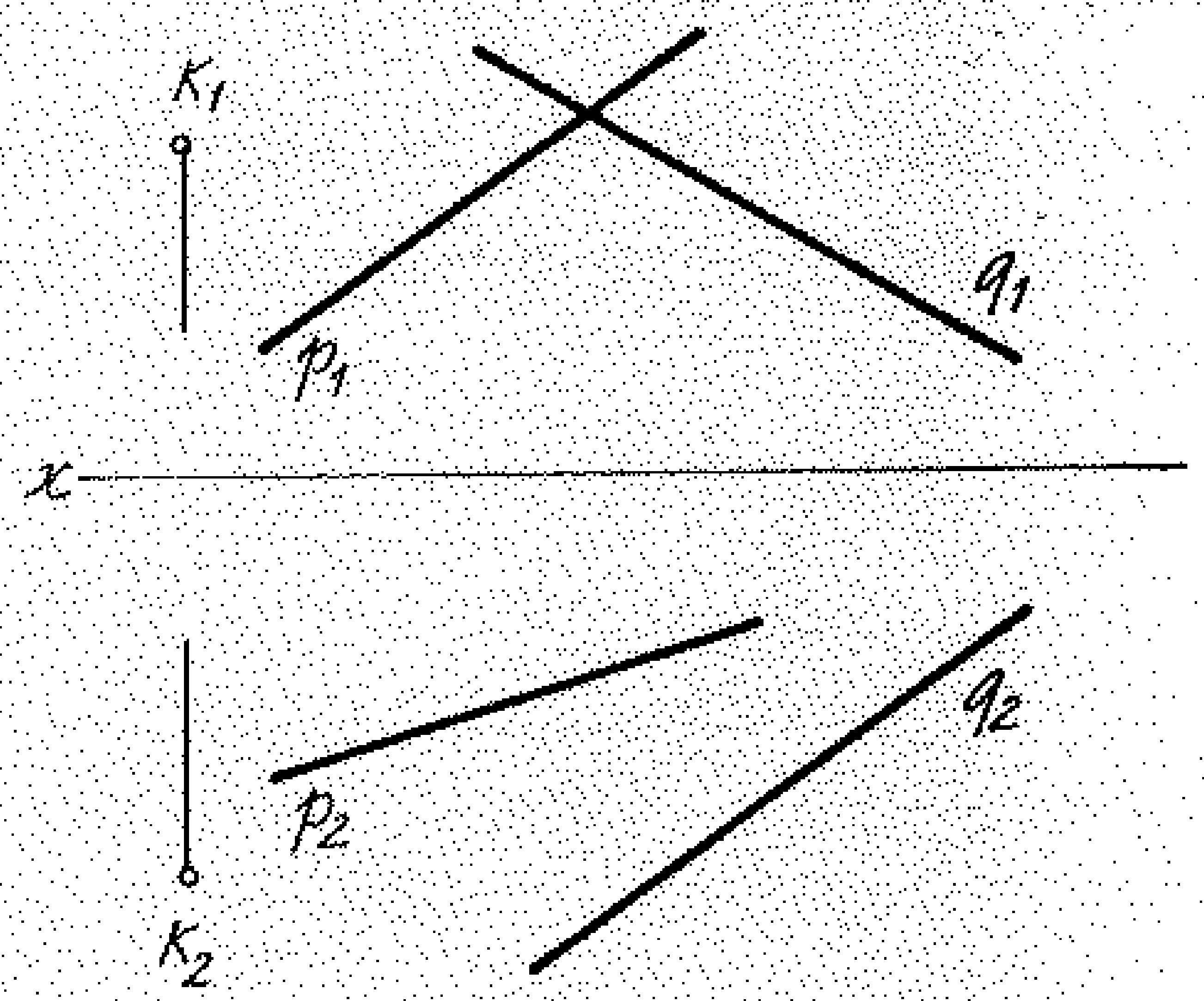
Hình PL 1- 3



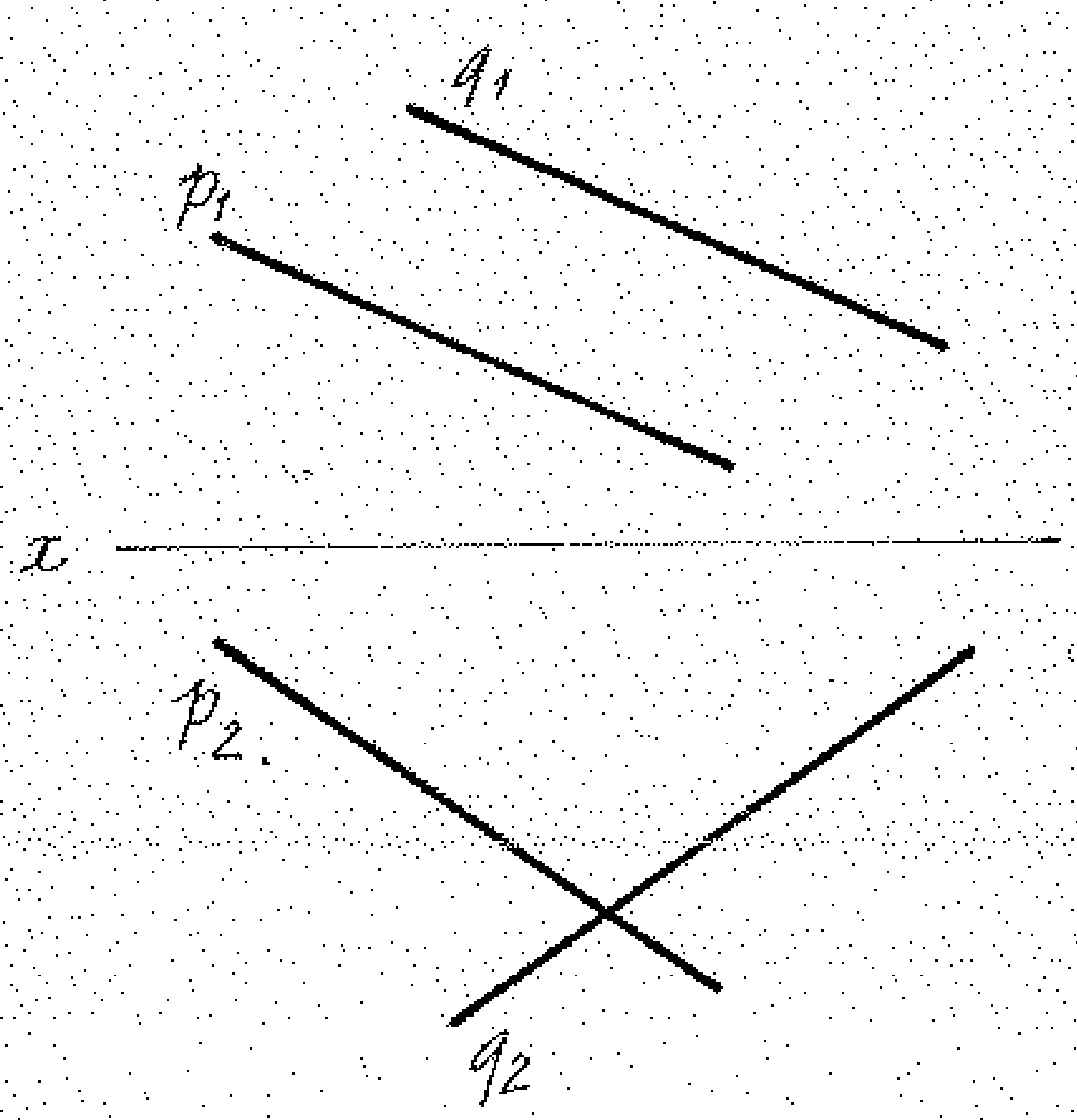
Hình PL 1 - 4



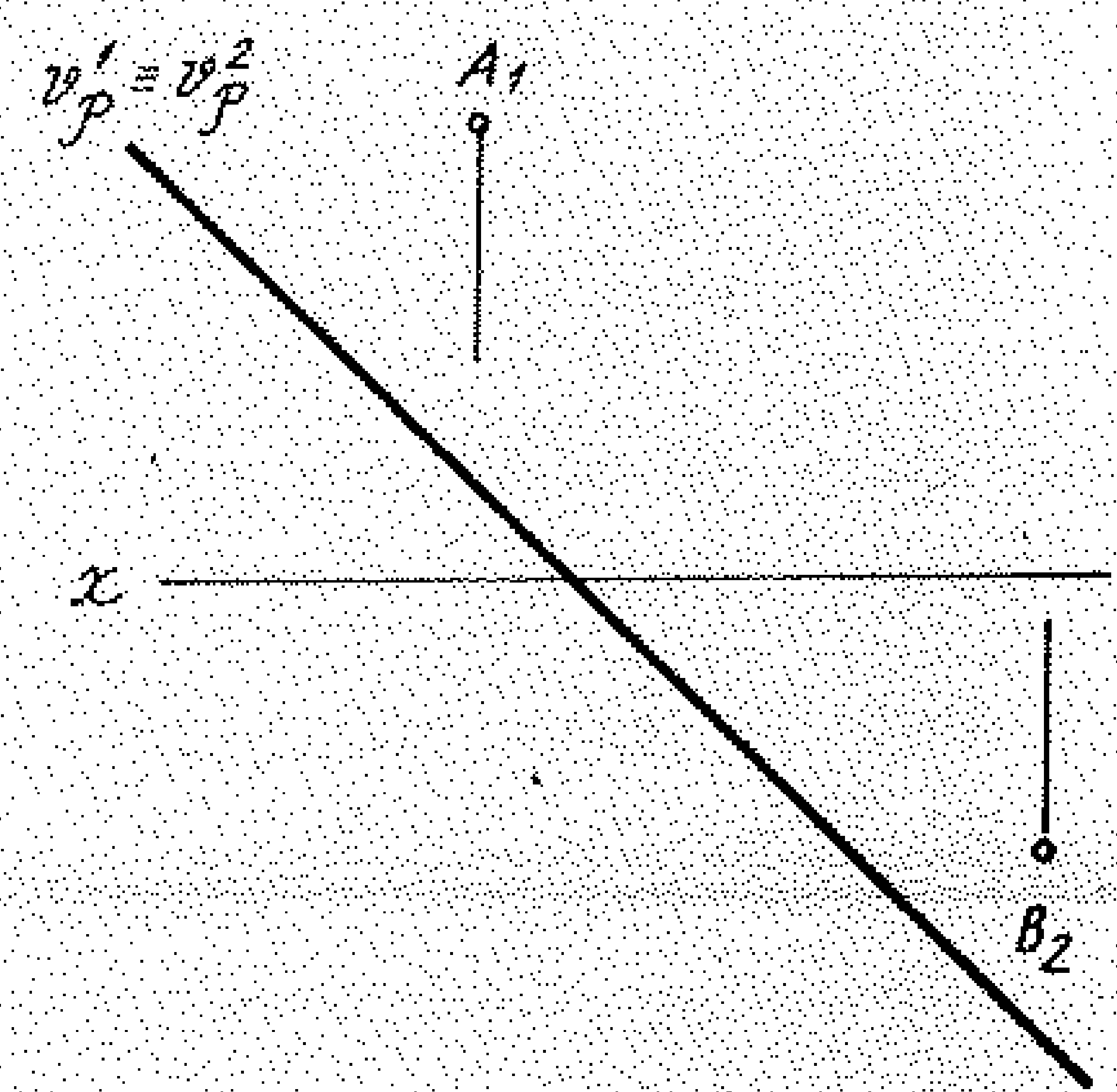
Hình PL 1 - 5



Hình PL 1- 6



Hình PL 1 - 7



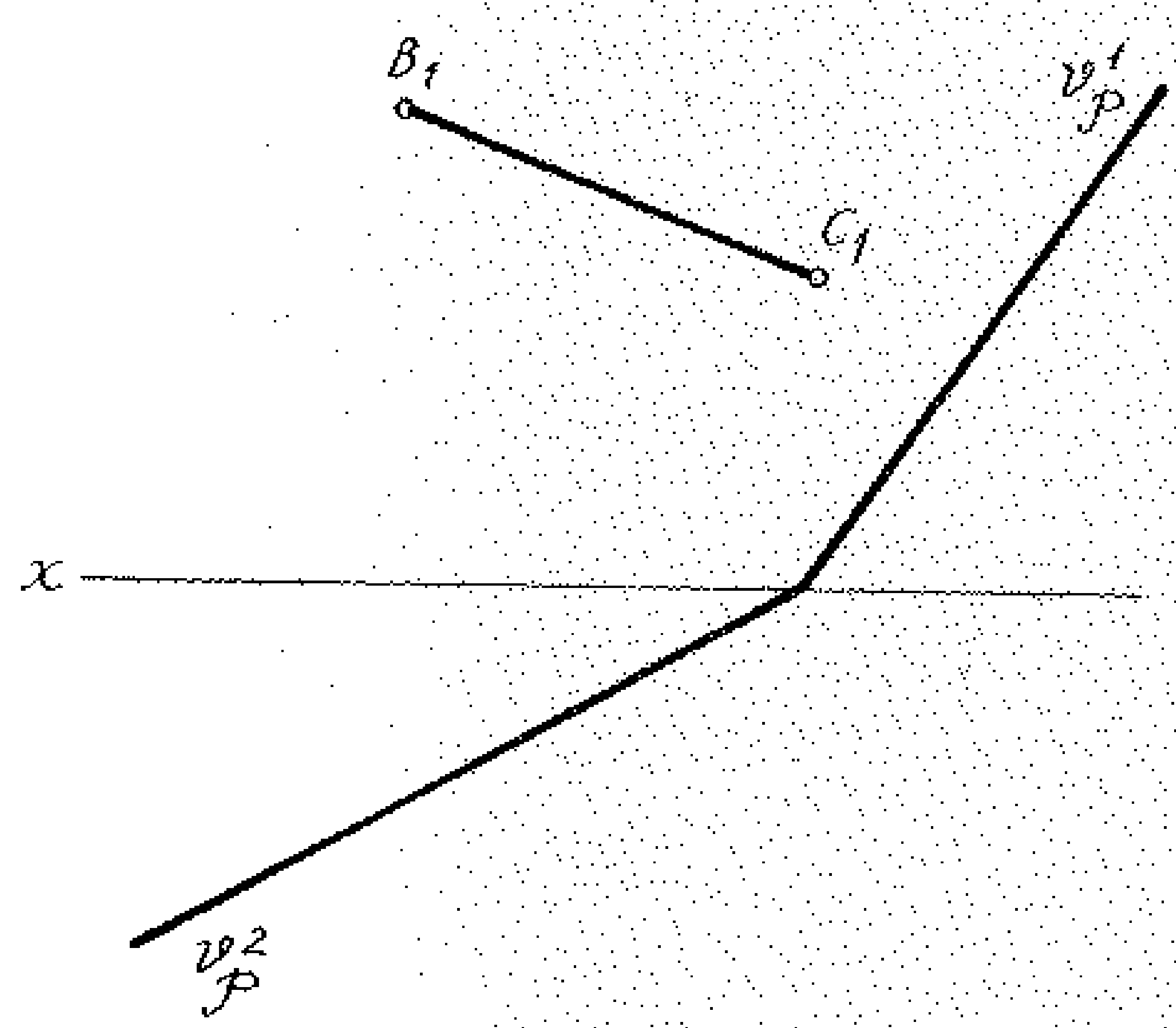
Hình PL 1 - 8

Bài 7: Vẽ đường thẳng cắt hai đường thẳng p và q và tạo với các mặt phẳng hình chiếu $\mathcal{P}^1$ và $\mathcal{P}^2$ các góc lần lượt là 30^o và 45^o (Hình PL 1- 7).

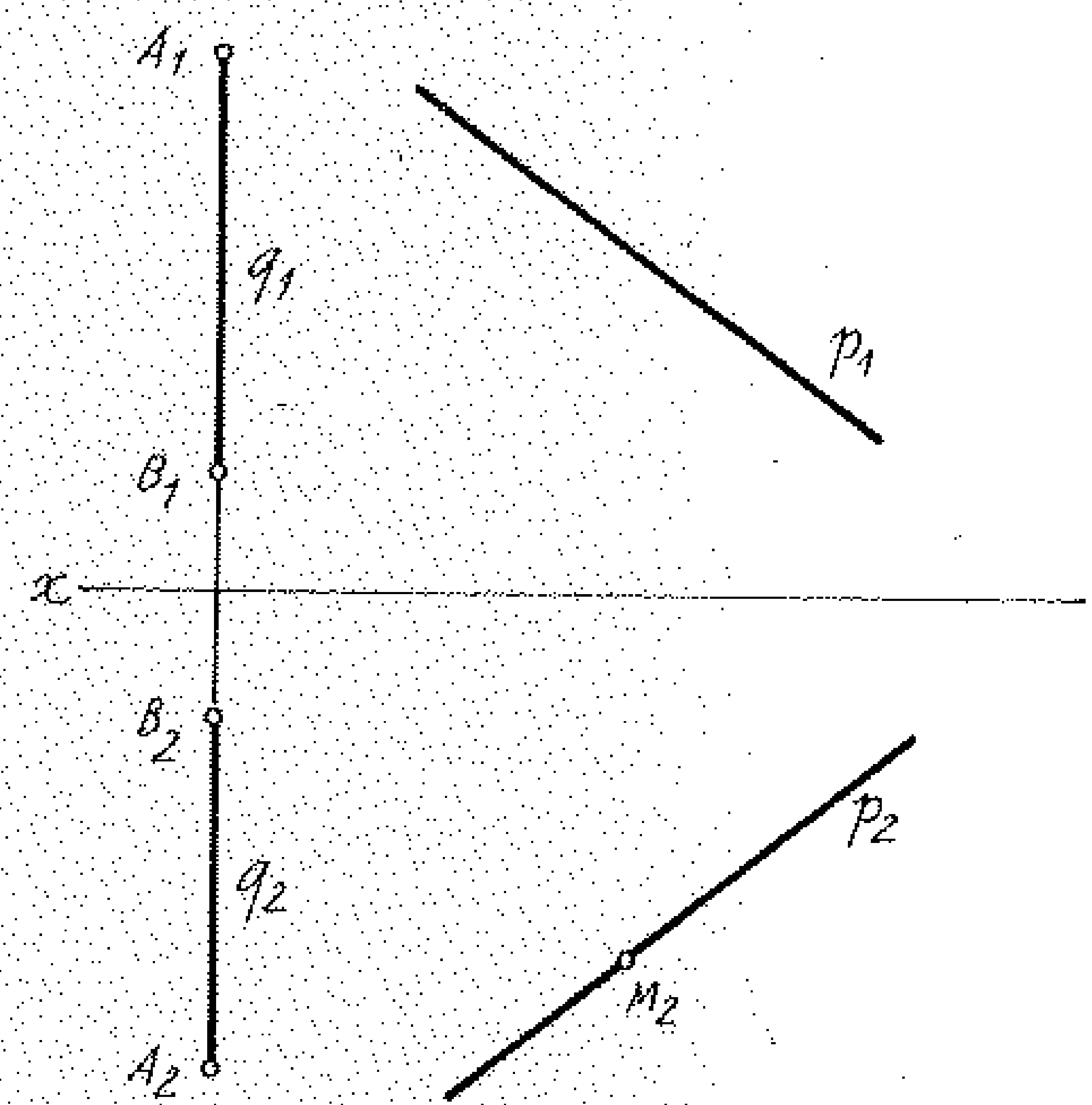
Bài 8 : Trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ tìm gũy tích (tập hợp) của những điểm cách đều hai điểm A và B thuộc ($\mathcal{Q}$) (Hình PL 1 - 8).

Bài 9 : Trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ dựng tam giác cân ABC có đỉnh A thuộc vết bằng của mặt phẳng, cho biết hình chiếu đứng của cạnh đáy BC (Hình PL 1- 9).

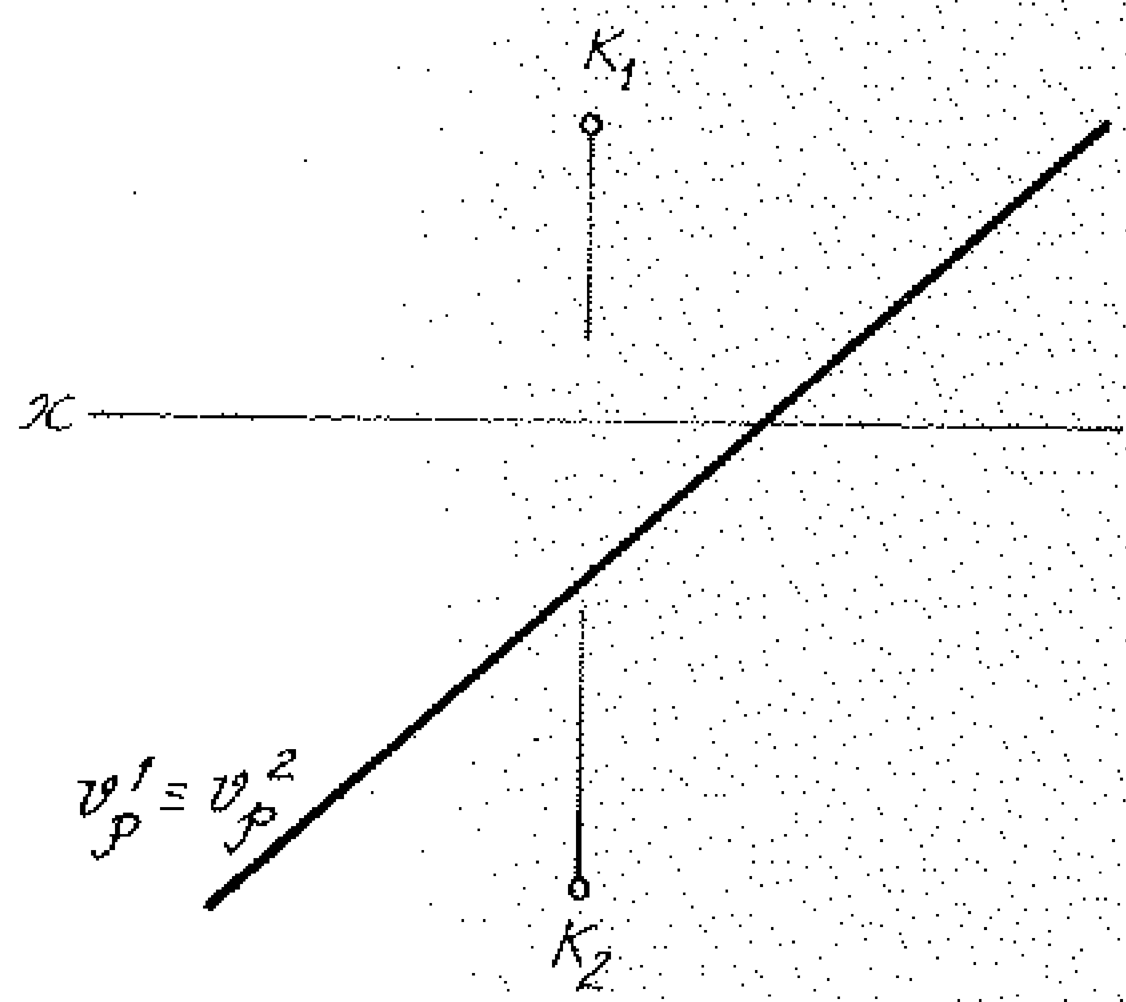
Bài 10: Qua điểm M thuộc đường thẳng p vẽ đường thẳng vuông góc với p và cắt đường thẳng q (A, B), (Hình PL 1- 10).



