

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA**

**Đỗ Kiến Quốc (*Chủ biên*) - Nguyễn Thị Hiền Lương
Bùi Công Thành - Lê Hoàng Tuấn - Trần Tấn Quốc**

GIÁO TRÌNH

**SỨC BỀN
VẬT LIỆU**

**NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA
TP HỒ CHÍ MINH - 2007**

GT . 02 . XD(V)

DHQG.HCM-07

732-2006/CXB/150-72

XD.GT.335-06(T)

MỤC LỤC

| | |
|---|----|
| LỜI NÓI ĐẦU | 7 |
| Chương 1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN | 9 |
| 1.1 Khái niệm về môn học Sức bền vật liệu | 9 |
| 1.2 Hình dạng vật thể | 10 |
| 1.3 Ngoại lực. Liên kết và phản lực liên kết | 11 |
| 1.4 Các dạng chịu lực và biến dạng cơ bản | 14 |
| 1.5 Các giả thiết | 16 |
| Chương 2 LÝ THUYẾT NỘI LỰC | 20 |
| 2.1 Khái niệm về nội lực - Phương pháp khảo sát - Ứng suất | 20 |
| 2.2 Các thành phần nội lực và cách xác định | 21 |
| 2.3 Biểu đồ nội lực | 25 |
| 2.4 Liên hệ vi phân giữa nội lực và tải trọng phân bố | 30 |
| 2.5 Cách vẽ biểu đồ theo nhận xét | 37 |
| 2.6 Bài tập chương 2 | 41 |
| Chương 3 KÉO - NÉN ĐÚNG TÂM | 44 |
| 3.1 Khái niệm | 44 |
| 3.2 Ứng suất trên mặt cắt ngang | 45 |
| 3.3 Biến dạng của thanh chịu kéo (nén) đúng tâm | 46 |
| 3.4 Đặc trưng cơ học của vật liệu | 49 |
| 3.5 Một số hiện tượng phát sinh trong vật liệu khi chịu lực | 52 |
| 3.6 Thế năng biến dạng đàn hồi | 54 |
| 3.7 Ứng suất cho phép - Hệ số an toàn - Ba bài toán cơ bản | 58 |
| 3.8 Bài toán siêu tĩnh | 62 |
| 3.9 Bài tập chương 3 | 64 |
| Chương 4 TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT | 70 |
| 4.1 Khái niệm trạng thái ứng suất tại một điểm | 70 |
| 4.2 Trạng thái ứng suất phẳng | 75 |

| | | |
|--|---|-----|
| 4.3 | Biểu diễn hình học trạng thái ứng suất khối | 89 |
| 4.4 | Liên hệ ứng suất và biến dạng | 91 |
| 4.5 | Thế năng biến dạng đàn hồi | 97 |
| 4.6 | Bài tập chương 4 | 99 |
| Chương 5 LÝ THUYẾT BỀN | | 104 |
| 5.1 | Khái niệm thuyết bền | 104 |
| 5.2 | Các thuyết bền | 105 |
| 5.3 | Việc áp dụng các thuyết bền | 112 |
| 5.4 | Bài tập chương 5 | 114 |
| Chương 6 ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG | | 116 |
| 6.1 | Khái niệm | 116 |
| 6.2 | Mômen tĩnh. Trọng tâm | 117 |
| 6.3 | Mômen quán tính. Bán kính quán tính | 121 |
| 6.4 | Mômen quán tính chính trung tâm của một số hình đơn giản | 124 |
| 6.5 | Công thức chuyển trục song song | 126 |
| 6.6 | Công thức xoay trục | 129 |
| 6.7 | Vòng tròn Mohr quán tính. Cách xác định hệ trục quán tính chính trung tâm của hình phẳng bất kỳ | 130 |
| 6.8 | Bài tập chương 6 | 134 |
| Chương 7 UỐN PHẪNG THANH THẲNG | | 137 |
| 7.1 | Khái niệm chung | 137 |
| 7.2 | Uốn thuần túy phẳng | 140 |
| 7.3 | Uốn ngang phẳng | 150 |
| 7.4 | Kiểm tra bền | 159 |
| 7.5 | Quy đạo ứng suất chính | 166 |
| 7.6 | Thế năng biến dạng đàn hồi của dầm chịu uốn phẳng | 168 |
| 7.7 | Dầm chống uốn đều | 170 |
| 7.8 | Bài tập chương 7 | 173 |

| | | |
|------------------|---|-----|
| Chương 8 | CHUYỂN VỊ CỦA DẦM CHỊU UỐN | 177 |
| 8.1 | Khái niệm chung | 177 |
| 8.2 | Phương trình vi phân của đường đàn hồi | 179 |
| 8.3 | Lập phương trình đường đàn hồi bằng phương pháp tích phân không định hạn | 180 |
| 8.4 | Xác định độ võng và góc xoay bằng phương pháp tải trọng giả tạo (phương pháp đồ toán) | 189 |
| 8.5 | Phương pháp diện tích mômen | 195 |
| 8.6 | Bài toán siêu tĩnh | 201 |
| 8.7 | Bài tập chương 8 | 206 |
| Chương 9 | XOẮN THUẦN TÚY | 209 |
| 9.1 | Khái niệm | 209 |
| 9.2 | Xoắn thanh thẳng tiết diện tròn | 212 |
| 9.3 | Xoắn thanh thẳng tiết diện chữ nhật | 223 |
| 9.4 | Tính lò xo hình trụ bước ngắn | 225 |
| 9.5 | Xoắn thanh thành mỏng | 230 |
| 9.6 | Bài tập chương 9 | 238 |
| Chương 10 | THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP | 243 |
| 10.1 | Khái niệm chung | 243 |
| 10.2 | Uốn xiên | 244 |
| 10.3 | Uốn cộng kéo hay nén | 253 |
| 10.4 | Uốn cộng xoắn | 265 |
| 10.5 | Thanh chịu lực tổng quát | 272 |
| 10.6 | Bài tập chương 10 | 276 |
| Chương 11 | ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU NÉN | 280 |
| 11.1 | Khái niệm về sự ổn định của trạng thái cân bằng | 280 |
| 11.2 | Lực tới hạn của thanh thẳng chịu nén đúng tâm | 283 |
| 11.3 | Ổn định ngoài miền đàn hồi | 286 |
| 11.4 | Phương pháp thực hành tính ổn định thanh chịu nén | 291 |
| 11.5 | Xác định lực tới hạn bằng phương pháp năng lượng | 296 |
| 11.6 | Bài tập chương 11 | 298 |

| | | |
|------------------|---|------------|
| Chương 12 | UỐN NGANG VÀ UỐN DỌC ĐỒNG THỜI | 303 |
| 12.1 | Đặc điểm bài toán | 303 |
| 12.2 | Phương pháp chính xác | 304 |
| 12.3 | Phương pháp gần đúng | 305 |
| 12.4 | Ứng suất và kiểm tra bền | 306 |
| 12.5 | Thanh có độ cong ban đầu | 308 |
| 12.6 | Cột chịu nén lệch tâm | 311 |
| 12.7 | Bài tập chương 12 | 314 |
| Chương 13 | TÁI TRỌNG ĐỘNG | 316 |
| 13.1 | Khái niệm chung | 316 |
| 13.2 | Thanh chuyển động với gia tốc là hằng số | 316 |
| 13.3 | Vô lăng quay đều | 319 |
| 13.4 | Dao động của hệ một bậc tự do | 322 |
| 13.5 | Tốc độ tới hạn của trục | 337 |
| 13.6 | Va chạm | 338 |
| 13.7 | Bài tập chương 13 | 352 |
| Chương 14 | TÍNH ĐỘ BỀN THEO TRẠNG THÁI GIỚI HẠN | 356 |
| 14.1 | Khái niệm chung | 356 |
| 14.2 | Tính hệ thanh chịu kéo nén đúng tâm | 358 |
| 14.3 | Tính dầm chịu uốn phẳng | 360 |
| 14.4 | Thanh tròn chịu xoắn | 364 |
| 14.5 | Bài tập chương 14 | 370 |
| Chương 15 | TÍNH ĐỘ BỀN KHI ỨNG SUẤT THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN | 373 |
| 15.1 | Khái niệm về ứng suất thay đổi và hiện tượng mỏi | 373 |
| 15.2 | Phân loại các đặc trưng của chu trình ứng suất | 375 |
| 15.3 | Giới hạn mỏi và biểu đồ giới hạn mỏi | 377 |
| 15.4 | Các yếu tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi | 382 |
| 15.5 | Tính điều kiện bền khi ứng suất thay đổi | 387 |
| 15.6 | Biện pháp nâng cao giới hạn mỏi | 391 |
| | PHỤ LỤC | 398 |
| | TÀI LIỆU THAM KHẢO | 403 |

LỜI NÓI ĐẦU

SỨC BỀN VẬT LIỆU là môn học cơ sở, cung cấp các khái niệm và kiến thức cho nhiều ngành kỹ thuật như xây dựng, cơ khí, thủy lợi, giao thông, hàng hải, hàng không... nên được giảng dạy rộng rãi trong nhiều trường đại học. Do vị trí đặc biệt của môn **SỨC BỀN VẬT LIỆU** trong hệ thống kiến thức của các ngành kỹ thuật nên việc nắm vững kiến thức môn học này càng có ý nghĩa cần thiết.

Trong những năm gần đây, khuynh hướng giảm bớt thời lượng của các môn học trở nên phổ biến trong các trường đại học trong lúc đòi hỏi lượng kiến thức ngày càng tăng. Giáo trình này được Bộ môn Sức bền Kết cấu của Trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh biên soạn dựa theo đề cương chương trình môn học Sức bền vật liệu với mong muốn góp phần phục vụ tốt hơn công tác đào tạo trong giai đoạn mới.

Giáo trình được viết trên tinh thần chọn lọc những nội dung cơ bản, thiết thực cho sinh viên các ngành kỹ thuật để phù hợp với thời lượng rút ngắn. Tuy nhiên, một số vấn đề được trình bày kỹ hoặc mở rộng để sinh viên có thể tự tìm hiểu sâu hơn.

Nội dung của giáo trình gồm 15 chương, cuối mỗi chương có một số bài tập chọn lọc để tiện sử dụng cho sinh viên.

Giáo trình **SỨC BỀN VẬT LIỆU** do PGS.TS Đỗ Kiến Quốc chủ biên và phân công như sau:

PGS.TS Đỗ Kiến Quốc: Chương 1, 11 và 12, tham gia một số nội dung trong các chương khác

PGS.TS Nguyễn Thị Hiền Lương: Chương 4, 5 và 6

PGS.TS Bùi Công Thành: Chương 2, 7 và 14

ThS Lê Hoàng Tuấn: Chương 3, 8 và 15

ThS Trần Tấn Quốc: Chương 9, 10 và 13

Các tác giả cảm ơn các cán bộ trẻ của bộ môn về sự tham gia nhiệt tình trong quá trình biên tập.

Khi biên soạn giáo trình này, các tác giả đã kế thừa có chọn lọc từ các sách về Sức bền vật liệu đã xuất bản trong nước, đồng thời cũng chú ý cập nhật và hiện đại hóa nội dung theo các tài liệu của các tác giả nước ngoài có uy tín được xuất bản trong thời gian gần đây. Tuy đã được biên tập cẩn thận trước khi in nhưng chắc chắn cuốn sách vẫn còn những thiếu sót nhất định. Chúng tôi mong nhận được sự góp ý của người đọc để tiếp tục hoàn chỉnh cuốn sách.

Địa chỉ liên hệ: Bộ môn Sức bền Kết cấu - Khoa Kỹ thuật Xây dựng, Trường Đại học Bách khoa - Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh số 268 Lý Thường Kiệt, Quận 10, TP Hồ Chí Minh.

Điện thoại: (08) 8.657.951

Chủ biên

PGS.TS Đỗ Kiến Qu.

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1 KHÁI NIỆM VỀ MÔN HỌC SỨC BỀN VẬT LIỆU

Sức bền vật liệu (SBVL) là môn học kỹ thuật cơ sở, nghiên cứu tính chất chịu lực của vật liệu để đề ra các phương pháp tính về độ bền, độ cứng và độ ổn định của các bộ phận công trình hay chi tiết máy - gọi chung là **vật thể** - chịu các tác động khác nhau như tải trọng, sự thay đổi của nhiệt độ và chế tạo không chính xác, nhằm thỏa mãn yêu cầu an toàn và tiết kiệm vật liệu.

Như vậy, mục đích của môn học này là *xây dựng các khái niệm và phương pháp tính, có khả năng dự báo trước về tình trạng chịu lực của vật thể cần thiết kế.*

Vật thể thỏa điều kiện bền nghĩa là không bị phá hoại (nứt gãy, sụp đổ...).

Vật thể thỏa điều kiện cứng nghĩa là biến dạng và chuyển vị nằm trong một giới hạn cho phép.

Vật thể thỏa điều kiện ổn định nghĩa là bảo toàn hình thức biến dạng ban đầu.

Để đảm bảo sự tin cậy của các phương pháp tính, môn học kết hợp chặt chẽ giữa nghiên cứu thực nghiệm và suy luận lý thuyết. Nghiên cứu thực nghiệm nhằm phát hiện ra tính chất ứng xử của các vật liệu và các dạng chịu lực khác nhau, làm cơ sở đề xuất các giả thiết đơn giản hơn để xây dựng lý thuyết. Cũng vì vậy, lý thuyết SBVL mang tính gần đúng và nếu quá trình suy diễn càng nhiều thì sự dự báo càng có khả năng sai lệch nhiều hơn. Trong nhiều trường hợp, người ta phải làm thí nghiệm trên mô hình công trình thu nhỏ trước khi xây dựng hoặc thử tải công trình trước khi đưa vào sử dụng.

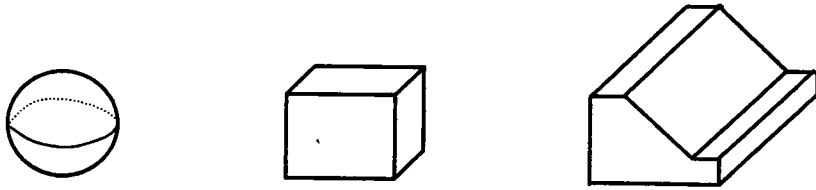
Thông thường, khi kích thước của vật thể lớn hơn thì khả năng chịu lực cũng tăng và do đó độ an toàn cũng được nâng cao; tuy nhiên, vật liệu phải dùng nhiều hơn nên nặng nề và tốn kém hơn. Kiến thức của môn SBVL giúp giải quyết hợp lý mâu thuẫn giữa yêu cầu an toàn và tiết kiệm vật liệu.

1.2 HÌNH DẠNG VẬT THỂ

Các vật thể được sử dụng trong kỹ thuật được chia ra ba loại cơ bản:

Khối: là những vật thể có kích thước theo ba phương tương đương.

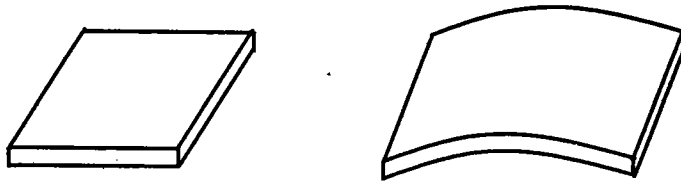
Ví dụ: Đê đập, móng máy...



Hình 1.1 Vật thể dạng khối

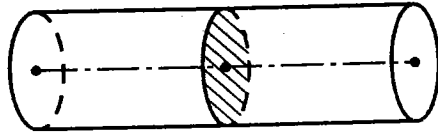
Tấm và vỏ: là những vật thể mỏng có kích thước theo một phương rất nhỏ so với hai phương còn lại; tấm có dạng phẳng, vỏ có dạng cong.

Ví dụ: Sàn nhà, mái vòm, vỏ nồi hơi, vỏ máy bay...



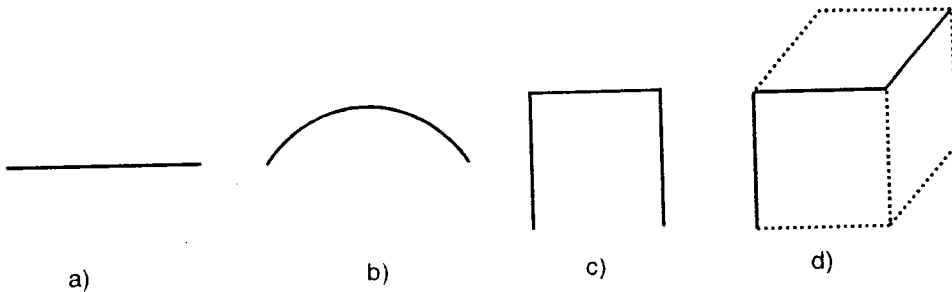
Hình 1.2 Vật thể dạng tấm vỏ

Thanh: là những vật thể hình dạng dài có kích thước theo một phương rất lớn so với hai phương còn lại. Đây là loại vật thể được dùng rộng rãi trong thực tế, như thanh của giàn cầu, cột điện, trục máy... và được nghiên cứu chủ yếu trong SBVL. Thanh được thay bằng trục thanh và mặt cắt vuông góc với trục thanh.



Hình 1.3 Trục thanh và mặt cắt ngang

Tùy theo trục thanh thẳng, cong, gãy khúc (phẳng hay không gian) mà gọi là thanh thẳng, thanh cong hay khung (phẳng hay không gian) như trên hình 1.4.



Hình 1.4 Các dạng trục thanh

1.3 NGOẠI LỰC. LIÊN KẾT VÀ PHẢN LỰC LIÊN KẾT

1- Ngoại lực

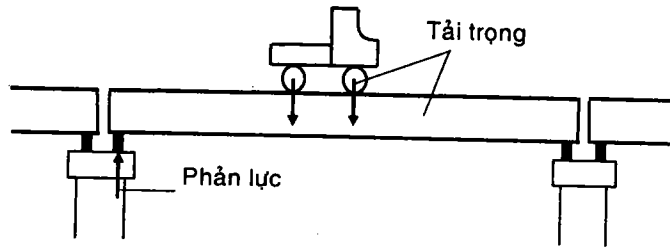
Ngoại lực là lực tác động từ môi trường hoặc vật thể bên ngoài lên vật thể đang xét. Đây là loại tác động quan trọng và thường gặp trong thực tế.

Ngoại lực được phân loại theo nhiều cách khác nhau:

- Theo tính chất chủ động và bị động

Ngoại lực được phân ra tải trọng và phản lực. Tải trọng là những lực chủ động, nghĩa là có thể biết trước về vị trí, phương và độ lớn. Tải trọng là "đầu vào" của bài toán, thường được quy định bởi các quy phạm thiết kế hoặc được tính toán theo kích thước của vật thể. Phản lực là những lực thụ động (phụ thuộc vào tải trọng), phát sinh tại vị trí liên kết vật thể đang xét với các vật thể xung quanh nó.

Vi dụ: về tải trọng và phản lực được minh họa trên hình 1.5. Trọng lượng xe và cầu là tải trọng, lực tác dụng ở gối đỡ là phản lực.



Hình 1.5 Tải trọng và phản lực

- Theo hình thức phân bố

Ngoại lực được phân ra lực tập trung và lực phân bố.

Lực tập trung: là lực tác dụng tại một điểm của vật thể. Trong thực tế, khi diện tích truyền lực bé thì người ta coi như lực truyền qua một điểm để đơn giản hoá sự phân tích. Ví dụ, trọng lượng một chiếc xe ô tô truyền xuống mặt cầu được thay bằng các lực tập trung đặt tại trọng tâm của diện tích tiếp xúc giữa các bánh xe và mặt cầu, hoặc phản lực tại mặt tiếp xúc của gối tựa cũng được thay bằng lực tập trung như hình 1.5.

Lực phân bố: là lực tác dụng trên một diện tích, một thể tích hoặc một đường của vật thể. Lực trọng trường là một ví dụ của lực phân bố thể tích vì nó tác động lên mọi điểm của trong vật thể. Cường độ của lực phân bố thể tích có thứ nguyên là lực/thể tích, hay $[F/L^3]$. Áp lực nước lên bể chứa hay áp lực đất lên tường chắn là minh họa cho lực phân bố diện tích. Cường độ lực phân bố diện tích có thứ nguyên là lực/điện tích, hay $[F/L^2]$. Khi lực phân bố trên một dải hẹp thì người ta thay lực phân bố diện tích bằng lực phân bố đường với cường độ lực có thứ nguyên là lực/chiều dài, hay $[F/L]$. Ví dụ, trọng lượng một thanh được thay bằng lực phân bố đường trên trục thanh. Lực phân bố đường là loại lực phân bố thường gặp trong bài toán SBVL. Các loại lực phân bố được minh họa trên hình 1.6.

- Theo tính chất tác dụng

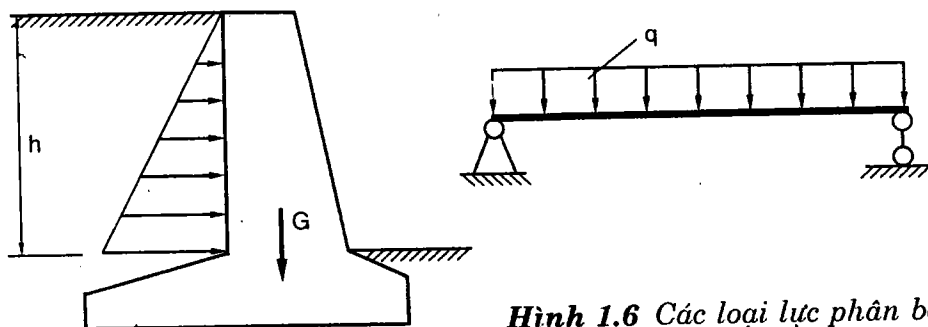
Ngoại lực được phân ra lực tĩnh và lực động. **Lực tĩnh** là lực biến đổi chậm hoặc không thay đổi theo thời gian, vì vậy gây ra gia tốc chuyển động rất bé có thể bỏ qua khi xét cân bằng. Áp lực đất lên tường chắn, trọng lượng của công trình là các lực tĩnh... **Lực động** là lực thay đổi nhanh theo thời gian, gây ra chuyển động có gia tốc lớn.

Ví dụ, rung động do một động cơ gây ra, va chạm của búa xuống đầu cọc, chuyển động của đoàn xe lửa trên cầu là các trường hợp lực động... Với lực động thì cần xét đến sự tham gia của lực quán tính trong phương trình cân bằng tĩnh học.

Trong SBVL, cả hai loại lực này đều được xét tới.

- Theo khả năng nhận biết

Ngoại lực được phân ra tải trọng tiên định hoặc ngẫu nhiên. *Tải trọng tiên định (deterministic loads)* là tải trọng biết trước giá trị hoặc quy luật thay đổi theo thời gian. Trọng lượng của một công trình, áp lực đất lên tường chắn là các tải trọng tiên định... Tải trọng ngẫu nhiên là tải trọng chỉ biết được các đặc trưng xác suất thống kê như giá trị trung bình, độ lệch chuẩn. Ví dụ, lực sóng tác dụng lên dàn khoan là ngẫu nhiên vì không thể xác định được quy luật biến đổi của nó theo thời gian; cường độ lực phụ thuộc vào chiều cao sóng là một đại lượng biến đổi ngẫu nhiên theo tốc độ gió. Trong SBVL chỉ xét đến tải trọng tiên định.



Hình 1.6 Các loại lực phân bố

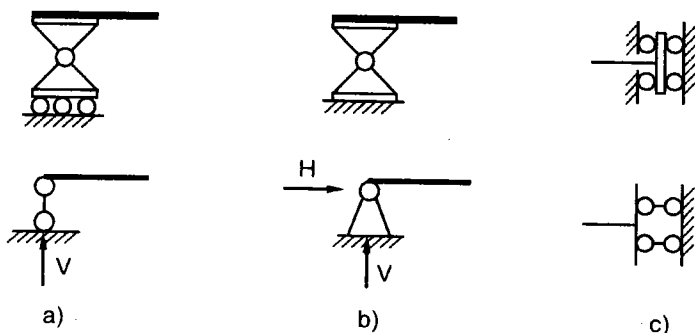
2- Liên kết và phản lực liên kết

Một thanh muốn duy trì hình dạng, vị trí ban đầu khi chịu tác động của ngoại lực thì nó phải được liên kết với vật thể khác hoặc với đất. Tùy theo tính chất ngăn cản chuyển động mà người ta đưa ra các sơ đồ liên kết, thường gặp là gối tựa di động, gối cố định hay ngàm như trên hình 1.7.

Gối di động (H.1.7a) chỉ ngăn cản một chuyển động thẳng và phát sinh một phản lực V theo phương của liên kết.

Gối cố định (H.1.7b) ngăn cản chuyển vị thẳng theo phương bất kì và phát sinh phản lực cũng theo phương đó. Phản lực thường được phân tích ra hai thành phần V và H .

Ngàm (H.1.7c) ngăn cản bất kì chuyển vị thẳng nào và chuyển vị xoay. Phản lực thường được phân tích ra ba thành phần V , H và M .