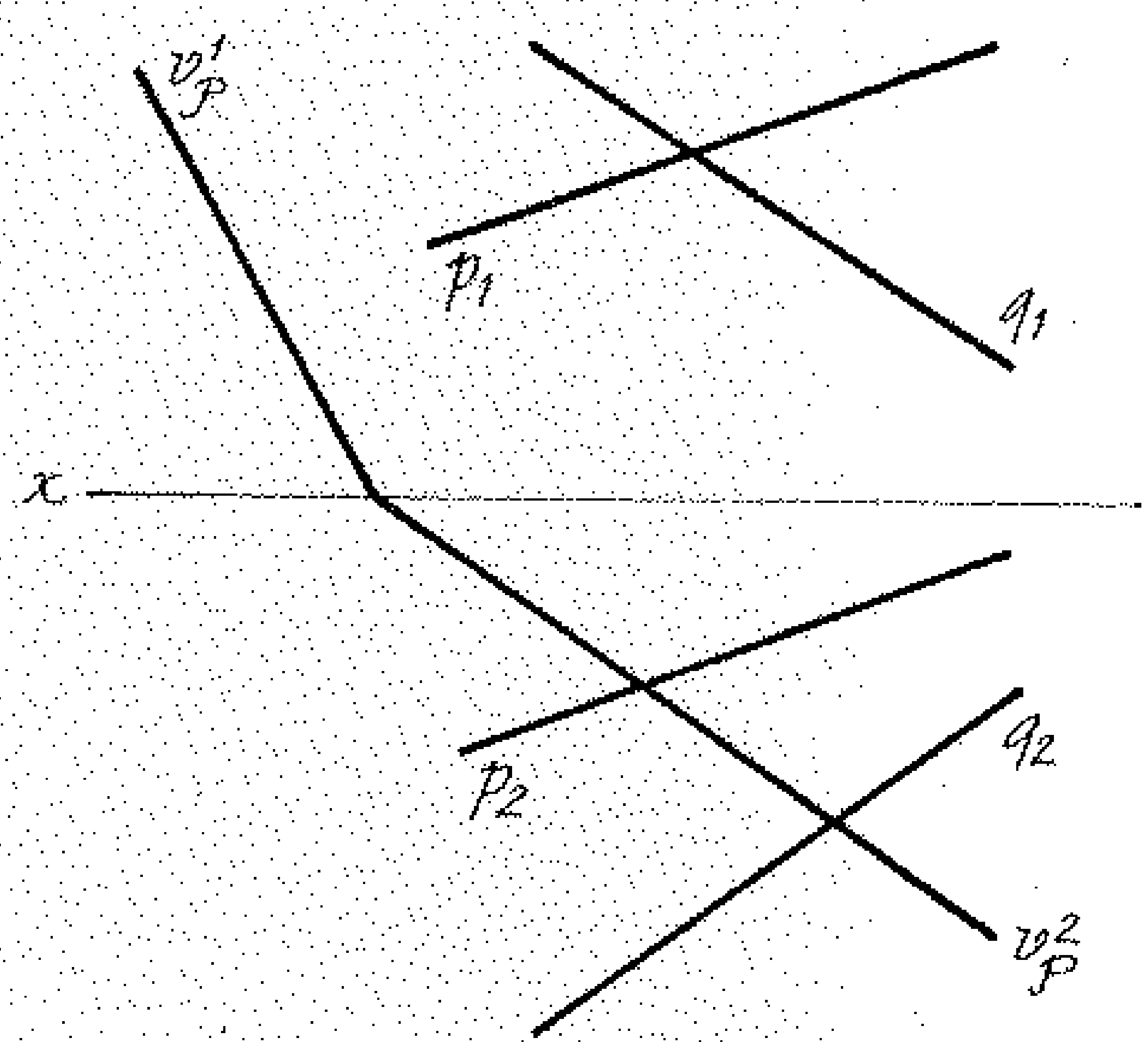
Hình PL 1 - 9



Hình PL 1- 10



Hình PL 1 - 11



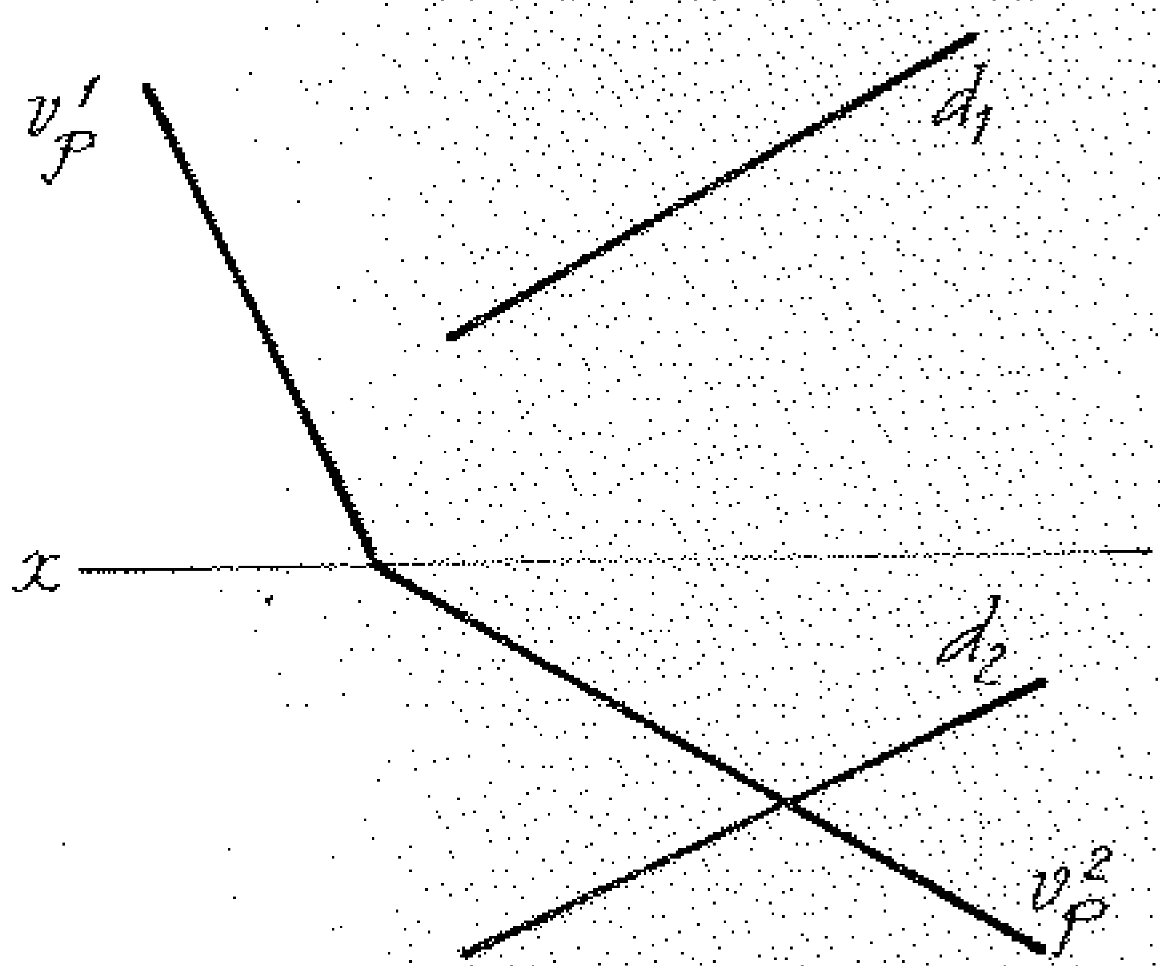
Hình PL 1- 12

Bài 11: Qua điểm K dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{P}$ và nghiêng đều với các mặt phẳng hình chiếu (Hình PL 1 - 11).

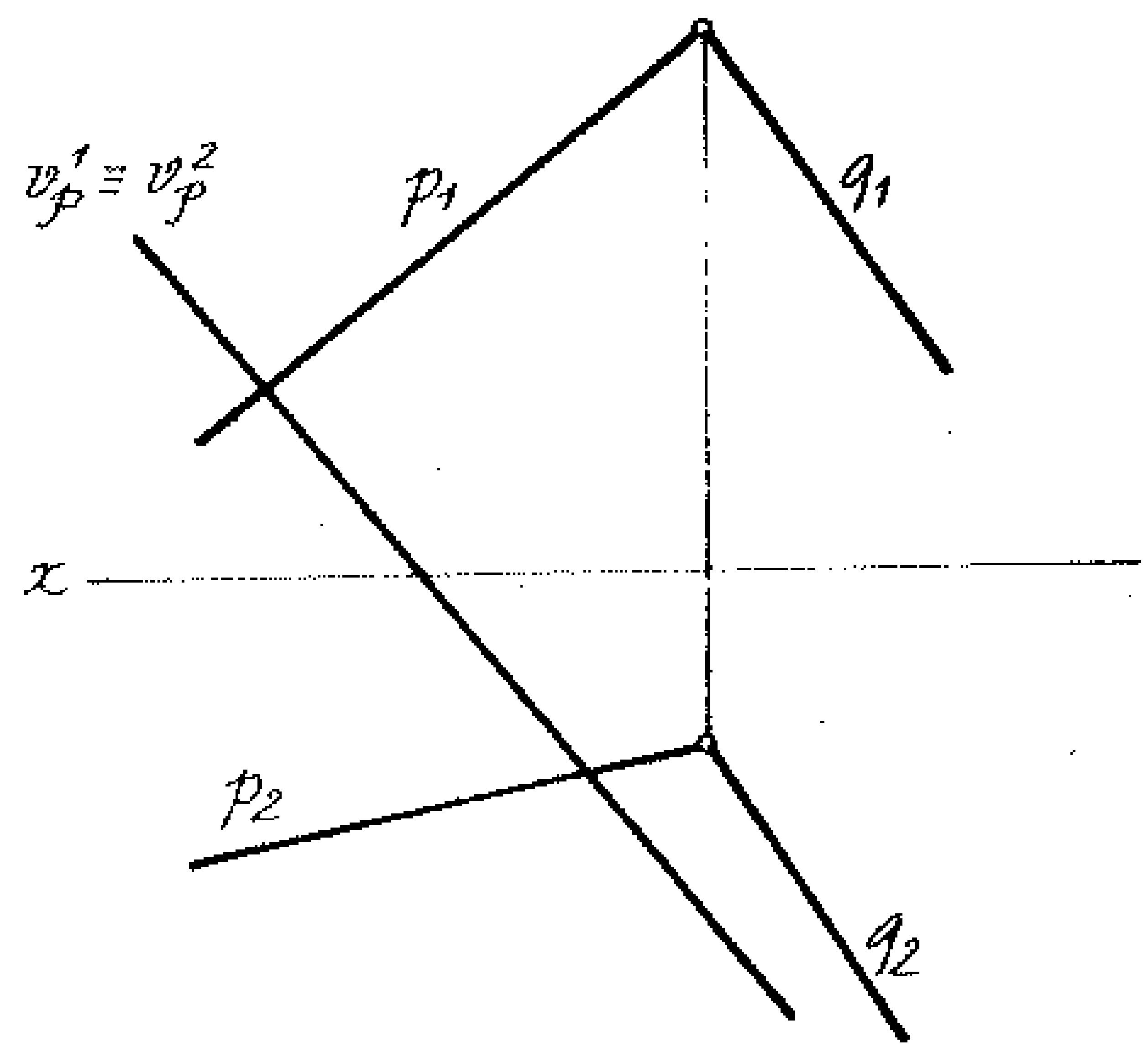
Bài 12: Vẽ đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{P}$ và cắt hai đường thẳng p và q (Hình PL 1 - 12).

Bài 13: Trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ vẽ đường thẳng cắt và vuông góc với **đường thẳng d** (Hình PL 1 - 13).

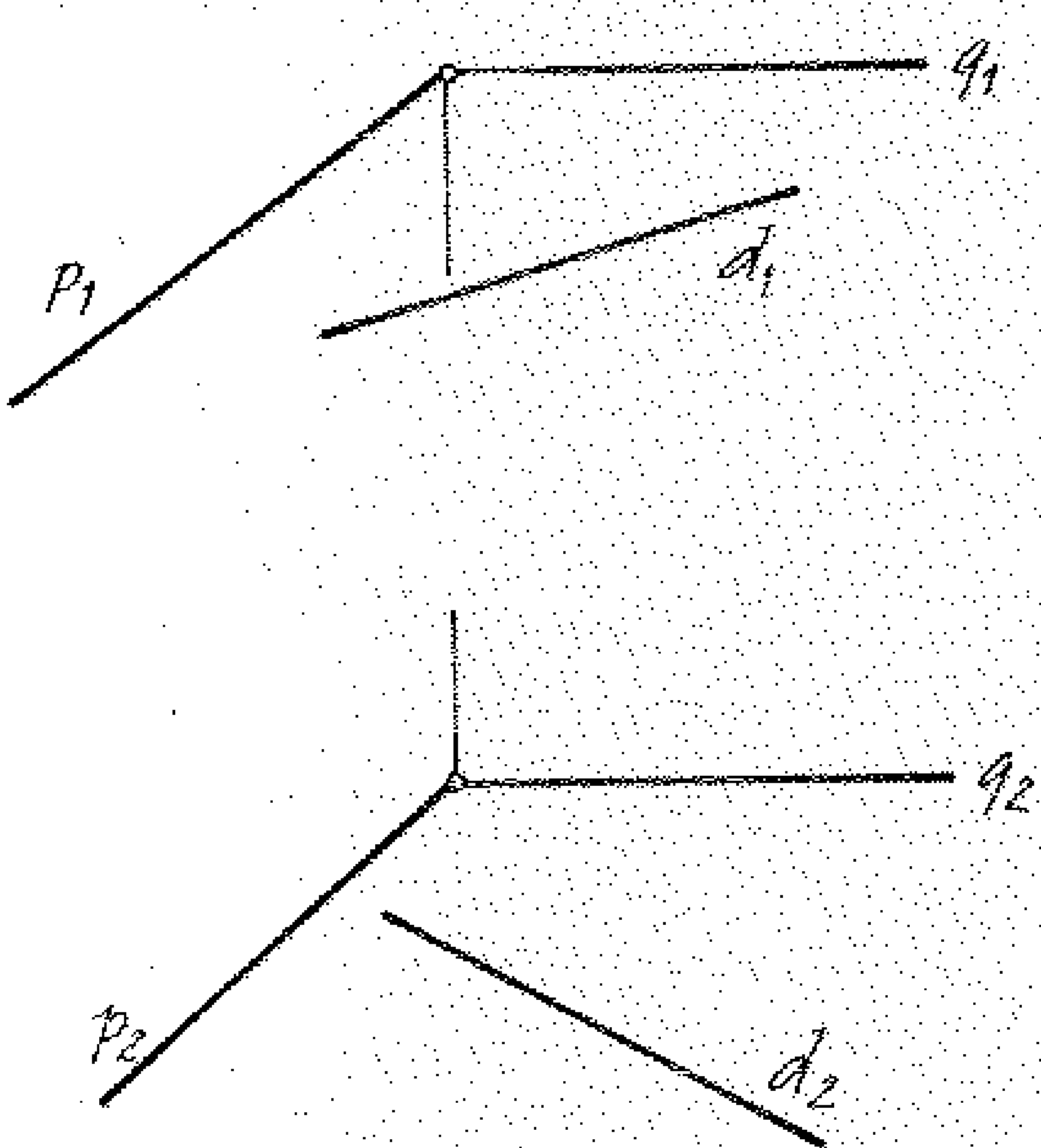
Bài 14: Trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ tìm quỹ tích (tập hợp) **những điểm cách đều hai đường** thẳng cát nhau p và q (Hình PL 1 - 14).



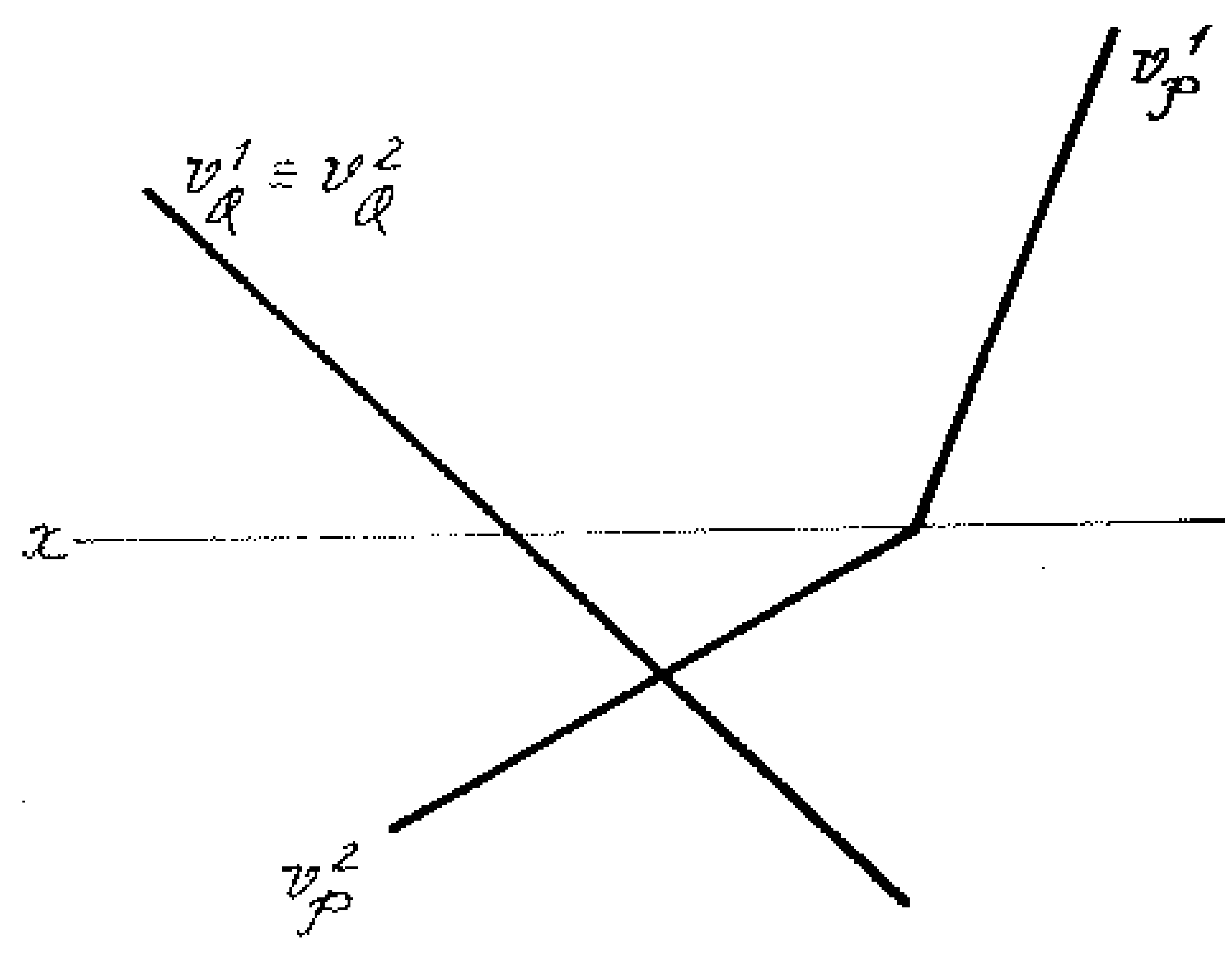
Hình PL 1 - 13



Hình PL 1- 14



Hình PL 1 - 15



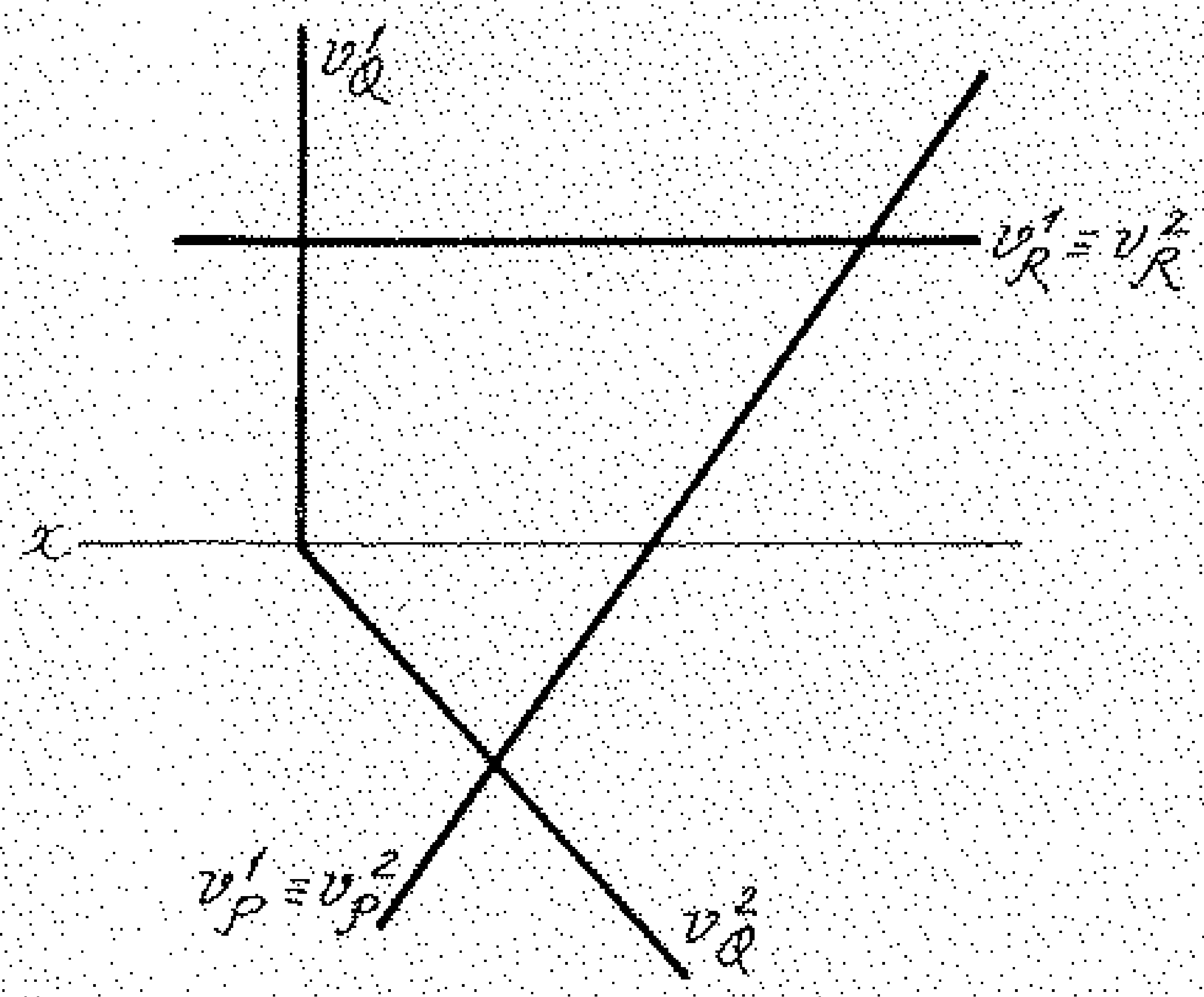
Hình PL 1- 16

Bài 15: Tìm trên đường thẳng d điểm cách đều hai đường thẳng cắt nhau **p và q** (Hình PL1 - 15).

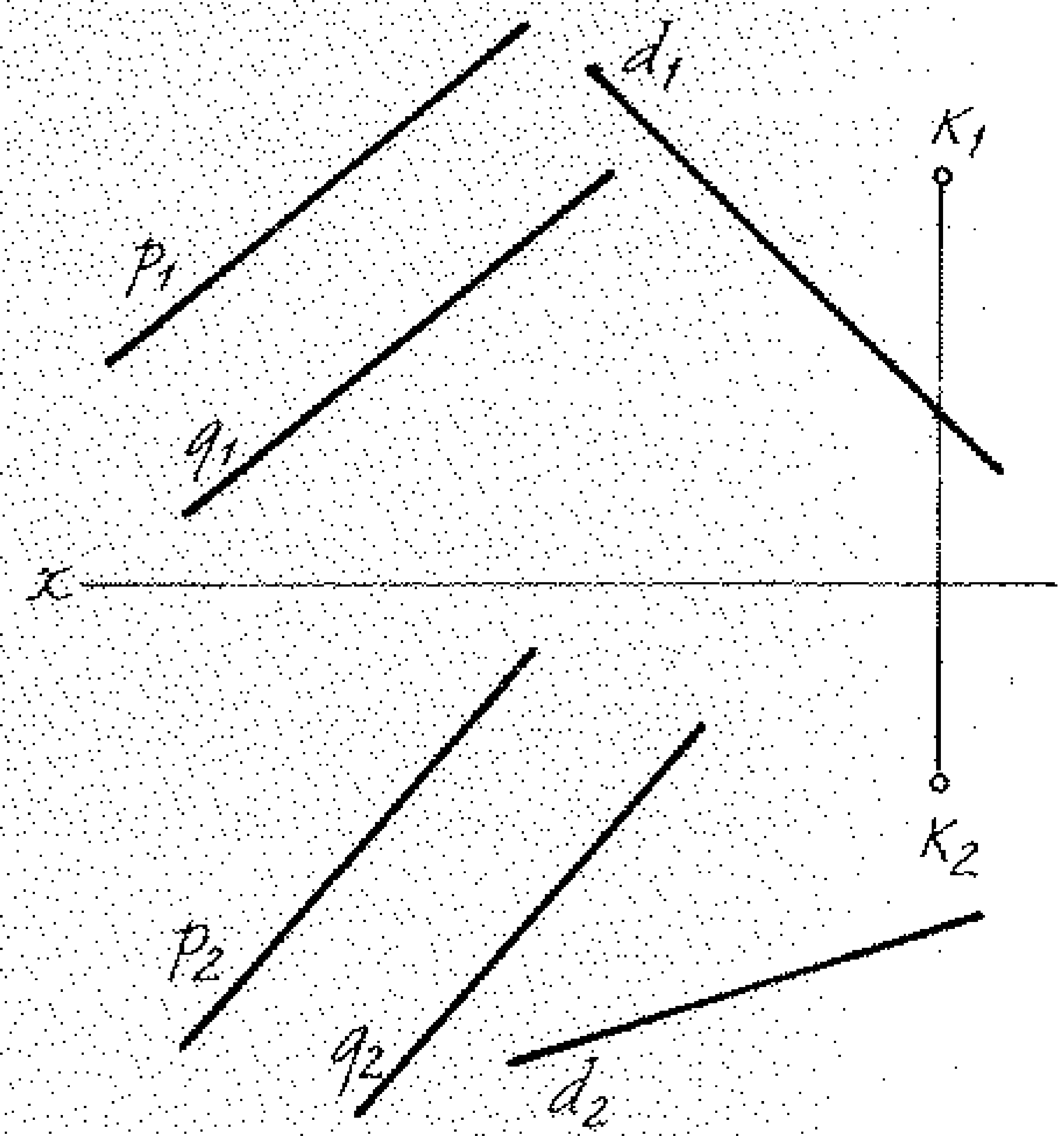
Bài 16: Tìm trong mặt phẳng $\mathcal{Q}$ quỹ tích (tập hợp) **những điểm cách đều hai vết** của mặt phẳng $\mathcal{P}$ (Hình PL 1 - 16).

Bài 17: Tìm trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ quỹ tích (tập hợp) **những điểm cách đều hai mặt** phẳng $\mathcal{Q}$ và $\mathcal{R}$ (Hình PL 1 - 17).

Bài 18: Qua điểm K dựng một mặt phẳng song song với **đường thẳng d sao cho** hình chiếu thẳng góc lên mặt phẳng đó của hai đường thẳng song song **p và q trùng** nhau (Hình PL 1 - 18).