Hình 1.7 Liên kết và phản lực liên kết

Các thành phần phản lực được xác định từ điều kiện cân bằng tĩnh học. Bài toán phẳng có ba phương trình cân bằng độc lập, được thiết lập ở các dạng khác nhau như sau:

1. $\sum X = 0$; $\sum Y = 0$; $\sum M_O = 0$ (x, y không song song)
2. $\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$; $\sum M_C = 0$ (A, B, C không thẳng hàng)
3. $\sum X = 0$; $\sum M_A = 0$; $\sum M_B = 0$ (AB không vuông góc với x)

Bài toán không gian có sáu phương trình cân bằng độc lập, thường có dạng:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & \sum Y &= 0; & \sum Z &= 0 \\ \sum M_x &= 0; & \sum M_y &= 0; & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

1.4 CÁC DẠNG CHỊU LỰC VÀ BIẾN DẠNG CƠ BẢN

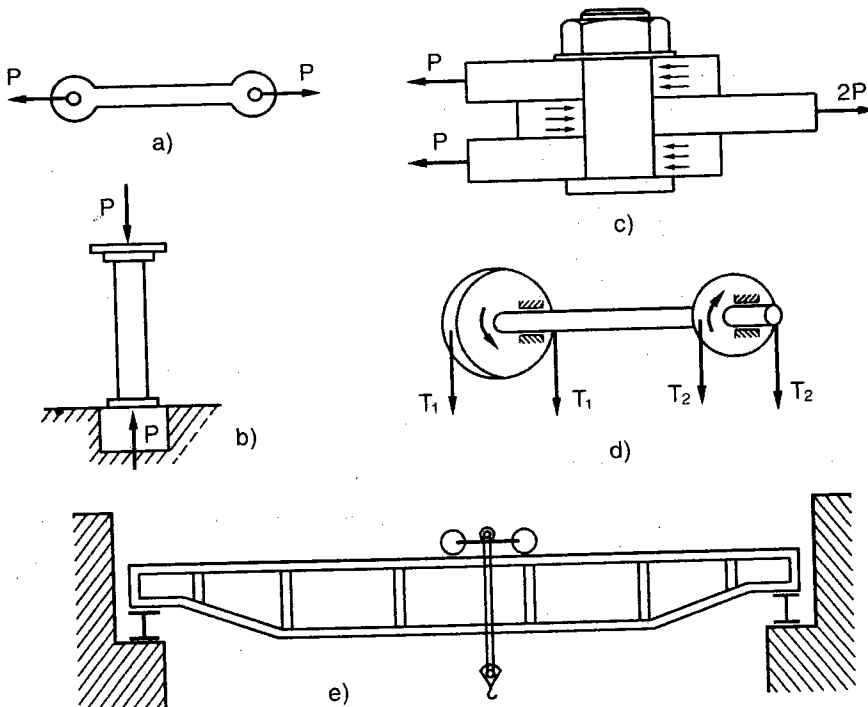
Trong thực tế, sự chịu lực của một thanh có thể phân tích ra các dạng chịu lực cơ bản gồm kéo (nén), xoắn, cắt và uốn như được minh họa trên hình 1.8. Trục thanh khi chịu kéo hoặc nén sẽ dãn dài hoặc

co ngắn; khi chịu uốn sẽ bị cong đi như hình 1.8e, còn thanh chịu xoắn thì trục thanh vẫn thẳng nhưng đường sinh trên bề mặt trở thành đường xoắn trụ. Khi chịu cắt, hai phần của thanh có xu hướng trượt đối với nhau. Ở các chương sau, các dạng chịu lực cơ bản này sẽ lần lượt được nghiên cứu.

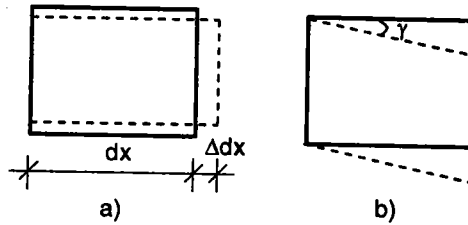
Nếu tưởng tượng tách một phân tố hình hộp từ một thanh chịu lực thì sự biến dạng của nó trong trường hợp tổng quát có thể phân tích ra hai thành phần cơ bản, gồm biến dạng dài và biến dạng góc như trên hình 1.9.

Phân tố trên hình 1.9a chỉ thay đổi chiều dài, không thay đổi góc. Chiều dài dx ban đầu của phân tố bị dãn dài (hay co ngắn) một lượng Δdx . Biến dạng dài tương đối theo phương x , ký hiệu là ϵ_x , được định nghĩa bởi tỉ số Δdx và dx :

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} \quad (1.1)$$



Hình 1.8 Các dạng chịu lực cơ bản



Hình 1.9 Các biến dạng cơ bản

Phân tử trên hình 1.9b chỉ có thay đổi góc, không thay đổi chiều dài. Độ thay đổi của góc vuông ban đầu gọi là biến dạng góc hay góc trượt, ký hiệu là γ .

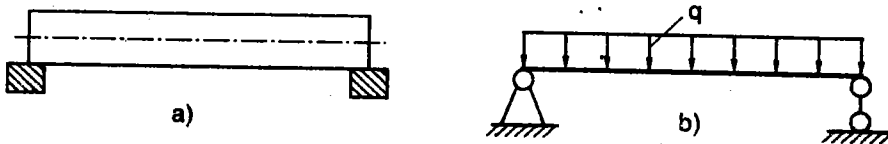
Khi vật thể bị biến dạng, các điểm trong vật thể nói chung bị thay đổi vị trí. Độ chuyển dời từ vị trí cũ sang vị trí mới của một điểm được gọi là chuyển vị dài. Góc hợp bởi vị trí của một đoạn thẳng trước và trong khi biến dạng của vật thể được gọi là chuyển vị góc.

1.5 CÁC GIẢ THIẾT

Khi giải bài toán SBVL, người ta chấp nhận một số giả thiết nhằm đơn giản hóa vấn đề nhưng cố gắng đảm bảo sự chính xác cần thiết phù hợp với yêu cầu thực tế. Các giả thiết này liên quan đến sơ đồ hình học của vật thể, tính chất của vật liệu và tính chất biến dạng, chuyển vị của vật thể.

1- Giả thiết về sơ đồ tính

Khi tính toán, người ta thay vật thể thực bằng sơ đồ tính. Ví dụ, thanh chịu tải trọng bản thân trên hình 1.10a được thay bằng sơ đồ trên hình 1.10b.



Hình 1.10 Sơ đồ tính của dầm

Trong trường hợp này, vật thể thanh được thay bằng trục thanh, tiết diện thanh thay bằng các đặc trưng hình học (sẽ được nghiên cứu

trong chương sau), liên kết tựa được thay bằng các gối cố định và di động, trọng lượng bản thân thay bằng lực phân bố đều.

2- Giả thiết về vật liệu

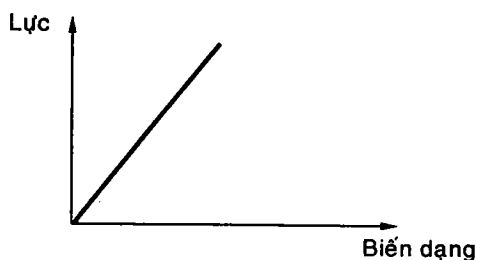
Vật liệu được coi là liên tục, đồng nhất, đẳng hướng và đàn hồi tuyến tính.

Ta tưởng tượng lấy một phân tử bao quanh một điểm trong vật thể. Nếu cho phân tử *bé tùy ý* mà vẫn chứa vật liệu thì ta nói vật liệu *liên tục* tại điểm đó. Giả thiết về sự liên tục của vật liệu làm cơ sở để xây dựng khái niệm ứng suất và biến dạng tại một điểm, cho phép sử dụng các phép tính của toán giải tích như giới hạn, vi phân, tích phân... Vật liệu liên tục là mô hình toán học của vật liệu thật, có các đặc trưng cơ học giống như các đặc trưng vĩ mô (xác định trên một thể tích vật liệu đủ lớn) tương ứng của vật liệu thật. Trong thực tế, ngay cả với vật liệu được coi là hoàn hảo nhất như kim loại thì cũng có cấu trúc vi mô (chẳng hạn, từ mức độ mạng tinh thể trở đi) không liên tục theo nghĩa toán học. Giả thiết này giúp cho SBVL tránh được việc khảo sát cấu trúc vi mô của vật liệu thật, là việc rất phức tạp, thậm chí không làm được.

Vật liệu *đồng nhất* nghĩa là tính chất cơ học tại mọi điểm trong vật thể là như nhau, vật liệu *đẳng hướng* nghĩa là tính chất cơ học tại một điểm theo các phương đều giống nhau. Tính chất cơ học được đặc trưng bởi các hằng số vật liệu như mô đun đàn hồi, hệ số biến dạng hông, giới hạn đàn hồi... Thực ra, cấu trúc vi mô của vật liệu thật không hoàn toàn đồng nhất và đẳng hướng, nhưng sự sắp xếp của chúng thường là ngẫu nhiên theo mọi hướng, nên nếu vật thể có kích thước đủ lớn thì giả thiết trên nói chung chấp nhận được. Các đặc trưng cơ học của vật liệu dùng trong thực tiễn đều mang ý nghĩa trung bình cho một thể tích vật liệu đủ lớn, không xét tới cấu trúc vi mô của vật liệu thật tại từng điểm. Vì vậy, ứng suất và biến dạng tìm được tại một điểm cũng có ý nghĩa trung bình. Tuy nhiên, có những vật liệu có cấu trúc dị hướng rõ rệt như gỗ, vật liệu composite nền nhựa sợi thủy tinh có định hướng... thì cần thiết xét tỉ mỉ đến cấu trúc vật liệu khi phân tích bài toán cơ học.

Một vật thể thật sẽ có thay đổi hình dạng dưới tác dụng của ngoại lực. Tính chất *đàn hồi* của vật thể là khả năng khôi phục lại

hình dạng ban đầu của nó khi ngoại lực thôi tác dụng. Nếu quan hệ giữa ngoại lực và biến dạng là bậc nhất, thì vật liệu được gọi là *đàn hồi tuyến tính* như minh họa trên hình 1.11.



Hình 1.11 *Đàn hồi tuyến tính*

Đối với các vật liệu, quan hệ *ứng suất - biến dạng* cho đến khi phá hoại nói chung là những đường cong. Nếu giới hạn biến dạng trong một phạm vi đủ bé thì quan hệ này là một đường thẳng (chẳng hạn đối với thép) hoặc có thể xấp xỉ bằng một đường thẳng. Giả thiết vật liệu đàn hồi tuyến tính làm giảm bớt sự phức tạp của bài toán SBVL.

3- Giả thiết về biến dạng và chuyển vị

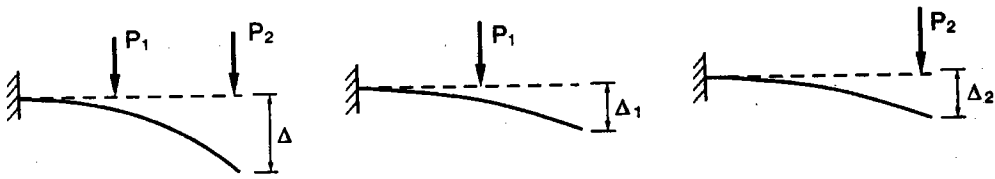
Khi chịu tác động bên ngoài, vật thể có *biến dạng và chuyển vị* bé. Vì vậy, có thể khảo sát sự cân bằng của vật thể hoặc các bộ phận của nó trên hình dạng ban đầu.

Giả thiết này xuất phát từ điều kiện cứng của các vật thể (như công trình, các bộ phận máy móc...) được sử dụng trong thực tế kỹ thuật. Điều kiện cứng đòi hỏi biến dạng và chuyển vị lớn nhất trong vật thể phải nằm trong một giới hạn tương đối nhỏ. Giả thiết *biến dạng bé và đàn hồi tuyến tính* thường đi với nhau. Khi biến dạng lớn thì vật liệu thường thể hiện tính chất đàn hồi phi tuyến hoặc đàn dẻo và bài toán trở nên phức tạp hơn.

Khi vật thể có chuyển vị bé và vật liệu đàn hồi tuyến tính thì có thể áp dụng *nguyên lý cộng tác dụng* như sau:

Một đại lượng do nhiều nguyên nhân đồng thời gây ra sẽ bằng tổng đại lượng đó do tác động của các nguyên nhân riêng lẻ.

Ví dụ: Xét thanh chịu uốn như trên hình 1.12.



Hình 1.12 Nguyên lý cộng tác dụng

Chuyển vị Δ tại đầu thanh do lực P_1 và P_2 gây ra có thể phân tích như sau:

$$\Delta(P_1, P_2) = \Delta_1(P_1) + \Delta_2(P_2) \quad (1.2)$$

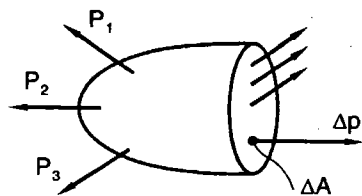
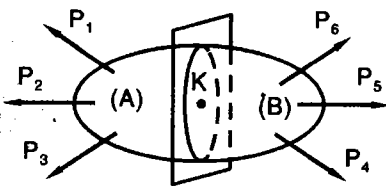
Nguyên lý cộng tác dụng biến bài toán phức tạp thành các bài toán đơn giản nên dễ giải quyết hơn. Vì vậy, nó thường được sử dụng trong SBVL.

LÝ THUYẾT NỘI LỰC

2.1 KHÁI NIỆM VỀ NỘI LỰC - PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT - ỨNG SUẤT

Xét một vật thể chịu tác dụng của một hệ lực và ở trạng thái cân bằng như trên hình 2.1. Trước khi tác dụng lực, giữa các phân tử của vật thể luôn tồn tại các lực tương tác giữ cho vật thể có hình dáng nhất định. Dưới tác dụng của ngoại lực, các phân tử của vật thể có khuynh hướng nhích lại gần nhau hơn hoặc tách xa. Khi đó, lực tương tác giữa các phân tử của vật thể phải thay đổi để chống lại với khuynh hướng dịch chuyển này. Sự thay đổi của lực tương tác giữa các phân tử trong vật thể được gọi là *nội lực*. Một vật thể không chịu tác động nào từ bên ngoài như ngoại lực, sự thay đổi nhiệt độ... thì được gọi là vật thể ở *trạng thái tự nhiên* và nội lực của nó được coi là bằng không.

Người ta dùng *phương pháp mặt cắt* để khảo sát nội lực trong một vật thể. Xét lại vật thể cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực trên hình 2.1. Tưởng tượng một mặt phẳng Π cắt qua và chia vật thể thành hai phần A và B; hai phần này sẽ tác động lẫn nhau bằng hệ lực phân bố trên diện tích mặt tiếp xúc theo định luật lực và phản lực. Nếu ta tách riêng phần A thì hệ lực tác động từ phần B vào nó phải cân bằng với ngoại lực ban đầu như trên hình 2.2.



Hình 2.1 Vật thể chịu lực cân bằng **Hình 2.2** Nội lực trên mặt cắt

Bây giờ ta lại xét một phân tố diện tích ΔA bao quanh điểm khảo sát K trên mặt cắt Π có phương pháp tuyến v . Gọi Δp là véc tơ nội lực tác dụng trên ΔA . Ta định nghĩa ứng suất toàn phần tại điểm khảo sát là:

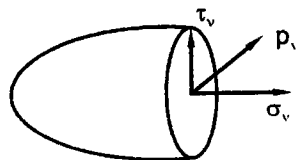
$$p_v = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta A} = \frac{dp}{dA}$$

Thứ nguyên của ứng suất là $[lực]/[chiều dài]^2$ ($N/m^2, N/cm^2 \dots$). Chú ý rằng, định nghĩa ứng suất như trên đòi hỏi sự liên tục của vật liệu, như đã được giả thiết trong chương trước.

Ta có thể phân ứng suất toàn phần p_v ra hai thành phần gồm thành phần ứng suất pháp σ_v hướng theo phương pháp tuyến và thành phần ứng suất tiếp τ_v nằm trong mặt phẳng Π như thể hiện trên hình 2.3. Các đại lượng này liên hệ với nhau theo biểu thức:

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2 \quad (2.1)$$

Ứng suất là một đại lượng cơ học đặc trưng cho mức độ chịu đựng của vật liệu tại một điểm; ứng suất vượt quá một giới hạn nào đó thì vật liệu bị phá hoại. Vì vậy, việc xác định ứng suất là cơ sở để đánh giá mức độ an toàn của vật liệu, và đây là một nội dung quan trọng của môn SBVL.



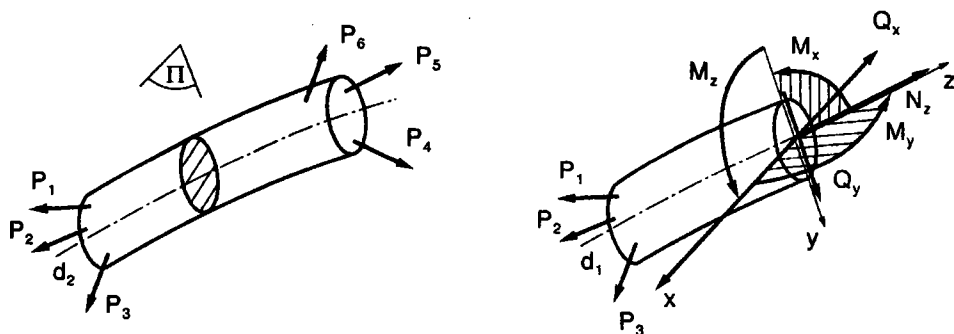
Hình 2.3 Các thành phần ứng suất

2.2 CÁC THÀNH PHẦN NỘI LỰC VÀ CÁCH XÁC ĐỊNH

Như đã xác định trong chương 1, đối tượng khảo sát của SBVL là những chi tiết dạng thanh, đặc trưng bởi mặt cắt ngang (hay còn gọi là tiết diện) và trục thanh. Ta có thể dời nội lực phân bố trên mặt cắt ngang của thanh về trọng tâm C của mặt cắt và thu được các véc tơ hợp lực R và mômen M . Nói chung các véc tơ R và M có phương bất kỳ trong không gian.

Giả sử định nghĩa một hệ trục tọa độ ngay tại trọng tâm mặt cắt, $Cxyz$, sao cho trục z trùng với phương pháp tuyến của mặt cắt ngang, còn hai trục kia nằm trong mặt cắt ngang. Khi đó ta có thể

phân tích *véc tơ* R ra ba thành phần theo ba trục: thành phần theo phương trục z , ký hiệu N_z , gọi là *lực dọc*, hai thành phần nằm trong mặt cắt và hướng theo trục x và y , ký hiệu là Q_x và Q_y , được gọi là *lực cắt*. Véc tơ mômen M cũng được phân tích ra ba thành phần quay quanh ba trục được ký hiệu là M_x , M_y , và M_z . Các mômen M_x và M_y được gọi là mômen uốn, còn mômen M_z được gọi là mômen xoắn. Sáu thành phần này được gọi là *các thành phần nội lực* trên mặt cắt ngang như được minh họa trên hình 2.4.



Hình 2.4 Các thành phần nội lực

Sáu thành phần nội lực trên một mặt cắt ngang được xác định từ sáu phương trình cân bằng độc lập của phần vật thể được tách ra, trên đó có tác dụng của ngoại lực ban đầu và các thành phần nội lực. Sử dụng các phương trình cân bằng hình chiếu các lực trên các trục tọa độ, ta được:

$$\begin{aligned} N_z + \sum_{i=1}^n P_{iz} &= 0 \\ Q_y + \sum_{i=1}^n P_{iy} &= 0 \\ Q_x + \sum_{i=1}^n P_{ix} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

trong đó: P_{ix} , P_{iy} , P_{iz} là hình chiếu của lực P_i xuống các trục x , y , z .

Dùng các phương trình cân bằng mômen đối với các trục tọa độ ta có:

$$\begin{aligned}
 M_x + \sum_{i=1}^n m_x(P_i) &= 0 \\
 M_y + \sum_{i=1}^n m_y(P_i) &= 0 \\
 M_z + \sum_{i=1}^n m_z(P_i) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

trong đó: $m_x(P_i)$, $m_y(P_i)$, $m_z(P_i)$ - các mômen của các lực P_i đối với các trục x , y , z .

Các thành phần nội lực có liên hệ với các thành phần ứng suất như sau:

- Lực dọc là tổng các ứng suất pháp
- Lực cắt là tổng các ứng suất tiếp cùng phương với nó
- Mômen uốn là tổng các mômen gây ra bởi các ứng suất đối với trục x hoặc y
- Mômen xoắn là tổng các mômen của các ứng suất tiếp đối với trục z .

Nếu gọi σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} , là các thành phần ứng suất tại điểm $M(x,y)$ trên mặt cắt ngang, ta có các biểu thức sau:

$$\begin{aligned}
 N_z &= \int_A \sigma_z dA & M_x &= \int_A \sigma_z y dA \\
 Q_y &= \int_A \tau_{zy} dA & M_y &= \int_A \sigma_z x dA \\
 Q_x &= \int_A \tau_{zx} dA & M_z &= \int_A (\tau_{zx} \cdot y - \tau_{zy} \cdot x) dA
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

trong đó: dA là phân tố diện tích bao quanh điểm $M(x,y)$.

Nhờ các quan hệ (2.4) mà có thể tìm được các thành phần ứng suất khi biết các thành phần nội lực.

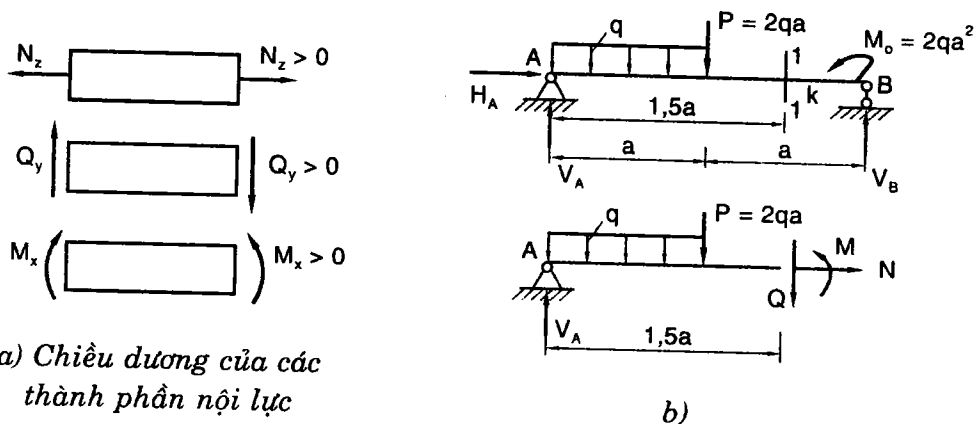
Trong trường hợp bài toán phẳng - trường hợp được xét chủ yếu trong các chương sau - ta chỉ có ba thành phần nội lực nằm trong mặt phẳng yz , bao gồm N_z , Q_y , M_x . Qui ước dấu của các thành phần nội lực này như sau:

- Lực dọc được xem là dương khi có chiều hướng ra ngoài mặt cắt (nghĩa là gây kéo cho đoạn thanh đang xét).

- Lực cắt được xem là dương khi có khuynh hướng làm quay đoạn thanh đang xét theo chiều kim đồng hồ.

- Mômen uốn được xem là dương khi nó làm căng thớ dưới.

Trên hình 2.5a minh họa các nội lực của bài toán phẳng đặt theo chiều dương.



Hình 2.5

Ví dụ 2.1 Cho một thanh AB chịu tác dụng của các lực như trên hình 2.5b với các trị số của ngoại lực như sau: $q = 10 \text{ kN/m}$, $a = 1 \text{ m}$, $M_o = 2qa^2$. Xác định các trị số nội lực tại mặt cắt 1-1.

Giải phóng các liên kết và thay vào đó bằng các phản lực liên kết V_A , H_A , V_B . Xét điều kiện cân bằng của toàn thanh dưới tác dụng của ngoại lực và phản lực liên kết, hệ phải cân bằng. Áp dụng các điều kiện cân bằng của một hệ lực phẳng, ta suy ra các thành phần phản lực liên kết như sau:

$$H_A = 0$$

$$V_A = \frac{11}{4} qa = 27,5 \text{ kN}$$

$$V_B = \frac{1}{4} qa = 2,5 \text{ kN}$$

Mặt cắt 1-1 chia thanh làm hai phần. Xét sự cân bằng của phần bên trái ta được:

$$\sum F/z = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum F/y = 0$$

$$\Rightarrow V_A - qa - P - Q = 0 \Rightarrow Q = -\frac{1}{4}qa = -2,5 \text{ kN}$$

$$\sum M/k = 0$$

$$\Rightarrow M = V_A \times 1,5a - qa \times a - 2qa \times \frac{a}{2} = \frac{17}{8}qa^2 = 21,25 \text{ kNm}$$

Nếu xét sự cân bằng của phần bên phải, ta tìm lại các kết quả trên. Thật vậy:

$$\sum F/z = 0 \Rightarrow N_z = 0$$

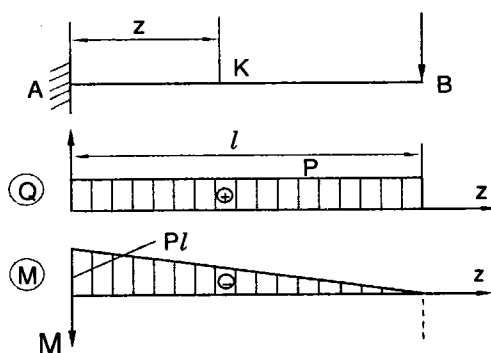
$$\sum F/y = 0 \Rightarrow V_B + Q = 0 \Rightarrow Q = -V_B = -\frac{1}{4}qa = -2,5 \text{ kN}$$

$$\sum M/k = 0 \Rightarrow M = \frac{1}{4}qa \times (0,5a) + 2qa^2 = \frac{17}{8}qa^2 = 21,25 \text{ kNm.}$$

2.3 BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

Thông thường, các nội lực trên mọi mặt cắt ngang của một thanh là không giống nhau. Đường cong biểu diễn sự biến thiên của các nội lực theo vị trí của các mặt cắt gọi là biểu đồ nội lực. Nhờ vào biểu đồ này ta có thể xác định vị trí mặt cắt có trị số nội lực lớn nhất cũng như trị số đó là bao nhiêu.

Để vẽ biểu đồ nội lực ta sử dụng mặt cắt cắt ngang thanh ở một vị trí bất kỳ có tọa độ z . Xét sự cân bằng của một phần, ta viết được biểu thức giải tích của nội lực theo z . Sau đó vẽ đường biểu diễn trên hệ trục tọa độ có trục hoành song song với trục thanh mà ta gọi là đường chuẩn, còn tung độ của biểu đồ nội lực sẽ được diễn tả bởi các đoạn thẳng vuông góc các đường chuẩn.



Hình 2.6

Ví dụ 2.2 Biểu đồ nội lực của dầm nút thừa chịu tác dụng của lực tập trung P .

Biểu thức giải tích của lực cắt và mômen uốn tại mặt cắt K cách A một đoạn z cho bởi:

$$Q_y(z) = p; \quad M_x(z) = -P.KB = -P(l - z) \quad (2.5)$$

Cho z biến thiên từ 0 đến l , ta sẽ được biểu đồ nội lực như trên hình 2.6. Cần lưu ý là với biểu đồ lực cắt Q tung độ dương được lấy về phía trên của trục hoành, còn với biểu đồ mômen uốn M tung độ dương được biểu diễn về phía dưới của trục hoành. Với cách biểu diễn như trên, ta muốn tung độ của biểu đồ mômen luôn ở về phía thớ căng của thanh.

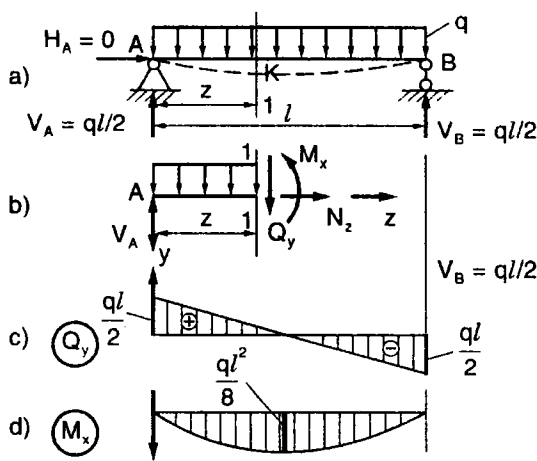
Ví dụ 2.3 Biểu đồ nội lực của dầm đơn giản chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều q (H.2.7a).

Loại bỏ các liên kết tại A và B thay vào bằng các phản lực như trên hình vẽ. Dùng các phương trình cân bằng để xác định các phản lực này. Vì tải trọng chỉ tác dụng theo phương đứng nên thành phần phản lực ngang tại A, H_A sẽ bằng không. Do tính chất đối xứng, các phản lực đứng tại A và B bằng nhau và có trị số:

$$V_A = V_B = \frac{ql}{2} \quad (2.6)$$

Xác định các hệ trục tọa độ như trên hình 2.7. Xét nội lực trên một mặt cắt ngang K nào đó có hoành độ là z .

Tưởng tượng mặt cắt 1-1 ngang qua K và chia thanh làm hai phần. Xét sự cân bằng của phần bên trái AK dưới tác dụng của lực phân bố q , phản lực liên kết V_A và các thành phần nội lực theo chiều dương quy ước (H.2.7b).



Hình 2.7

Từ các phương trình cân bằng ta suy ra:

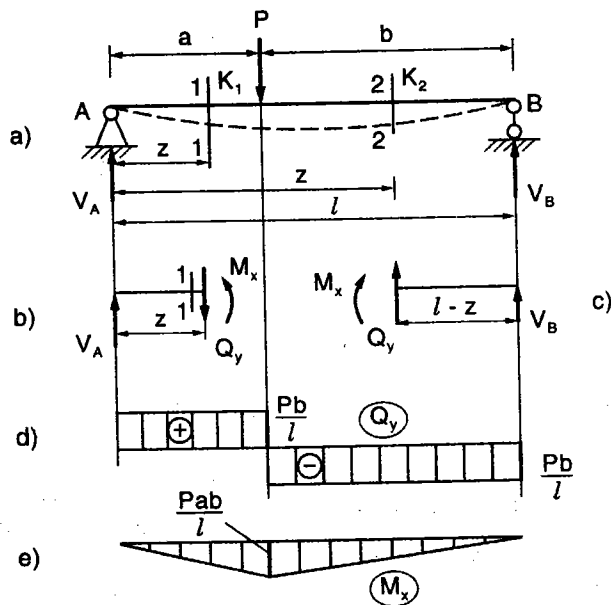
$$\begin{cases} N_z = 0 \\ Q_y = \frac{ql}{2} - qz = q\left(\frac{l}{2} - z\right) \\ M_x = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} = \frac{qz}{2}(l - z) \end{cases} \quad (2.7)$$

Cho z biến thiên từ 0 đến l ta sẽ vẽ được các biểu đồ nội lực như trên hình vẽ. Qua các biểu đồ nội lực chúng ta nhận thấy lực cắt có giá trị lớn nhất ở mặt cắt sát gối tựa, còn mômen uốn lại có giá trị cực đại ở giữa dầm.

Ví dụ 2.4 Dầm đơn giản chịu lực tải tập trung P như hình 2.8a. Các thành phần phản lực tại các gối tựa là:

$$H_A = 0; V_A = \frac{Pb}{l}; V_B = \frac{Pa}{l} \quad (2.8)$$

Vì tải trọng có phương vuông góc với trục thanh nên lực dọc trên mọi mặt cắt ngang có trị số bằng không.



Hình 2.8

Xét nội lực trên mặt cắt 1-1 cắt qua thanh tại điểm K_1 trong đoạn AC và cách gối tựa A một đoạn z . Xét sự cân bằng của phần bên trái ta được các biểu thức giải tích của nội lực:

$$\begin{cases} Q_y = V_A = \frac{Pb}{l} = \frac{P(l-a)}{l} \\ M_x = V_A \cdot z = \frac{Pb}{l} z = \frac{P(l-a)}{l} z \end{cases} \quad (2.9)$$

Các phương trình trên chỉ đúng với những mặt cắt trong đoạn AC, nghĩa là chỉ đúng khi z biến thiên từ 0 đến a . Vì nếu xét một mặt cắt 2-2 bất kỳ trong đoạn CB mà vẫn xét cân bằng của phần bên trái, nội lực trên mặt cắt không những phụ thuộc vào phản lực V_A mà còn phụ thuộc vào lực tập trung P . Do vậy nội lực trên đoạn BC phải được tính với biểu thức khác. Thay vì tính nội lực trên mặt cắt 2-2 bằng cách xét phần bên trái, ta cũng có thể xét sự cân bằng của phần bên phải (tức đoạn K_2B). Khi đó khoảng cách từ mặt cắt 2-2 tới gối tựa phải là $l-z$.

$$\begin{cases} Q_y = -V_B = -\frac{Pa}{l} \\ M_x = V_B(l-z) = \frac{Pa}{l}(l-z) \end{cases} \quad (2.10)$$

Các phương trình này chỉ đúng với những mặt cắt 2-2 trong đoạn CB, nghĩa là chỉ đúng khi z biến thiên trong khoảng $(a; l)$.

Từ (2.9) và (2.10) ta dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực như hình 2.8d,e. Trường hợp đặc biệt nếu $a = b = \frac{1}{2}l$, khi đó mômen cực đại xảy ra tại giữa dầm và có giá trị:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}$$

Ví dụ 2.5 Dầm đơn giản chịu tác dụng mômen tập trung M_o như hình 2.9a.

Xét cân bằng của toàn dầm ABC ta suy ra được các phản lực liên kết tại A và B là:

$$H_A = 0; V_A = V_B = \frac{M_o}{l} \quad (2.11)$$

và chúng có chiều như hình 2.9a.

Để tính nội lực trên đoạn AC, ta dùng mặt cắt 1-1 ở cách gối tựa A một đoạn z và xét cân bằng của đoạn AK_1 phía bên trái.

Các biểu thức nội lực như sau:

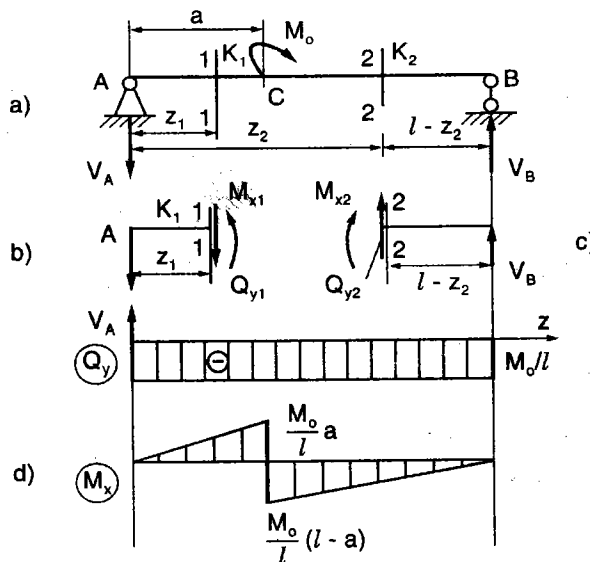
$$\begin{cases} Q_{y1} = -V_A = -\frac{M_o}{l} \\ M_{x1} = -V_A z_1 = -\frac{M_o}{l} z_1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Các phương trình này chỉ có giá trị ứng với $0 \leq z_1 \leq a$. Mômen uốn M_{x1} mang dấu âm vì nó làm căng thớ trên của thanh và khi vẽ biểu đồ mômen uốn ta sẽ vẽ về phía trên.

Tương tự mặt cắt 2-2 trong đoạn CB ở cách gối tựa trái một đoạn z_2 hay cách gối tựa B một đoạn $l - z_2$. Xét sự cân bằng của phần bên phải K_2B ta tìm được các biểu thức nội lực trên mặt cắt 2-2 là:

$$\begin{cases} Q_{y2} = -V_B = -\frac{M_o}{l} \\ M_{x2} = V_B(l - z_2) = \frac{M_o}{l}(l - z_2) \end{cases} \quad (2.13)$$

Các phương trình này ứng với các giá trị của z_2 trong khoảng $a \leq z_2 \leq l$. Từ các biểu thức của nội lực trong hai đoạn ta vẽ được biểu đồ nội lực như trên hình 2.9d-e.



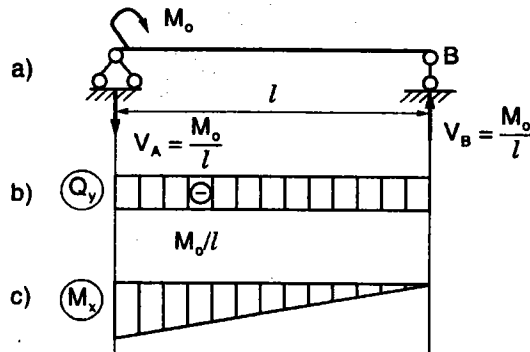
Hình 2.9

Trường hợp đặc biệt khi mômen tập trung đặt tại mặt cắt ở gối tựa, khi đó Q_y và M_x được xác định bằng các công thức trong một khoảng tương ứng. Chẳng hạn khi mômen M_0 đặt tại A (H.2.10), Q_y và M_x sẽ được xác định bởi (2.13) ứng với $\alpha = 0$.

Qua các ví dụ trên chúng ta rút được các nhận xét sau:

a) Tại nơi nào có lực tập trung, tại nơi đó biểu đồ lực cắt có bước nhảy. Trị số của bước nhảy bằng chính lực tập trung.

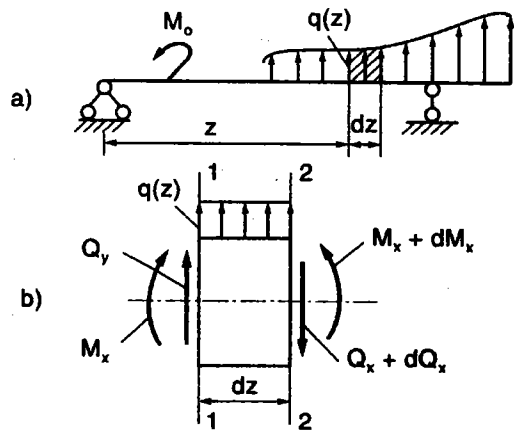
b) Tại nơi nào có mômen tập trung, tại nơi đó biểu đồ mômen uốn có bước nhảy. Trị số của bước nhảy bằng chính mômen tập trung.



Hình 2.10

2.4 LIÊN HỆ VI PHÂN GIỮA NỘI LỰC VÀ TẢI TRỌNG PHÂN BỐ

Xét một dầm chịu tải trọng bất kỳ (H.2.11a). Giữa cường độ của tải trọng phân bố $q(z)$, lực cắt Q_y và mômen uốn M_x tại một mặt cắt bất kỳ z , sẽ tồn tại các liên hệ vi phân nhất định mà thông qua các biểu thức (2.7), (2.9), (2.10), ta nhận thấy là đạo hàm của mômen uốn là lực cắt, đạo hàm của lực cắt là lực phân bố.



Hình 2.11

Thật vậy, xét đoạn thanh vi phân có chiều dài dz , được giới hạn bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2 như trên hình 2.11b. Nội lực tác dụng trên mặt cắt 1-1 là Q_y và M_x . Nội lực tác dụng trên mặt cắt 2-2 so với mặt cắt 1-1 đã tăng một lượng vi phân dQ_y và dM_x và trở thành $Q_y + dQ_y$, $M_x + dM_x$. Tải trọng tác dụng trên thanh này là lực phân bố theo chiều dài có cường độ $q(z)$ hướng theo chiều dương như hình 2.11b. Vì dz là rất bé nên có thể xem tải trọng là phân bố đều trên đoạn dz .

Viết phương trình cân bằng hình chiếu các lực trên phương thẳng đứng ta có:

$$Q_y + q(z)dz - (Q_y + dQ_y) = 0$$

Từ đó ta suy ra:

$$q(z) = \frac{dQ_y}{dz} \quad (2.14)$$

Vậy: “Đạo hàm của lực cắt là lực phân bố theo chiều dài”.

Lực phân bố được xem là dương nếu có chiều hướng lên trên. Ngược lại, được xem là âm nếu có chiều hướng xuống.

Viết phương trình cân bằng đối với trọng tâm mặt cắt 2-2 ta được:

$$Q_y dz + q(z) \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + M_x - (M_x + dM_x) = 0$$

Bỏ qua lượng vô cùng bé bậc hai $q(z) \cdot \frac{dz^2}{2}$ ta suy ra:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y \quad (2.15)$$

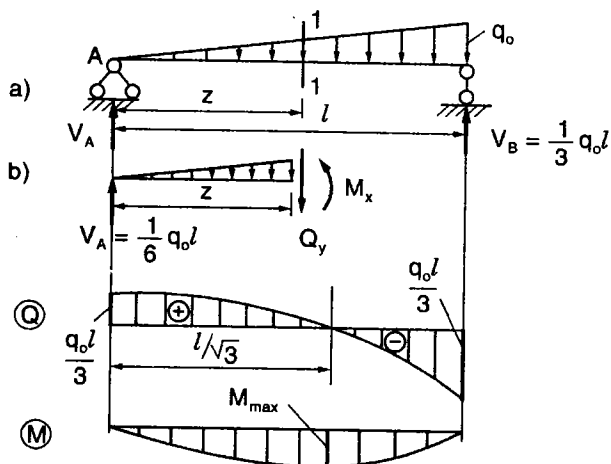
Vậy: “Đạo hàm của mômen uốn tại một mặt cắt bằng lực cắt tại mặt cắt đó”.

Từ (2.14) và (2.15) ta rút ra được:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q(z) \quad (2.16)$$

nghĩa là: “Đạo hàm bậc hai của mômen uốn tại một điểm chính là bằng cường độ của tải trọng phân bố tại điểm đó”.

Ví dụ 2.6 Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm đơn giản AB chịu tác dụng của tải phân bố bậc nhất như hình 2.12.



Hình 2.12

Giải

- *Xác định phản lực liên kết:* xét cân bằng của toàn thanh, ta thấy tại A thành phần phản lực ngang $H_A = 0$, các thành phần thẳng đứng được xác định như sau:

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow V_A l = \frac{1}{2} \times q_0 l \times \frac{l}{3} \Rightarrow V_A = \frac{1}{6} q_0 l$$

$$\sum F/y = 0 \Rightarrow V_B = \frac{1}{3} q_0 l$$

- *Cường độ của lực phân bố ở mặt cắt 1-1 cách gốc A một đoạn z cho bởi:*

$$q(z) = q_0 \frac{z}{l} \quad (2.17)$$

Từ các liên hệ vi phân (2.14) và (2.15) ta biết được biểu đồ lực cắt sẽ có dạng bậc 2 và biểu đồ mômen uốn có dạng bậc 3.

Thật vậy, tưởng tượng dùng mặt cắt 1-1 và xét sự cân bằng của phần bên trái (H.2.12b). Phương trình cân bằng hình chiếu theo phương thẳng đứng cho ta biểu thức giải tích của lực cắt như sau:

$$Q_y = V_A - q(z) \frac{z}{2} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 z^2}{2l} \quad (2.18)$$

Phương trình cân bằng tổng mômen của các lực đối với trọng tâm mặt cắt 1-1 cho ta suy ra biểu thức giải tích của mômen như sau:

$$M_x = \frac{q_0 l}{6} z - q(z) \times \frac{z}{2} \times \frac{z}{3} = \frac{q_0 l}{6} z - \frac{q_0 z^3}{6l} \quad (2.19)$$

Từ (2.18) và (2.19) ta vẽ được biểu đồ lực cắt và mômen cho dầm đã cho. Các biểu đồ này có tính chất như sau:

- Biểu đồ lực cắt Q_y có dạng bậc 2. Ở tại vị trí $z = 0$, $q(z) = 0$ nên ở đây biểu đồ Q_y đạt cực trị:

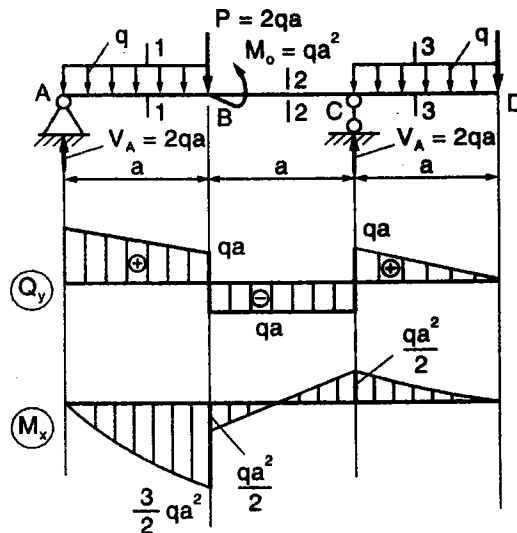
$$(Q_y)_{z=0} = Q_{\max} = \frac{q_0 l}{6}$$

và do đó biểu đồ mômen uốn sẽ đi qua điểm uốn.

- Biểu đồ mômen uốn M_x có dạng bậc 3. Tại vị trí $z = l/\sqrt{3}$, $Q_y = 0$. Vậy tại đây M_x đạt cực trị:

$$(M_x)_{z=\frac{l}{\sqrt{3}}} = M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}$$

Ví dụ 2.7 Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm chịu lực tổng quát

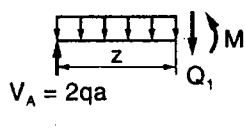


Hình 2.13

Xét cân bằng của toàn thanh ta suy ra phản lực liên kết tại A và C là:

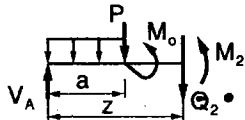
$$V_A = 2qa; \quad V_C = 2qa$$

+ Để vẽ nội lực trong đoạn AB, ta dùng mặt cắt 1-1 và xét phần bên trái:



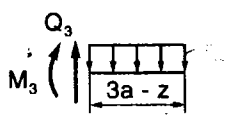
$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = 2qa - qz \\ M_1 = 2qaz - \frac{qz^2}{2} \end{array} \right. \text{ với } 0 \leq z \leq a$$

+ Để vẽ nội lực trong đoạn BC, ta dùng mặt cắt 2-2 và xét cân bằng của phần bên trái:



$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2 = -qa \\ M_2 = -qaz + \frac{3}{2}qa^2 \end{array} \right. \text{ với } a \leq z \leq 2a$$

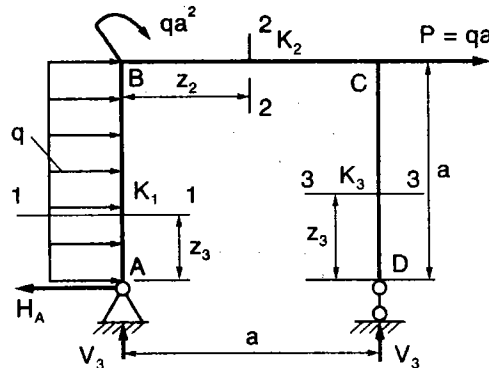
+ Để vẽ biểu đồ nội lực trong đoạn CD, ta dùng mặt cắt 3-3 và xét cân bằng của phần bên phải



$$\left\{ \begin{array}{l} Q_3 = q(3a - z) \\ M_3 = -q \frac{(3a - z)^2}{2} \end{array} \right. \text{ với } 2a \leq z \leq 3a$$

Biểu đồ mômen và lực cắt được cho trên hình 2.13.

Ví dụ 2.8 Vẽ biểu đồ nội lực trong khung chịu tải trọng như trên hình 2.14.



Hình 2.14

Giải a) Tính phản lực liên kết

Xét sự cân bằng của toàn khung dưới tác dụng của tải trọng ngoài và các phản lực liên kết ta suy ra:

$$\sum F/\text{ngang} = 0 \Rightarrow H_A = 2qa$$

$$\sum M/D = 0 \Rightarrow V_A \times a + qa \times \frac{a}{2} + qa^2 + qa \times a = 0 \Rightarrow V_A = -\frac{5}{2}qa$$

Vậy chiều thật của V_A ngược với chiều đã chọn.

$$\sum F/\text{đứng} = 0$$

$$\Rightarrow V_A + V_D \Rightarrow V_D = +\frac{5}{2}qa \text{ (đúng chiều đã chọn).}$$

b) Vẽ biểu đồ nội lực

- Đoạn AB: Dùng mặt cắt 1-1 và xét cân bằng đoạn AK_1 ta được:

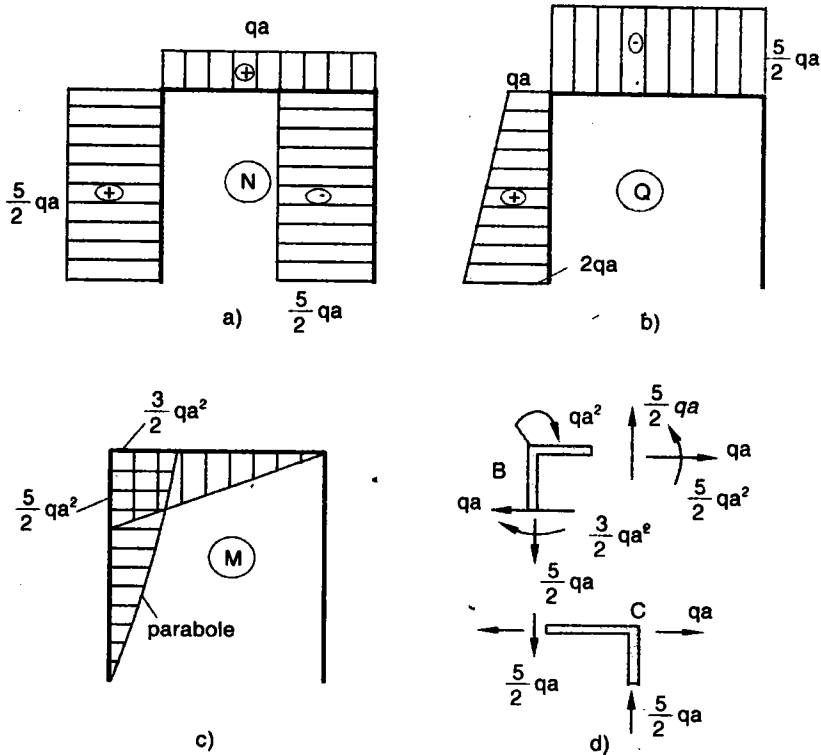
$$\begin{cases} N_1 = \frac{5}{2}qa \\ Q_1 = 2qa - qz_1 \\ M_1 = 2qaz_1 - \frac{qz_1^2}{2} \end{cases} \text{ với } 0 \leq z_1 \leq a$$

- Đoạn BC: Dùng mặt cắt 2-2 và xét cân bằng đoạn ABK_2 ta được:

$$\begin{cases} N_2 = qa \\ Q_2 = -\frac{5}{2}qa \\ M_2 = \frac{5}{2}qa^2 - \frac{5}{2}qaz_2 \end{cases} \text{ với } 0 \leq z_2 \leq a$$

- Đoạn CD: Dùng mặt cắt 3-3 và xét cân bằng DK_3

$$\begin{cases} N_3 = -\frac{5}{2}qa \\ Q_3 = 0 \\ M_3 = 0 \end{cases} \text{ với } 0 \leq z_3 \leq a$$



Hình 2.15

c) Kiểm tra sự cân bằng nút

Đối với khung, có thể kiểm tra kết quả bằng việc xét cân bằng các nút. Nếu tách nút ra khỏi hệ thì ta phải đặt vào nút các ngoại lực tập trung (nếu có) và các nội lực tại các mặt cắt, giá trị của chúng được lấy từ biểu đồ vừa vẽ. Sau khi đặt các lực trên, nếu các nội lực ở các nút tính đúng thì nút sẽ cân bằng, nghĩa là các phương trình cân bằng được thỏa mãn. Ngược lại, nếu các phương trình không thỏa mãn thì các nội lực tính sai.