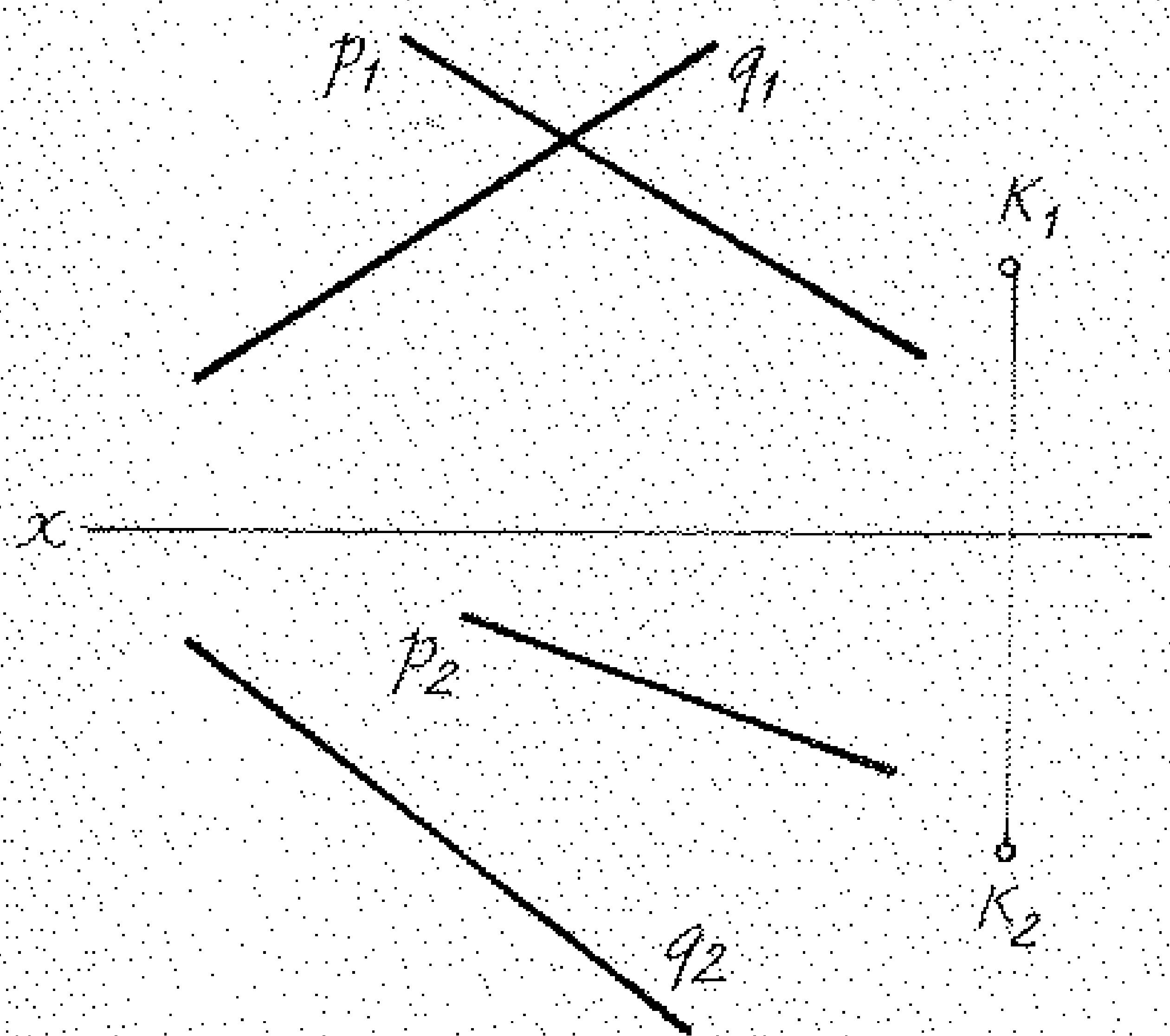
Hình PL 1 – 17



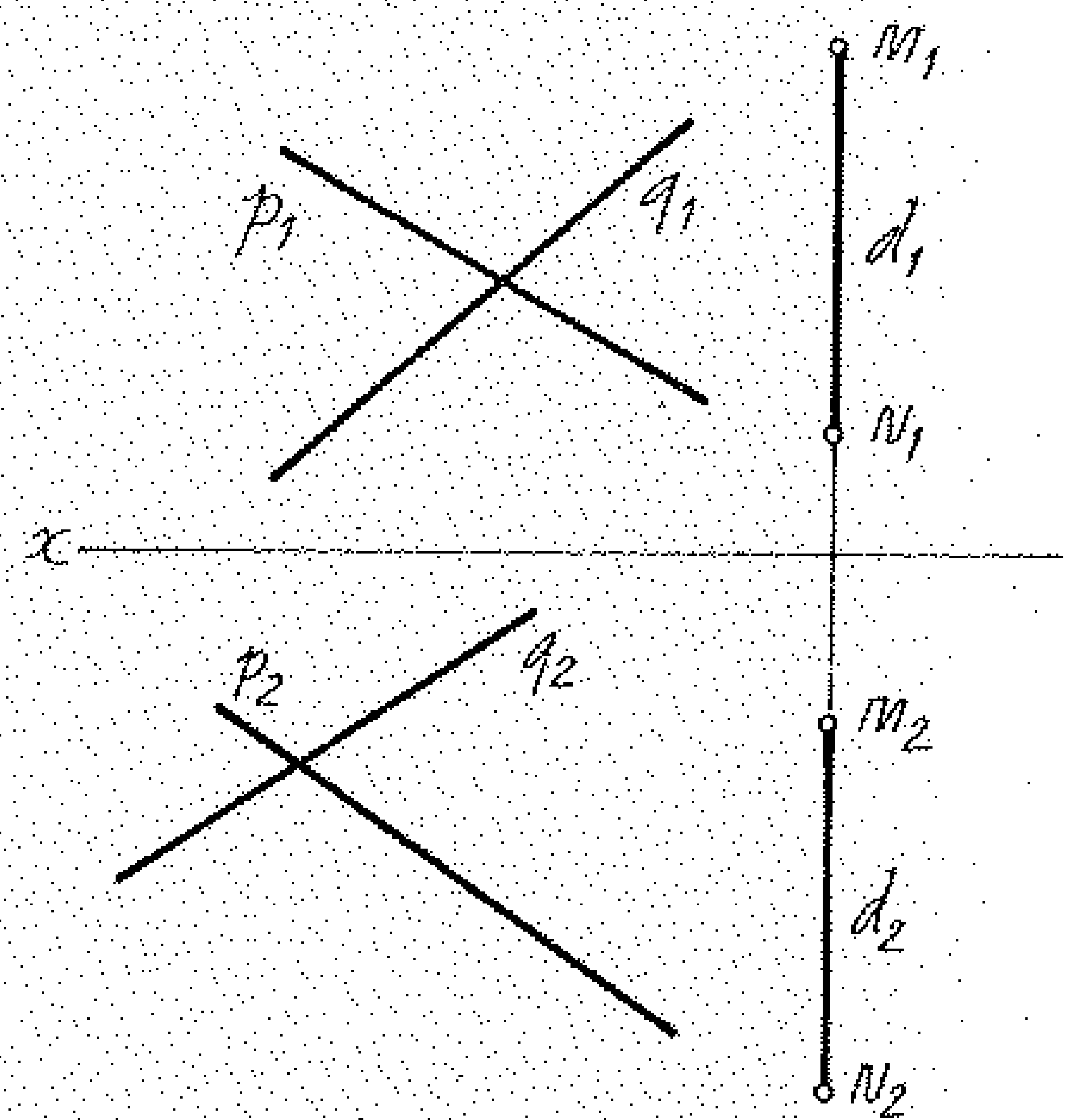
Hình PL 1 – 18

Bài 19 : Qua điểm K dựng một mặt phẳng nghiêng đều với các mặt phẳng hình chiếu sao cho hình chiếu thẳng góc lên mặt phẳng đó của hai đường thẳng bất kì p và q là hai đường thẳng song song (Hình PL 1 – 19).

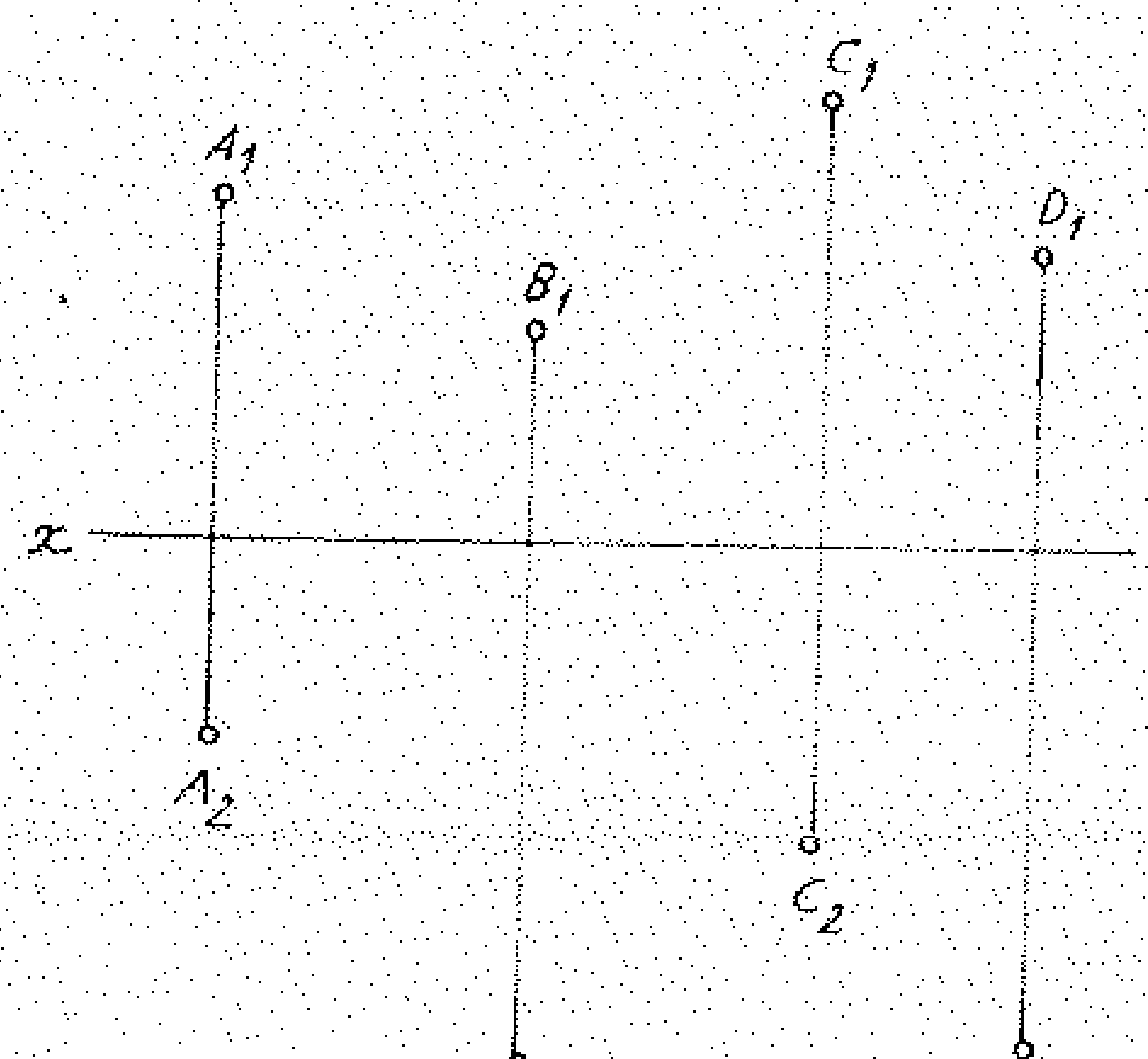
Bài 20 : Qua đường thẳng d (M, N) dựng một mặt phẳng sao cho hình chiếu thẳng góc của hai đường thẳng bất kì p và q lên mặt phẳng đó là hai đường thẳng song song (Hình PL 1 – 20).



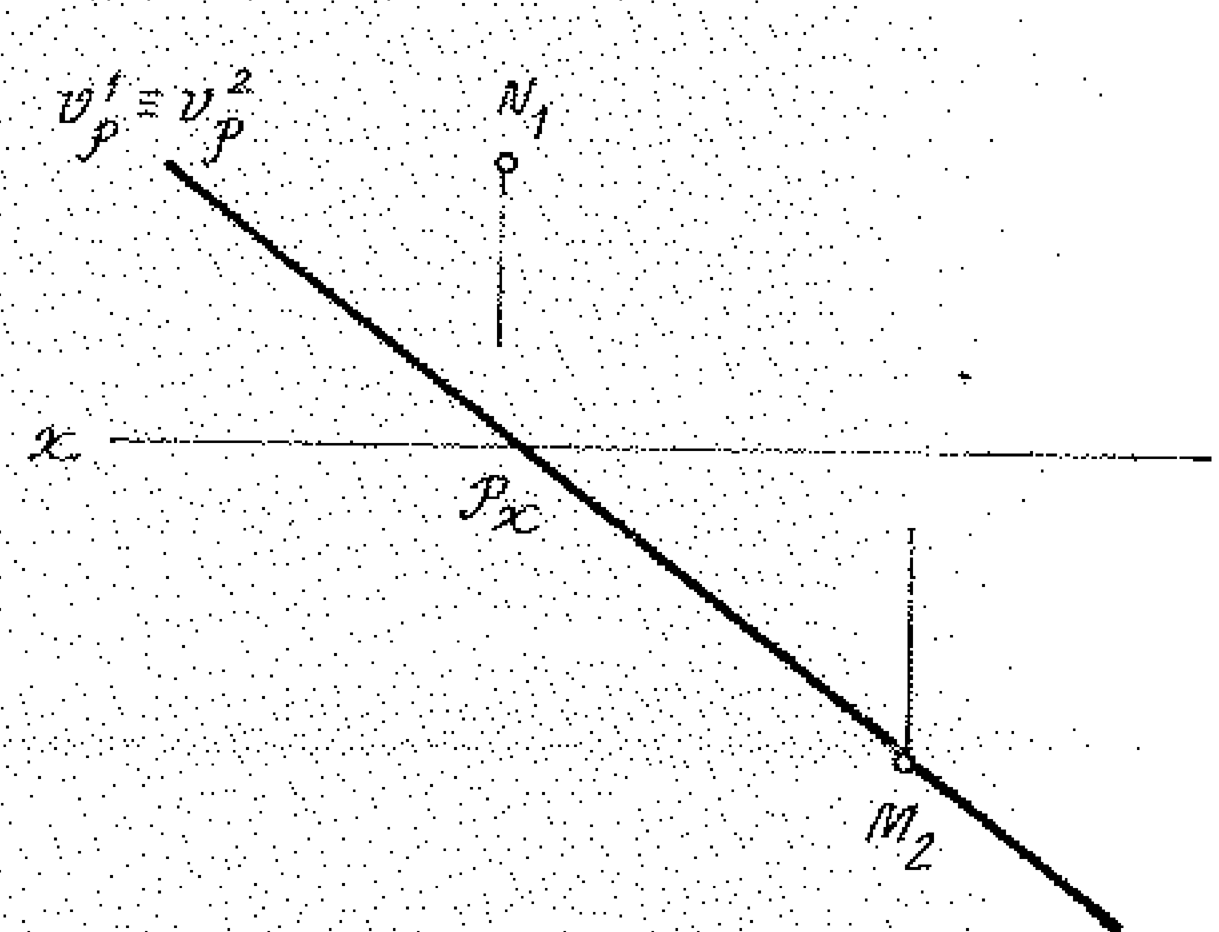
Hình PL 1 – 19



Hình PL 1 – 20



Hình PL 1 – 21



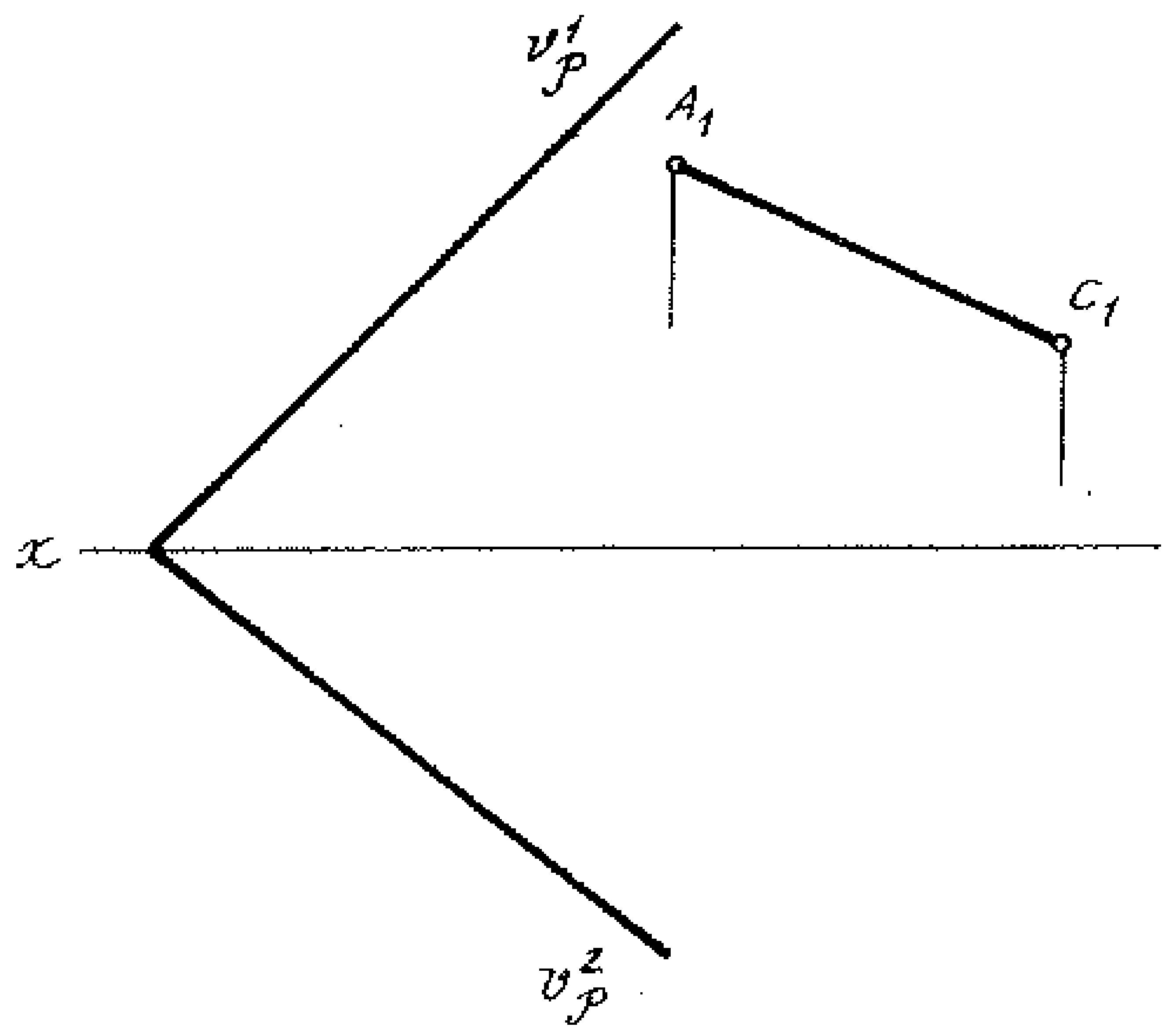
Hình PL 1 – 22

Bài 21: Tìm điểm cách đều bốn điểm bất kì A, B, C và D (Hình PL 1 - 21)

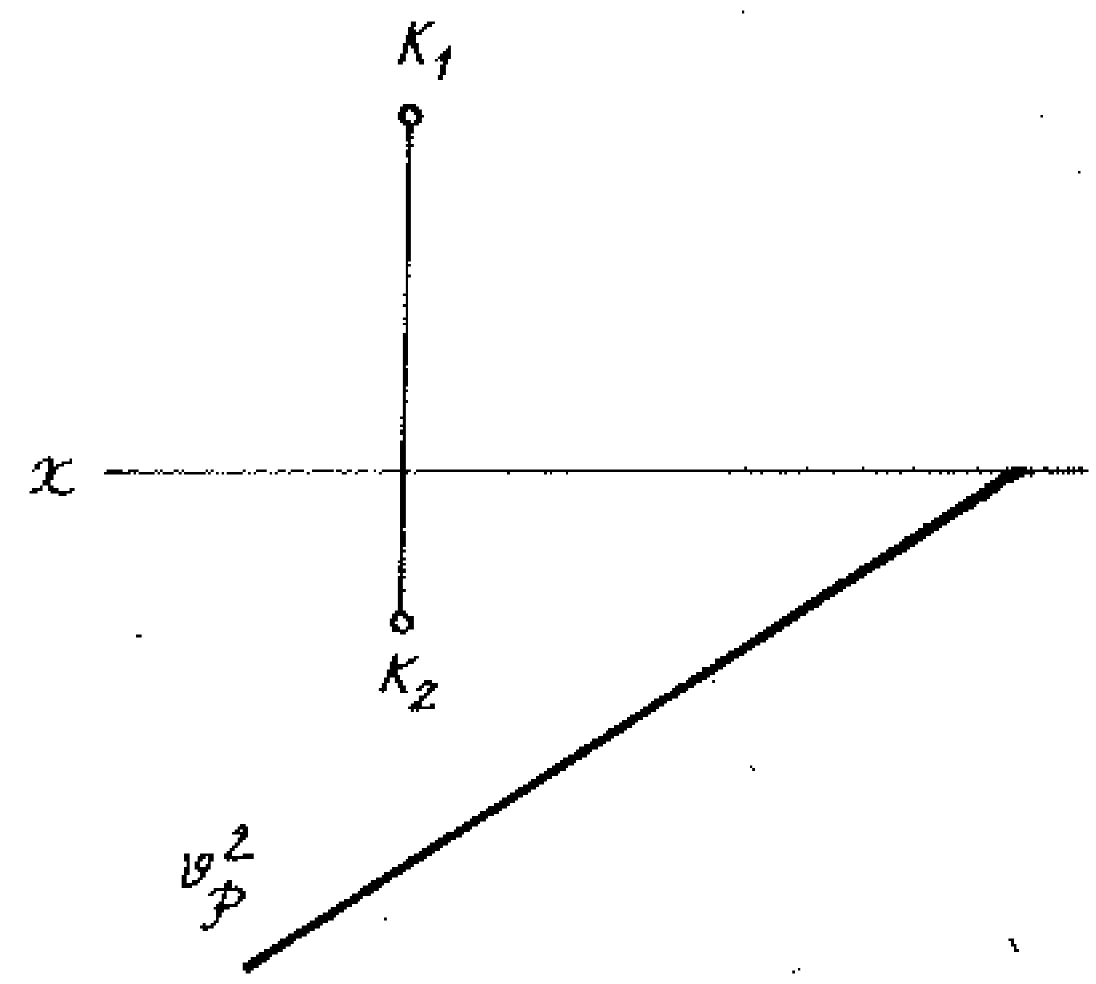
Bài 22 : Trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ tìm điểm cách đều điểm $\mathcal{P}_x$ - điểm đồng quy của hai vết của mặt phẳng $\mathcal{P}$ và hai vết của đường thẳng d(M, N) thuộc ($\mathcal{P}$) (Hình PL 1 - 22).

Bài 23 : Trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ hãy dựng tam giác vuông ABC có đỉnh góc vuông B thuộc vết bằng của mặt phẳng cho biết hình chiếu đứng của cạnh huyền AC (Hình PL 1 - 23).

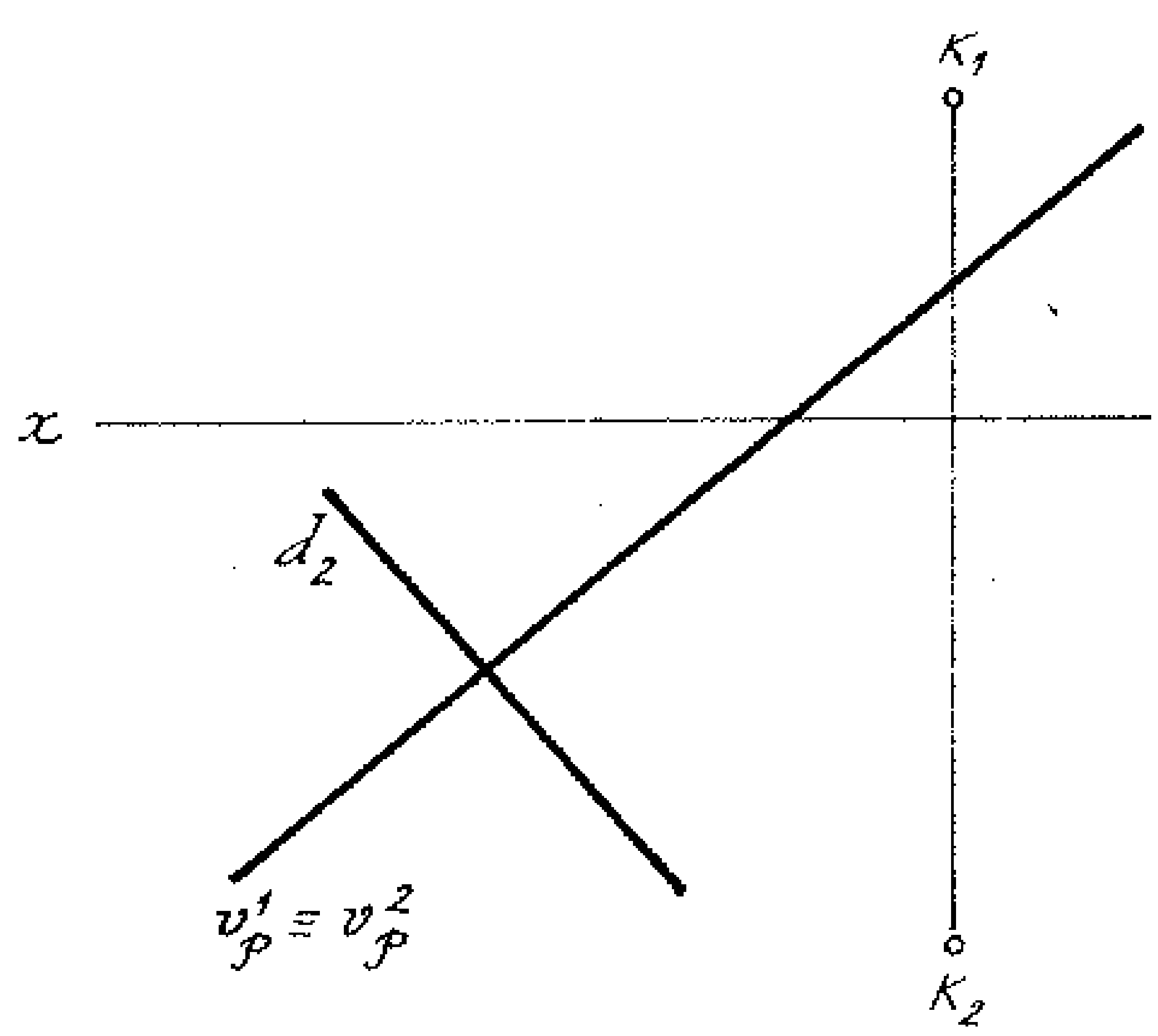
Bài 24 : Qua điểm K thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$ vẽ đường thẳng thuộc ($\mathcal{P}$) và nghiêng đều với hai vết của mặt phẳng đó (Hình PL 1 - 24).