Cụ thể đối với khung đang xét, ta tách nút B và đặt vào đó mômen tập trung qa^2 và các thành phần nội lực trên các đoạn thanh ngang và đứng như hình 2.15d:

- Tại mặt cắt trên thanh ngang có lực dọc $+qa$ hướng ra ngoài mặt cắt, lực cắt $-\frac{5}{2}qa$ có chiều hướng lên và mômen $\frac{5}{2}qa^2$ gây căng thớ dưới.

- Tại mặt cắt trên thanh đứng có lực dọc $+\frac{5}{2}qa$ hướng ra ngoài mặt cắt (hướng xuống) lực cắt $+qa$ hướng từ phải sang trái và mômen $\frac{3}{2}qa^2$ gây ra căng thớ trong khung nên chiều quay có mũi tên hướng ra ngoài.

Ta dễ dàng thấy các phương trình cân bằng thỏa mãn:

$$\sum F/x = 0; \quad \sum F/y = 0; \quad \sum M/B = 0$$

Tương tự, tách nút C và đặt vào đó lực tập trung qa hướng từ trái sang phải và các thành phần nội lực trên các đoạn thanh ngang và đứng như hình 2.16d.

- Tại mặt cắt trên thanh ngang có lực dọc qa hướng ra ngoài mặt cắt, lực cắt $-\frac{5}{2}qa$ có khuynh hướng làm quay phần đoạn thanh đang xét ngược chiều kim đồng hồ nên có chiều hướng xuống, còn mômen thì bằng không.

- Tại mặt cắt trên thanh thẳng đứng tồn tại lực dọc $-\frac{5}{2}qa$ có chiều hướng vào mặt cắt (hướng lên) và không có lực cắt cũng như mômen.

Ta dễ dàng thấy rằng các phương trình cân bằng được thỏa mãn:

$$\sum F/x = -qa + qa = 0; \quad \sum F/y = -\frac{5}{2}qa + \frac{5}{2}qa = 0; \quad \sum M/B = 0$$

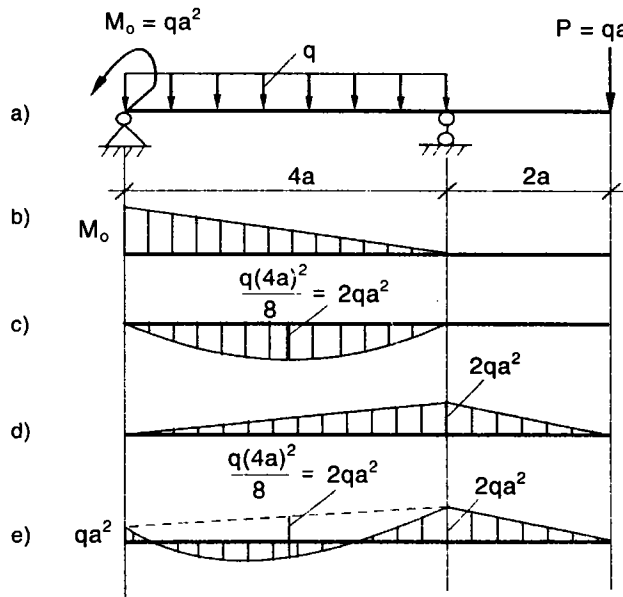
Vậy các nút B và C đều cân bằng nghĩa là các hệ nội lực tại các nút đúng.

2.5 CÁCH VẼ BIỂU ĐỒ THEO NHẬN XÉT

1- Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng

Trong phần trên, các biểu đồ nội lực được vẽ thông qua các biểu thức giải tích còn được gọi là phương pháp giải tích. Ngoài ra, khi thanh chịu tác dụng nhiều loại tải trọng, ta có thể vẽ biểu đồ nội lực trong thanh do từng tải trọng riêng lẻ gây ra rồi cộng đại số lại để được kết quả cuối cùng.

Ví dụ 2.9 Vẽ biểu đồ mômen trong dầm như hình 2.16 bằng cách cộng biểu đồ.



Hình 2.16

Giải Tải trọng trên thanh được chia thành ba trường hợp cơ bản:

- Hình 2.16b biểu diễn mômen do mômen M_o gây ra
- Hình 2.16c biểu diễn mômen do lực phân bố đều q gây ra
- Hình 2.16d biểu diễn mômen do lực tập trung P gây ra
- Hình 2.16e biểu diễn mômen tổng hợp cần tìm, các tung độ bằng tổng đại số các tung độ tại các tiết diện tương ứng trên hình 2.16b,c,d.

2- Cách vẽ theo từng điểm

Dựa trên các liên hệ vi phân ta có thể định dạng các biểu đồ nội lực tùy theo dạng tải trọng đã cho và từ đó ta xác định số điểm cần thiết để vẽ biểu đồ. Nếu biểu đồ có dạng hằng số ta chỉ cần xác định một điểm bất kỳ, còn biểu đồ có dạng bậc nhất ta cần tính nội lực tại hai điểm đầu thanh, nếu biểu đồ có dạng bậc hai trở lên thì cần ba giá trị tại điểm đầu, điểm cuối và tại nơi có cực trị, nếu không có cực trị thì cần biết chiều lồi lõm của biểu đồ theo dấu của đạo hàm bậc hai. Đoạn thanh có lực phân bố q hướng xuống sẽ âm, nên bề lõm của biểu

đồ mômen hướng lên. Ngược lại, nếu q hướng lên sẽ dương nên bề lõm của biểu đồ mômen hướng xuống.

Tóm lại đường cong mômen có bề lõm sao cho hướng lấy lực phân bố q .

Ví dụ 2.11 Vẽ biểu đồ mômen uốn trong dầm cho trên hình 2.17 bằng phương pháp vẽ từng điểm.

Giải * *Xác định phản lực liên kết*

$$\begin{aligned} \sum M/B = 0 &\Rightarrow -qa^2 + 2qa^2 + 2qa^2 - V_C \times 2a = 0 \\ &\Rightarrow V_C = \frac{3}{2}qa \end{aligned}$$

$$\sum F/y = 0 \Rightarrow V_B = \frac{5}{2}qa$$

** Xác định nội lực trong các dầm*

Đoạn AB: không có lực phân bố đều nên biểu đồ lực cắt là hằng số. Trong trường hợp này hằng số bằng không vì $Q_A = 0$. Biểu đồ lực cắt trong đoạn này trùng với đường chuẩn. Do vậy biểu đồ mômen trong đoạn này sẽ là hằng số:

$$M_A = M_B = -M_o = qa^2$$

Đoạn BD: Có lực phân bố đều q nên biểu đồ lực cắt có dạng bậc một và biểu đồ mômen có dạng bậc hai

$$\text{Tại B: } \begin{cases} Q_B^{(BD)} = +\frac{5}{2} \\ M_B^{(BD)} = -M_o = -qa^2 \end{cases}$$

$$\text{Tại D: } \begin{cases} Q_D^{(BD)} = \frac{5}{2}qa - qa = \frac{3}{2}qa \\ M_D^{(BD)} = \frac{3}{2}qa^2 - \frac{qa^2}{2} = qa^2 \end{cases}$$

Vẽ biểu đồ lực cắt trong đoạn này ta thấy không có vị trí nào lực cắt triệt tiêu, chứng tỏ biểu đồ của mômen không đi qua cực trị. Do vậy ta chỉ cần nối hai giá trị B và D bằng đường cong bậc hai có bề lõm sao cho hướng lấy lực q .

Đoạn DC: có lực phân bố đều q nên biểu đồ lực cắt bậc nhất và biểu đồ mômen có dạng bậc hai. Ta cần tính nội lực tại hai điểm đầu thanh.

$$\text{Tại D: } Q_D^{(DC)} = -\frac{1}{2}qa$$

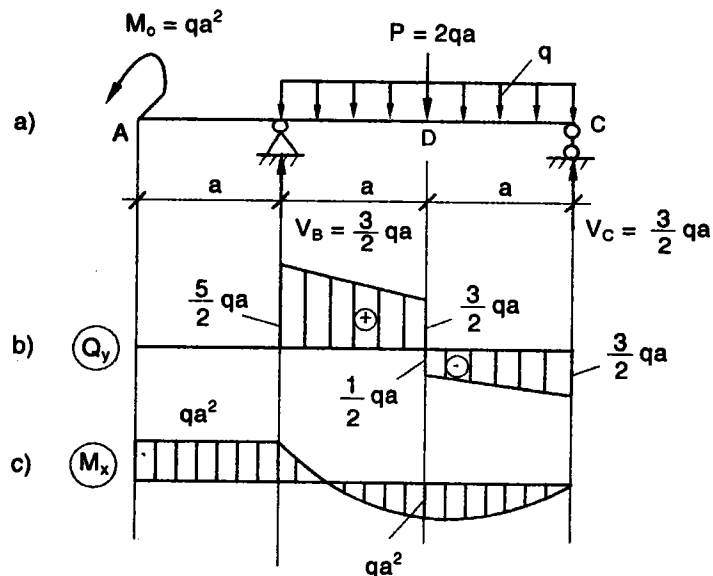
$$M_D^{(BD)} = \frac{3}{2}qa^2 - \frac{qa^2}{2} = qa^2$$

$$\text{Tại C: } Q_C = -V_C = -\frac{3}{2}qa$$

$$M_C = 0$$

Vẽ biểu đồ lực cắt trong đoạn này bằng đường bậc nhất nối $Q_D^{(DC)}$ và Q_C ta thấy đường biểu diễn không cắt trục hoành chứng tỏ biểu đồ mômen cũng không đi qua cực trị. Cũng giống đoạn BD, ta chỉ cần nối hai giá trị mômen tại D và tại C bằng đường cong bậc hai có bề lõm hướng lên trên.

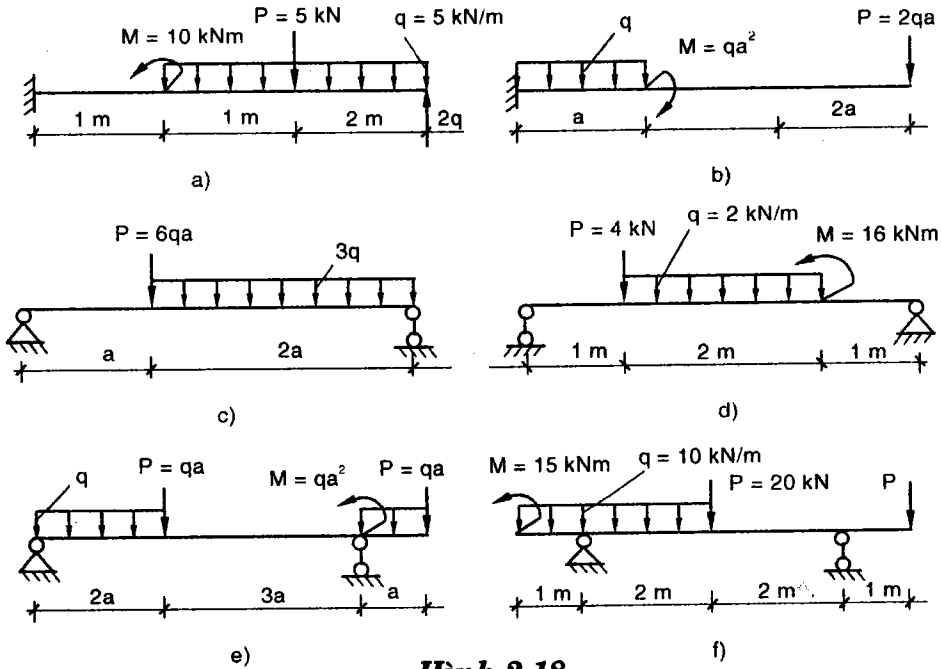
Các biểu đồ lực cắt và mômen lần lượt được vẽ trên hình 2.17b,c.



Hình 2.17

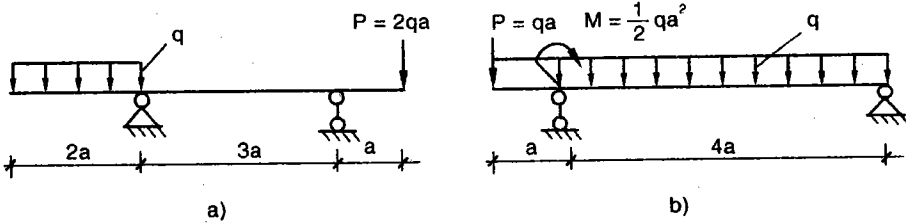
2.6 BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Vẽ biểu đồ nội lực của các dầm cho trên hình 2.18.



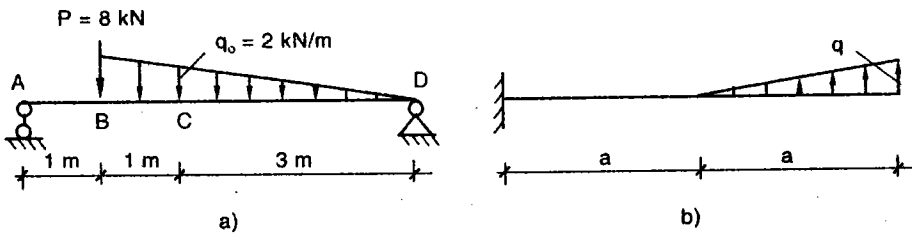
Hình 2.18

2.2. Không cần tính ra phản lực, vẽ biểu đồ nội lực của các dầm ch trên hình 2.19.



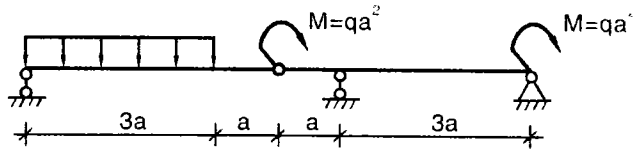
Hình 2.19

2.3. Vẽ biểu đồ nội lực như trên hình 2.20:



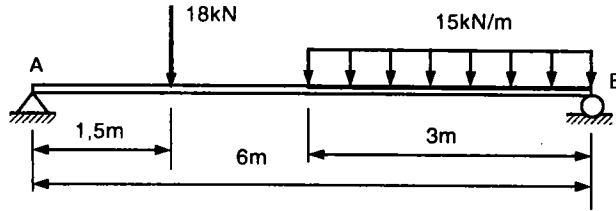
Hình 2.20

2.4. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm tĩnh định như trên hình 2.21.



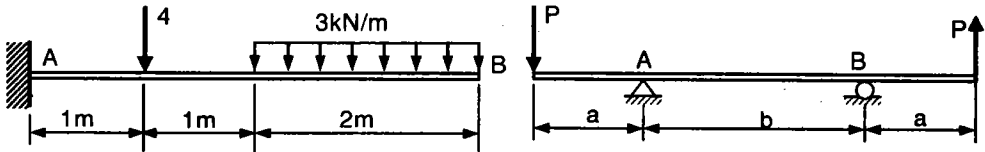
Hình 2.21

2.5. Xác định lực cắt và mômen uốn tại mặt cắt giữa nhịp của dầm AB như trên hình 2.22.



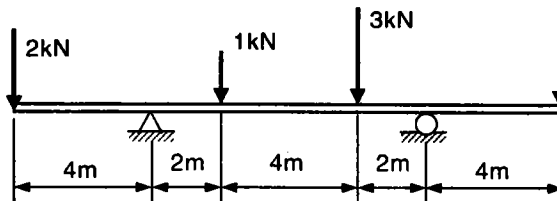
Hình 2.22

2.6. Xác định lực cắt và mômen uốn tại mặt cắt giữa dầm AB như trên hình 2.23.



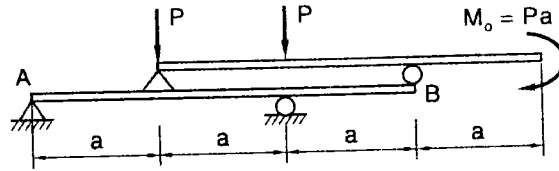
Hình 2.23

2.7. Vẽ biểu đồ lực cắt và lực dọc và chỉ ra những giá trị đáng lưu ý cho các dầm như trên hình 2.24.



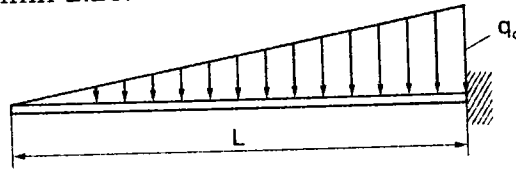
Hình 2.24

2.8. Vẽ biểu đồ lực cắt và momen uốn cho dầm ABC chịu tải như trên như trên hình 2.25.



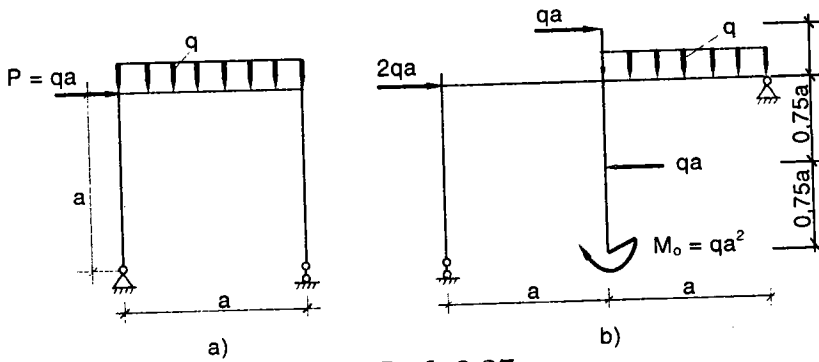
Hình 2.25

2.9. Vẽ biểu đồ lực cắt và momen uốn cho dầm công-xon AB chịu tác dụng của tải phân bố bậc nhất với cường độ tải trọng lớn nhất là q_0 như trên hình 2.26.



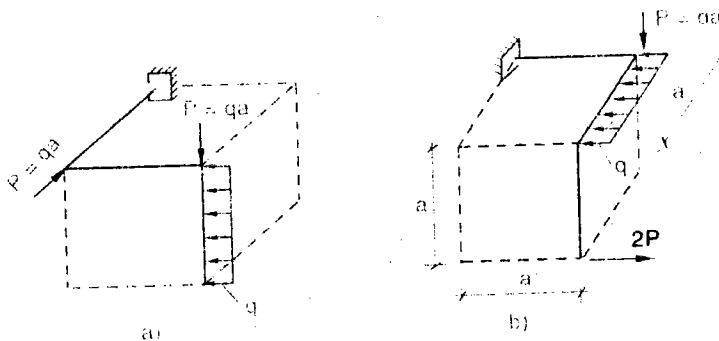
Hình 2.26

2.10. Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung sau (H.2.27).



Hình 2.27

2.11. Vẽ biểu đồ lực dọc, mômen uốn, mômen xoắn như trên hình 2.28.



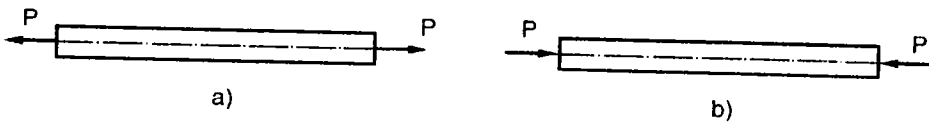
Hình 2.28

KÉO - NÉN ĐÚNG TÂM

3.1 KHÁI NIỆM

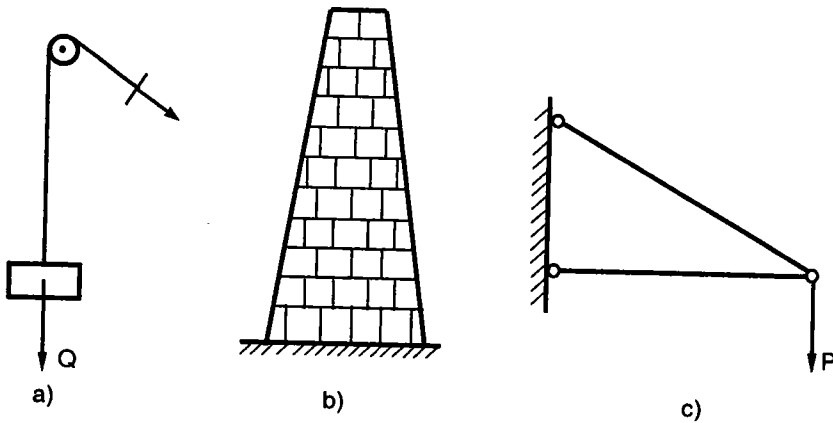
Thanh được gọi là chịu kéo hay nén đúng tâm khi trên mọi mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc N_z .

Ta gặp trường hợp này khi thanh chịu tác dụng của lực ở hai đầu thanh, dọc trục thanh lực có hai trị số bằng nhau và trái chiều. Thanh chịu kéo đúng tâm (H.3.1a) hay chịu nén đúng tâm (H.3.1b).



Hình 3.1 Định nghĩa thanh chịu kéo nén đúng tâm

Thực tế có thể gặp các cấu kiện chịu kéo hay nén đúng tâm như: dây cáp trong cần cầu (H.3.2a), ống khói (H.3.2b), các thanh trong dàn (H.3.2c).

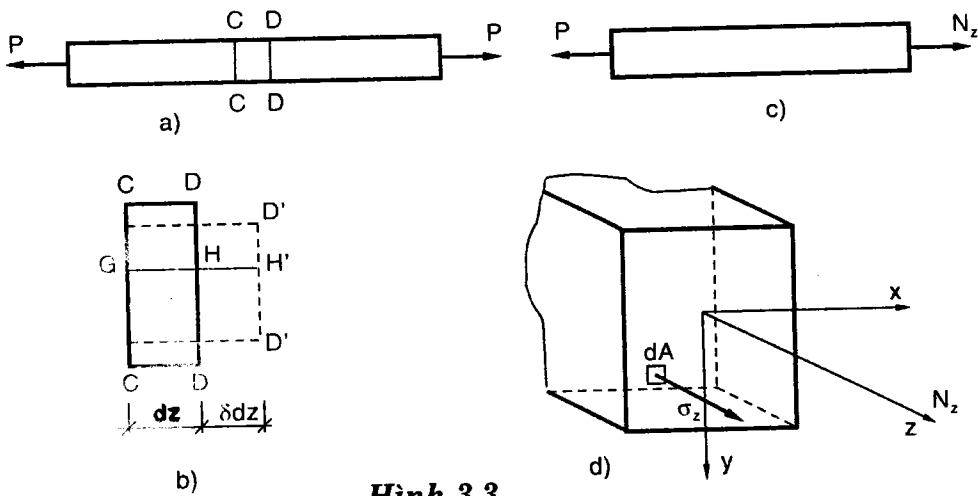


Hình 3.2 Một số cấu kiện chịu kéo nén

3.2 ỨNG SUẤT TRÊN MẶT CẮT NGANG

Xét thanh thẳng chịu kéo (nén) đúng tâm (H.3.3a) các mặt cắt ngang CC và DD trước khi thanh chịu lực cách nhau đoạn dz và vuông góc trục thanh. Các thớ dọc trong đoạn CD (như GH) bằng nhau (H.3.3b).

Khi thanh chịu kéo (nén), nội lực trên mặt cắt ngang DD hay bất kỳ mặt cắt ngang khác là $N_z = P$ (H.3.3c) thanh sẽ dãn ra, mặt cắt DD di chuyển dọc trục thanh z so với mặt cắt CC một đoạn bé δdz (H.3.3b).



Hình 3.3

Ta thấy biến dạng các thớ dọc như GH đều bằng HH' và không đổi, mặt cắt ngang trong suốt quá trình biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh, điều này cho thấy các điểm trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất pháp σ_z không đổi (H.3.3d).

Ta có:
$$\int_A \sigma_z dA = N_z$$

Vì $\sigma_z = \text{const}$ nên ta được:

$$\sigma_z A = N_z$$

hay:
$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} \tag{3.1}$$

với: A - diện tích mặt cắt ngang của thanh.

3.3 BIẾN DẠNG CỦA THANH CHỊU KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM

1- Biến dạng dọc

Biến dạng dọc trục z của đoạn dài dz chính là δdz (H.3.3b). Như vậy biến dạng dài tương đối của đoạn dz là:

$$\epsilon_z = \frac{\delta dz}{dz} \quad (a)$$

Theo định luật Hooke, ta có:

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (b)$$

trong đó: E là hằng số tỷ lệ, được gọi là mô đun đàn hồi khi kéo (nén), nó phụ thuộc vào vật liệu và có thứ nguyên $\left[\frac{\text{lực}}{(\text{chiều dài})^2} \right]$, đơn vị N/m^2 .

Bảng 3.1 Trị số E của một số vật liệu

| Vật liệu | E (N/m^2) | ν |
|----------------------|---------------------------------|-------------|
| Thép (0,15 ÷ 0,20)%C | 20×10^{10} | 0,25 ÷ 0,33 |
| Thép lò xo | 22×10^{10} | 0,25 ÷ 0,33 |
| Thép niken | 19×10^{10} | 0,25 ÷ 0,33 |
| Gang xám | $11,5 \times 10^{10}$ | 0,23 ÷ 0,27 |
| Đồng | 12×10^{10} | 0,31 ÷ 0,34 |
| Đồng thau | $(10 \div 12) \times 10^{10}$ | 0,31 ÷ 0,34 |
| Nhôm | $(7 \div 8) \times 10^{10}$ | 0,32 ÷ 0,36 |
| Gỗ dọc thớ | $(0,8 \div 1,2) \times 10^{10}$ | |
| Cao su | 8×10^6 | 0,47 |

Từ (a) ta tính δdz , sau đó thế (b) vào, ta được biến dạng dài dọc trục của đoạn dz là:

$$\delta dz = \epsilon_z dz = \frac{\sigma_z}{E} dz = \frac{N_z}{EA} dz \quad (c)$$

Suy ra biến dạng dài (dãn dài khi thanh chịu kéo, co ngắn khi thanh chịu nén) của một đoạn thanh có chiều dài L là:

$$\Delta L = \int_L \delta dz; \quad \Delta L = \int_L \frac{N_z}{EA} dz \quad (3.2)$$

Trường hợp E không đổi, A là hằng số và N_z cũng không đổi trên suốt chiều dài L của thanh, ta sẽ được:

$$\Delta L = \frac{N_z}{EA} \int_L dz; \quad \Delta L = \frac{N_z L}{EA} \quad (3.3)$$

Nếu thanh gồm nhiều đoạn chiều dài L_i và trên mỗi đoạn N_{zi} , E_i , A_i không đổi thì ta sẽ có:

$$\Delta L = \sum \Delta L_i = \sum \frac{N_{zi} L_i}{E_i A_i} \quad (3.3')$$

Tích số EA gọi là *độ cứng khi chịu kéo hay nén đúng tâm của thanh*. Đôi khi, người ta còn dùng *độ cứng tương đối* EA/L là *tỉ số độ cứng và chiều dài của thanh*.

2- Biến dạng ngang

Theo phương ngang thanh cũng có biến dạng, ta đã chọn z là trục thanh, x , y là các phương vuông góc với z (H.3.3d). Nếu ta gọi ε_x và ε_y là biến dạng dài tương đối theo hai phương x và y , thì ta có quan hệ sau:

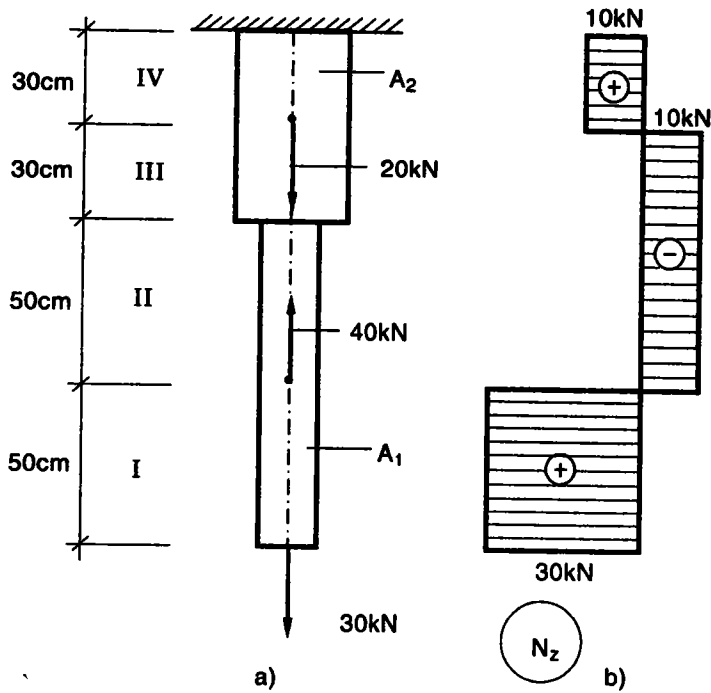
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z \quad (3.4)$$

trong đó: ν - *hệ số Poisson*, là hằng số tùy loại vật liệu và có giá trị từ 0 đến 0,5 (xem bảng 3.1).

Dấu (-) trong biểu thức chỉ rằng biến dạng theo phương dọc và ngang ngược nhau.

Ví dụ 3.1 Vẽ biểu đồ dọc N_z tính ứng suất và biến dạng dài toàn phần của thanh trên hình 3.4a cho biết $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $A_1 = 10\text{cm}^2$; $A_2 = 20\text{cm}^2$.

Giải Dùng phương pháp mặt cắt ta dễ dàng vẽ được biểu đồ N_z (H.3.4b)



Hình 3.4

Từ đó ta tìm được ứng suất trên mặt cắt ngang mỗi đoạn là:

$$\sigma_I = \frac{N_z^I}{A_1} = \frac{30}{10} = 3 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_z^{II}}{A_1} = \frac{-10}{10} = -1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_z^{III}}{A_2} = \frac{-10}{20} = -0,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{IV} = \frac{N_z^{IV}}{A_2} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ kN/cm}^2$$

Để xác định biến dạng dọc toàn phần chính là biến dạng dài tuyệt đối của thanh ta sử dụng công thức (3.3') áp dụng cho bốn đoạn của thanh.

$$\Delta L = \frac{30 \times 50}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{-10 \times 50}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{-10 \times 30}{2 \times 10^4 \times 20} + \frac{10 \times 30}{2 \times 10^4 \times 20} = 0,05cm$$

Biến dạng dọc mang dấu + nghĩa là thanh bị dài ra.

3.4 ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

1- Khái niệm

Vấn đề của chúng ta là cần phải so sánh độ bền, độ cứng của vật liệu khi chịu lực với ứng suất biến dạng của vật liệu cùng loại đã biết. Ta cần thí nghiệm kéo, nén để tìm hiểu tính chất chịu lực và quá trình biến dạng từ lúc bắt đầu chịu lực đến lúc phá hỏng của các loại vật liệu khác nhau.

Căn cứ vào biến dạng và sự phá hỏng, khả năng chịu kéo, nén khác nhau người ta phân vật liệu thành hai loại cơ bản: *vật liệu dẻo* là vật liệu bị phá hoại khi biến dạng khá lớn như thép, đồng, nhôm...; *vật liệu giòn* là vật liệu bị phá hoại khi biến dạng còn nhỏ như gang, đá, bê tông...

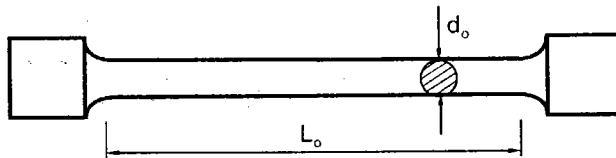
Như vậy, ta có bốn thí nghiệm cơ bản sau.

2- Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo (thép)

a- Mẫu thí nghiệm

Theo tiêu chuẩn TCVN 197 - 85 (H.3.5)

Chiều dài L_0 thí nghiệm là đoạn thanh đường kính d_0 , diện tích A_0

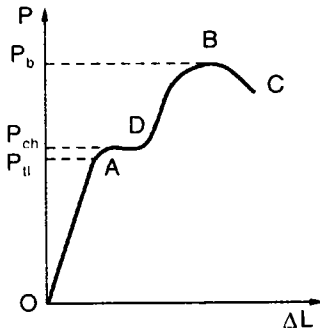


Hình 3.5

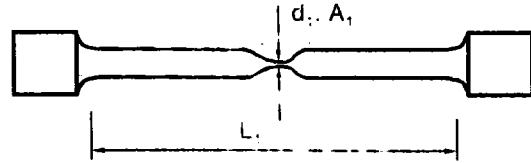
b- Thí nghiệm

Tăng lực kéo từ 0 đến khi mẫu đứt, với bộ phận vẽ biểu đồ của máy kéo, ta nhận được đồ thị quan hệ giữa lực kéo P và biến dạng dài

ΔL của mẫu như hình 3.6. Ngoài ra, sau khi mẫu bị đứt ta chấp mẫu lại, mẫu sẽ có hình dáng như hình 3.7.



Hình 3.6



Hình 3.7

c- Phân tích kết quả

Quá trình chịu lực của vật liệu có thể chia làm ba giai đoạn.

OA: giai đoạn đàn hồi, tương quan giữa P và ΔL bậc nhất. Lực lớn nhất trong giai đoạn này là lực tỉ lệ P_{tl} , ứng suất tương ứng trong mẫu là giới hạn tỉ lệ.

$$\sigma_{tl} = \frac{P_{tl}}{A_0} \quad (3.5)$$

AD: giai đoạn chảy, lực kéo không tăng nhưng biến dạng tăng liên tục. Lực kéo tương ứng là lực chảy P_{ch} và ta có giới hạn chảy

$$\sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{A_0} \quad (3.6)$$

DBC: giai đoạn cứng cố (tái bền), tương quan giữa lực P và biến dạng ΔL là đường cong. Lực lớn nhất là lực bền P_b và ta có giới hạn bền

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_0} \quad (3.7)$$

Nếu ta gọi chiều dài mẫu sau khi đứt (H.3.7) là L_1 và diện tích mặt cắt ngang nơi đứt là A_1 thì ta có các định nghĩa đặc trưng cho tính dẻo của vật liệu như sau:

- *Biến dạng dài tương đối (tính bằng phần trăm):*

$$\delta = \frac{L_1 - L_0}{L_0} 100\% \quad (3.8)$$

- Độ thắt tỷ đối (tính bằng phần trăm):

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\% \quad (3.9)$$

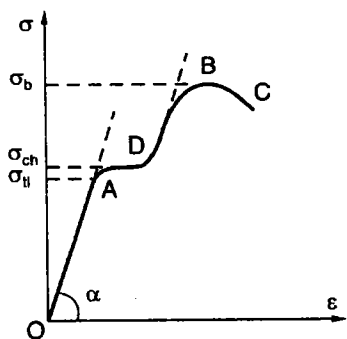
d- Biểu đồ $\sigma - \epsilon$ (biểu đồ quy ước)

Từ biểu đồ $P - \Delta L$ ta dễ dàng suy ra biểu đồ tương quan giữa ứng suất $\sigma_z = P/A_0$ và biến dạng dài tương đối $\epsilon_z = \Delta L/L_0$.

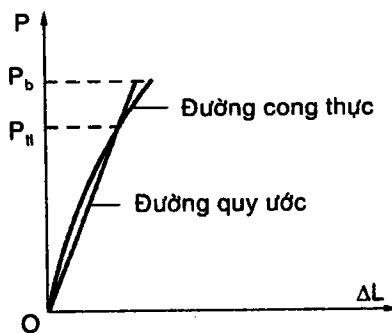
Biểu đồ này có hình dạng giống như biểu đồ $P - \Delta L$ (H.3.8). Trên biểu đồ chỉ rõ $\sigma_{tl}, \sigma_{ch}, \sigma_b$ và cả mô đun đàn hồi:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \tan \alpha$$

Nếu kể đến sự biến đổi diện tích mặt cắt ngang ta sẽ có biểu đồ tương quan giữa ϵ_z và ứng suất thực (đường nét đứt).



Hình 3.8



Hình 3.9

3- Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo

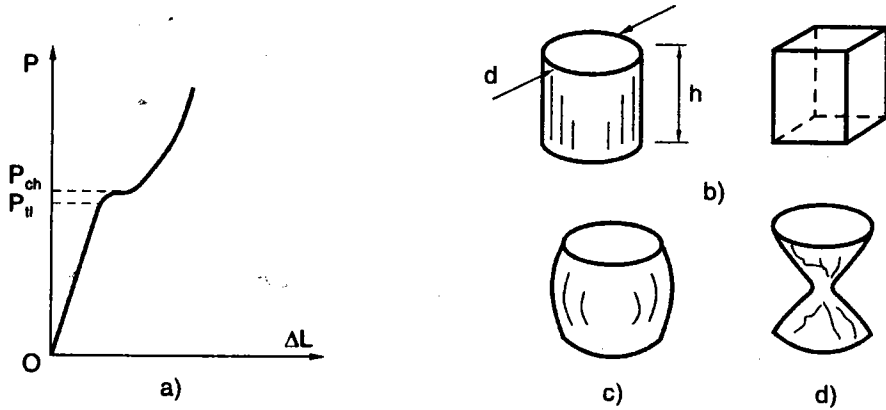
Biểu đồ kéo vật liệu dẻo có dạng đường cong (H.3.9). Vật liệu không có giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy mà chỉ có giới hạn bền.

$$\sigma_b = \frac{P_b}{A_0} \quad (3.10)$$

Tuy vậy, người ta cũng quy ước một giới hạn đàn hồi nào đó và xem đồ thị quan hệ lực kéo và biến dạng là đường thẳng (đường quy ước).

4- Nén vật liệu dẻo

Mẫu nén vật liệu dẻo (và dòn) thường có dạng hình trụ tròn hay hình lập phương (H.3.10b). Biểu đồ nén vật liệu dẻo như H.3.10a. Ta chỉ xác định được giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy, mà không xác định được giới hạn bền do sự phình ngang của mẫu làm cho diện tích mặt cắt ngang mẫu liên tục tăng lên. Sau thí nghiệm, mẫu có dạng hình trống (H.3.10c).



Hình 3.10

5- Nén vật liệu dòn

Biểu đồ quan hệ $P - \Delta L$ khi nén vật liệu dòn cũng là đường cong tương tự biểu đồ kéo vật liệu dòn. Ta chỉ xác định được giới hạn bền tương ứng với lực nén phá hỏng P_b . Mẫu thí nghiệm bị vỡ đột ngột, có dạng hình nón (H.3.10d). Nghiên cứu các thí nghiệm kéo và nén các vật liệu dẻo và dòn, người ta thấy rằng: giới hạn chảy của vật liệu dẻo khi kéo và nén như nhau. Còn đối với vật liệu dòn giới hạn bền khi kéo bé hơn nhiều so với giới hạn bền khi nén. Ví dụ, với gang xám giới hạn bền khi kéo là $2,5kN/cm^2$ còn giới hạn bền khi nén có thể đạt đến $10kN/cm^2$.

3.5 MỘT SỐ HIỆN TƯỢNG PHÁT SINH TRONG VẬT LIỆU KHI CHỊU LỰC

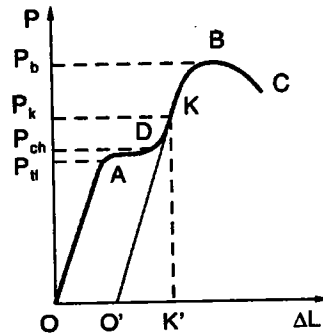
1- Hiện tượng biến cứng nguội

Khi kéo thanh bằng thép xây dựng thông thường, đồ thị quan hệ $P - \Delta L$ như đã biết ở phần trước.

Người ta thấy rằng, khi lực kéo còn bé hơn P_{tt} , nếu ta giảm lực thì quan hệ giữa $P - \Delta L$ vẫn được biểu diễn theo đường OA (H.3.11).

Như vậy, nếu vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi thì biến dạng hoàn toàn mất đi khi không tác dụng tải trọng nữa, biến dạng đó gọi là biến dạng đàn hồi và vật liệu đàn hồi tuyệt đối.

Bây giờ, nếu ta tăng lực quá giá trị P_{ch} , giả sử tăng lực đến điểm K, nếu gọi K' là hình chiếu của K trên trục hoành thì OK' là biến dạng dọc của thanh ứng với lực P_K . Sau đó, nếu ta giảm lực từ từ thì quan hệ giữa P và ΔL là đường KO' song song AO và khi mẫu không còn chịu lực nữa, nó vẫn còn lại một biến dạng dẻo hay biến dạng dư. Biến dạng đó được gọi là biến dạng dẻo hay biến dạng dư. Do đó, vật liệu làm việc trong giai đoạn chảy thường được gọi là vật liệu làm việc trong miền dẻo.



Hình 3.11

Bây giờ, ta lại tăng lực lên từ từ, liên hệ giữa lực P và ΔL biến dạng lại được biểu diễn bằng đường $O'K$ và sau đó là đường cong KBC .

Như vậy, vật liệu sau khi kéo có biến dạng dư sẽ làm việc với biểu đồ kéo $P - \Delta L$ là đường $O'KC$. So với vật liệu ban đầu (vật liệu không có biến dạng dư) vật liệu có biến dạng dư sẽ có giới hạn tỷ lệ cao hơn nhưng biến dạng dẻo kém hơn. Hiện tượng vật liệu giảm biến dạng dẻo và tăng giới hạn tỷ lệ gọi là *hiện tượng biến cứng nguội*. Trong thực tế, người ta lợi dụng hiện tượng này để làm tăng giới hạn tỷ lệ của cốt thép trong bê tông ứng suất trước.

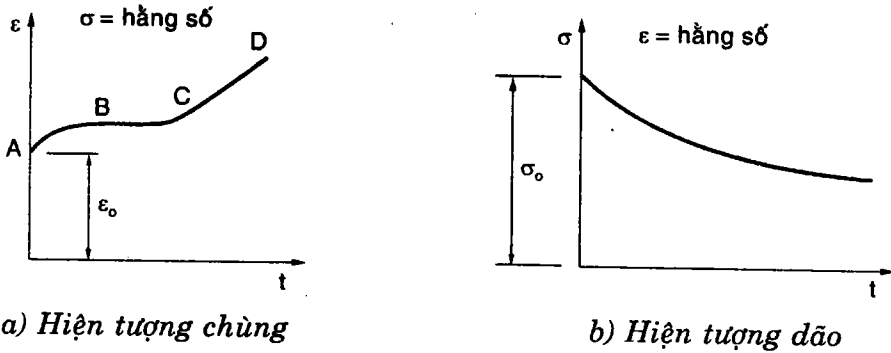
2- Hiện tượng lưu biến

Đó là hiện tượng thay đổi theo thời gian của ứng suất hay biến dạng khi tác động bên ngoài không thay đổi. Hiện tượng lưu biến được chia thành hiện tượng chùng và hiện tượng dãn.

Hiện tượng chùng là hiện tượng đối biến dạng theo thời gian khi ứng suất không đổi.

Hình 3.12a biểu diễn quan hệ giữa biến dạng tương đối ε và thời gian t . Biến dạng tăng theo thời gian và tốc độ biến dạng cũng thay đổi theo thời gian. Những cánh của tốc biến dần dẹt ra và có thể va đập vào thành ống.

Hiện tượng dãn là hiện tượng biến đổi ứng suất theo thời gian do sự xuất hiện biến dạng dẻo trong vật thể chịu lực khi biến dạng được giữ nguyên không đổi.



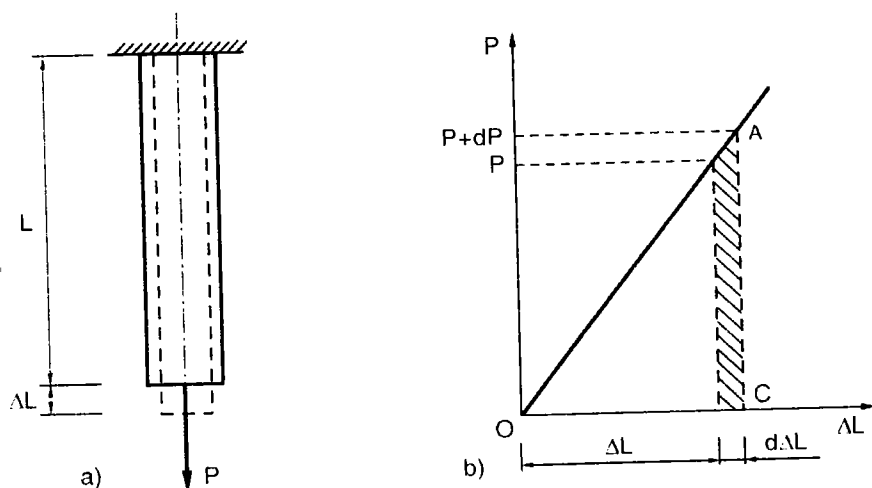
Hình 3.12 Hiện tượng lưu biến

Đường cong trên hình 3.12b biểu diễn liên hệ giữa ứng suất σ và thời gian t của một thanh có biến dạng không đổi, ta thấy ứng suất giảm dần theo thời gian. Sự giảm ứng suất có thể giải thích là do sự xuất hiện biến dạng dẻo trong thanh, làm giảm biến dạng đàn hồi đưa đến sự giảm ứng suất. Những bu lông của các mối nối làm việc ở nhiệt độ cao thường bị giảm ứng suất theo thời gian.

3.6 THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

1- Khái niệm

Xét thanh chịu kéo làm việc trong giai đoạn đàn hồi (H.3.13a). Lực tăng dần từ 0 đến giá trị P , trong quá trình tăng lực, thanh dãn ra từ từ đến giá trị ΔL . Sau khi đạt đến giá trị P , ta bỏ lực đi, thanh sẽ đàn hồi hoàn toàn. Người ta nói công W của ngoại lực phát sinh trong quá trình di chuyển đã chuyển hóa thành thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong thanh và chính thế năng này làm cho thanh đàn hồi sau khi không tác dụng lực.



Hình 3.13

2- Tính thế năng biến dạng đàn hồi

Quan hệ giữa lực kéo \$P\$ và biến dạng \$\Delta L\$ biểu diễn như hình 3.13b. Ta tính công của lực \$P\$ trên chuyển dời \$\Delta L\$. Cho \$P\$ một số gia \$dP\$, biến dạng dọc tăng lên số gia \$d\Delta L\$. Lúc này, công của ngoại lực \$dW\$ do lực \$(P + dP)\$ là:

$$dW = (P + dP)d\Delta L = Pd\Delta L + dPd\Delta L$$

Bỏ qua lượng bé bậc cao \$dPd\Delta L\$, ta có:

$$dW = Pd\Delta L$$

Công này biểu diễn bằng diện tích hình chữ nhật gạch chéo (H.3.13b). Từ đó, suy ra công của lực kéo \$P\$ tăng từ \$0\$ đến \$P\$ được biểu thị trên đồ thị bằng diện tích tam giác \$OAC\$.

$$W = \frac{P\Delta L}{2}$$

Công này biến thành thế năng biến dạng đàn hồi \$U\$:

$$U = W = \frac{P\Delta L}{2}$$

$$\text{Thay } \Delta L = \frac{PL}{EA} \text{ ta có } U = \frac{P^2L}{2EA} \quad (3.11)$$

Gọi u là thế năng biến dạng đàn hồi riêng (thế năng tích lũy trong một đơn vị thể tích), ta có:

$$u = \frac{U}{V}$$

với $V = AL$ và $\sigma_z = \frac{P}{A}$ ta sẽ được:

$$u = \frac{\sigma_z^2}{2E} = \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} \quad (3.12)$$

Xét đoạn thanh có chiều dài dz có nội lực N_z (H.3.14):

$$dU = \frac{N_z^2 dz}{2EA}$$

Suy ra thế năng biến dạng đàn hồi của đoạn thanh dài L , có nội lực N_z là:

$$U = \int_L dU = \int_L \frac{N_z^2 dz}{2EA}$$

Khi trong đoạn thanh $\frac{N_z}{EA}$ không đổi ta có:

$$U = \frac{N_z^2 L}{2EA} \quad (3.13)$$

Với nhiều đoạn dài L_i ta sẽ có:

$$U = \sum U_i = \sum \frac{N_{zi}^2 L_i}{2E_i A_i} \quad (3.13')$$

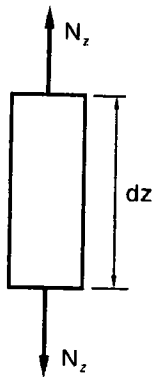
Thế năng biến dạng đàn hồi thường dùng để tính chuyển vị của hệ thanh.

Ví dụ 3.2 Xác định chuyển vị đứng của điểm đặt lực. Cho $E = 20000kN/cm^2$; $L = 200cm$; $P = 300kN$; $\alpha = 30^\circ$; $A = 10cm^2$ (H.3.15a).