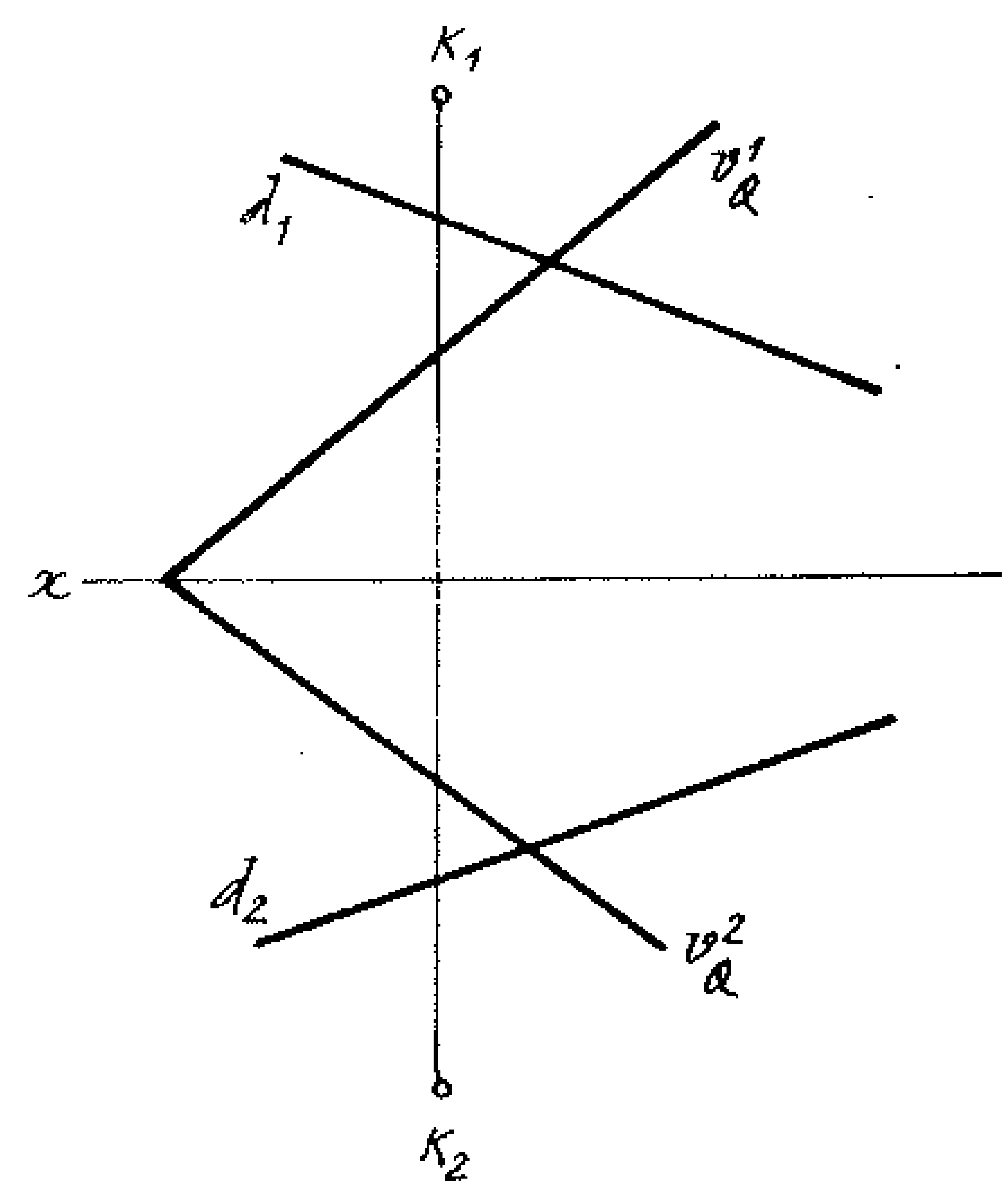
Hình PL 1 - 23



Hình PL 1 - 24



Hình PL 1 - 25



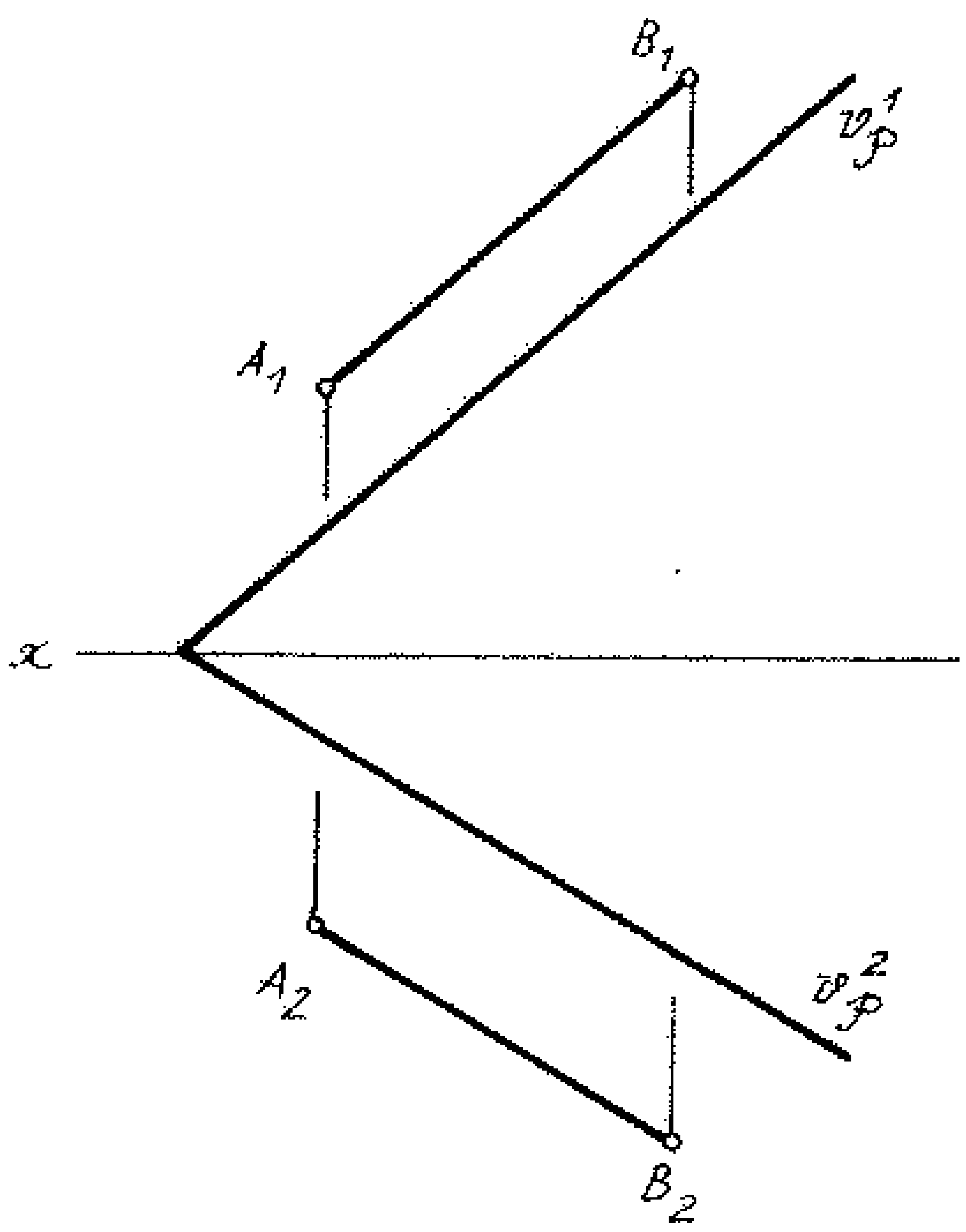
Hình PL 1 - 26

Bài 25. Tìm trên đường thẳng d thuộc mặt phẳng $\mathcal{P}$ một điểm cách điểm K nằm ngoài ($\mathcal{P}$) một đoạn bằng l cho trước (Hình PL 1 - 25).

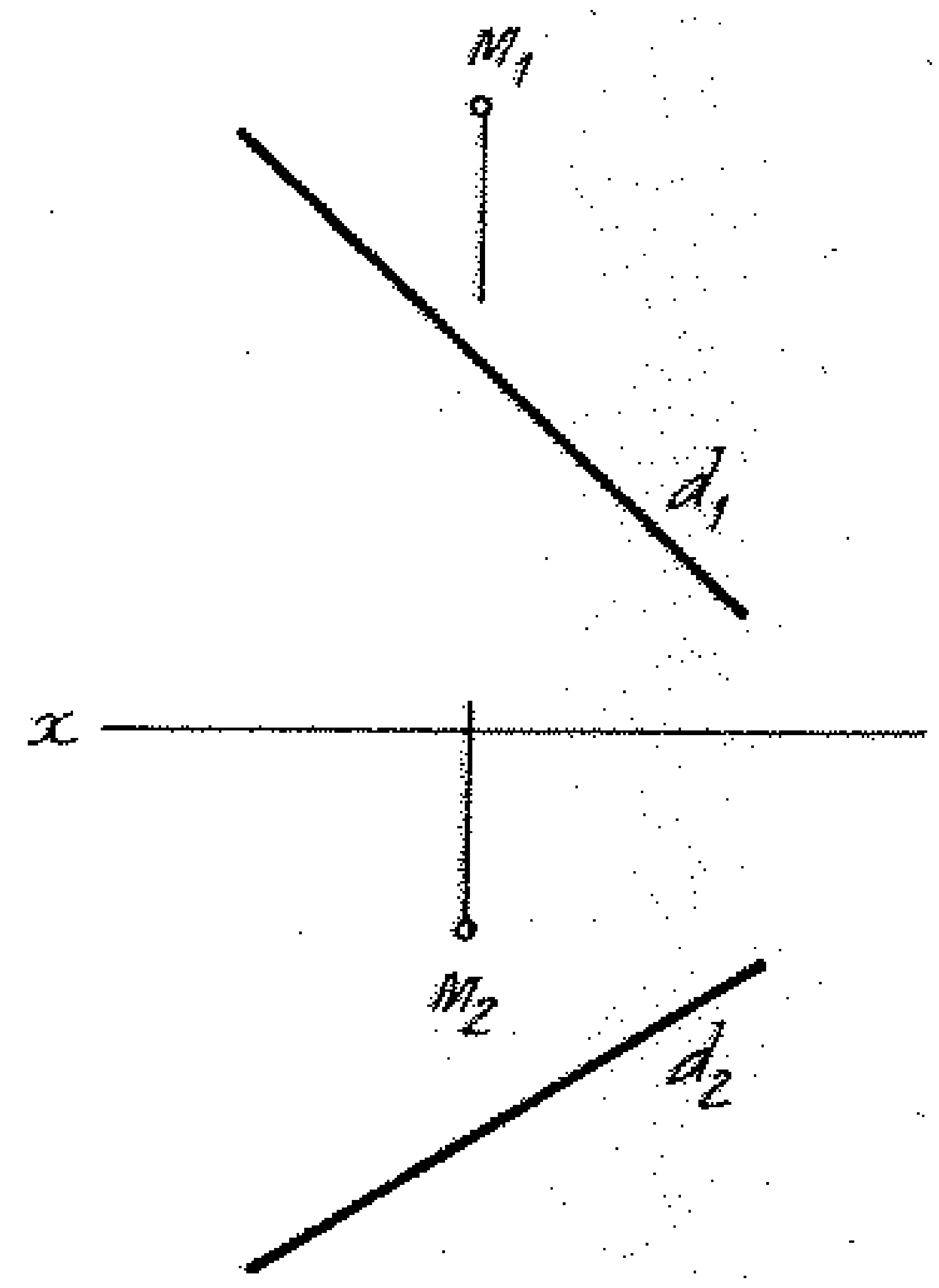
Bài 26. Qua điểm K vẽ đường thẳng cắt đường thẳng d và mặt phẳng $\mathcal{Q}$ lần lượt tại A và B sao cho MA = KB (Hình PL 1 - 26).

Bài 27 : Dựng tam giác đều ABC có đỉnh C nằm trên mặt phẳng $\mathcal{P}$(Hình PL 1 - 27).

Bài 28 : Vẽ quỹ đạo chuyển động của điểm M quay xung quanh đường thẳng d (Hình PL 1 – 28).



Hình PL 1 – 27



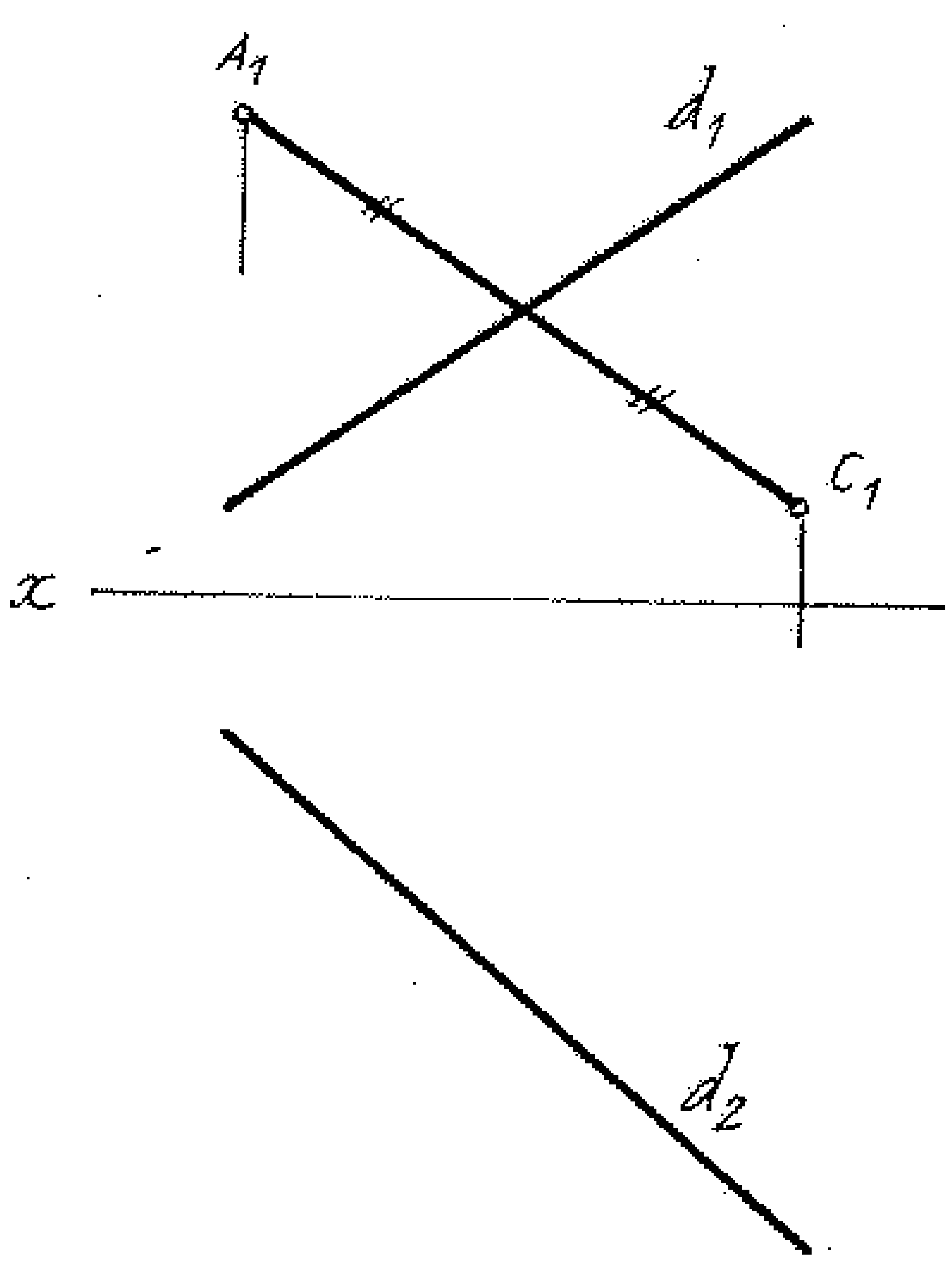
Hình Pl 1 – 28

Bài 29 : Vẽ các hình chiếu của một lăng trụ thẳng có chiều cao là một đoạn thẳng h cho trước biết rằng đáy của nó là hình vuông ABCD có đường chéo BD thuộc đường thẳng d (Hình PL 1 – 29).

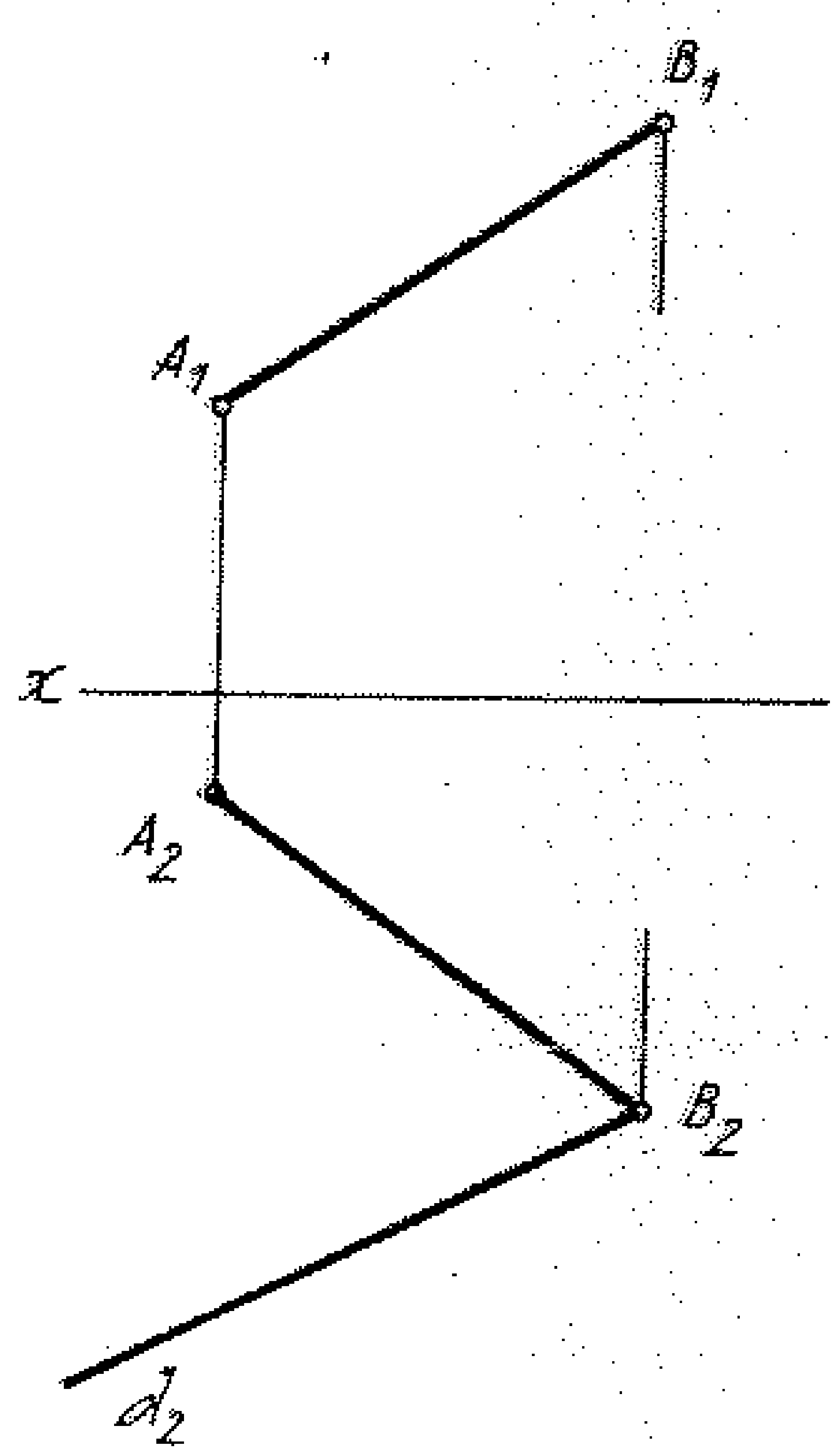
Bài 30 : Vẽ các hình chiếu của hình lập phương có đáy là hình vuông ABDC mà cạnh BC của nó nằm trên đường thẳng d. Cho biết hình chiếu bằng d_2 của d (Hình PL1-30).

Bài 31 : Vẽ các hình chiếu của mặt chóp SABC có chiều cao là h biết rằng đáy ABC là một tam giác cân có đỉnh A thuộc đường thẳng d và chân đường cao hạ từ đỉnh S trùng với trọng tâm của tam giác đáy (Hình PL 1 – 31)

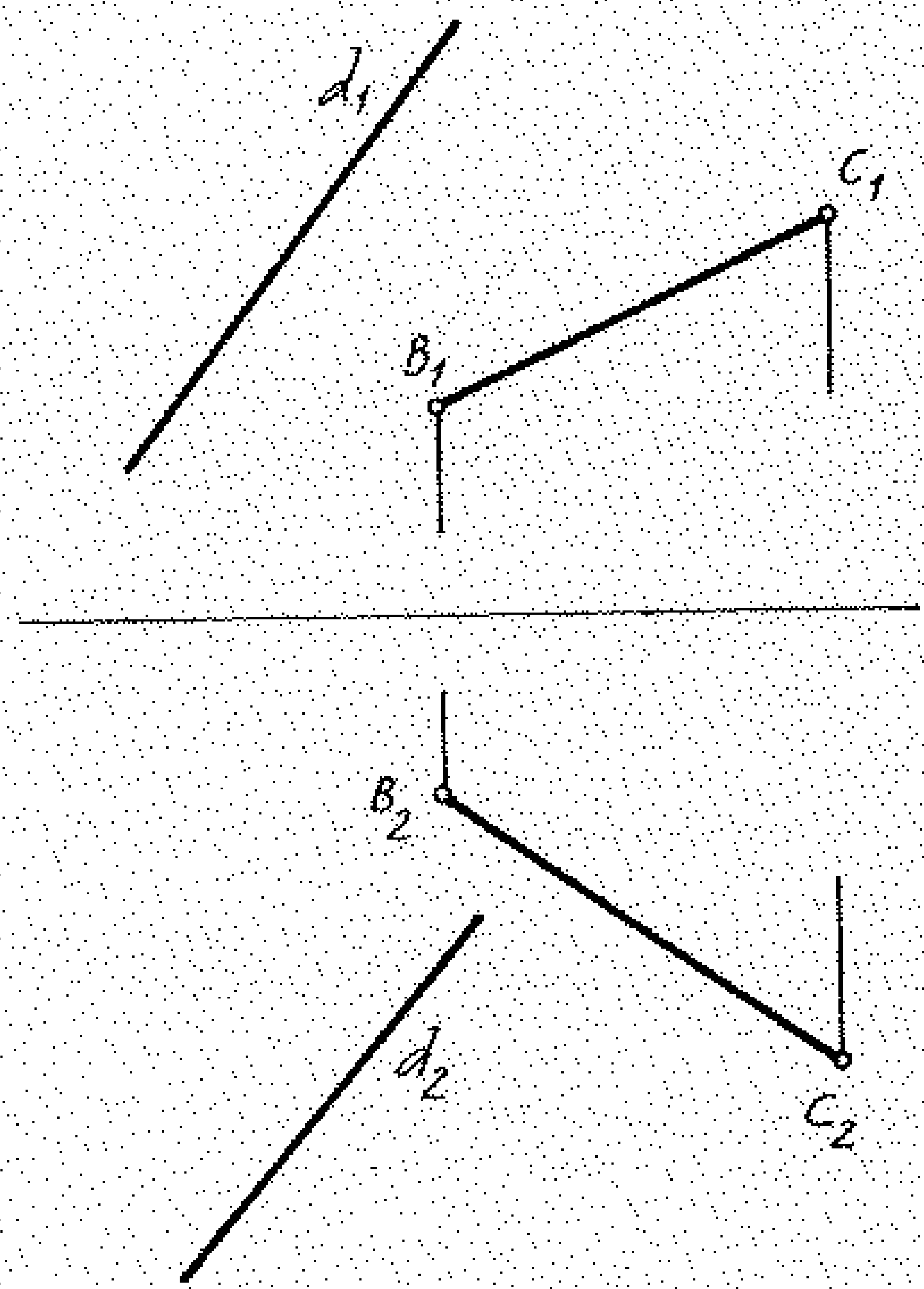
Bài 32 : Vẽ các hình chiếu của mặt nón tròn xoay có chiều cao là h và đáy là đường tròn bán kính r nằm trong mặt phẳng $\mathcal{P}$. Cho biết vị trí chập lên mặt phẳng hình chiếu bằng của tâm đường tròn đáy là O_0 (Hình PL 1 – 32).