Giải

Xác định nội lực

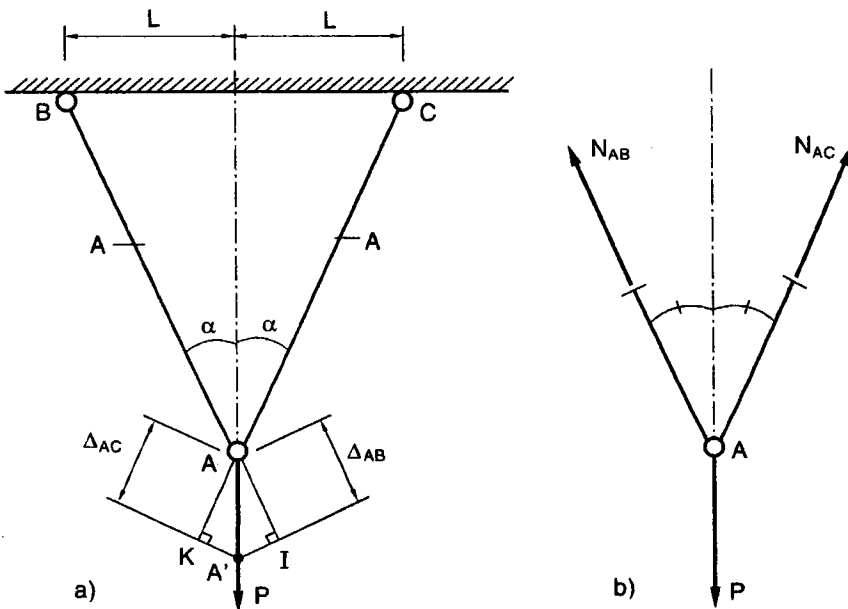
Tách mắt A (H.3.15b), dùng hai phương trình hình chiếu:



Hình 3.14

$$\sum X = 0: \quad N_{AB} = N_{AC} = N$$

$$\sum Y = 0: \quad 2N \cos \alpha = P \Rightarrow N = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$



Hình 3.15

Chuyển vị đứng của điểm A

a) Phương pháp dùng cách tính theo biến dạng hình học

Gọi Δ_{AB} , Δ_{AC} lần lượt là biến dạng dài của thanh AB, AC tương ứng, các điểm biến dạng này biểu diễn bởi đoạn AI, AK (H.3.15a). Từ I, K kẻ hai đường vuông góc với AB và AC, chúng cắt nhau ở A', AA' chính là độ di chuyển của điểm A. Trường hợp hệ thanh trên, vì $N_{AB} = N_{AC}$ nên $\Delta_{AB} = \Delta_{AC}$ và A' nằm trên đường thẳng đứng kẻ từ A, hay AA' chính là chuyển vị cần tìm. Xét tam giác AIA' ta có:

$$AA' \cos \alpha = AI$$

hay:
$$AA' = \frac{AI}{\cos \alpha} = \frac{\Delta_{AB}}{\cos \alpha}$$

$$AA' = \frac{N_{AB} L_{AB}}{(EA)_{AB} \cos \alpha} = \frac{PL}{2EA \cos^2 \alpha}$$

với: $P = 300kN$; $E = 20000kN/cm^2$; $A = 10cm^2$; $\alpha = 30^\circ$

ta được: $AA' = 0,4cm$

b) Phương pháp dùng thế năng biến dạng đàn hồi

Ta có: $W = U$ (*)

trong đó:

Công ngoại lực: $W = \frac{1}{2} P.AA'$

Thế năng biến dạng đàn hồi của hệ:

$$U = \frac{N_{AB}^2 L_{AB}}{2(EA)_{AB}} + \frac{N_{AC}^2 L_{AC}}{2(EA)_{AC}}$$

Ta đã có: $N_{AB} = N_{AC} = N$; $L_{AB} = L_{AC} = L$

suy ra: $U = 2 \frac{N^2 L}{2EA}$

Thế vào (*) ta được: $\frac{1}{2} P.AA' = 2 \frac{N^2 L}{2EA}$

suy ra: $AA' = \frac{2}{P} \frac{N^2 L}{EA} = \frac{PL}{2EA \cos^2 \alpha} = 0,4cm$

3.7 ỨNG SUẤT CHO PHÉP - HỆ SỐ AN TOÀN - BA BÀI TOÁN CƠ BẢN

Ta gọi ứng suất nguy hiểm, ký hiệu σ_o , là trị số ứng suất mà ứng với nó vật liệu được xem là bị phá hoại. Đối với vật liệu dẻo $\sigma_o = \sigma_{ch}$, đối với vật liệu giòn $\sigma_o = \sigma_b$.

Nhưng khi chế tạo, vật liệu thường không đồng chất hoàn toàn, và trong quá trình sử dụng tải trọng tác dụng có thể vượt quá tải trọng thiết kế, điều kiện làm việc của kết cấu hay chi tiết chưa được xem xét đầy đủ, các giả thiết khi tính toán chưa đúng với sự làm việc của kết cấu. Vì thế ta không tính toán theo σ_o . Chúng ta phải chọn một hệ số an toàn n lớn hơn 1 để xác định ứng suất cho phép

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n} \quad (3.15)$$

và dùng trị số $[\sigma]$ để tính toán.

Hệ số an toàn thường do nhà nước hay hội đồng kỹ thuật của nhà máy quy định.

Để chọn hệ số an toàn được chính xác, nhiều khi người ta phải chọn nhiều hệ số theo riêng từng nguyên nhân dẫn đến sự không an toàn của công trình hay chi tiết máy, có thể nêu ra:

- Hệ số kể đến độ đồng chất của vật liệu
- Hệ số kể đến sự vượt quá tải trọng thiết kế
- Hệ số kể đến sự làm việc tạm thời hay lâu dài.

Như vậy, muốn đảm bảo sự làm việc an toàn về độ bền khi thanh chịu kéo (nén) đúng tâm, ứng suất trong thanh phải thỏa mãn điều kiện bền là:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} \leq [\sigma] \quad (3.16)$$

Từ điều kiện bền, ta có ba bài toán cơ bản:

Kiểm tra bền: là kiểm tra xem ứng suất trong thanh có thỏa điều kiện bền hay không?

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} \leq [\sigma] \pm 5\%$$

Chọn kích thước mặt cắt ngang: đây là bài toán thiết kế, ta phải định kích thước mặt cắt ngang của thanh sao cho đảm bảo điều kiện bền. Từ (3.16) ta có:

$$A \geq \frac{N_z}{[\sigma]} \pm 5\%$$

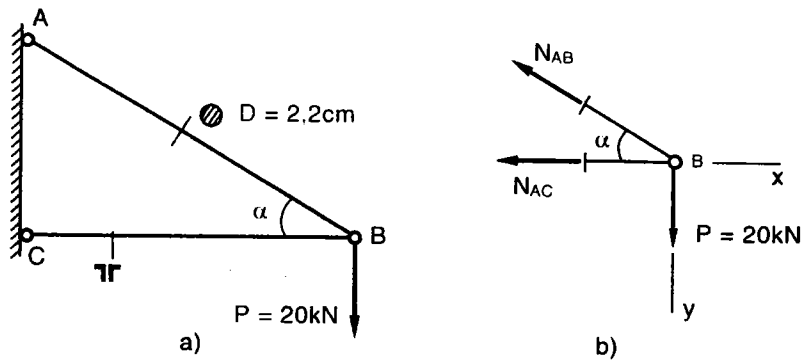
Định tải trọng cho phép: từ (3.16) ta dễ dàng xác định được nội lực lớn nhất có thể đạt được của thanh là:

$$N_z \leq [\sigma]A \pm 5\%$$

hay: $[N_z] = [\sigma]A$

Từ $[N_z]$ ta có thể tìm được trị số cho phép của tải trọng tác dụng lên công trình hay chi tiết máy.

Ví dụ 3.3



Hình 3.16

Cho kết cấu gồm hai thanh chịu lực như hình 3.16a.

a) Kiểm tra bền thanh AB .

b) Định số hiệu thép V dùng cho thanh BC . Biết:

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}; \quad [\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$$

Giải Tính nội lực trong các thanh BA và BC bằng cách tách mắt B , (H.3.16b). Ta có các phương trình cân bằng:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 &\Rightarrow N_{AB} \sin \alpha - P = 0 \\ &\Rightarrow N_{AB} = \frac{P}{\sin \alpha} = 52 \text{ kN (kéo)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow -N_{BC} - N_{AB} \cos \alpha = 0 \\ &\Rightarrow N_{BC} = -48 \text{ kN (nén)} \end{aligned}$$

a) Kiểm tra bền thanh AB

$$\text{Ta có: } \sigma_z^{AB} = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{52}{\pi 1,1^2} = 13,68 \text{ kN/cm}^2$$

Ta thấy: $\sigma_z^{AB} < [\sigma]$ nên thanh AB đảm bảo độ bền.

b) Chọn số hiệu thép cho thanh BC

$$\text{Ta phải có: } A_{BC} \geq \frac{|N_{BC}|}{[\sigma]} = \frac{48}{14} = 3,43 \text{ cm}^2$$

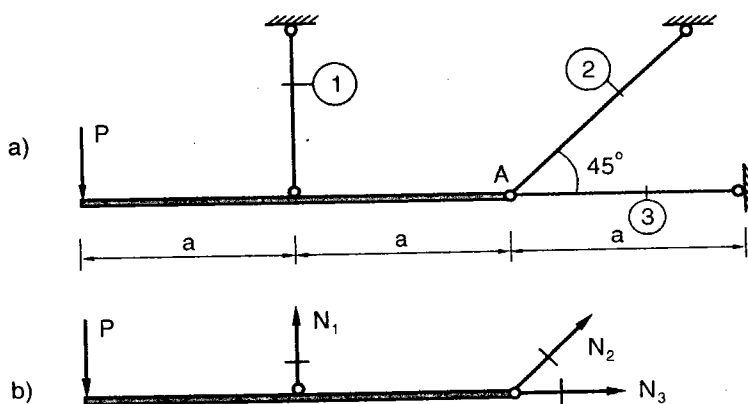
Tra bảng thép định hình (phụ lục 1) ta chọn được thép dùng cho BC là:

$$2V 25 \times 25 \times 4 \text{ có: } A = 2 \times 1,86 \text{ cm}^2 = 3,72 \text{ cm}^2$$

Ví dụ 3.4 Cho kết cấu như hình 3.17a

Định tải trọng cho phép $[P]$ theo điều kiện bền của các thanh 1, 2, 3.

Cho biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $A_1 = 2 \text{ cm}^2$, $A_2 = 1 \text{ cm}^2$, $A_3 = 2 \text{ cm}^2$.



Hình 3.17

Giải Trước tiên, ta cần tính nội lực trong các thanh. Cắt các thanh 1, 2, 3, cô lập hệ như hình 3.17b.

Xét cân bằng với các phương trình:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_2 \cos 45^\circ + N_3 = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -P + N_1 + N_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow -P2a + N_1a = 0$$

ta được $N_1 = 2P$; $N_2 = -P\sqrt{2}$ (nén); $N_3 = P$

Viết điều kiện bền của các thanh 1, 2, 3:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2P}{A_1} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq \frac{[\sigma] \cdot A_1}{2} = \frac{16 \cdot 2}{2} = 16 \text{ kN}$$

$$|\sigma_2| = \frac{|N_2|}{A_2} = \frac{P\sqrt{2}}{A_2} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq \frac{[\sigma]A_2}{\sqrt{2}} = \frac{16.1}{\sqrt{2}} = 11,3 \text{ kN}$$

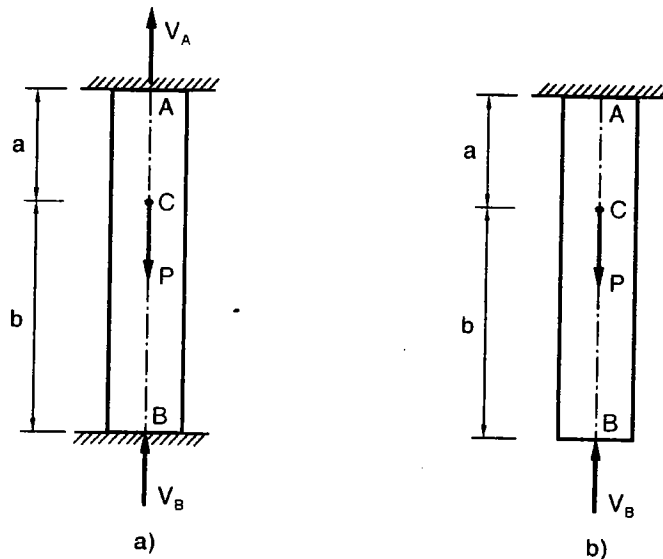
$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{P}{A_3} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq [\sigma] A_3 = 16.2 = 32 \text{ kN}$$

So sánh ta được $[P] = 11,3 \text{ kN}$.

3.8 BÀI TOÁN SIÊU TÍNH

Định nghĩa: Bài toán siêu tĩnh là bài toán mà chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học sẽ không đủ để giải được tất cả các phản lực hay nội lực trong hệ.

Giải Cần tìm thêm các phương trình diễn tả điều kiện biến dạng của hệ sao cho cộng số phương trình này với các phương trình cân bằng tĩnh học vừa đủ bằng số ẩn số phản lực, nội lực cần tìm.



Hình 3.18

Ví dụ 3.5 Xét thanh chịu lực như H.3.18a. Ở hai ngàm có hai phản lực V_A và V_B . Ta có phương trình cân bằng:

$$V_A + V_B - P = 0 \quad (a)$$

Phương trình này có hai ẩn, muốn giải được ta phải tìm thêm phương trình điều kiện biến dạng của thanh.

Tưởng tượng bỏ ngàm B và thay bằng phản lực V_B (H.3.18b). Điều kiện biến dạng của hệ là:

$$\Delta L = \Delta_{BA} = \Delta_{BC} + \Delta_{CA} = 0 \quad (b)$$

Gọi N_{BC} và N_{CA} là nội lực trên các mặt cắt của các đoạn BC và CA ta sẽ được:

$$\Delta L = \frac{N_{BC}L_{BC}}{EA} + \frac{N_{CA}L_{CA}}{EA} = 0 \quad (c)$$

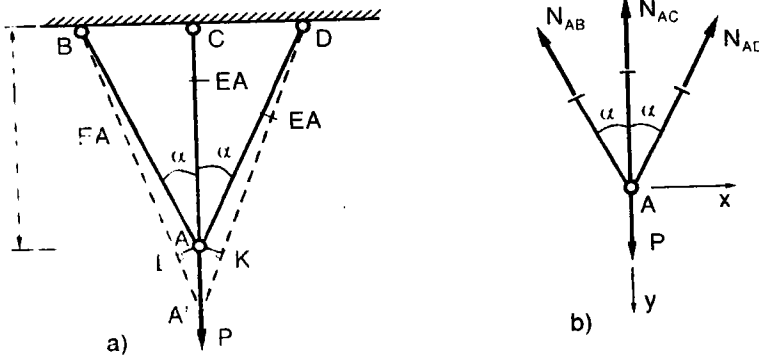
với: $N_{BC} = -V_B$; $N_{CA} = -V_B + P$; (c) trở thành:

$$\frac{-V_B b}{EA} + \frac{(-V_B + P)a}{EA} = 0$$

suy ra:
$$V_B = \frac{Pa}{a+b}$$

Ta đã tính được phản lực V_B , bài toán trở thành bài toán tĩnh định bình thường.

Ví dụ 3.6 Xét hệ gồm ba thanh treo lực P (H.3.19a) hãy tính nội lực trong các thanh treo.



Hình 3.19

Giải Tách mắt A (H.3.19b) N_{AB} , N_{AC} , N_{AD} là nội lực trong các thanh
Ta có hai phương trình cân bằng:

$$\Sigma X = N_{AB} \sin\alpha + N_{AD} \sin\alpha = 0 \quad (a)$$

$$\Sigma Y = -P + N_{AB} \cos \alpha + N_{AC} + N_{AD} \cos \alpha = 0 \quad (b)$$

Để giải ba ẩn số nội lực ta cần thêm một phương trình điều kiện biến dạng. Xét hệ thanh sau khi chịu lực. Vì đối xứng nên điểm A di chuyển theo phương AC đến A'. Từ A kẻ đường AI và AK lần lượt vuông góc với A'B và A'D. Vì biến dạng là nhỏ nên góc A'BA và A'DA là vô cùng bé và góc BA'C và DA'C vẫn giữ giá trị α , ta có

$$\text{Trong tam giác AIB: } BI = BA \cdot \cos(\widehat{A'BA})$$

vì $\widehat{A'BA}$ bé nên $\cos(\widehat{A'BA}) \cong 1$; $BI \cong BA$.

Suy ra: IA' - độ dãn dài của AB;

KA' - độ dãn dài của AD.

Ngoài ra, AA' cũng chính là độ dãn dài của AC.

Xét tam giác A'IA và A'KA, ta có liên hệ:

$$IA' = KA' = AA' \cos \alpha \quad (c)$$

thay:
$$IA' = \frac{N_{AB} L}{EA \cos \alpha}$$

$$KA' = \frac{N_{AD} L}{EA \cos \alpha}$$

$$AA' = \frac{N_{AC} L}{EA}$$

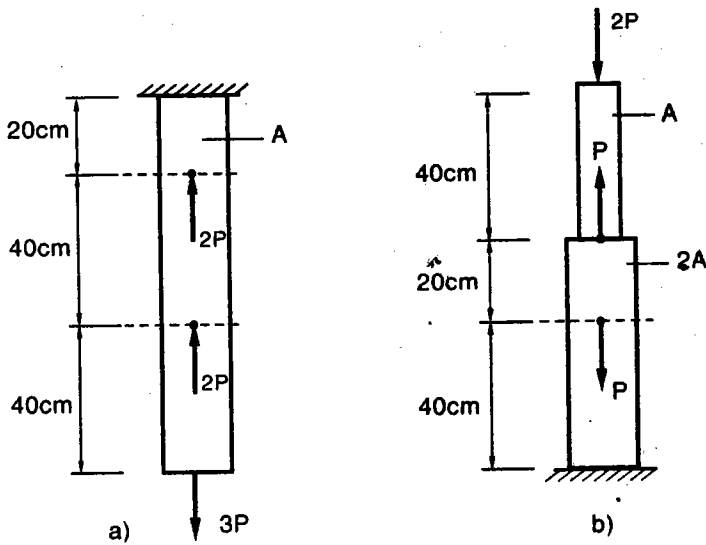
vào (c) rồi vào (a) và (b) ta sẽ được:

$$N_{AB} = N_{AD} = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

$$N_{AC} = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

3.9 BÀI TẬP CHƯƠNG 3

3.1 Vẽ biểu đồ lực dọc, tính ứng suất trong mỗi đoạn. Tính biến dạng toàn phần của thanh: cho $P = 10kN$; $A = 5cm^2$; $E = 2.10^4 kN/cm^2$, (H.3.20).

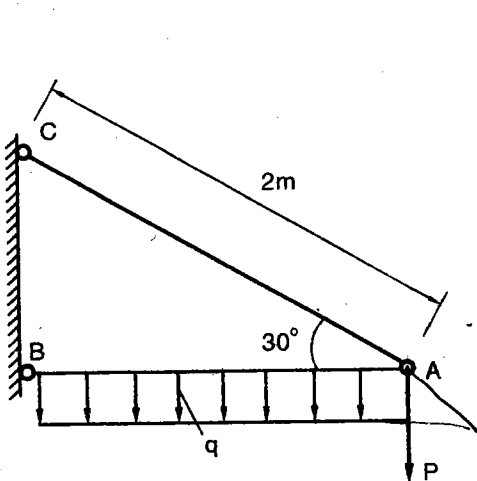


Hình 3.20

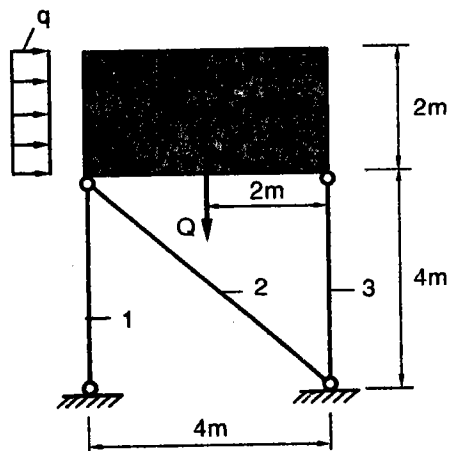
3.2 Cho hệ như hình 3.21. Hãy:

- a) Tính nội lực trong thanh AC, từ đó tìm đường kính mặt cắt ngang thanh AC sao cho thanh đảm bảo độ bền.
- b) Giả sử thanh AB cứng tuyệt đối, hãy tính chuyển vị của điểm A.

Cho: $P = 10kN$; $q = 10kN/m$; $[\sigma] = 16kN/cm^2$; $E = 2.10^4 kN/cm^2$.



Hình 3.21



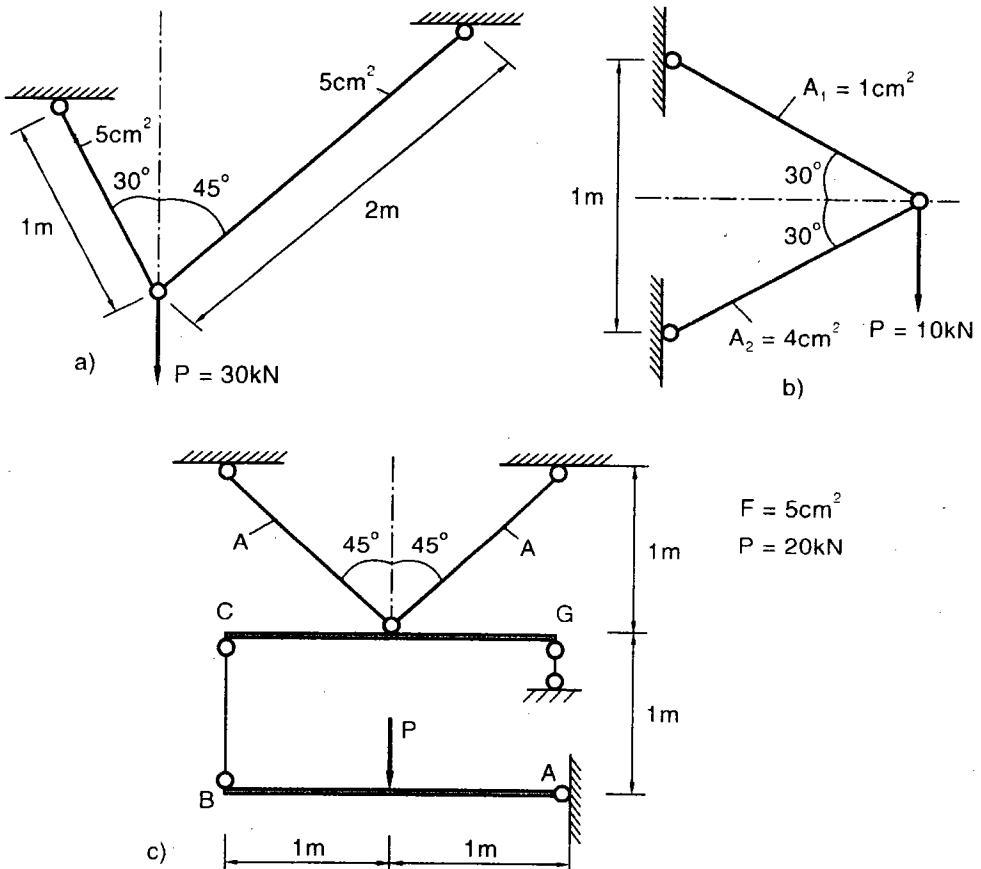
Hình 3.22

3.3 Cho khối tuyệt đối cứng đặt trên ba thanh 1, 2, 3 trọng lượng khối $Q = 40kN$; lực ngang $q = 1kN/m$; các thanh có $[\sigma] = 16kN/cm^2$ (H.3.22).

a) Xác định nội lực trong các thanh.

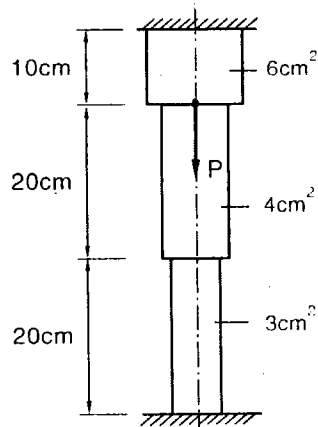
b) Chọn số hiệu mặt cắt ngang của các thanh theo điều kiện bền biết rằng cả ba thanh 1, 2, 3 đều cấu tạo bởi hai thép góc đều cạnh ghép với nhau.

3.4 Tính chuyển vị đứng của điểm đặt lực P . Các thanh đều có $E = 2.10^4 kN/cm^2$, các thanh AB và GC tuyệt đối cứng) (H.3.23c).



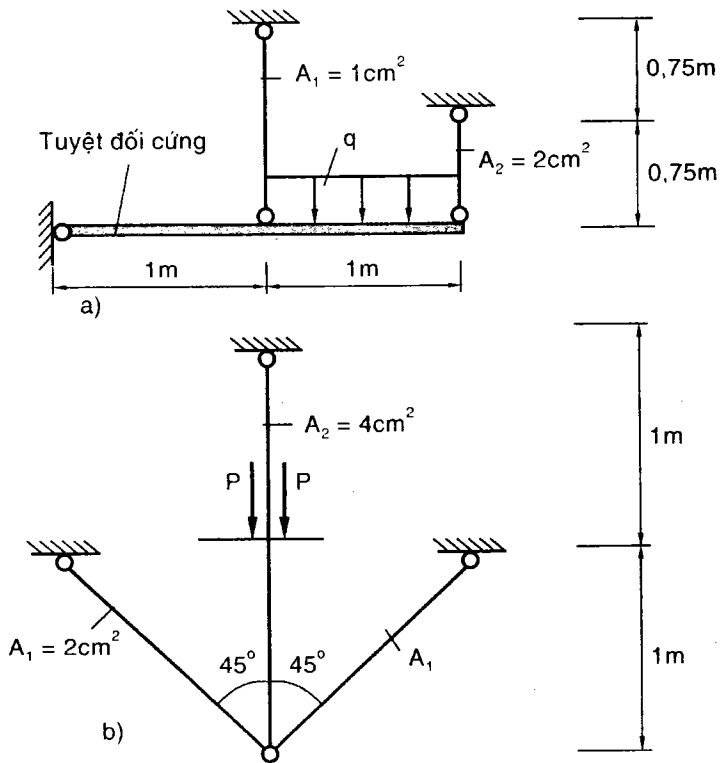
Hình 3.23

3.5 Vẽ biểu đồ lực dọc N_z cho $P = 10kN$; $E = \text{hằng}$ (H.3.24).



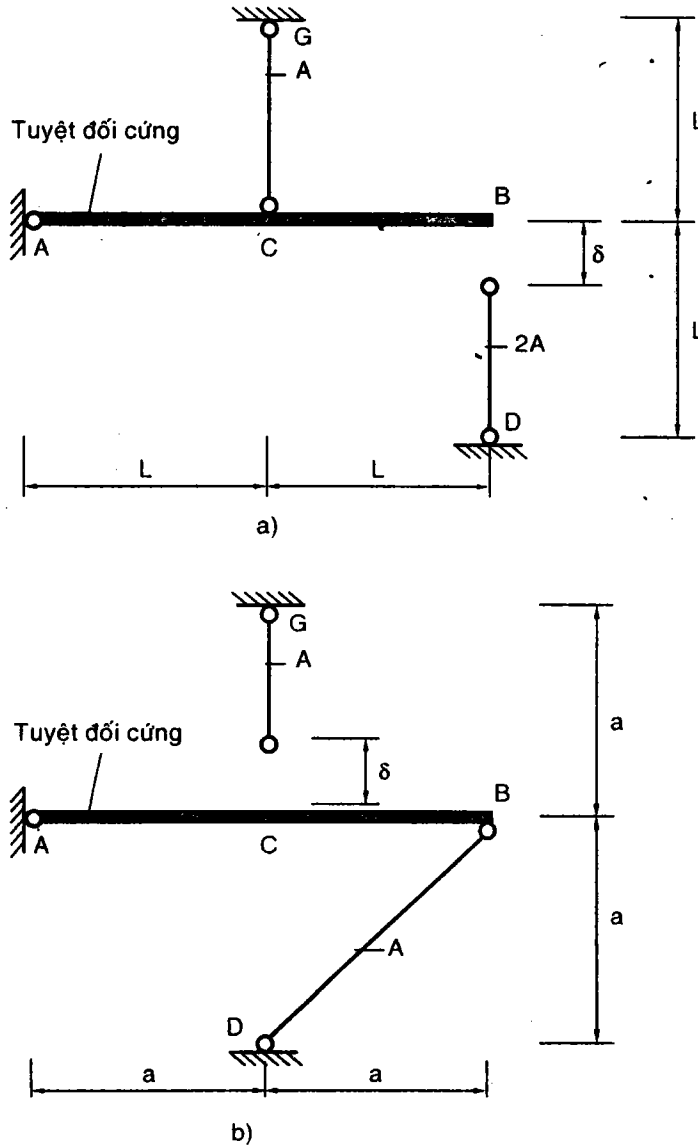
Hình 3.24

3.6 Định nội lực trong các thanh treo, $P = 10kN$; $q = 10kN/m$; $E = \text{hằng}$ (H.3.25).



Hình 3.25

- 3.7** Xác định $[\delta]$ sao cho ứng suất trong các thanh BD và CG không vượt quá ứng suất cho phép $[\sigma]$, giả thiết thanh AB tuyệt đối cứng và các thanh khác đều có cùng loại vật liệu với mô đun đàn hồi E .

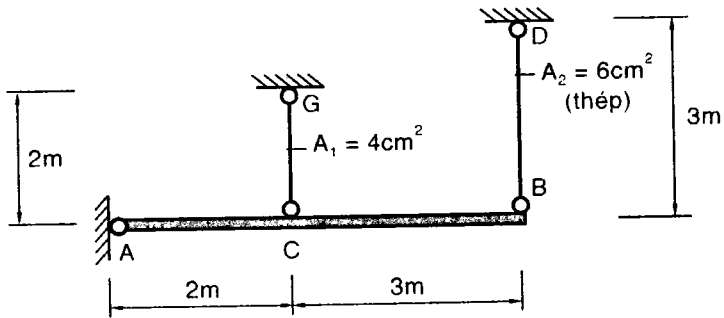


Hình 3.26

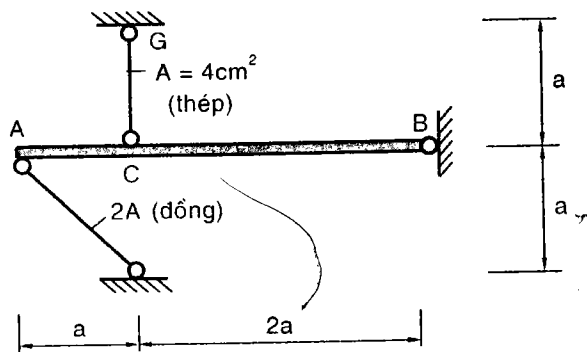
3.8 Tính nội lực trong các thanh treo hoặc chống khi nhiệt độ trong các thanh tăng lên Δt° . Các dầm AB xem như tuyệt đối cứng.

Áp dụng bằng số, cho $E_{th} = 2.10^4 kN/cm^2$, $\alpha_{th} = 125.10^{-7}$

$E_d = 1.10^4 kN/cm^2$, $\alpha_d = 165.10^{-7}$



a)



b)

Hình 3.27

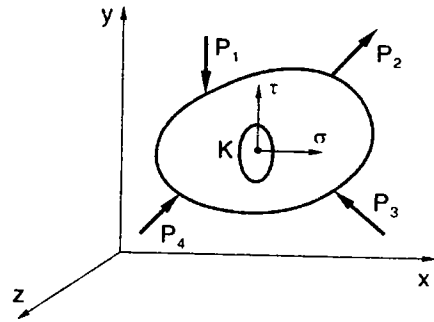
TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

4.1 KHÁI NIỆM TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT TẠI MỘT ĐIỂM

4.1.1 Trạng thái ứng suất

Ta đã làm quen với khái niệm ứng suất ở chương 2 (nội lực và ứng suất) và đã tính ứng suất trong trường hợp thanh chịu lực đơn giản ở chương 3 (kéo nén đúng tâm).

Xét một vật thể đàn hồi cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực (H.4.1). Trên các mặt cắt đi qua điểm K của vật thể, ta có thể xác định được các thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Các thành phần ứng suất này sẽ thay đổi tùy theo vị trí của mỗi mặt cắt đi qua K . Ta xét tập hợp tất cả những ứng suất trên mọi mặt cắt đi qua K , tạo thành *trạng thái ứng suất* tại điểm này.



Hình 4.1 Ứng suất tại một điểm

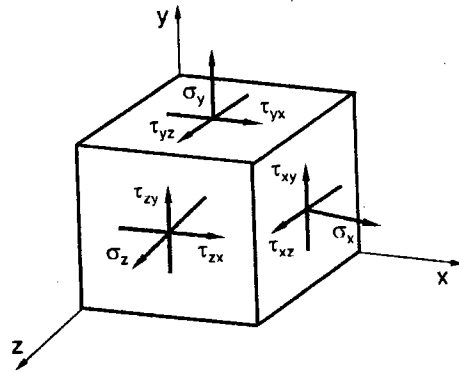
Như vậy, *trạng thái ứng suất tại một điểm* bao gồm tất cả những thành phần ứng suất trên các mặt đi qua điểm đó.

Trạng thái ứng suất tại một điểm đặc trưng cho mức độ chịu lực của vật liệu tại điểm đó. Những thành phần ứng suất của trạng thái ứng suất tại một điểm có liên hệ với nhau. Bởi vậy, chúng ta cần nghiên cứu trạng thái ứng suất, tìm ra đặc điểm mối liên hệ giữa các ứng suất, xác định ứng suất nguy hiểm để từ đó tính toán độ bền và đoán biết dạng phá hỏng của vật thể chịu lực.

4.1.2 Biểu diễn trạng thái ứng suất

1- Phương pháp nghiên cứu

Để biểu diễn trạng thái ứng suất tại một điểm trong vật thể, ta tưởng tượng tách một phân tử hình lập phương vô cùng bé bao bọc lấy điểm K . Phân tử bé đến mức thể tích của nó gần như bằng không, khi đó có thể xem như các bề mặt của phân tử đi qua điểm K . Để thuận lợi cho việc tính toán, ta chọn hệ trục tọa độ xyz có các trục song song với các cạnh của phân tử. Trạng thái ứng suất của phân tử sẽ được biểu diễn như trên hình 4.2. Trên các mặt của phân tử sẽ có chín thành phần ứng suất, gồm ba ứng suất pháp $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ và sáu ứng suất tiếp $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$. Mỗi thành phần ứng suất có hai chỉ số. Chỉ số thứ nhất chỉ rõ phương pháp tuyến của mặt tọa độ có ứng suất tác dụng, chỉ số thứ hai xác định phương tác dụng của thành phần ứng suất. Ví dụ, τ_{xy} là thành phần ứng suất tiếp tác dụng trên mặt vuông góc với trục x và có hướng song song với trục y . Đối với ứng suất pháp, hai chỉ số trùng nhau nên quy ước chỉ viết một chỉ số cho gọn. Chẳng hạn, σ_x là ứng suất pháp trên bề mặt vuông góc với trục x .



Hình 4.2 Các thành phần ứng suất

2- Quy ước dấu

Trước tiên, các mặt của phân tử ứng suất được quy ước là mặt dương hoặc âm nếu pháp tuyến ngoài của mặt đó cùng chiều hoặc ngược chiều với các trục tọa độ.

Ta quy ước thành phần ứng suất có dấu dương nếu nó tác dụng trên mặt dương và cùng chiều với trục tọa độ hoặc nếu tác dụng trên mặt âm thì nó ngược chiều với trục tọa độ. Trong trường hợp ngược lại, ứng suất được coi là âm.

Có thể nhớ quy ước dấu này bằng một quy tắc đơn giản: nếu cặp chỉ số mặt và phương kết hợp thành dương - dương hoặc âm - âm thì

ứng suất là dương, còn khi các chỉ số kết hợp thành âm - dương hoặc dương - âm thì ứng suất là âm.

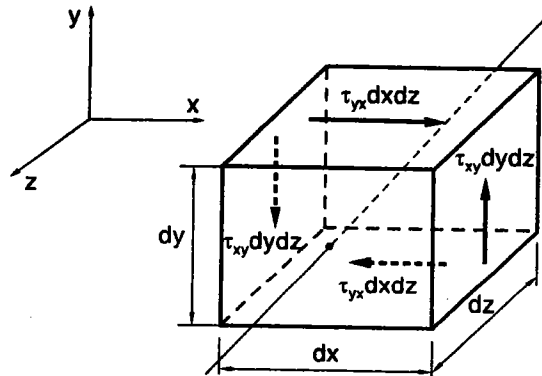
Chẳng hạn, các thành phần ứng suất trên hình 4.2 đều mang dấu dương.

Với cách quy ước trên, ứng suất kéo, hướng theo pháp tuyến ngoài của bề mặt, có dấu dương. Còn ứng suất nén, hướng vào bề mặt, là âm.

4.1.3 Định luật đối ứng của ứng suất tiếp

Phân tố hình hộp tách ra từ vật thể đàn hồi tại điểm K phải ở trạng thái cân bằng về lực và mômen.

Xét cân bằng về lực tác dụng lên phân tố, ta có thể thu được các phương trình vi phân cân bằng là hệ phương trình cơ bản của lý thuyết đàn hồi. Tuy vậy, trong SBVL để đơn giản hóa người ta thường sử dụng các giả thiết thay cho việc giải các phương trình này cho nên phương trình vi phân cân bằng không được đề cập tới ở đây.



Hình 4.3 Các thành phần lực tham gia vào phương trình bằng mômen

Để xét cân bằng về mômen của phân tố trên, chọn một trục song song với trục z và đi qua trọng tâm của phân tố. Trên hình 4.3 chỉ biểu diễn những lực tham gia vào phương trình cân bằng mômen đối với trục z và phương trình này được viết như sau:

$$\tau_{xy} dx dy dz = \tau_{yx} dx dy dz \quad (4.1)$$

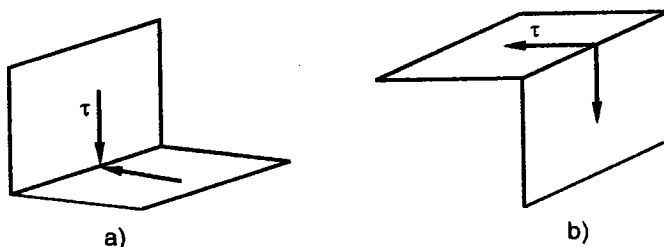
trong đó, bỏ qua mômen của những lực vô cùng bé bậc cao, chẳng hạn như lực khối. Ta thu được:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (4.2)$$

Tương tự, viết phương trình cân bằng mômen đối với hai trục còn lại, ta được hai biểu thức:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (4.3)$$

Như vậy, ta thu được *nguyên lý đối ứng của ứng suất tiếp: trên hai mặt vuông góc, các ứng suất tiếp có trị số bằng nhau và có chiều cùng hướng vào cạnh chung hoặc cùng tách khỏi cạnh chung* (xem H.4.4).



Hình 4.4 Ứng suất tiếp trên hai mặt vuông góc

Do tính chất đối ứng của ứng suất tiếp, tại một điểm của vật thể chúng ta chỉ có sáu thành phần ứng suất độc lập với nhau là ba ứng suất pháp $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ và ba ứng suất tiếp $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Các thành phần ứng suất này được biểu diễn qua các phần tử của một ma trận đối xứng gọi là *ma trận ứng suất*:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

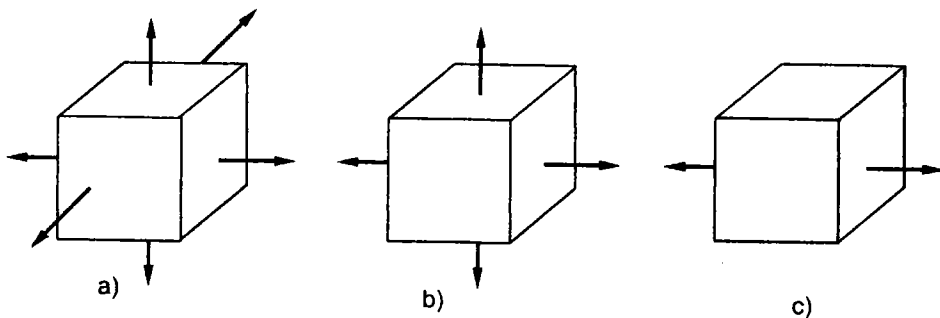
Chú ý rằng, khi ta biểu diễn trạng thái ứng suất qua các phân tố ứng suất với các hệ tọa độ khác nhau, các thành phần ứng suất trên các bề mặt của phân tố ứng suất tuy thay đổi song chúng vẫn biểu diễn cùng một trạng thái ứng suất.

4.1.4 Mặt chính, phương chính và ứng suất chính. Phân loại trạng thái ứng suất

Lý thuyết đàn hồi chứng minh được rằng tại một điểm bất kỳ của vật thể chịu lực luôn tồn tại ba mặt tương hỗ vuông góc mà trên các mặt đó chỉ tác dụng ứng suất pháp chứ không có ứng suất tiếp. Những mặt đó gọi là *mặt chính*. Phương vuông góc với mặt chính gọi là *phương chính*. Ứng suất pháp tác dụng trên mặt chính gọi là *ứng suất chính* và được ký hiệu là σ_1 , σ_2 và σ_3 . Các ứng suất chính được quy ước sắp xếp theo thứ tự $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Ví dụ, cho ba ứng suất chính là 200N/cm^2 ; -400N/cm^2 ; -500N/cm^2 .

Theo quy ước: $\sigma_1 = 200\text{N/cm}^2$; $\sigma_2 = -400\text{N/cm}^2$; $\sigma_3 = -500\text{N/cm}^2$



Hình 4.5 Các loại trạng thái ứng suất

Trạng thái ứng suất được phân loại như sau:

- Nếu cả ba ứng suất chính khác không, điểm ở *trạng thái ứng suất khối* (H.4.5a).
- Nếu có hai ứng suất chính khác không, điểm ở *trạng thái ứng suất phẳng* (H.4.5b).
- Nếu chỉ có một ứng suất chính khác không, điểm ở *trạng thái ứng suất đơn* (H.4.5c).

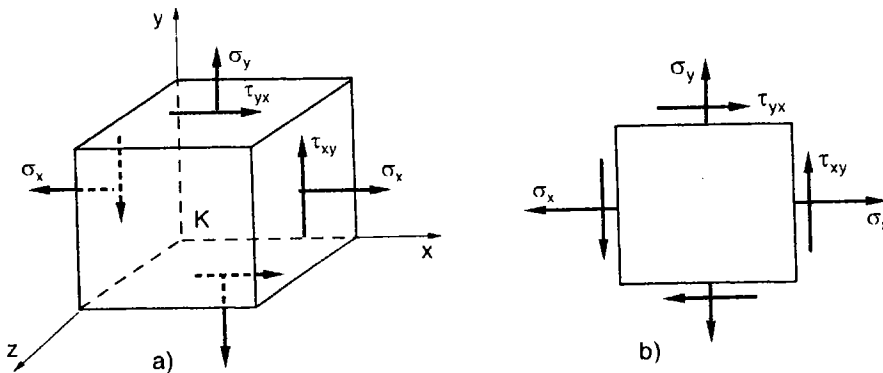
Trạng thái ứng suất khối và trạng thái ứng suất phẳng gọi là trạng thái ứng suất phức tạp.

Để nghiên cứu trạng thái ứng suất tại một điểm, ta cần xác định mặt chính, phương chính, các ứng suất cực trị... tại điểm đó. Trạng thái ứng suất đơn đã được giới thiệu ở chương 3. Trong chương này, ta sẽ nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng và trạng thái ứng suất khối.

4.2 TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT PHẪNG

Bài toán phẳng thường hay gặp trong kỹ thuật. Người ta thường đơn giản hóa bài toán sao cho ứng suất trong bộ phận công trình hay chi tiết máy được đưa về xác định chỉ trong một mặt phẳng. Chẳng hạn, nếu không có ngoại lực tác dụng lên một bề mặt nào đó của vật thể, khi đó ứng suất pháp và ứng suất tiếp sẽ bằng không trên bề mặt và như vậy vật thể sẽ ở trạng thái ứng suất phẳng.

4.2.1 Cách biểu diễn

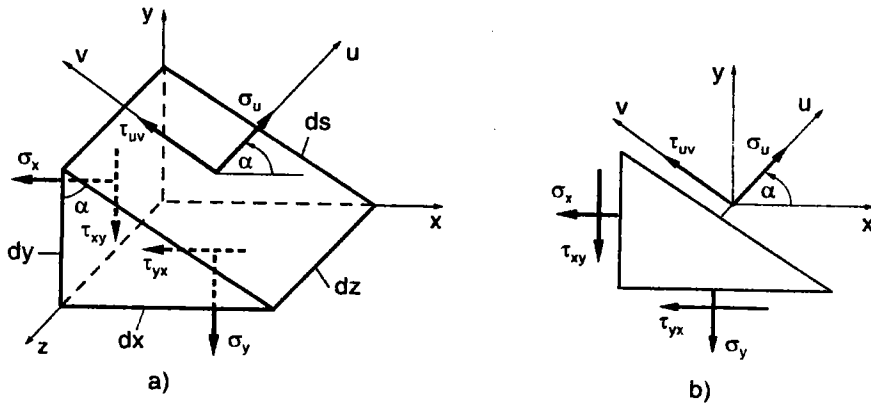


Hình 4.6 Phân tử ứng suất phẳng

Xét một phân tử vô cùng bé như trên H.4.6a. Ứng suất trên mặt vuông góc với trục z bằng không và mặt này là một mặt chính vì có ứng suất tiếp bằng không. Để dễ hình dung, ta biểu diễn phân tử trên mặt phẳng bằng cách chiếu toàn bộ lên mặt phẳng Kxy (H.4.6b). Để xác định trạng thái ứng suất tại một điểm, cần xác định các thành phần ứng suất trên một mặt cắt nghiêng bất kỳ.

4.2.2 Ứng suất trên mặt cắt nghiêng. Phương pháp giải tích

Ta cần phải xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng song song với trục z và có pháp tuyến u tạo với trục x một góc α (ta quy ước $\alpha > 0$ khi quay ngược chiều kim đồng hồ kể từ trục x), với giả thiết là đã biết ứng suất σ_x , σ_y và τ_{xy} . Tưởng tượng cắt phân tử bằng một mặt cắt nghiêng chia phân tử ra làm hai phần, ta xét cân bằng của một phần phân tử (H.4.7).



Hình 4.7 Ứng suất trên mặt cắt nghiêng

Trên mặt nghiêng, ứng suất ký hiệu là σ_u và τ_{uv} và có thể được xác định từ phương trình cân bằng tĩnh học. Để thiết lập phương trình cân bằng, cần tìm các lực tác dụng lên các bề mặt của phân tử. Diện tích của mặt bên trái (mặt x âm), của mặt đáy (mặt y âm) và của mặt nghiêng là $dydz$, $dxdz$ và $dudz$. Chiếu tất cả các lực bề mặt lên trục u , ta có phương trình thứ nhất:

$$\begin{aligned} \sigma_u dudz - \sigma_x dzdy \cos \alpha - \tau_{xy} dzdy \sin \alpha \\ - \sigma_y dzdx \sin \alpha - \tau_{xy} dzdx \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

Tương tự, chiếu lực tác dụng lên phân tử theo trục v , ta được phương trình thứ hai:

$$\begin{aligned} \tau_{uv} dudz + \sigma_x dzdy \sin \alpha - \tau_{xy} dzdy \cos \alpha \\ - \sigma_y dzdx \cos \alpha - \tau_{xy} dzdx \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất đối ứng của ứng suất tiếp: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ và chú ý rằng: $dx = dssin\alpha$; $dy = dscos\alpha$, sau khi giản ước và sắp xếp lại, ta thu được các phương trình sau:

$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.4a)$$

$$\tau_{uv} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (4.4b)$$

Dùng các hệ thức lượng giác:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

Phương trình (4.4) có thể biến đổi thành một dạng tiện sử dụng hơn:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.5a)$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (4.5b)$$

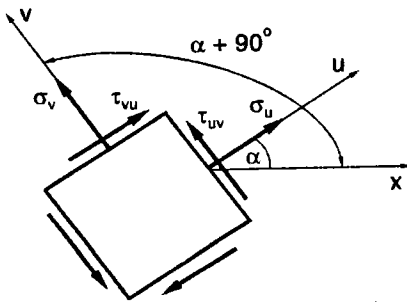
Đây là phương trình xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng và còn được gọi là phương trình chuyển đổi ứng suất, bởi vì nó biến đổi các thành phần ứng suất từ hệ trục này sang hệ trục khác. Từ phương trình (4.5), có thể rút ra một hệ quả quan trọng. Nếu thay thế α bằng $\alpha + 90^\circ$ như trên hình 4.8 ta thu được ứng suất pháp tác dụng trên bề mặt v :

$$\sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.6)$$

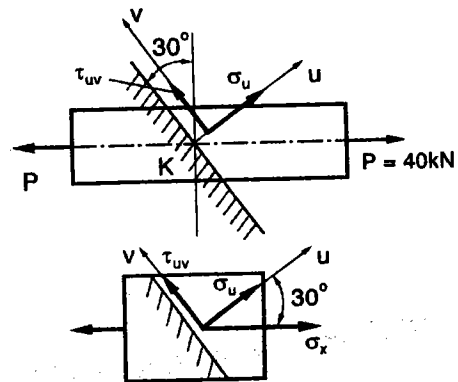
Lấy tổng hai phương trình (4.5a) và (4.6), ta có:

$$\sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y \quad (4.7)$$

Biểu thức trên cho thấy, tổng của ứng suất pháp tác dụng trên hai mặt vuông góc của phần tử ứng suất phẳng tại điểm là hằng số và không phụ thuộc vào góc α .



Hình 4.8 Ứng suất trên hai mặt cắt vuông góc với nhau



Hình 4.9

Ví dụ 4.1 Thanh có diện tích 5cm^2 , chịu kéo với lực $P = 40\text{kN}$. Xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng một góc 30° với mặt cắt ngang (H.4.9).

Giải Tách phân tố hình hộp bao điểm K nằm trên mặt cắt. Theo quy ước ta có:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{40}{5} = 8 \text{ kN/cm}^2$$

Mặt cắt nghiêng một góc 30° với trục x (trục thanh). Theo (4.5), ta tính được ứng suất trên mặt cắt nghiêng:

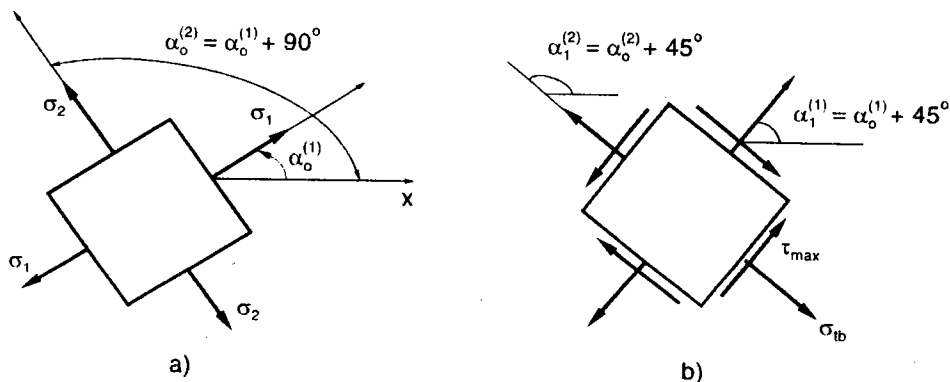
$$\sigma_u = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha = \frac{8}{2} (1 + \cos 2.30^\circ) = 6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = -\frac{8}{2} \sin 2.30^\circ = -3,46 \text{ kN/cm}^2$$

4.2.3 Ứng suất chính và ứng suất tiếp cực trị

Từ phương trình (4.5), ta thấy ứng suất phụ thuộc vào góc nghiêng của mặt cắt. Ta cần xác định vị trí mặt cắt, trên đó tác dụng ứng suất pháp và ứng suất tiếp cực trị.

1- Ứng suất chính và phương chính



Hình 4.10 a) Ứng suất chính; b) Ứng suất tiếp cực đại

Ngoài mặt chính là mặt đã biết vuông góc với trục z , ta nhận thấy hai mặt chính còn lại phải là những mặt song song với trục z (vì phải vuông góc với mặt chính đã có). Trên mặt chính không có ứng suất tiếp cho nên ta tìm hai mặt chính còn lại bằng cách cho τ_{uv} trong (4.5b) bằng không.