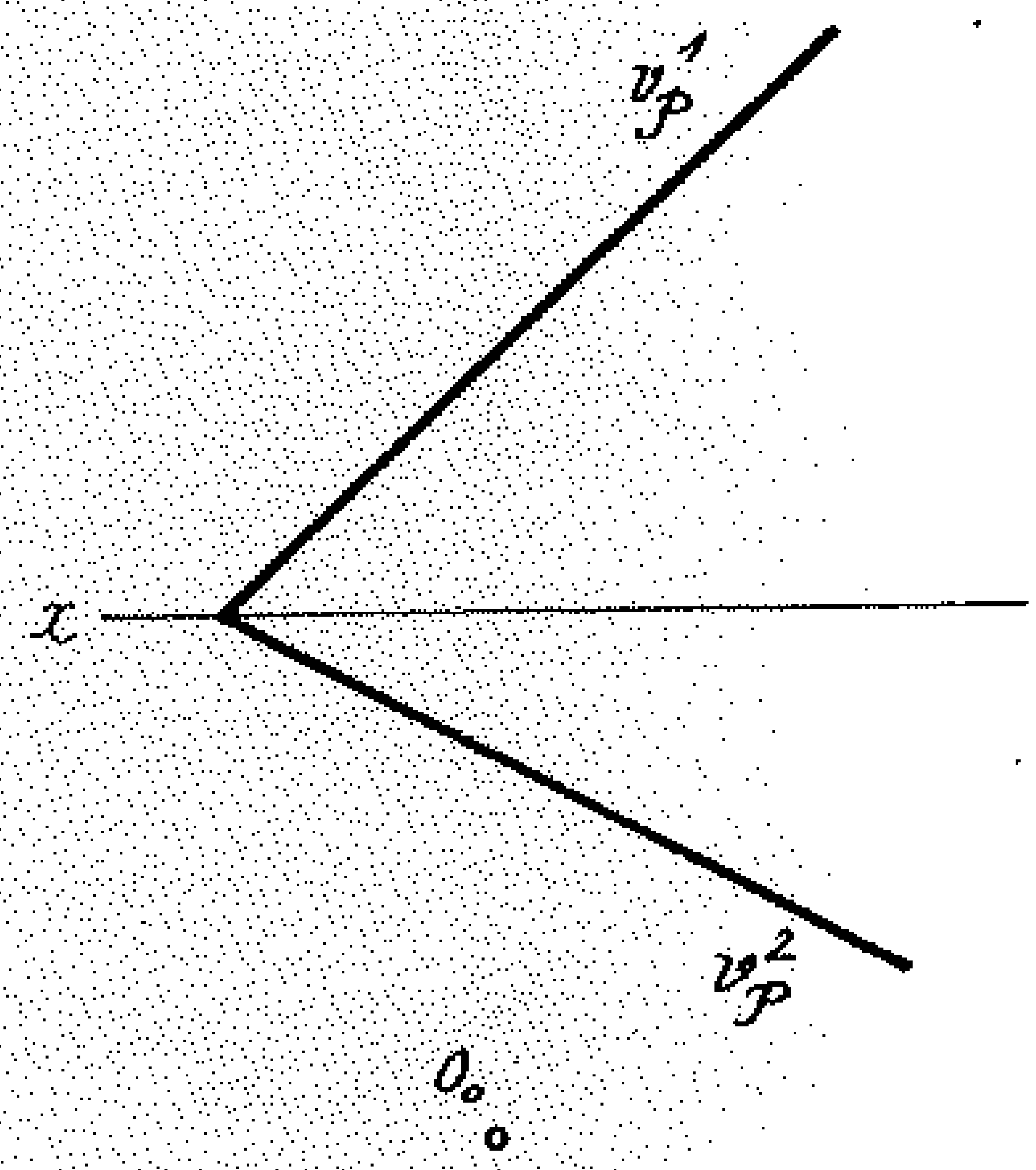
Hình PL 1 – 29



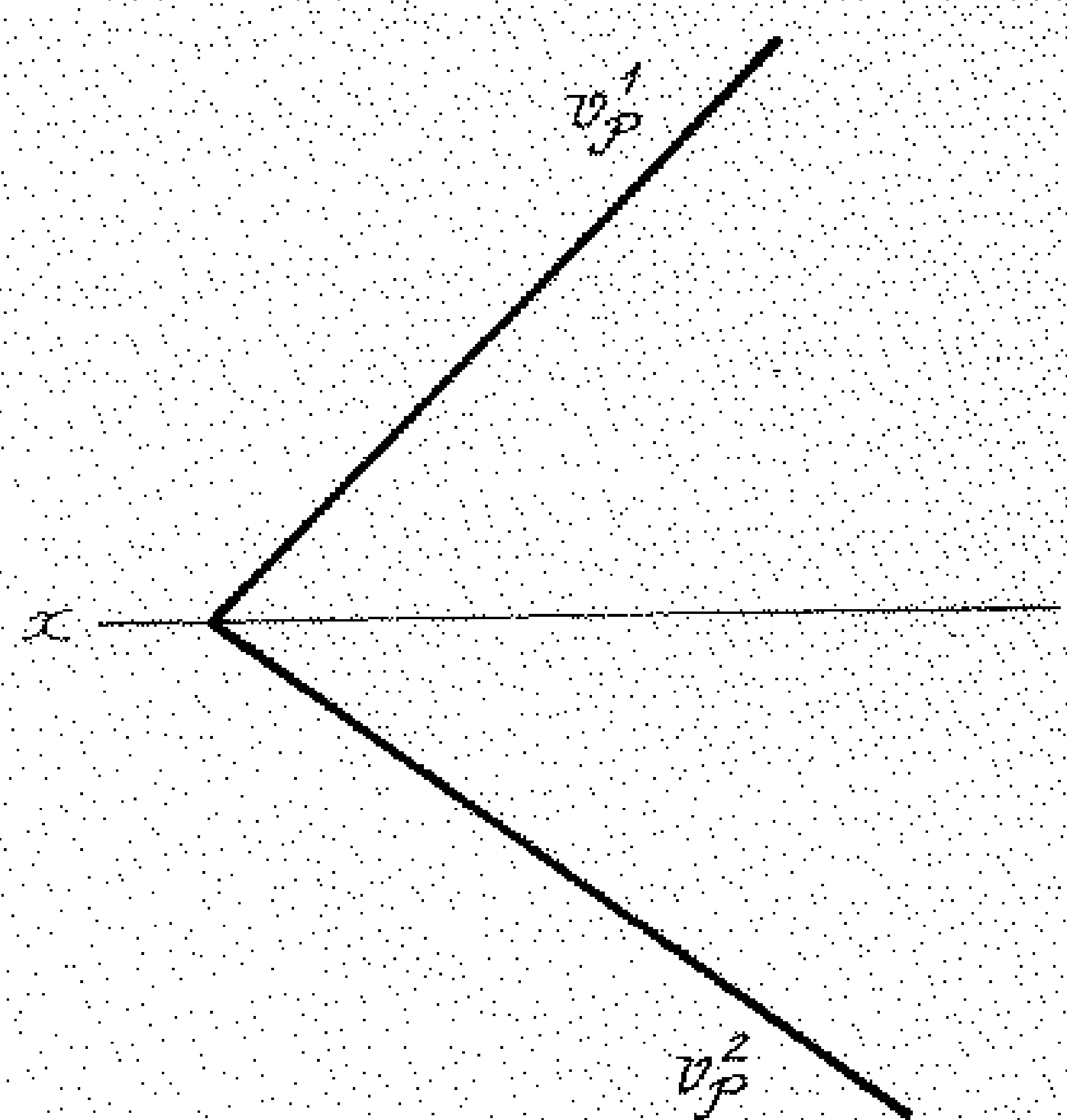
Hình PL 1 – 30



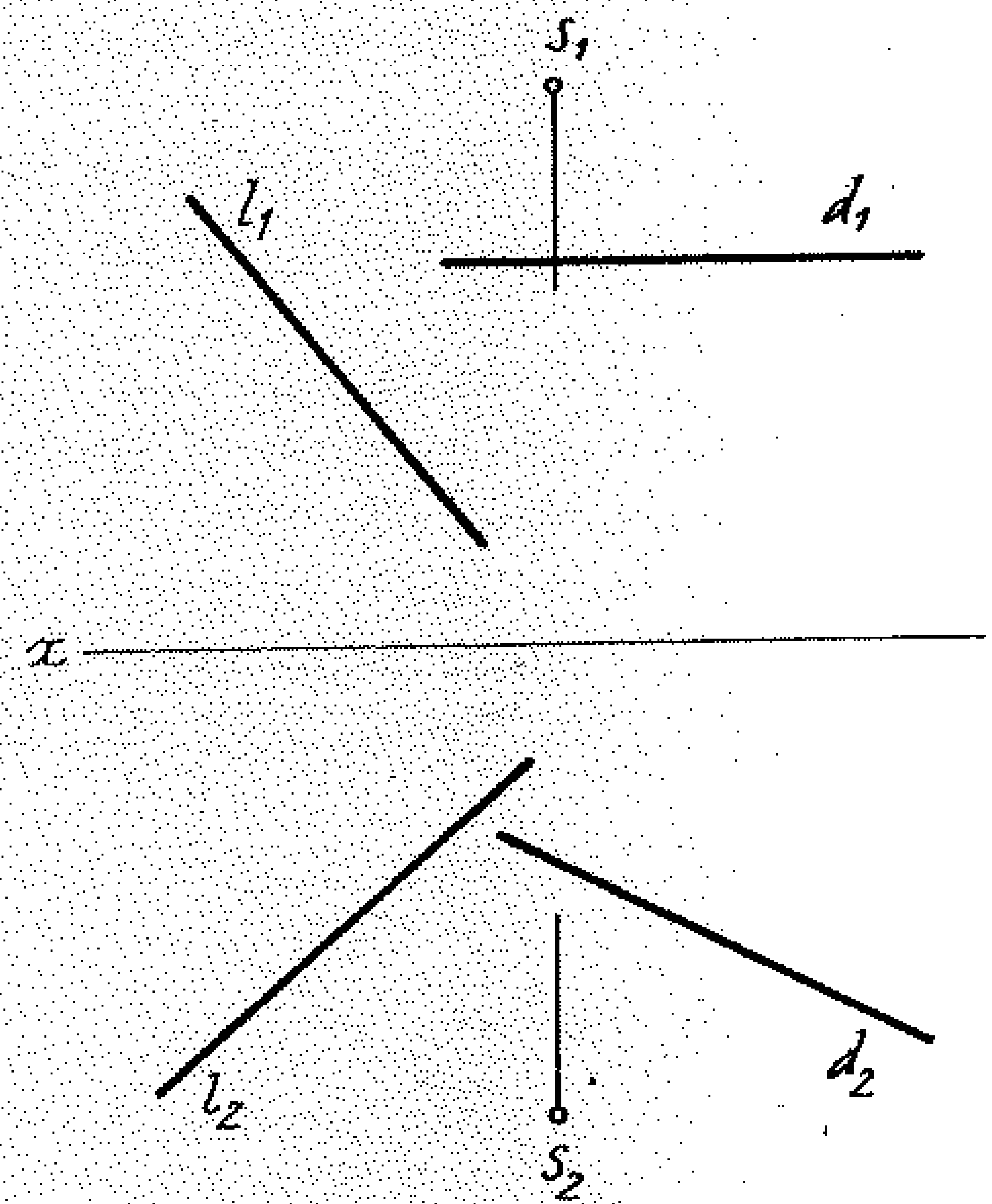
Hình PL 1 – 31



Hình PL 1 – 32



Hình PL 1 – 33



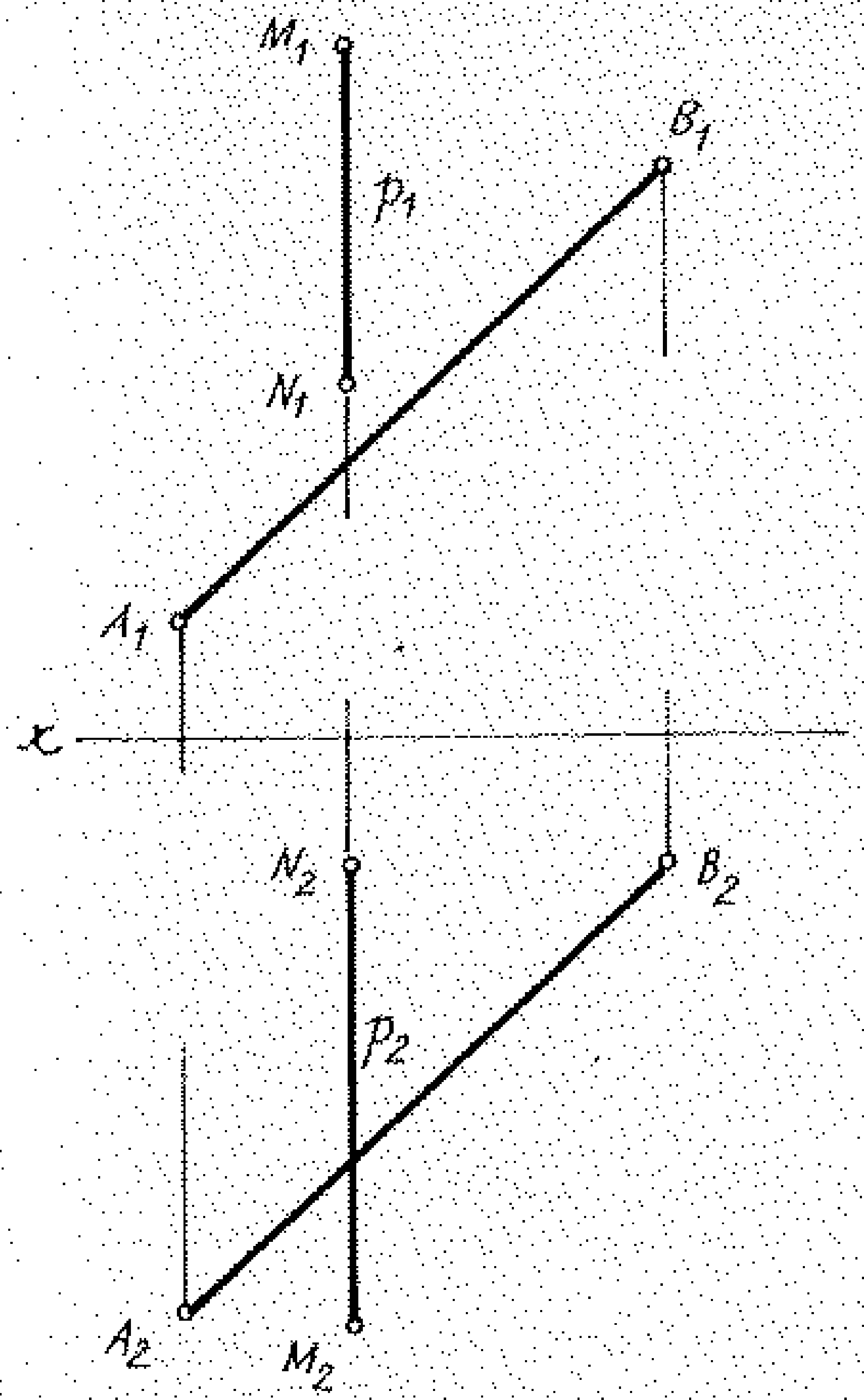
Hình PL 1 – 34

Bài 33 : Vẽ trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ đường thẳng cắt trục hình chiếu x dưới một góc 30° (Hình PL 1 – 33).

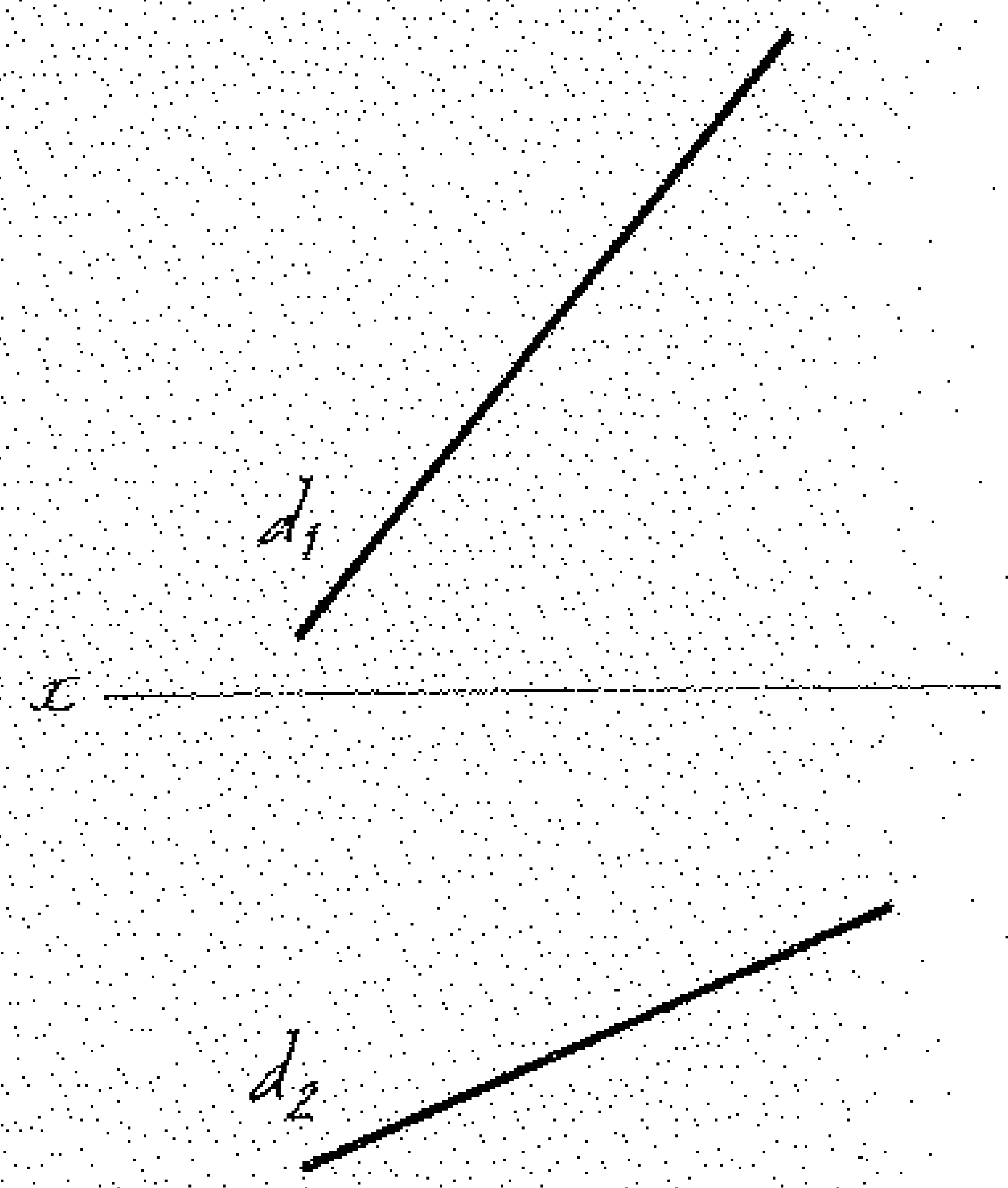
Bài 34 : Qua điểm S vẽ một đường thẳng cắt đường thẳng d và tạo một góc 30° với đường thẳng l (Hình PL 1 – 34).

Bài 35 : Dựng tam giác vuông ABC có đỉnh góc vuông C thuộc đường thẳng p (M, N), (Hình PL 1 – 35).

Bài 36 : Qua đường thẳng d dựng một mặt phẳng nghiêng với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc 60° (Hình PL 1 – 36).



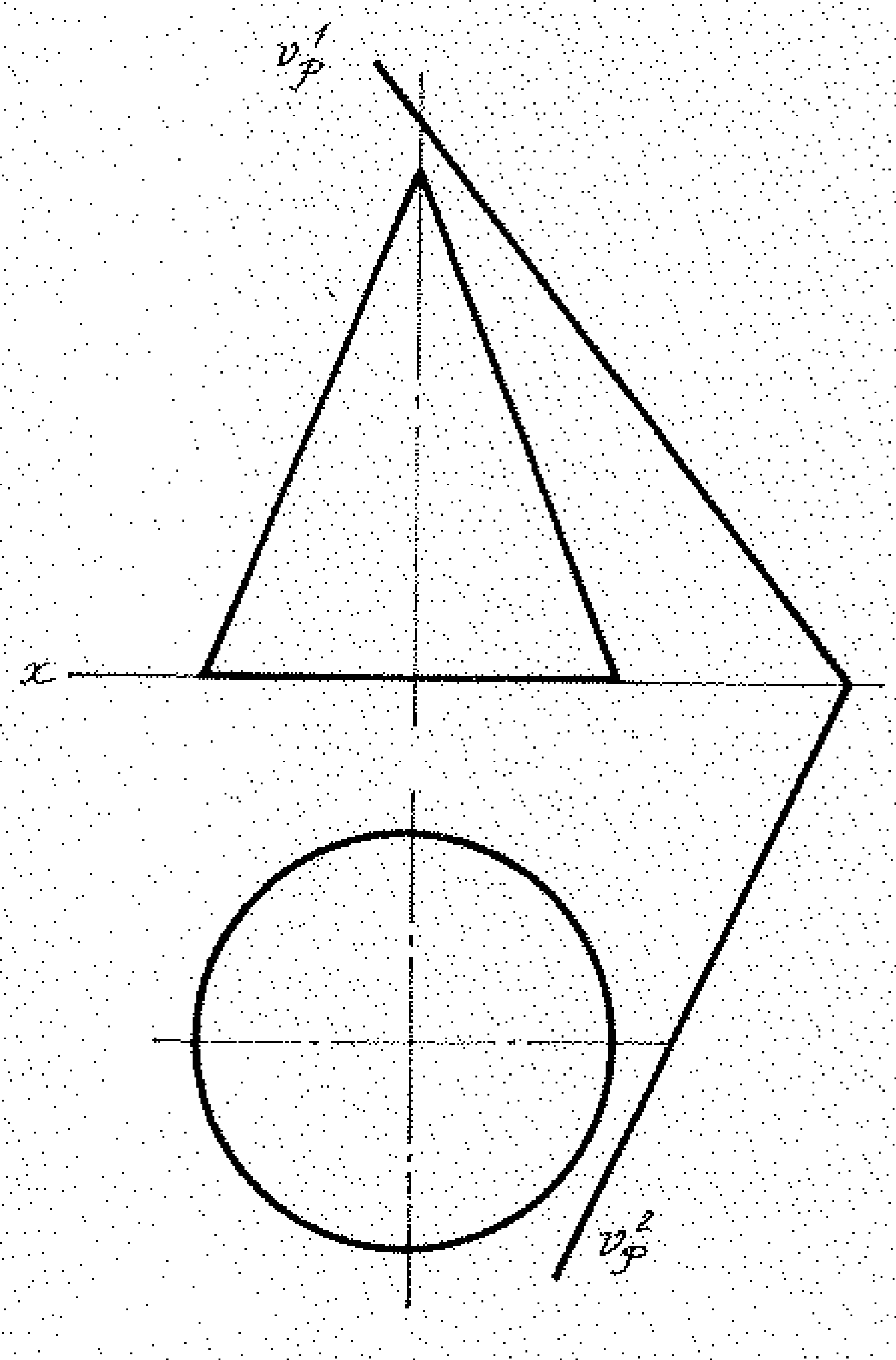
Hình PL 1 – 35



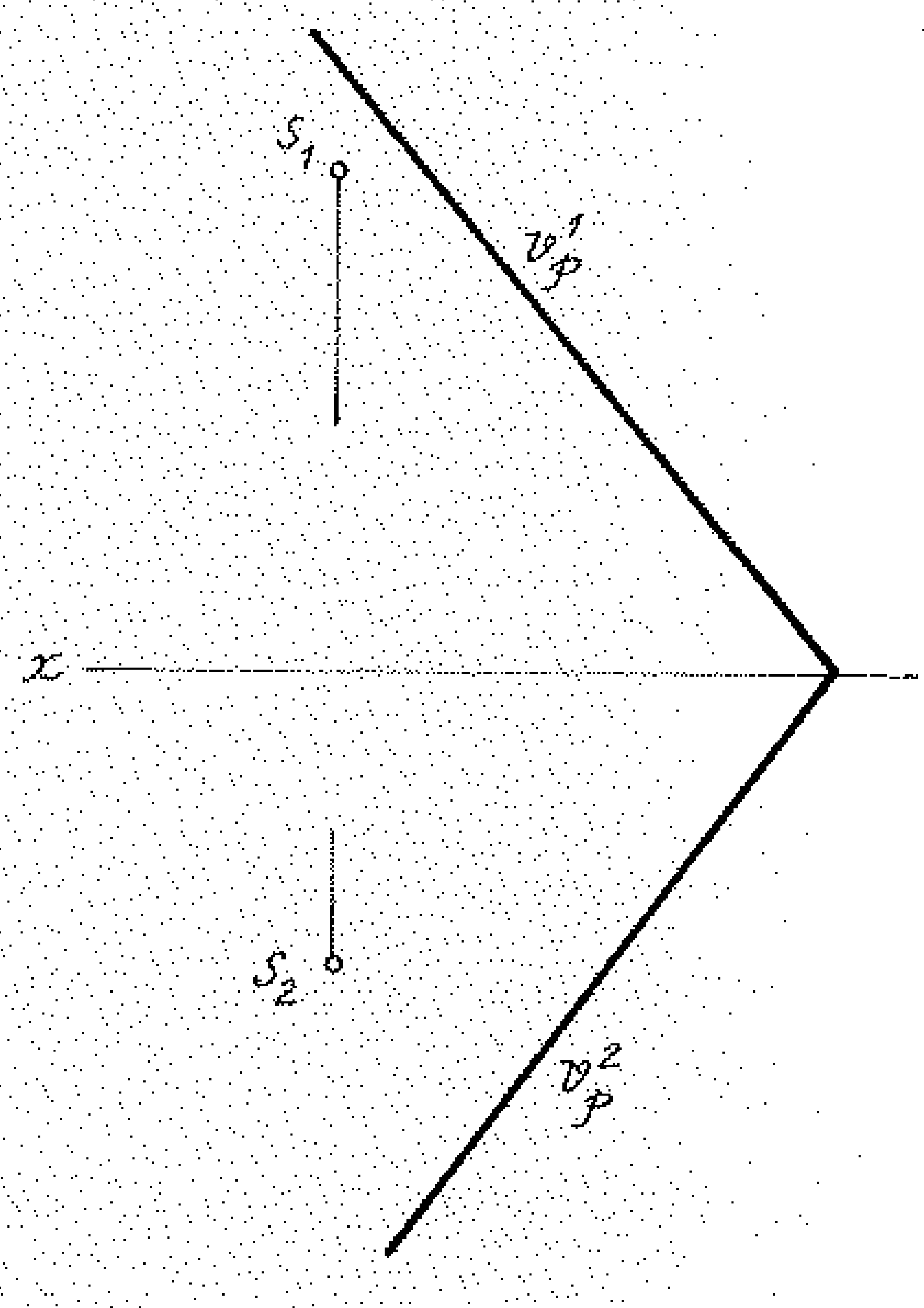
Hình PL 1 – 36

Bài 37 : Vẽ các vết của mặt phẳng $\mathcal{Q}$ vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{P}$ và tiếp xúc với mặt nón (Hình PL 1 – 37).

Bài 38 : Qua điểm S dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ vuông góc với mặt phẳng $\mathcal{P}$ và nghiêng một góc 60° với mặt phẳng hình chiếu bằng (Hình PL 1 – 38).



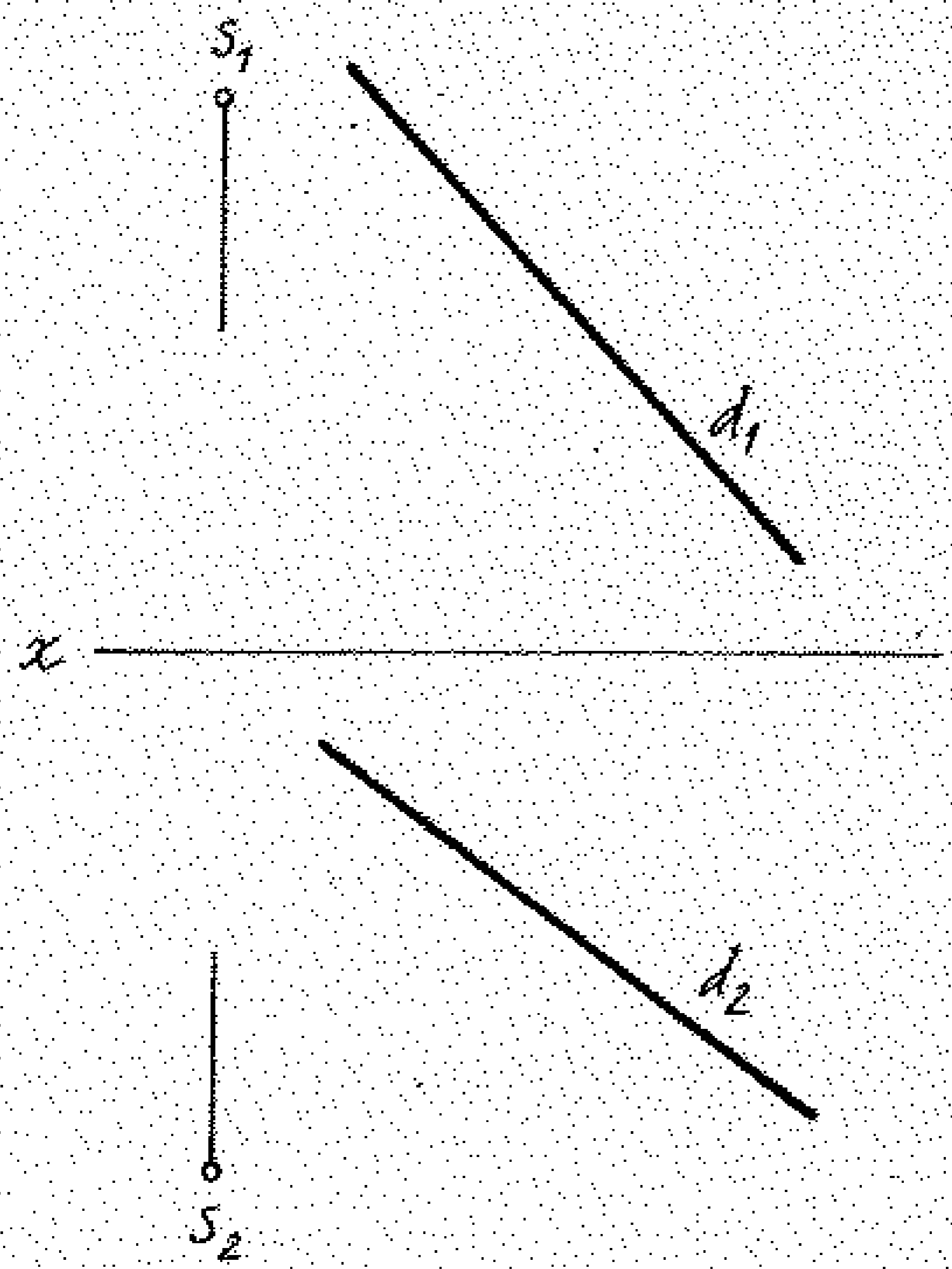
Hình PL 1 – 37



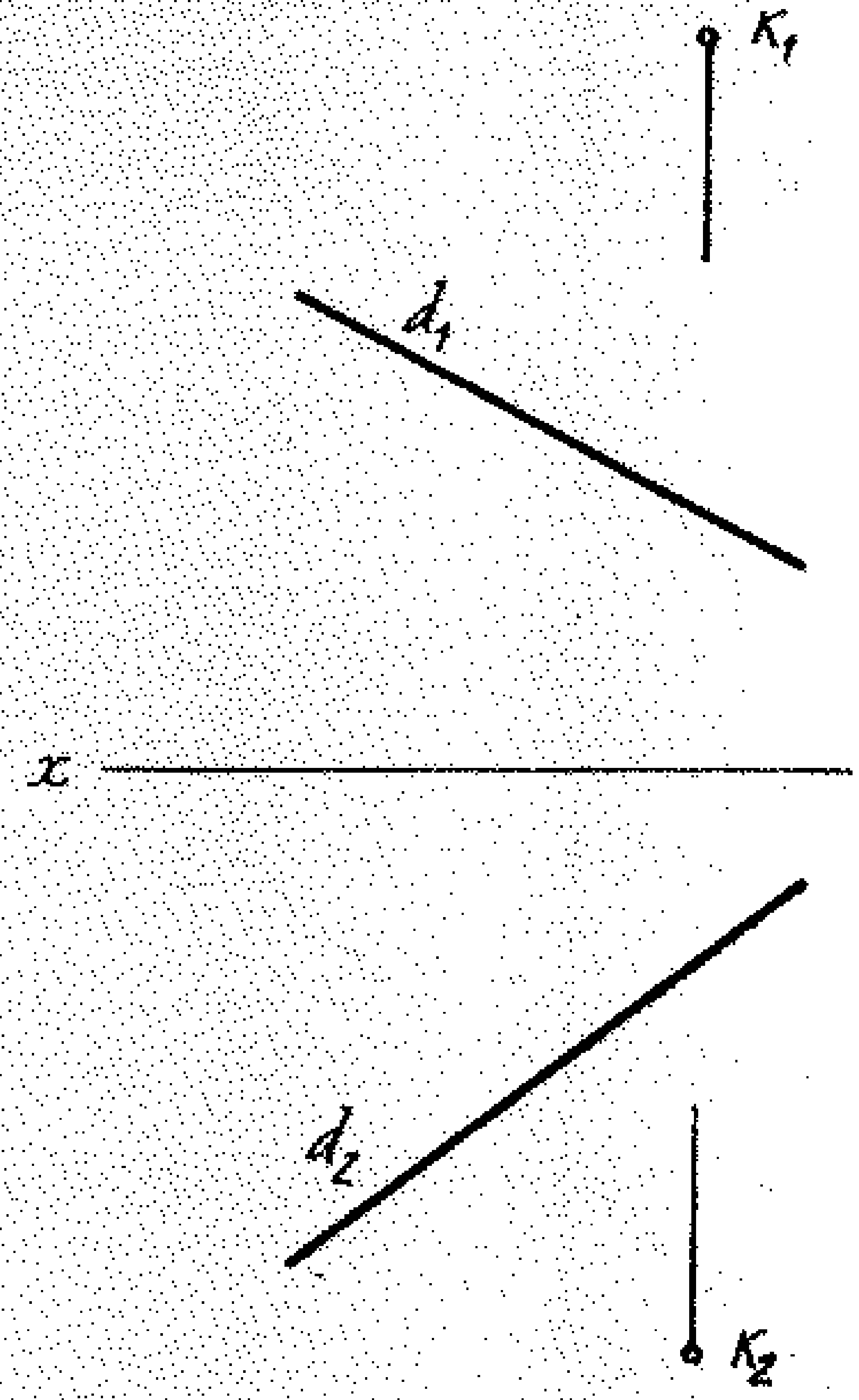
Hình PL 1 – 38

Bài 39 : Qua điểm S dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ song song với đường thẳng d và nghiêng một góc 45° với mặt phẳng hình chiếu đứng (Hình PL 1 – 39).

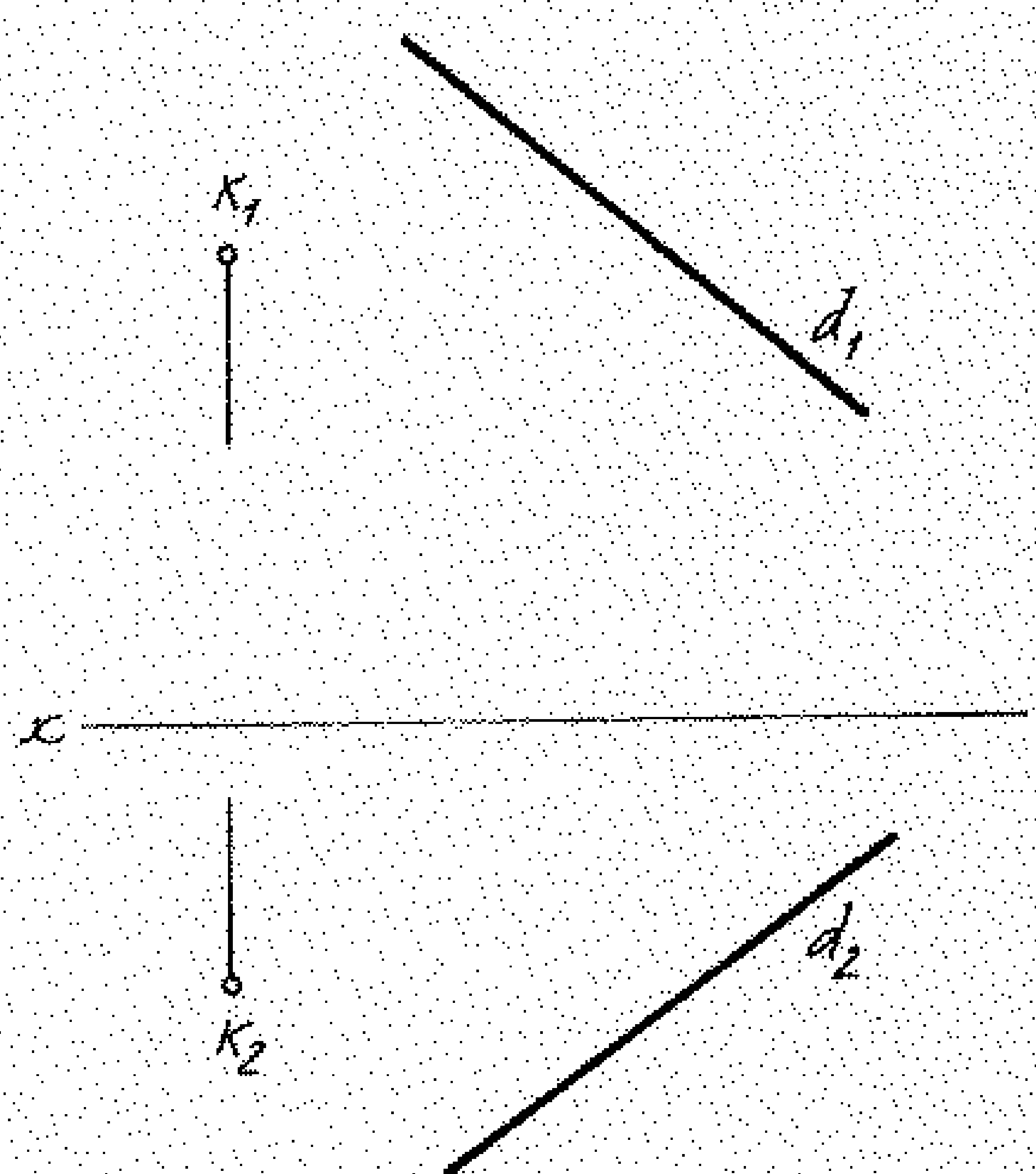
Bài 40 : Qua điểm K dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ cách đường thẳng d một khoảng bằng r cho trước (Hình PL 1 – 40).



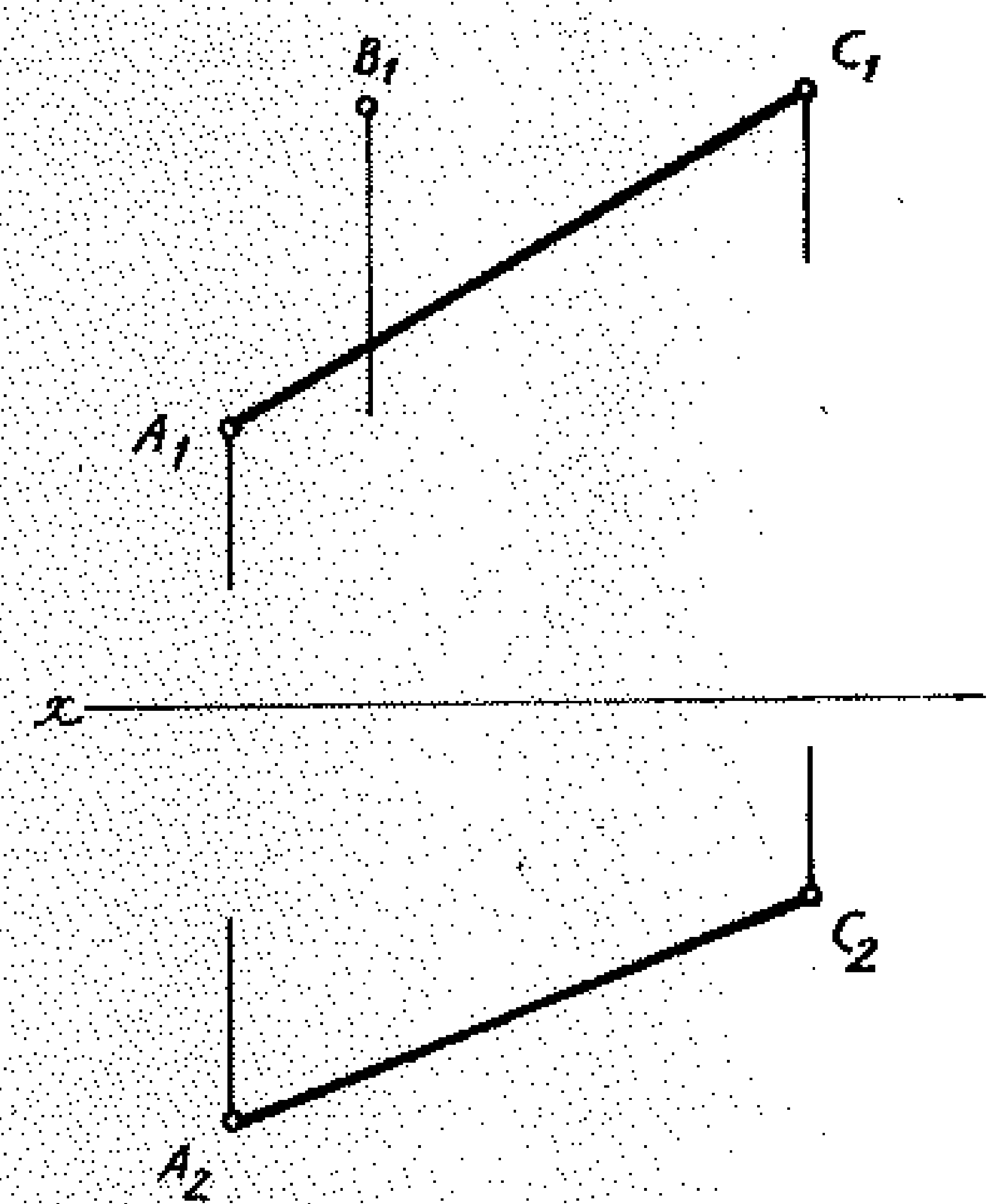
Hình PL 1 - 39



Hình PL 1 - 40



Hình PL 1 - 41



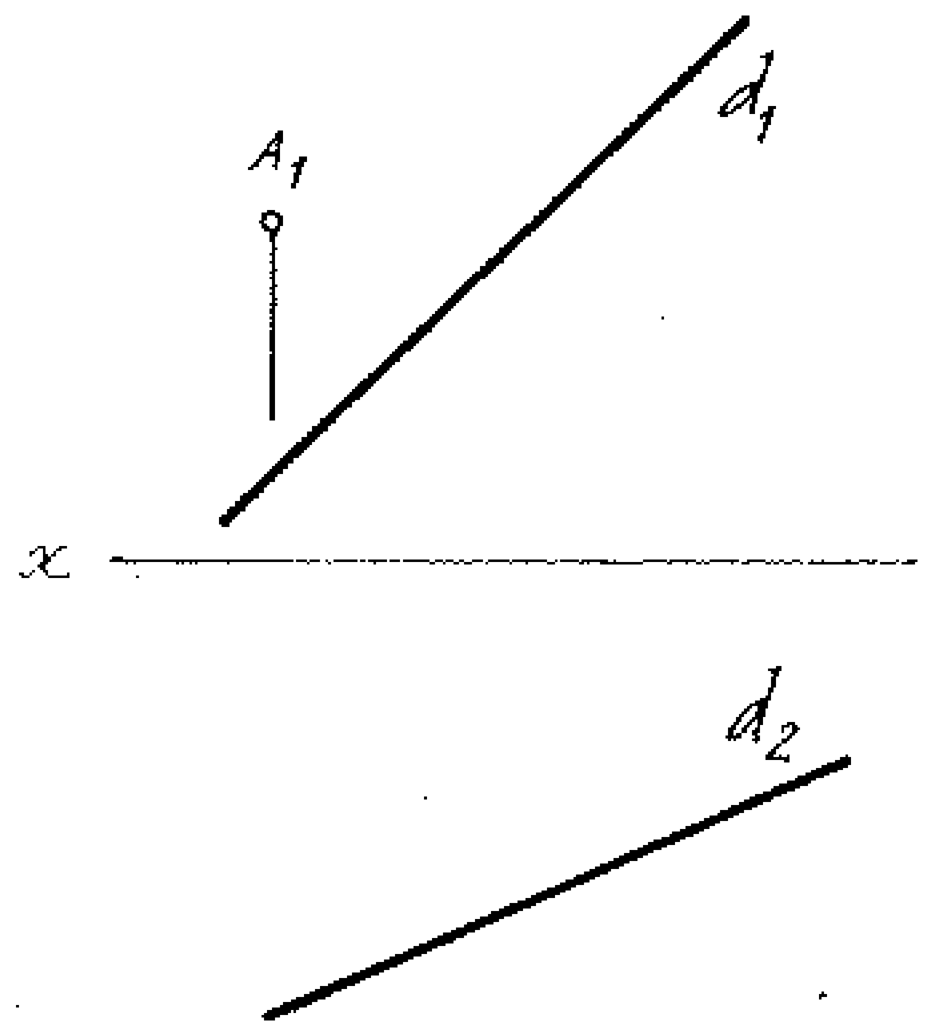
Hình PL 1 - 42

Bài 41 : Qua đường thẳng d dựng mặt phẳng Q cách điểm K một khoảng bằng r (Hình PL 1 - 41).

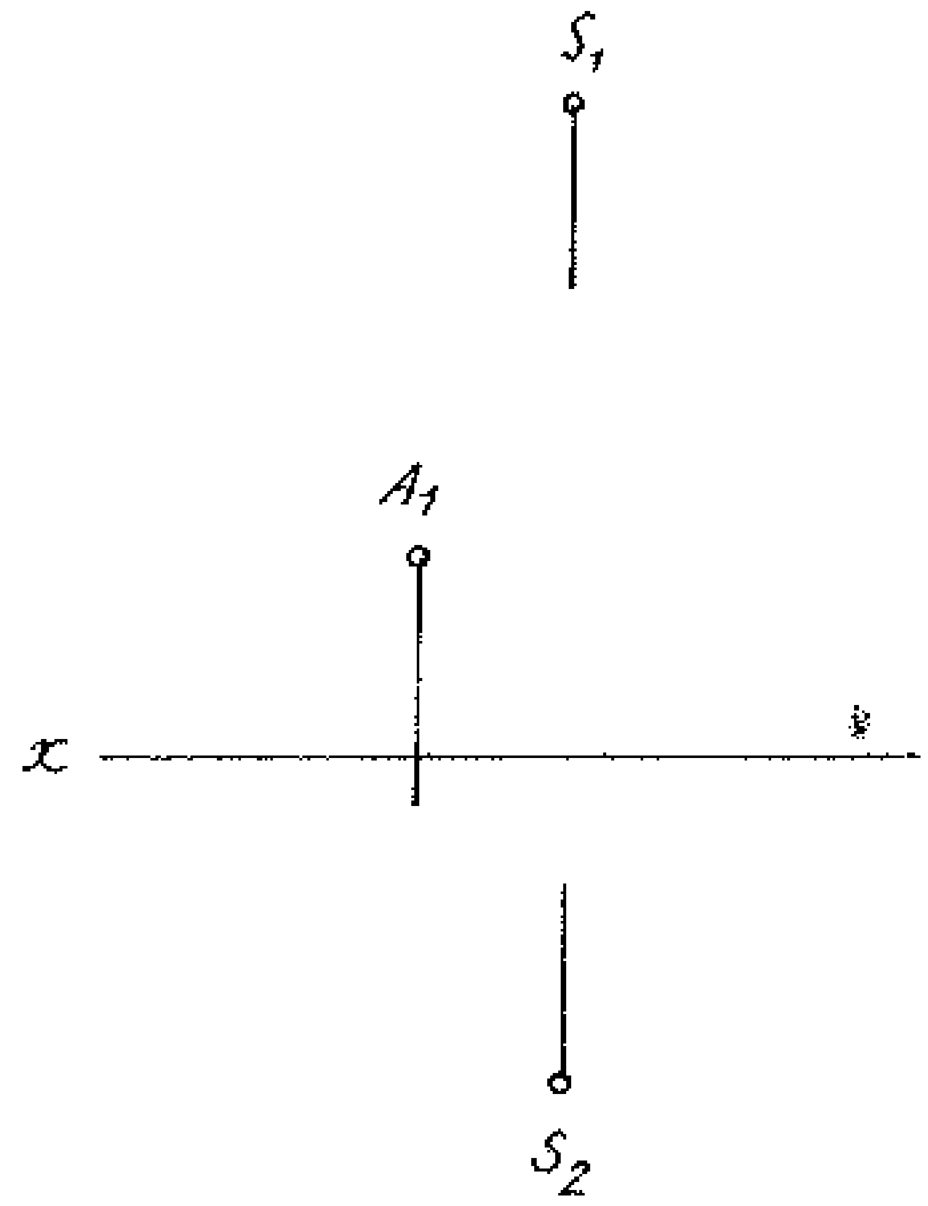
Bài 42 : Vẽ hình chiếu bằng của đỉnh góc vuông B của tam giác vuông ABC (Hình PL 1 - 42).

Bài 43 : Vẽ hình chiếu bằng của điểm A biết rằng khoảng cách từ A đến đường thẳng d là r (Hình PL 1 - 43).

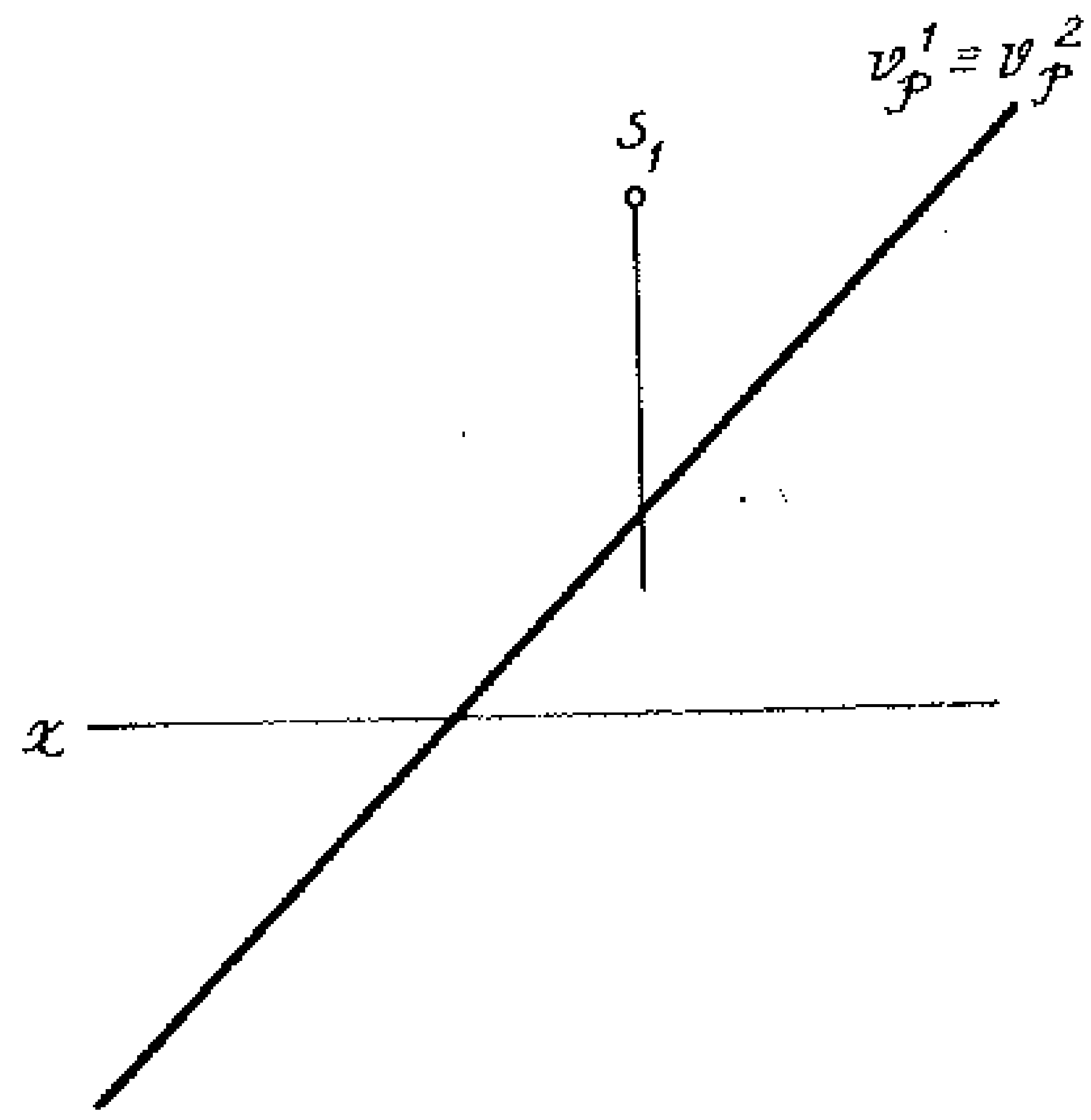
Bài 44 : Cho điểm S và hình chiếu đứng của điểm A. Vẽ hình chiếu bằng của A biết rằng đường thẳng SA tạo với mặt phẳng hình chiếu bằng một góc 60^o (Hình PL 1 - 44).



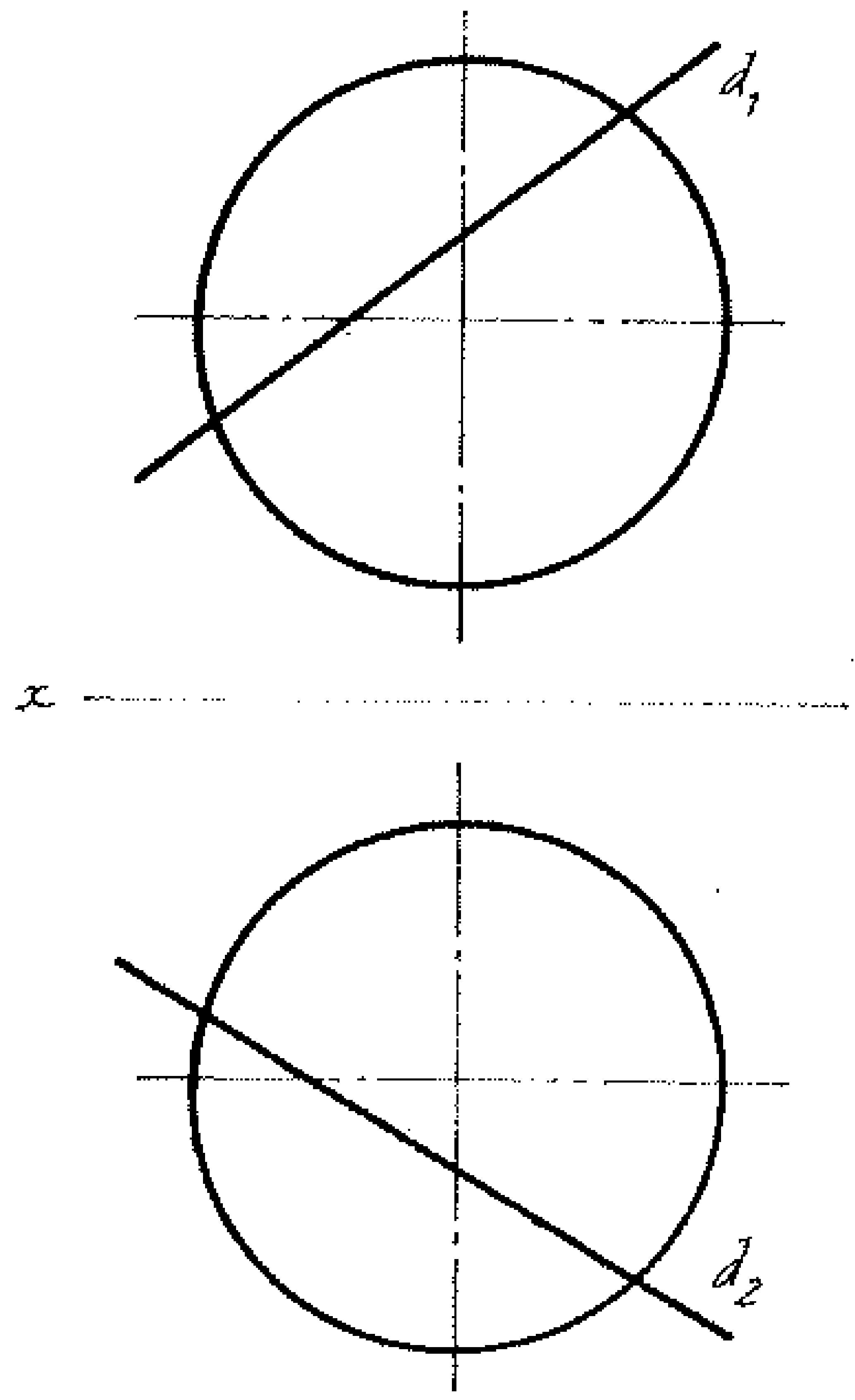
Hình PL 1 - 43



Hình PL 1 - 44



Hình PL 1 - 45



Hình PL 1 - 46

Bài 45 : Vẽ các hình chiếu của mặt nón tròn xoay tiếp xúc với mặt phẳng $\mathcal{P}$, đỉnh là điểm S thuộc ($\mathcal{P}$) và trục là đường thẳng chiếu bằng (Hình PL 1 - 45).

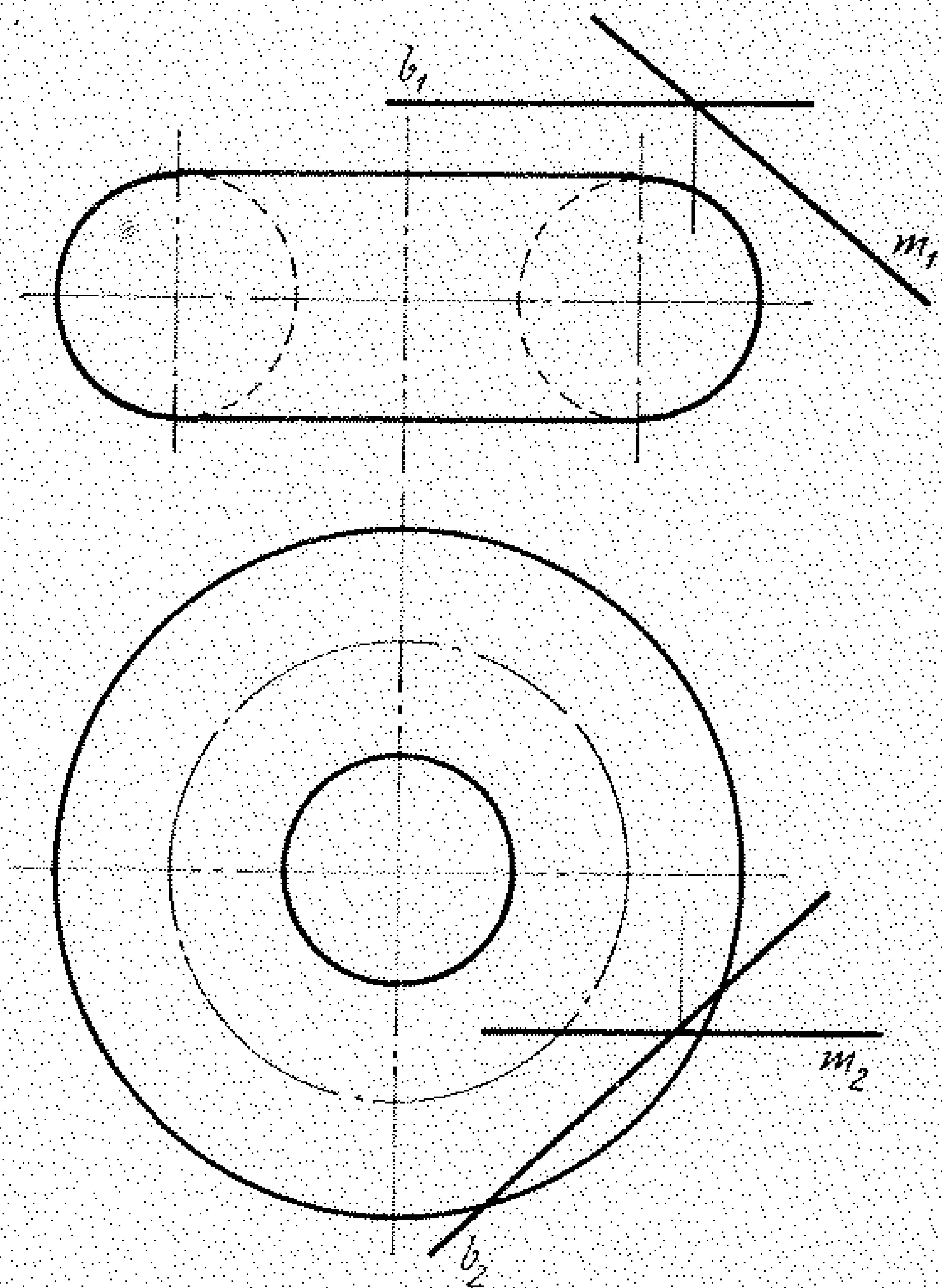
Bài 46 : Vẽ các hình chiếu của mặt cầu bán kính là r, tâm nằm trên đường thẳng d và tiếp xúc với mặt cầu đã cho (Hình PL 1 - 46).

Bài 47 : Dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ song song với mặt phẳng $\mathcal{P}$(b $\cap$ m) và tiếp xúc với mặt xuyến (Hình PL 1 - 47).

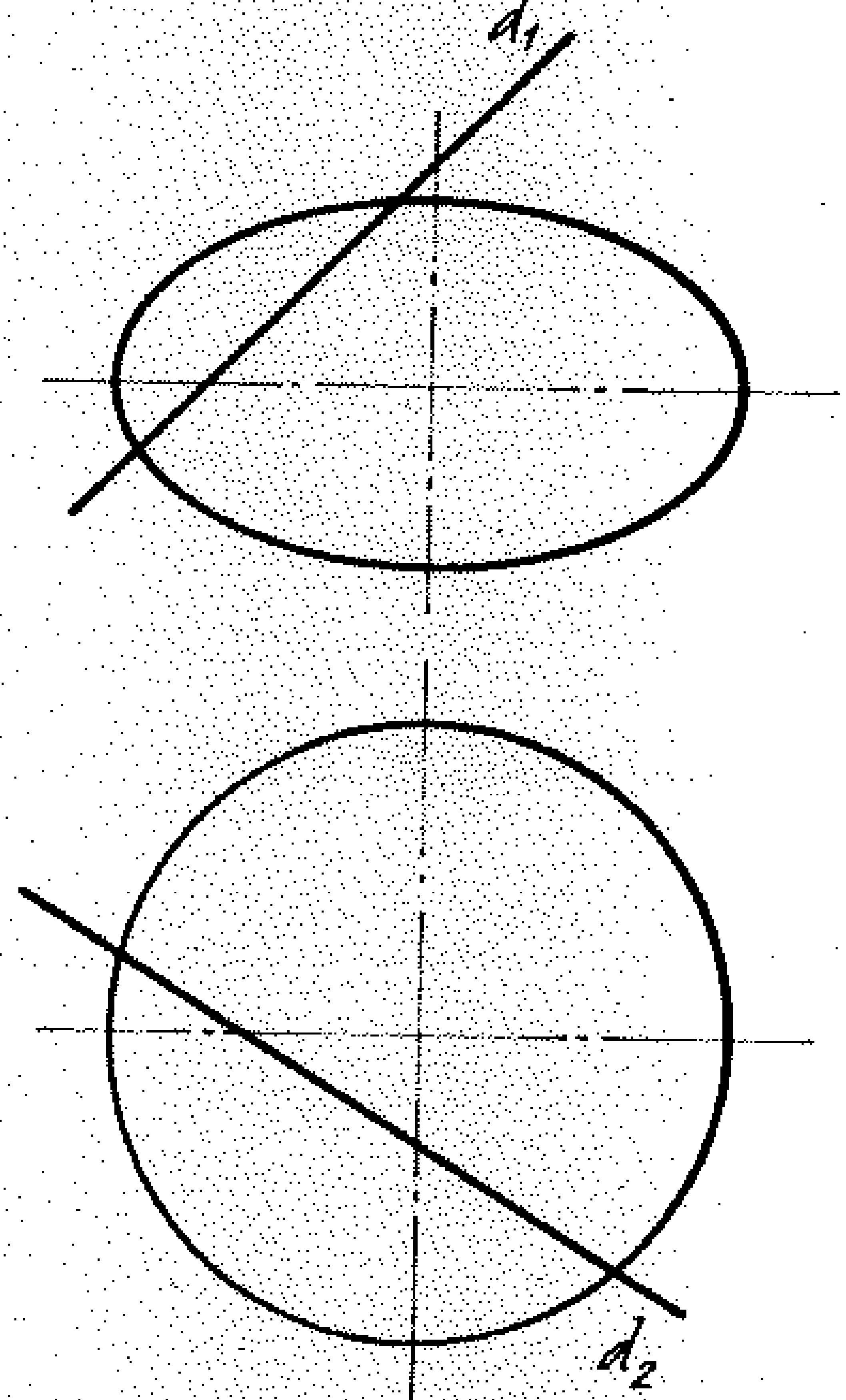
Bài 48 : Dựng mặt phẳng $\mathcal{Q}$ song song với đường thẳng d và tiếp xúc với mặt elipsôit tròn xoay (Hình PL 1 - 48).

Bài 49 : Vẽ giao tuyến của mặt trụ và mặt parabôlôit hypecbôlic nhận a và b là hai đường thẳng chuẩn và mặt phẳng hình chiếu bằng là mặt phẳng chuẩn (Hình PL 1 - 49).

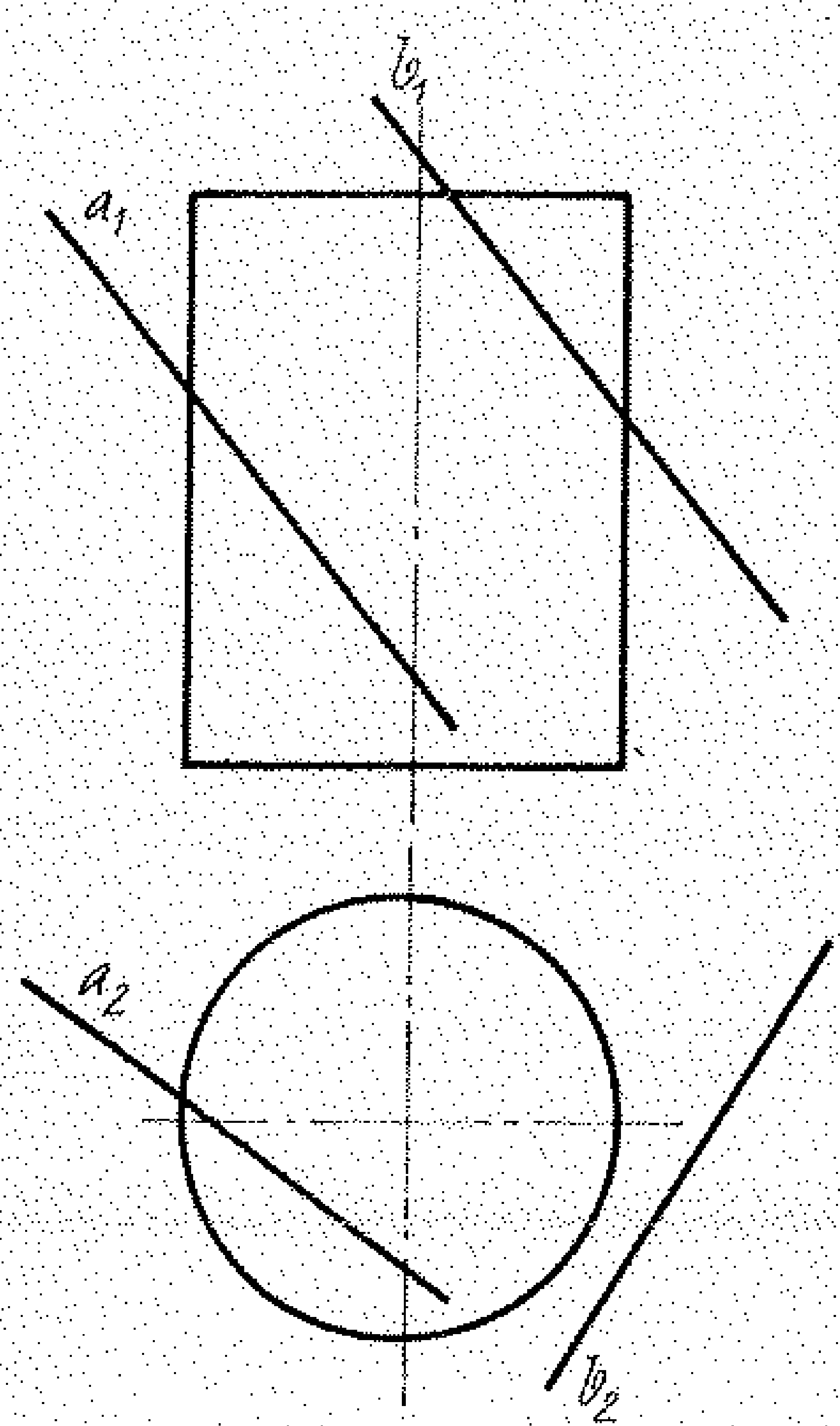
Bài 50. Vẽ giao tuyến của mặt cầu và mặt parabôlôit hypecbôlic nhận a và b là hai đường thẳng chuẩn và mặt phẳng hình chiếu đứng là mặt phẳng chuẩn (Hình PL 1 – 50).



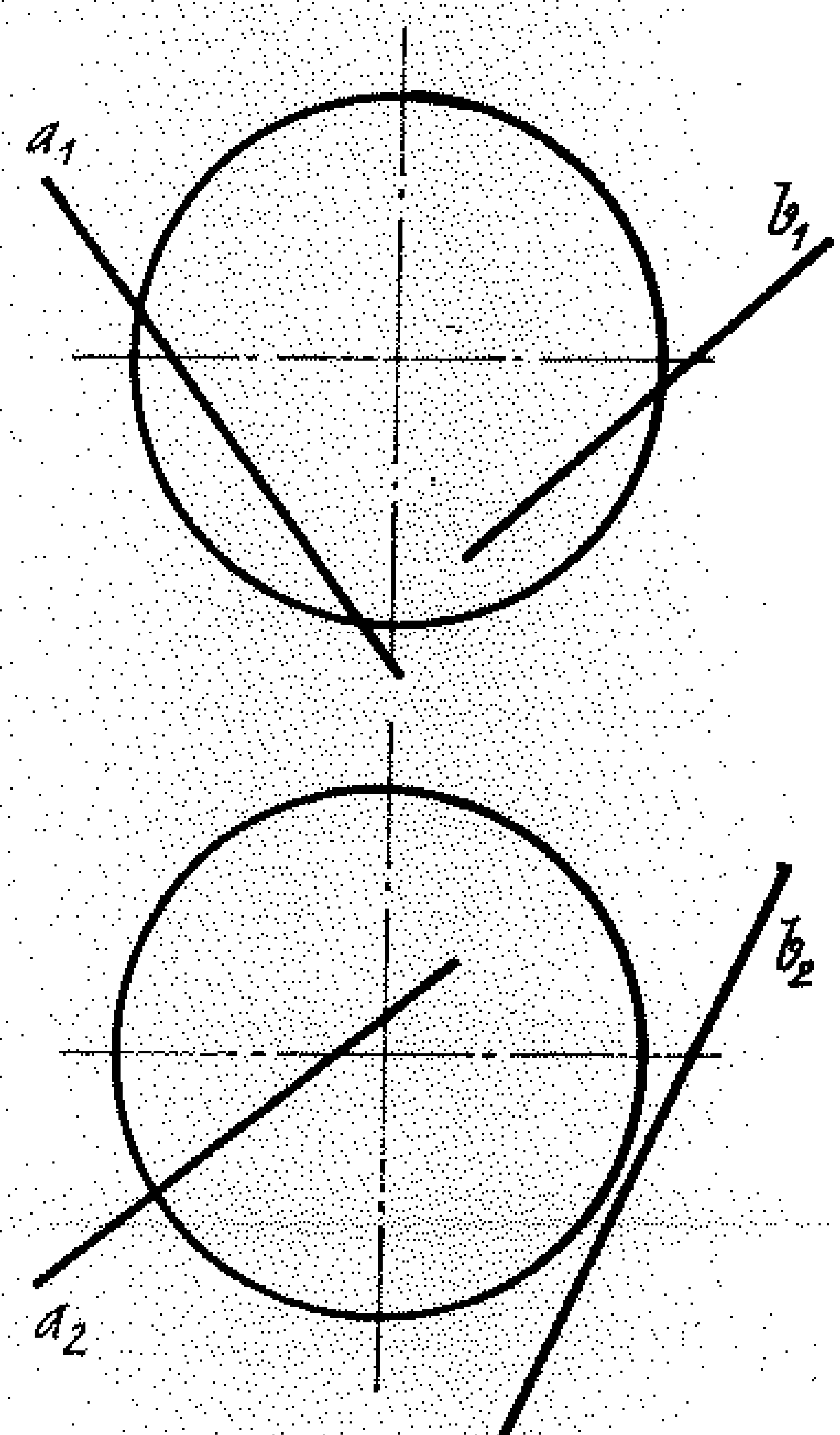
Hình PL 1 – 47



Hình PL 1 – 48



Hình PL 1 – 49



Hình PL 1 – 50

PHỤ LỤC 2

MỘT SỐ DẠNG GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT THƯỜNG GẶP TRONG KĨ THUẬT

Trong kĩ thuật ta thường phải giải quyết vấn đề vẽ giao tuyến của hai mặt. Ví dụ khi biểu diễn một van nước, ta cần vẽ giao tuyến của mặt trụ với mặt cầu ở thân van và giao tuyến của mặt trụ với mặt xuyến ở tay vặn. Khi vẽ mặt bằng mái của ngôi nhà mái dốc gồm nhiều mái giao nhau và có các chi tiết như cửa mái, ống khói v.v..., ta gặp vấn đề vẽ giao tuyến của hai đa diện...

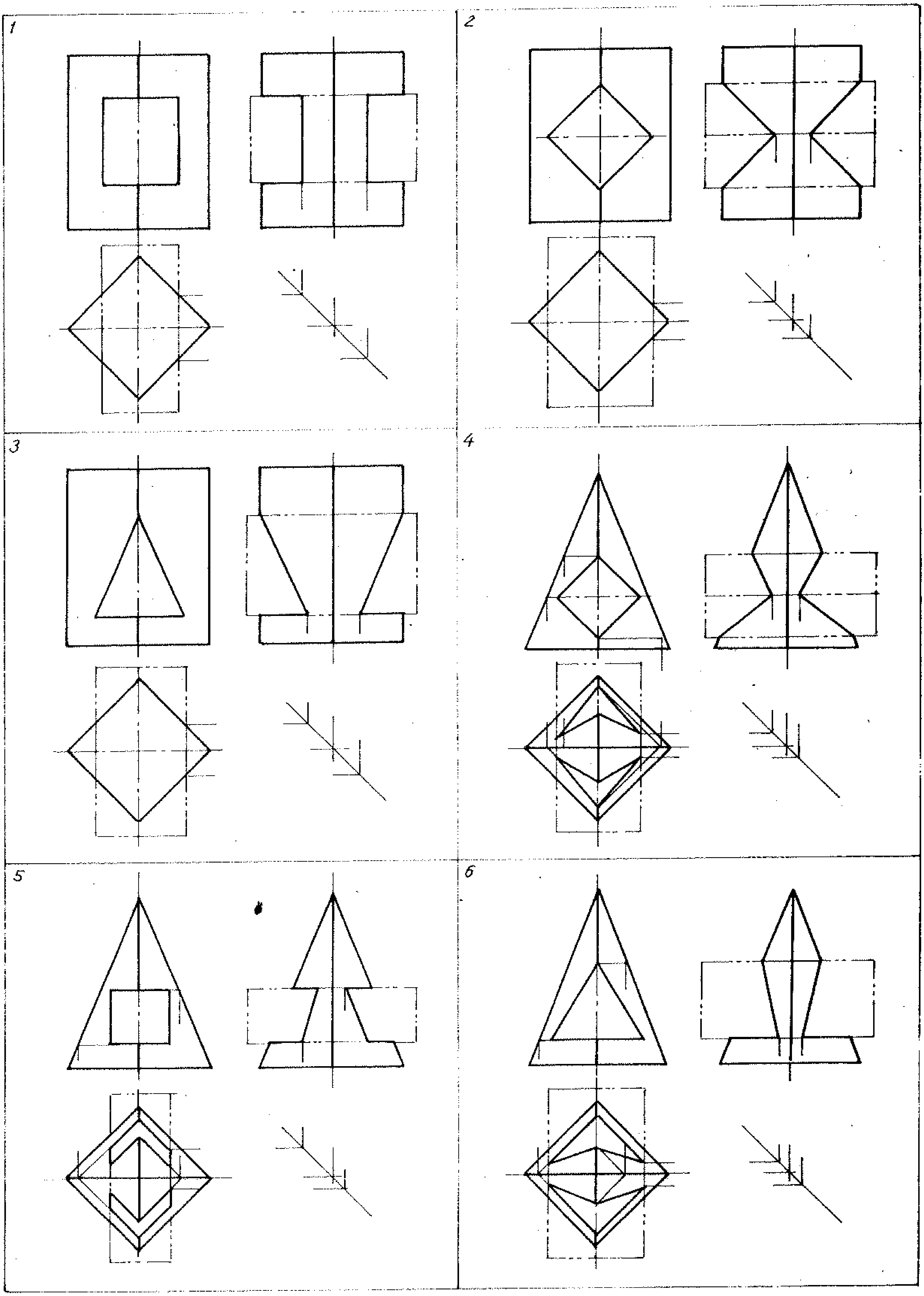
Trên hình (PL 2 - 1, PL 2 - 2, PL 2 - 3) giới thiệu một số dạng giao tuyến của hai mặt thường gặp trong kĩ thuật. Các giao tuyến đó được trình bày dưới dạng miệng các lỗ rỗng tạo thành trên mặt xung quanh của các mặt vật thể bị đục rỗng. Các mặt vật thể tạo nên lỗ rỗng được vẽ bằng nét gạch hai chấm mảnh.

Hình PL 2 - 1 : Giao tuyến của hai đa diện (gồm 6 bài : 1 ÷ 6)

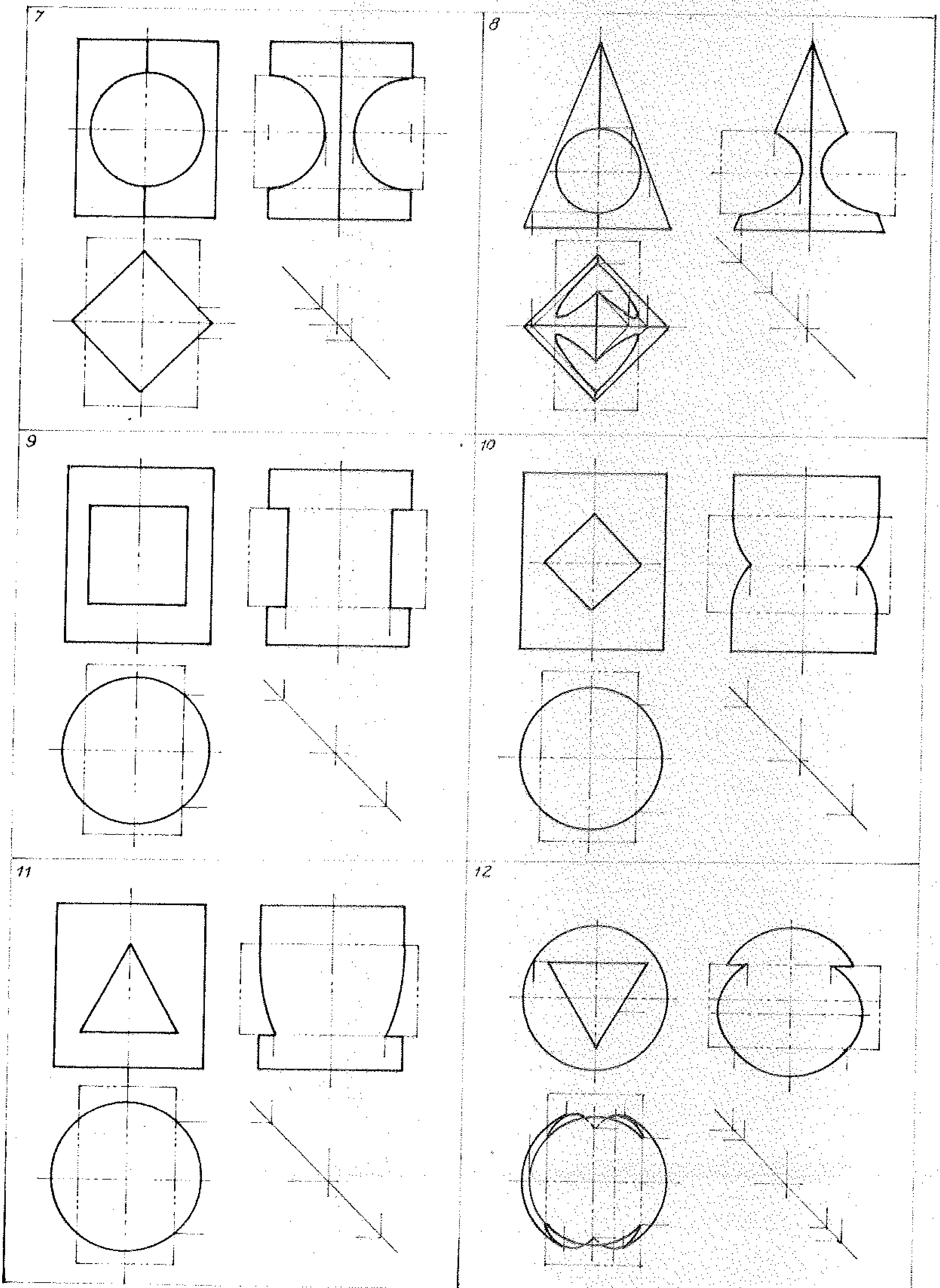
Hình PL 2 - 2 : Giao tuyến của đa diện và mặt cong (gồm 10 bài : 7 ÷ 16).

Hình PL 2 - 3 : Giao tuyến của hai mặt cong (gồm 8 bài : 17 ÷ 24).

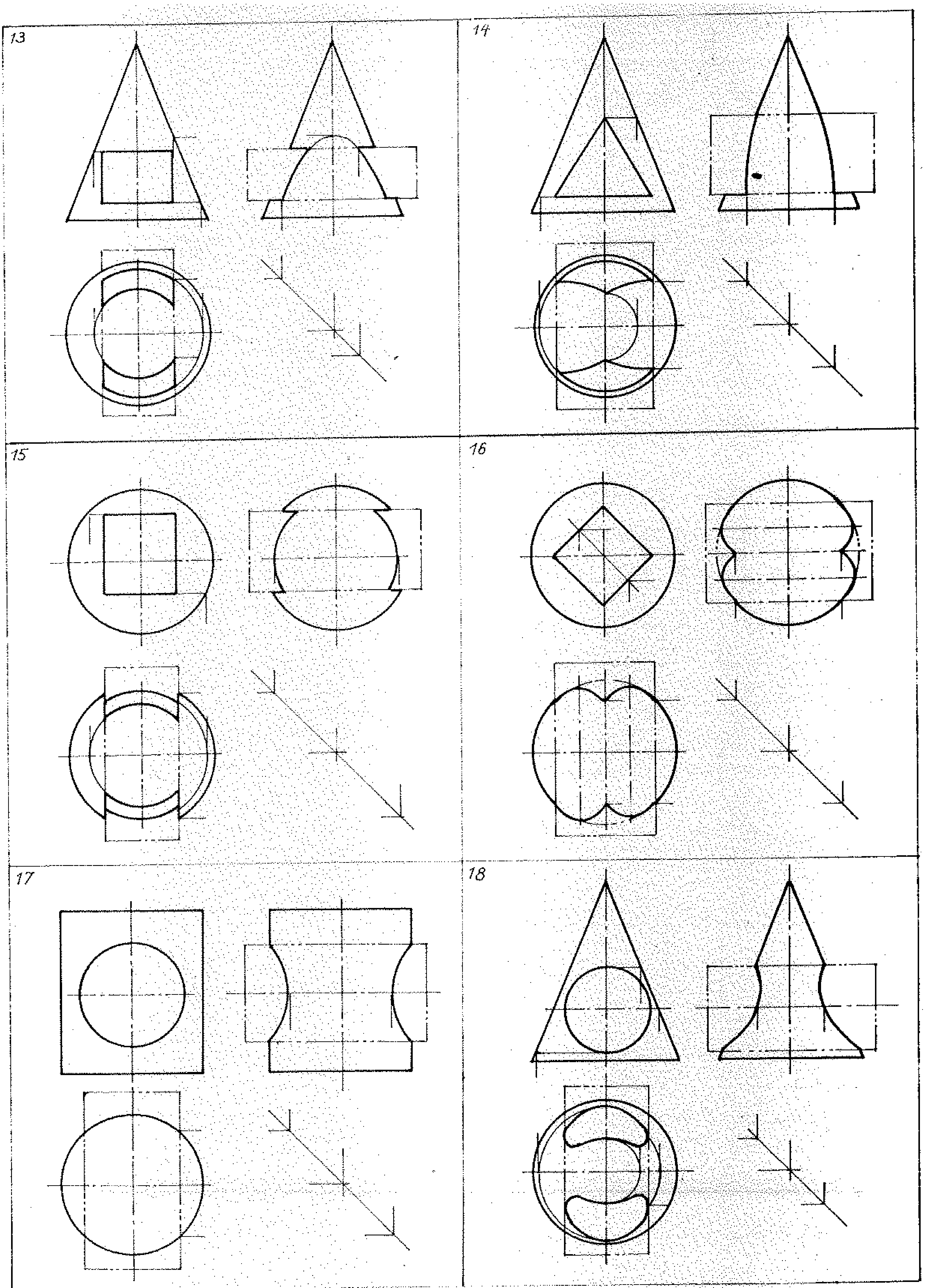
Trên hình vẽ có chỉ dẫn cách xác định một số điểm đặc biệt của giao tuyến.



Hình PL 2 - 1 : Giao tuyến của hai đa diện (gồm 6 bài : 1 ÷ 6)

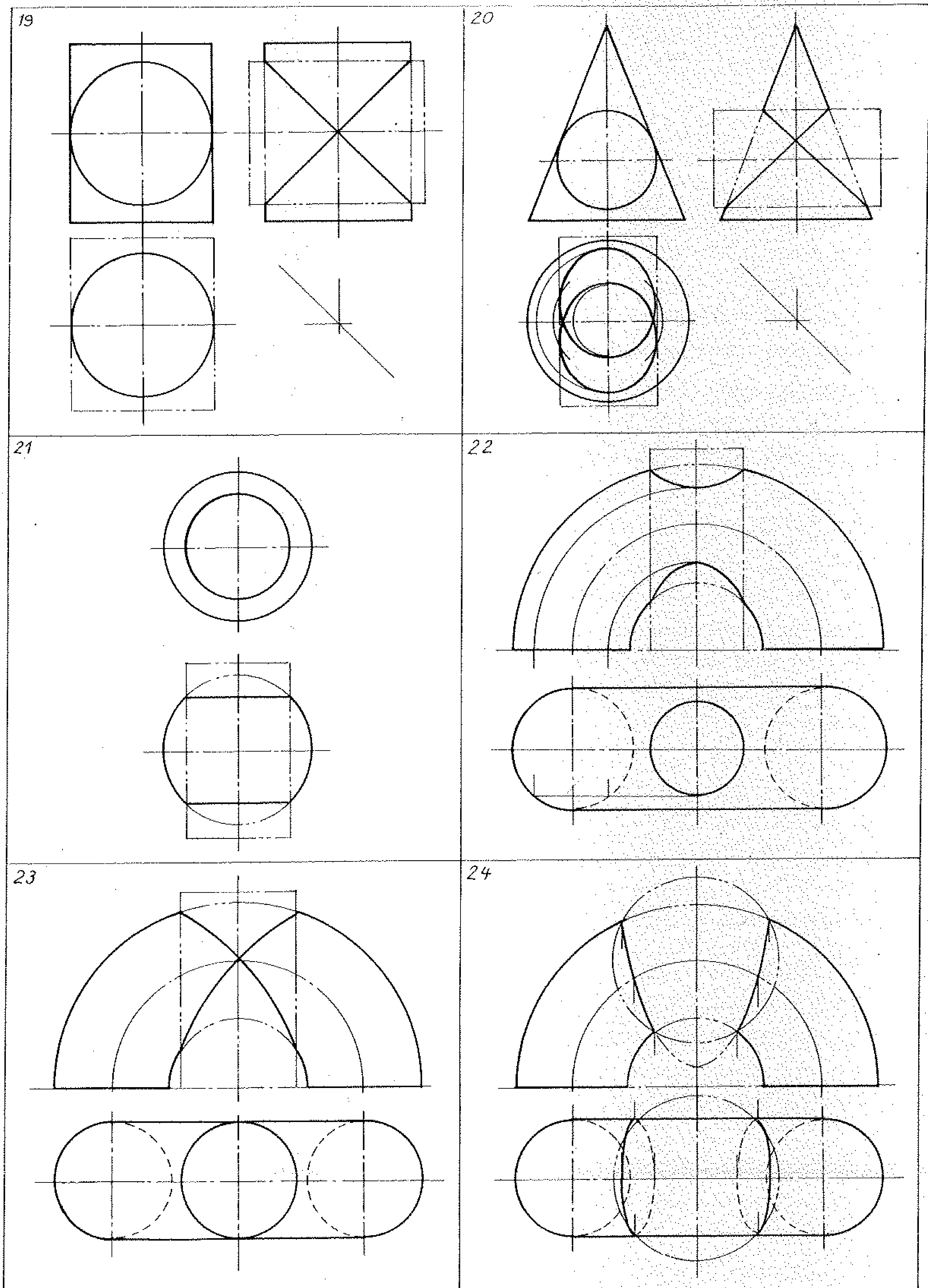


Hình PL 2 – 2 : Giao tuyến của đa diện và mặt cong (gồm 10 bài : 7 ÷ 16)



Hình PL 2 – 2 : bài 13 ÷ 16

Hình PL 2 – 3 : bài 17 và 18 (giao tuyến của hai mặt cong)



Hình PL 2-3 : Giao tuyến của hai mặt cong.
bài : 19 ÷ 24.

PHỤ LỤC 3

CÁC BÀI TẬP LỚN

Bài tập lớn số 1 : BÀI TOÁN VỀ VỊ TRÍ

1. *Nội dung :* Xác định giao tuyến của hai đa giác phẳng và xét thấy, khuất trên hai hình chiếu.

2. *Hình thức trình bày :* Bài tập được làm trên giấy vẽ khổ 11 (A4).

3. *Thời gian :* Bài tập được làm sau khi học xong bài "Các bài toán về vị trí".

Đầu bài tập được cho trên hình PL 3-1.

Mỗi sinh viên làm một trong các bài đã cho.

Bài tập lớn số 2 : BÀI TOÁN VỀ LƯỢNG

1. *Nội dung :*

+ Xác định khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD) hoặc tới đường thẳng CD.

+ Dựng mặt phẳng $\mathcal{P}$ song song với mặt phẳng (BCD) hoặc mặt phẳng (ACD) và cách các mặt phẳng này một khoảng bằng l cho trước.

Bài tập được giải bằng hai phương pháp : giải trực tiếp trên hình đã cho và giải bằng phương pháp biến đổi hình chiếu.

2. *Hình thức trình bày :* Bài tập được làm trên giấy vẽ khổ 12 (A3) hoặc trên hai tờ giấy khổ 11 (A4)

3. *Thời gian :* Bài tập được làm sau khi học xong các bài "Các bài toán về lượng" và "Các phương pháp biến đổi hình chiếu".

Đầu bài tập được cho trên hình PL 3-2.

Mỗi sinh viên làm một trong các bài đã cho

Bài tập lớn số 3 CÁC BÀI TOÁN VỀ GIAO

1. *Nội dung :*

a) Vẽ giao tuyến của mặt phẳng với mặt.

b) Vẽ giao điểm của đường thẳng với mặt.

c) Vẽ giao tuyến của hai mặt. Vẽ hình khai triển của một trong hai mặt đã cho trên đó có cả hình khai triển của giao tuyến.

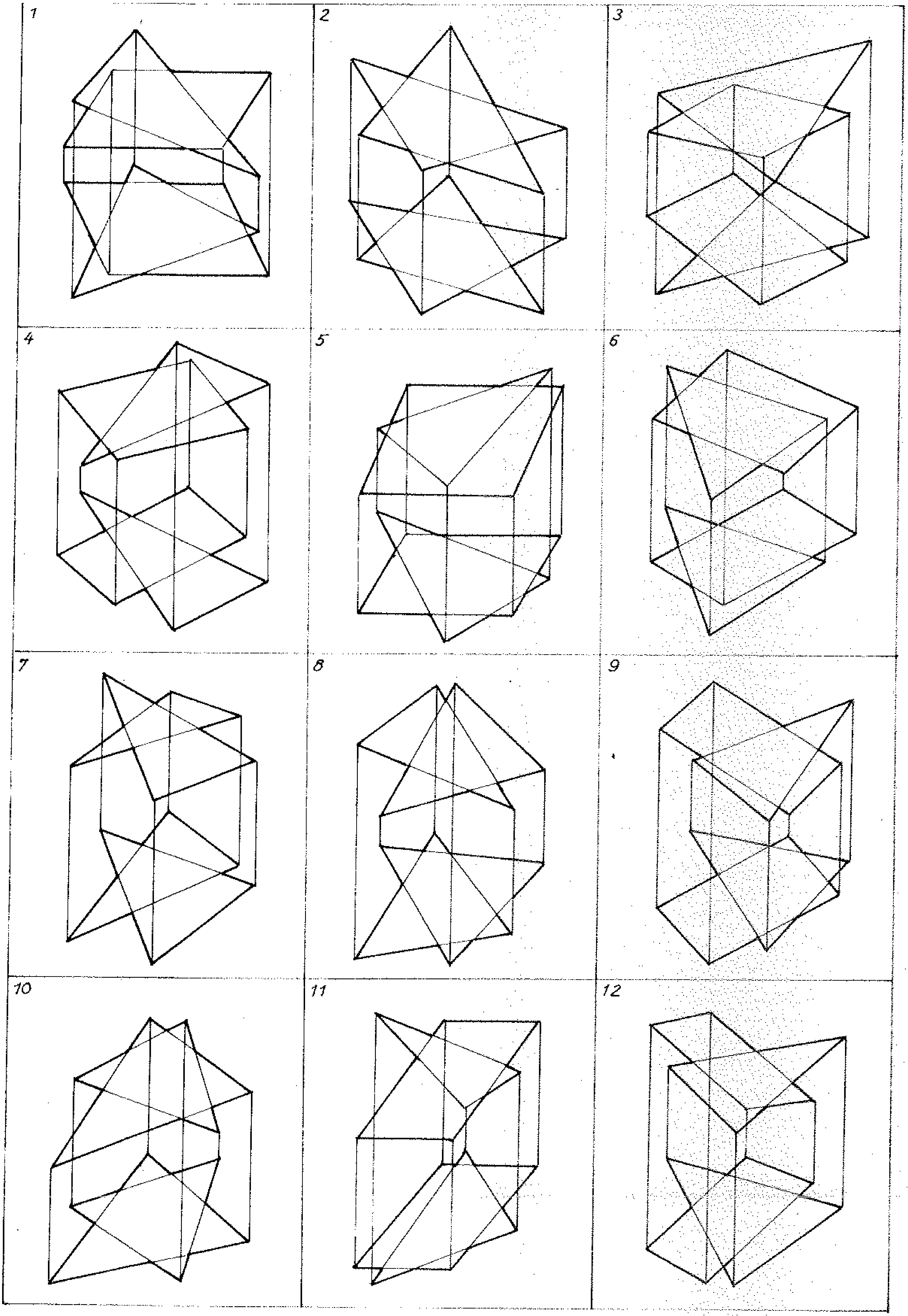
Xét thấy và khuất trên hai hình chiếu của ba bài toán trên.

2. *Hình thức trình bày :* Mỗi bài (a, b và c) được làm trên một tờ giấy vẽ khổ 11 (A4).

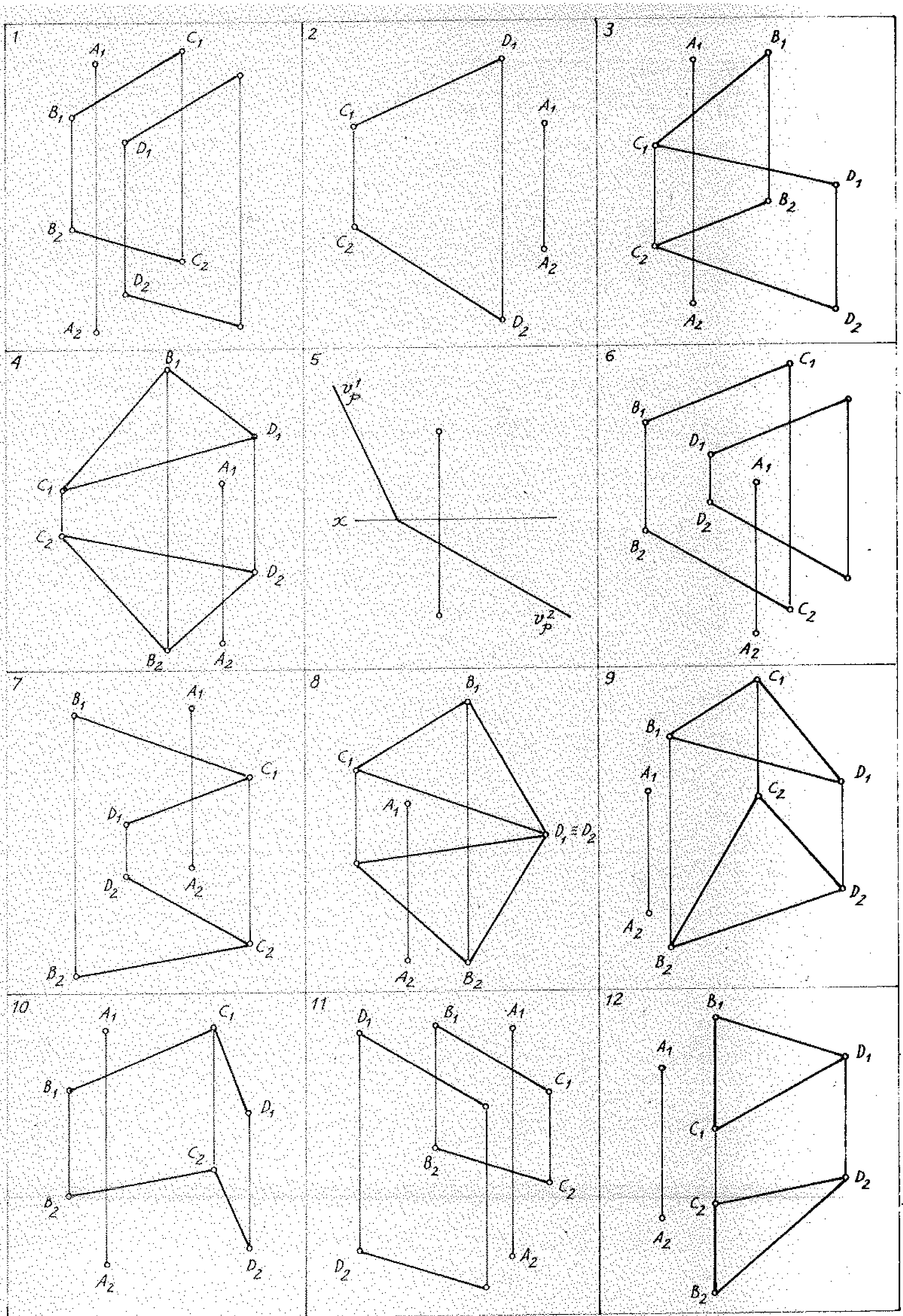
3. *Thời gian :* Bài tập được làm lần lượt sau khi học xong từng phần của "các bài toán về giao đối với các mặt" (Mặt phẳng cắt của mặt. Đường thẳng cắt các mặt – Giao của hai mặt).

Đầu bài tập được cho trên hình PL 3-3.

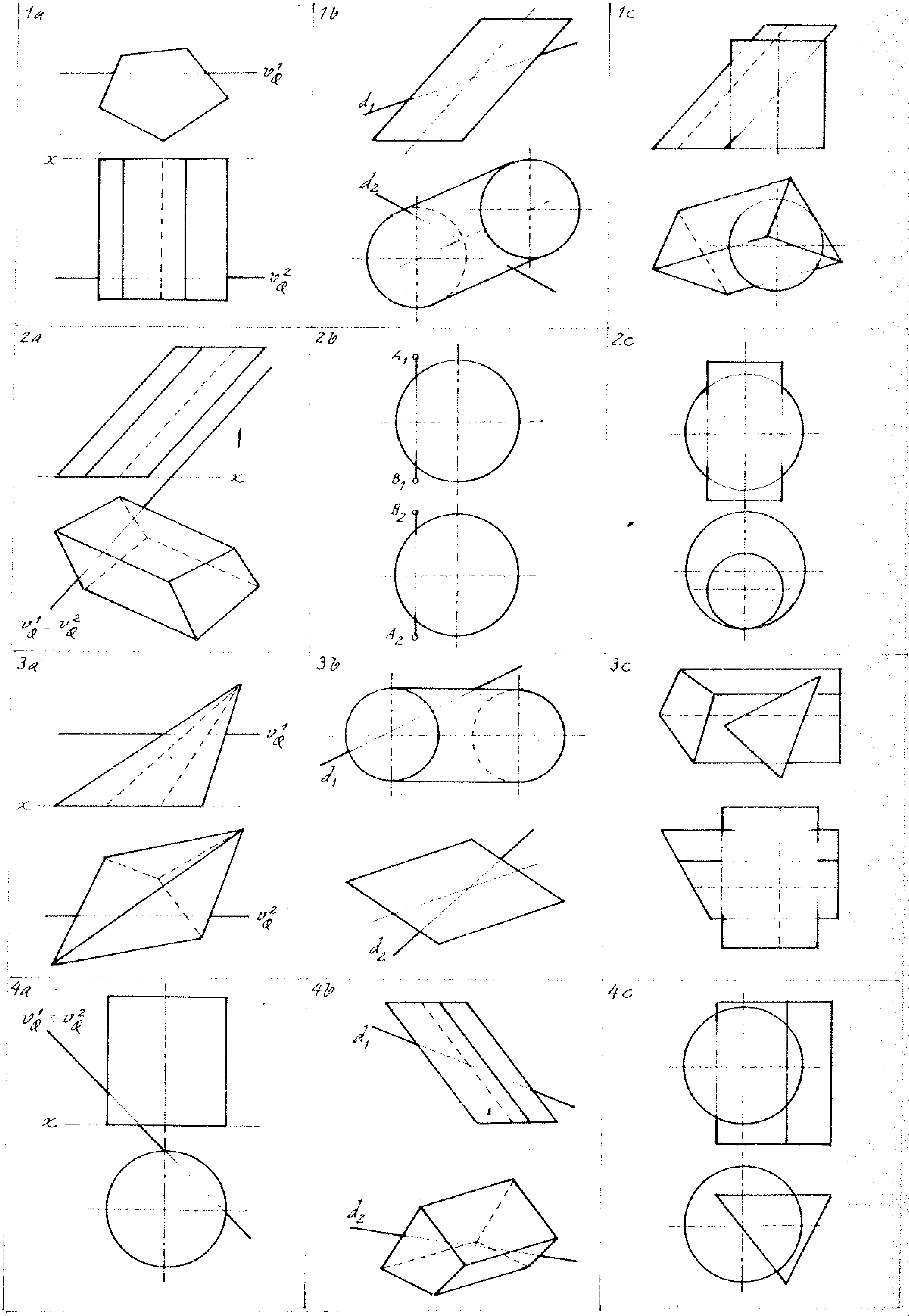
Mỗi sinh viên làm một trong các bài đã cho.



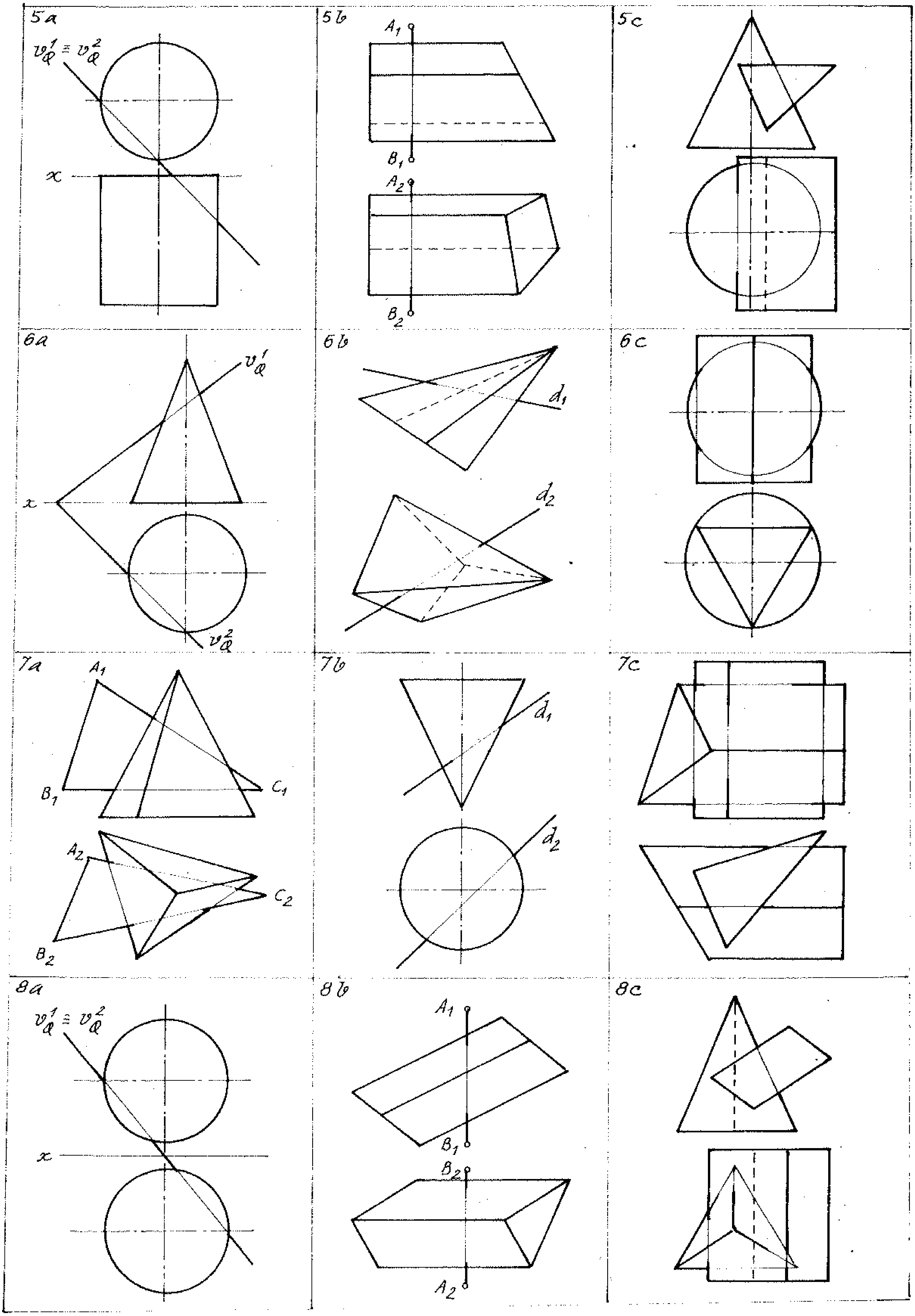
Hình PL 3-1 : Các bài toán về vị trí (gồm 12 bài : 1 ÷ 12)



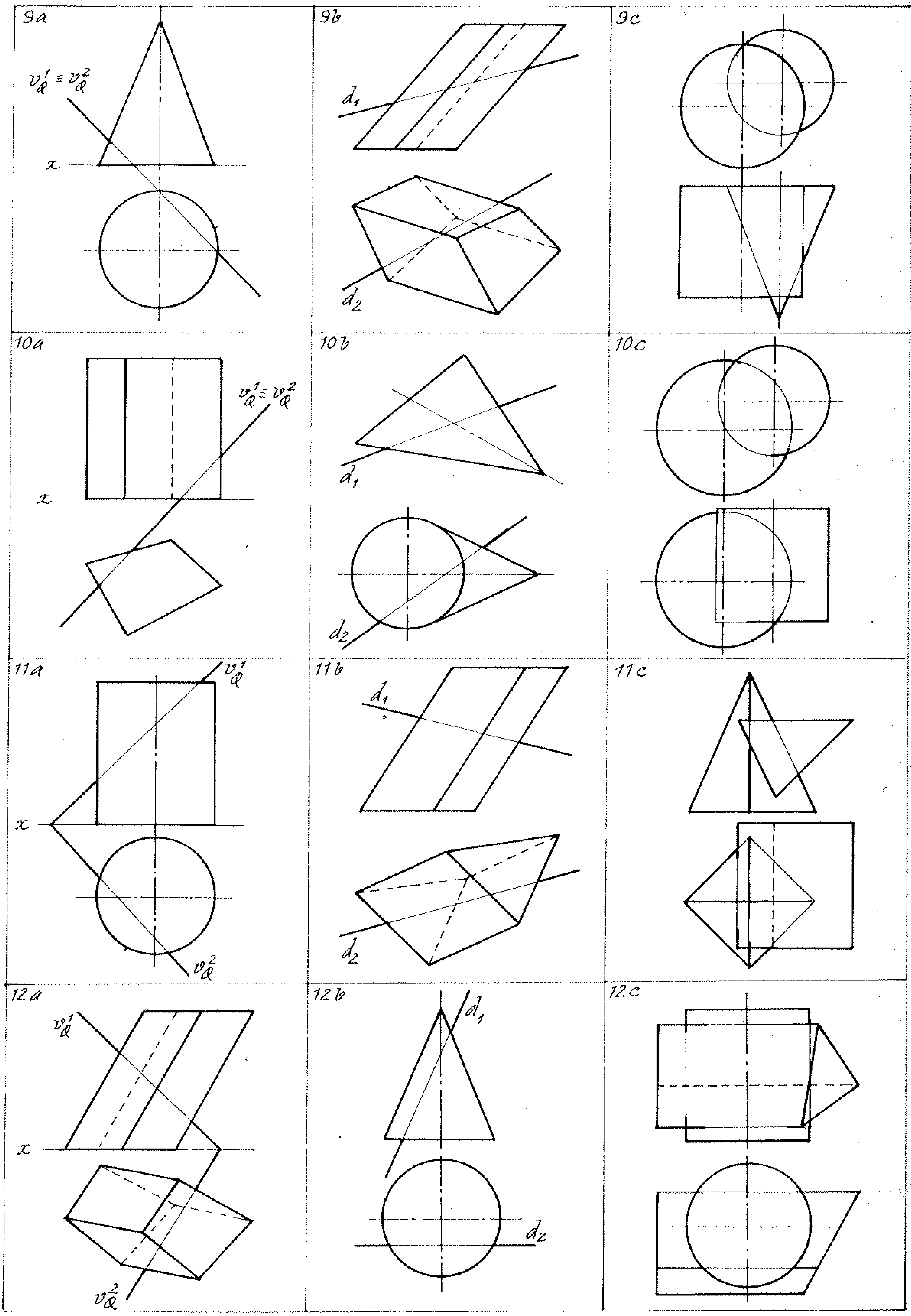
Hình PL 3-2 : Các bài toán về lượng (gồm 12 bài : 1 ÷ 12)



Hình PL 3-3 : Các bài toán về giao (gồm 36 bài)



Hình PL 3-3 (tiếp theo)



Hình PL 3-3 (tiếp theo)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đình Điện – Đỗ Mạnh Môn. Hình học họa hình. Tập 1 (tái bản lần 3), Nhà xuất bản Giáo dục – Hà Nội 1992.

2. Kh. Arustamov Problems in descriptive geometry Mir publishers, moscow. Firsf published 1972.

3. Н.Л. Русскевич. Сборник задач по Начертательной геометрии. Издательство "Высшая школа" 1978.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc PHẠM VĂN AN
Tổng biên tập NGUYỄN NHƯ Ý

Biên tập nội dung :
PHẠM THANH HƯƠNG

Trình bày bìa :
NGUYỄN QUANG CỰ

Sửa bản in :
PHẠM THANH HƯƠNG

Chế bản :
TRUNG TÂM VI TÍNH - NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

In 5000 bản, khổ 19 x 27, tại Nhà máy in Quân đội. Giấy phép XB số: **25-CXB do Cục xuất** bản kí ngày 17 tháng 01 năm 1996. Số in: 6368. In xong và nộp lưu chiểu **tháng 12 năm 1996.**