Như vậy, nếu gọi α_o là góc của phương chính hợp với trục x thì điều kiện để tìm phương chính là:

$$-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

Từ đó, ta có phương trình xác định α_o :

$$\tan 2\alpha_o = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4.8)$$

Phương trình này có hai nghiệm α_o sai khác nhau 180° , tức là có hai giá trị khác nhau một góc 90° . Vì vậy, ta có thể kết luận rằng có hai mặt chính vuông góc với nhau và song song với trục z . Trên mỗi mặt chính có một ứng suất chính tác dụng.

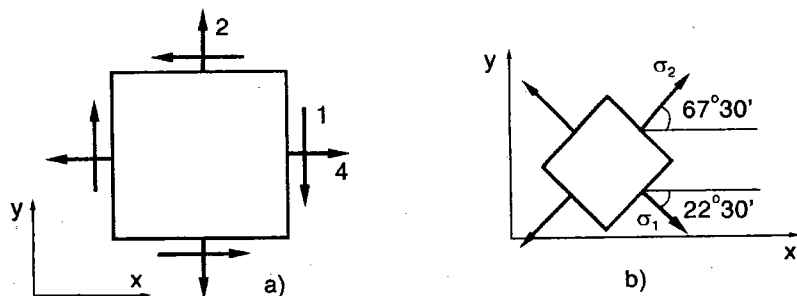
Ta nhận thấy hai ứng suất chính này đồng thời cũng là *ứng suất pháp cực trị* (ký hiệu là α_1 hay α_3). Thật vậy, lấy đạo hàm của ứng suất pháp trong (4.5a) theo góc α rồi cho bằng không, ta lại thu được phương trình xác định góc (4.8). Giá trị ứng suất chính có thể tính được bằng cách thế ngược trị số của α trong (4.8) vào (4.5a). Để ý rằng:

$$\sin 2\alpha_o = \pm \frac{\tan 2\alpha_o}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_o}}; \quad \cos 2\alpha_o = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_o}} \quad (4.9)$$

Đưa vào (4.5a), ta được các ứng suất chính, hay ứng suất pháp cực trị:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.10)$$

Ví dụ 4.2 Tìm ứng suất chính và phương chính của trạng thái ứng suất cho trên hình 4.11a. Các ứng suất cho theo kN/cm^2 .



Hình 4.11

Giải Theo quy ước dấu, ta có:

$$\sigma_x = 4 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_y = 2 \text{ kN/cm}^2; \quad \tau_{xy} = -1 \text{ kN/cm}^2$$

Vị trí hai mặt chính xác định từ phương trình (4.8):

$$\tan 2\alpha_o = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2}{4-2} = -1$$

vậy: $2\alpha_o = -45^\circ + k180^\circ$

Ta thu được hai nghiệm, biểu thị hai mặt chính vuông góc với nhau:

$$\alpha_o^{(1)} = -22^\circ 30'; \quad \alpha_o^{(2)} = 67^\circ 30' \quad (\text{a})$$

Các ứng suất chính được xác định từ công thức (4.10):

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{4+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4-2}{2}\right)^2 + 1} = 3 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} 4,41 \text{ kN/cm}^2 \\ 1,58 \text{ kN/cm}^2 \end{cases} \quad (\text{b})$$

Để xác định mặt chính nào từ (a) có ứng suất chính (b) tác dụng ta dùng công thức (4.5), chẳng hạn với $\alpha_o^{(1)} = -22^\circ 30'$, ta có:

$$\sigma_u = \frac{4+2}{2} + \frac{4-2}{2} \cos 2(-22^\circ 30') - 1 \sin 2(-22^\circ 30') = 4,41 \text{ kN/cm}^2$$

Như vậy $\sigma_1 = 4,41 \text{ kN/cm}^2$ ứng với góc nghiêng $\alpha_o^{(1)} = -22^\circ 30'$, còn $\sigma_2 = 1,58 \text{ kN/cm}^2$ tác dụng trên mặt có $\alpha_o^{(2)} = 67^\circ 30'$. Các mặt và ứng suất chính biểu diễn trên phân tố ở hình 4.11b.

2- Ứng suất tiếp cực trị

Ta tìm ứng suất tiếp cực trị và mặt phân tố trên đó có tác dụng ứng suất tiếp cực trị bằng cách lấy đạo hàm của τ_{uv} đối với α và cho đạo hàm này bằng không, ta có:

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0 \quad (4.11)$$

từ đó:
$$\tan 2\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (4.12)$$

So sánh hai phương trình (4.12) với (4.8) ta được:

$$\tan 2\alpha = -\frac{1}{\tan 2\alpha_o} \quad (4.13)$$

Như vậy, ta có: $2\alpha = 2\alpha_0 \pm k90^\circ$

hay là: $\alpha = \alpha_0 \pm k45^\circ$

Ta có thể kết luận rằng, mặt có ứng suất tiếp cực trị tạo với những mặt chính một góc 45° , (H.4.10b).

Thế (4.12) vào (4.9), rồi sau đó thay (4.9) vào (4.5b), ta tìm được giá trị của ứng suất tiếp cực trị trên những mặt song song với trục z:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.14)$$

Ta có thể thu được một biểu thức khác của ứng suất tiếp cực trị từ các giá trị của ứng suất chính được xác định trong công thức (4.10). Lấy giá trị σ_1 trừ đi σ_2 , ta có:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (4.15)$$

4.2.4 Các trường hợp đặc biệt

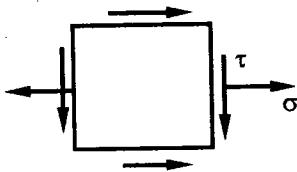
1- Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt

Phân tố trên hình 4.12 có: $\sigma_x = \sigma$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau$

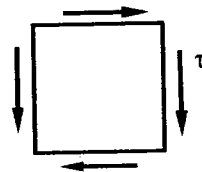
Theo công thức (4.10), ta tính được hai ứng suất chính σ_1 và σ_3 như sau:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (4.16)$$

Đó là một đặc điểm của trạng thái ứng suất phẳng (có hai ứng suất chính) mà ta sẽ gặp ở trường hợp thanh chịu uốn.



Hình 4.12 Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt



Hình 4.13 Trạng thái ứng suất trượt thuần túy

2- Trạng thái trượt thuần túy (H.4.13)

Ở đây, $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau$

Thay vào (4.10), ta có: $\sigma_{\max} = \sigma_{1,3} = \pm \tau$
 \min

hay là: $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ (4.17)

Hai phương chính được xác định theo công thức (4.8) như sau:

$$\tan 2\alpha_o = \infty \quad (4.18)$$

hay là: $\alpha_o = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$

Như vậy, những phương chính xiên góc 45° với trục x và y .

4.2.5 Biểu diễn hình học trạng thái ứng suất. Vòng tròn Mohr

1- Vòng tròn Mohr ứng suất

Công thức xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng (4.5) có thể biểu diễn dưới dạng hình học bằng vòng tròn Mohr. Cách biểu diễn hình học này cho ta thấy rõ mối quan hệ giữa ứng suất pháp và ứng suất tiếp tác dụng trên tất cả các mặt nghiêng đi qua một điểm trong vật thể ở trạng thái phẳng. Để vẽ vòng tròn Mohr, ta sắp xếp lại phương trình (4.6) như sau:

$$\begin{aligned} \sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{uv} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (4.19)$$

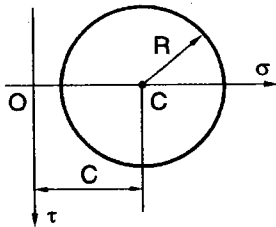
Lấy bình phương cả hai vế của hai đẳng thức nói trên rồi cộng chúng lại, ta thu được:

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (4.19a)$$

Đặt: $c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$; $R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$ (4.19b)

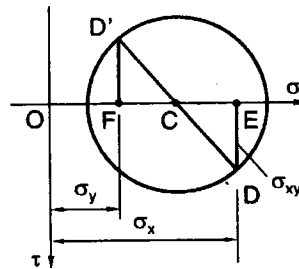
đẳng thức (4.19a) trở thành: $(\sigma_u - c)^2 + \tau_{uv}^2 = R^2$ (4.20)

Trong hệ trục tọa độ, với trục hoành σ và trục tung τ , đây là phương trình của một đường tròn có tâm nằm trên trục hoành cách gốc tọa độ một đoạn bằng c và có bán kính R xác định theo công thức (4.19b). Như vậy, các giá trị ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên tất cả các mặt song song với trục z của phân tố đều biểu thị bằng tọa độ những điểm trên vòng tròn. Ta gọi vòng tròn biểu thị trạng thái ứng suất của phân tố là *vòng tròn ứng suất* hay *vòng tròn Mohr ứng suất* của phân tố.



Hình 4.14

Vòng tròn Mohr ứng suất



Hình 4.15

Cách vẽ vòng tròn Mohr ứng suất

Trong thực tế, ta không cần phải dùng các công thức (4.19b) để xác định tâm và bán kính của vòng tròn ứng suất, mà có thể vẽ theo cách sau đây:

- Xác định hệ trục tọa độ $\sigma O \tau$, với trục hoành σ song song với trục x của phân tố, trục tung τ song song với trục y của phân tố và hướng xuống dưới. Trên trục hoành ta xác định hai điểm E ($\sigma_x, 0$) và điểm F ($0, \tau_{xy}$), (H.4.15).
- Từ E và F ta kẻ các đoạn thẳng vuông góc với trục hoành là $\overline{ED} = \tau_{xy}$ và $\overline{FD'} = -\tau_{xy}$. Như vậy, điểm D biểu diễn ứng suất trên mặt x ($\alpha = 0$) vì có tọa độ $\sigma_u = \sigma_x$ và $\tau_{uv} = \tau_{xy}$. Còn điểm D' biểu diễn ứng suất trên mặt y ($\alpha = 90^\circ$) vì có tọa độ $\sigma_u = \sigma_y$ và $\tau_{uv} = -\tau_{xy}$ bởi vì khi mặt nghiêng quay góc $\alpha = 90^\circ$, ứng suất pháp σ_u trở thành σ_y , và ứng suất tiếp τ_{uv} trở thành giá trị ngược dấu với τ_{xy} .
- Kẻ đường thẳng nối hai điểm D và D' , cắt trục hoành ở điểm C
- Vẽ vòng tròn tâm C , đường kính DD' .

Đây chính là vòng tròn ứng suất cân dựng, có tâm nằm trên trục hoành cách gốc tọa độ một đoạn bằng c và có bán kính R . Thật vậy, vì $\overline{ED} = \overline{FD}$ nên C là trung điểm của EF , tức là:

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OE} - \overline{OF}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = c$$

Trong hình tam giác vuông CDE :

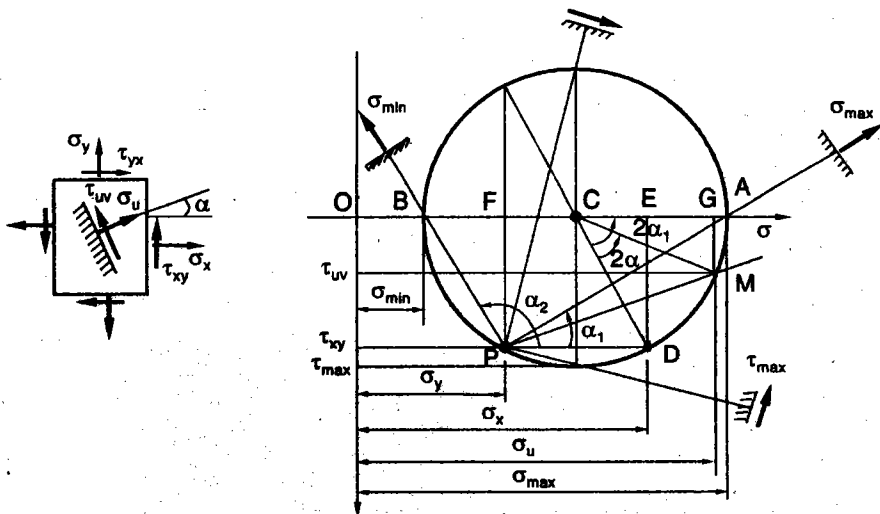
$$\overline{CE} = \frac{\overline{OE} + \overline{OF}}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}; \quad \overline{ED} = \tau_{xy}$$

Do đó, ta có:

$$\overline{CD} = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2 \quad (4.21)$$

Cần lưu ý rằng, ngoài cách vẽ vòng tròn Mohr như ở trên, ta cũng có thể vẽ vòng tròn Mohr trong hệ tọa độ với trục τ hướng lên trên. Tuy nhiên, theo cách này, góc α xác định trên vòng tròn Mohr sẽ có chiều dương nếu quay thuận theo chiều kim đồng hồ, trái với quy ước ban đầu. Vì vậy, ta vẽ theo cách thứ nhất vì cách này có ưu điểm là góc α sẽ có chiều dương khi quay ngược chiều kim đồng hồ, phù hợp với cách ta xác định hướng pháp tuyến với mặt nghiêng của phân tố.

2- Ứng suất trên mặt cắt nghiêng



Hình 4.16 Xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng

Ta dùng vòng tròn Mohr để tìm ứng suất trên mặt cắt nghiêng của phân tố có pháp tuyến u tạo với trục x một góc α . Ta vẽ vòng tròn Mohr theo phương pháp đã nói ở trên hình 4.16. Trục hoành σ vẽ song song với trục x , trục tung τ song song với trục y của phân tố và hướng xuống dưới. Để xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng, từ D ta vẽ đường nằm ngang song song với trục x cắt vòng tròn tại điểm P có tọa độ (σ_y, τ_{xy}) gọi là *điểm cực*. Từ điểm P ta vẽ tia song song với phương u của phân tố cắt vòng tròn tại điểm M . Tọa độ điểm M biểu thị ứng suất trên mặt cắt nghiêng có pháp tuyến u của phân tố. Thật vậy, để chứng minh điều này ta ký hiệu $2\alpha_1$ là góc giữa tia CD và trục x . Từ hình vẽ, ta có các quan hệ hình học như sau:

$$\begin{aligned}\overline{OG} &= \overline{OC} + \overline{CG} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos(2\alpha_1 - 2\alpha) \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos 2\alpha_1 \cos 2\alpha + R \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha\end{aligned}$$

nhưng: $R \cos 2\alpha_1 = \overline{CE} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$; $R \sin 2\alpha_1 = \overline{ED} = \tau_{xy}$

nên: $\overline{OG} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_u$

Tương tự, ta có:

$$\begin{aligned}\overline{GM} &= R \sin(2\alpha_1 - 2\alpha) \\ &= R \cos 2\alpha_1 \sin 2\alpha - R \sin 2\alpha_1 \cos 2\alpha \\ &= -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_{uv}\end{aligned}$$

Ta nhận lại được phương trình (4.5) và như vậy đã chứng minh được điểm M xác định trên vòng tròn Mohr biểu diễn ứng suất trên mặt cắt nghiêng của phân tố.

3- Xác định ứng suất chính và phương chính

Trên vòng tròn ứng suất (H.4.16) tại điểm A, ứng suất pháp đạt giá trị lớn nhất, còn ứng suất tiếp bằng không. Do đó, điểm A biểu diễn một mặt chính. Còn mặt chính khác, trên đó có tác dụng ứng suất pháp nhỏ nhất, được biểu diễn bằng điểm B. Từ hình vẽ, ta thấy ứng suất chính lớn hơn sẽ là:

$$\sigma_1 = \overline{OC} + \overline{CA} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$$

nếu thay R theo công thức (4.21), biểu thức này sẽ trùng với phương trình (4.10). Bằng cách tương tự, ta có thể kiểm tra lại biểu thức cho ứng suất chính nhỏ hơn.

Vẽ tia PA và PB , ta được các phương chính cần tìm. Từ vòng tròn Mohr, ta có thể tính được:

$$\cos 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}; \quad \sin 2\alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

những công thức này cũng trùng với công thức (4.8) ở trên.

Góc $2\alpha_2$ xác định phương chính khác lớn hơn $2\alpha_1$ một góc 180° .

$$\text{Do đó: } \alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$$

Gọi α_1 và α_2 là góc giữa phương chính thứ nhất và phương chính thứ hai đối với trục x , dựa vào hình vẽ, ta có thể xác định được hai góc này. Ta có:

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 &= \frac{\overline{ED}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{FO} + \overline{OA}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_y} \\ \tan \alpha_2 &= \frac{\overline{FP}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{FO} + \overline{OB}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\min} - \sigma_y} \end{aligned} \quad (4.22)$$

4- Xác định ứng suất tiếp cực trị

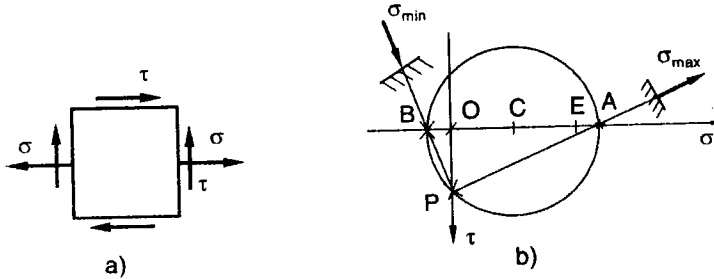
Trên vòng tròn (H.4.16), hai điểm I và J là những điểm có tung độ τ lớn và nhỏ nhất. Do đó, vẽ tia PA và PB ta xác định được những mặt trên đó có ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu. Ta thấy những mặt này tạo với những mặt chính một góc 45° . So sánh R trong (4.21) với τ_{\max} trong (4.14), ta thấy ứng suất tiếp cực đại có trị số bằng chiều dài bán kính đường tròn. Ta cũng nhận thấy, ứng suất pháp trên mặt có ứng suất tiếp cực đại có giá trị bằng hoành độ điểm C , tức là giá trị trung bình của ứng suất pháp:

$$\sigma_{tb} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (4.23)$$

5- Các trường hợp đặc biệt

- *Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt*

Phân tố có $\sigma_y = 0$ (H.4.17), điểm D' ở trên trục tung, nên vòng tròn ứng suất phải cắt trục này. Do đó, ta có hai ứng suất chính σ_1 và σ_3 khác dấu nhau.



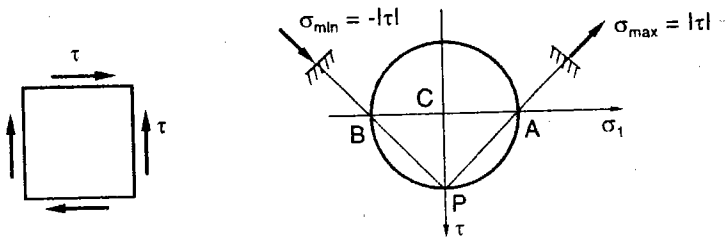
Hình 4.17 Trạng thái ứng suất phẳng và vòng tròn Mohr

- *Trạng thái trượt thuần túy*

Với trạng thái ứng suất này, tâm vòng tròn Mohr trùng với gốc tọa độ, những ứng suất chính khác dấu nhau và bằng giá trị của ứng suất tiếp:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|$$

Trên hình 4.18, ta thấy các phương chính xiên góc 45° với trục x và y .



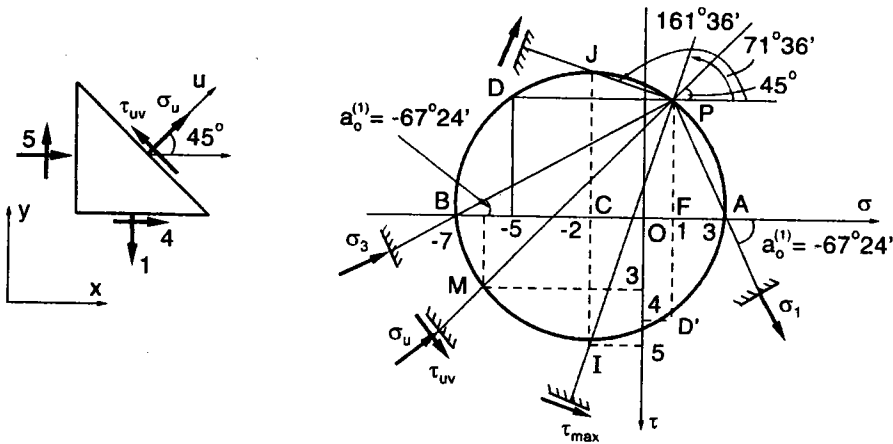
Hình 4.18 Trạng thái ứng suất trượt thuần túy và vòng tròn Mohr

Như vậy, khi cần ta có thể nhanh chóng dựng vòng tròn Mohr với tỉ lệ chính xác và đo giá trị của ứng suất từ hình vẽ. Vòng tròn Mohr giúp ta thấy rõ quan hệ giữa các thành phần ứng suất trên các mặt có góc nghiêng khác nhau, đồng thời cho ta phương pháp suy luận

và ghi nhớ phương trình giải tích tính ứng suất trên mặt cắt nghiêng bất kỳ. Vòng tròn này cũng có thể sử dụng để tính biến dạng trong bài toán phẳng và mômen quán tính của tiết diện phẳng vì những đại lượng này cũng tuân theo một quy luật biến đổi (4.5) giống như ứng suất (xem chương 6).

Ví dụ 4.3 Phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng cho trên hình 4.19, các ứng suất tính theo kN/cm^2 . Dùng vòng tròn Mohr, xác định:

- Ứng suất trên mặt cắt nghiêng $\alpha = 45^\circ$
- Ứng suất chính và phương chính
- Ứng suất tiếp cực trị.



Hình 4.19

Giải Theo quy ước ta có:

$$\sigma_x = -5kN/cm^2; \quad \sigma_y = 1kN/cm^2; \quad \tau_{xy} = -4kN/cm^2$$

Tâm vòng tròn ở $C\left(\frac{-5+1}{2}, 0\right)$. Tọa độ điểm D biểu diễn ứng suất trên mặt vuông góc với trục x , tọa độ điểm D' biểu diễn ứng suất trên mặt vuông góc với trục y . Bán kính đường tròn là:

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5kN/cm^2$$

a) Cực $P(1, -4)$. Từ P vẽ tia song song với trục u cắt vòng tròn Mohr tại M . Tọa độ điểm M biểu thị ứng suất trên mặt cắt nghiêng với $\alpha = 45^\circ$:

$$\sigma_u = -6kN/cm^2; \quad \tau_{uv} = 3kN/cm^2$$

b) Tọa độ A và B biểu thị ứng suất chính có giá trị bằng:

$$\sigma_1 = \sigma_A = 3kN/cm^2; \quad \sigma_3 = \sigma_B = -7kN/cm^2$$

Hai phương chính xác định bởi góc α_o :

$$\alpha_o^{(1)} = -67^\circ 42'; \quad \alpha_o^{(2)} = 26^\circ 36'$$

c) Tọa độ I và J có giá trị bằng ứng suất tiếp cực trị:

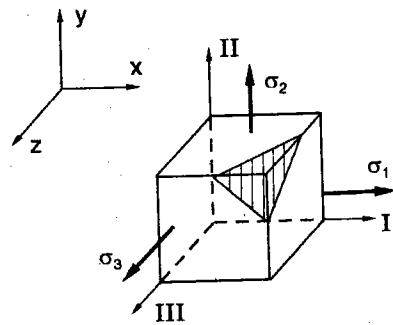
$$\tau_{\max} = 5kN/cm^2; \quad \tau_{\min} = -5kN/cm^2$$

Các ứng suất này tác dụng lên các mặt, tương ứng với các góc nghiêng:

$$\alpha_1^{(1)} = 71^\circ 36'; \quad \alpha_1^{(2)} = 161^\circ 36'$$

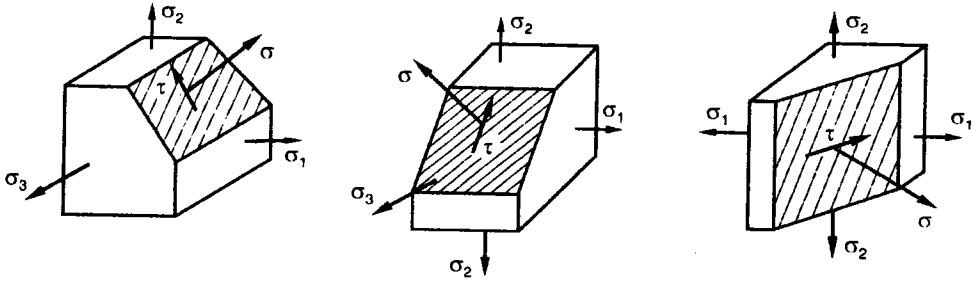
4.3 BIỂU DIỄN HÌNH HỌC TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHỐI

Trong trường hợp tổng quát, trạng thái ứng suất tại một điểm là trạng thái ứng suất khối. Nghĩa là, tại một điểm cho trước luôn có thể tìm được ba mặt chính vuông góc với nhau, trên các mặt này có tác dụng ba ứng suất chính σ_1, σ_2 và σ_3 khác không (H.4.20). Nếu ta chỉ xét những mặt song song với một phương chính, chẳng hạn phương chính thứ ba, thì ứng suất chính σ_3 không ảnh hưởng gì tới ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên các mặt này (H.4.21).



Hình 4.20 Trạng thái ứng suất khối với mặt cắt nghiêng bất kỳ

Thật vậy, do những thành phần này được xác định từ phương trình cân bằng về lực trên mặt phẳng vuông góc với phương chính thứ ba cho nên chúng hoàn toàn không phụ thuộc vào ứng suất chính σ_3 . Vì vậy, ta có thể nghiên cứu ứng suất trên những mặt này giống như ta đã làm đối với trạng thái ứng suất phẳng.

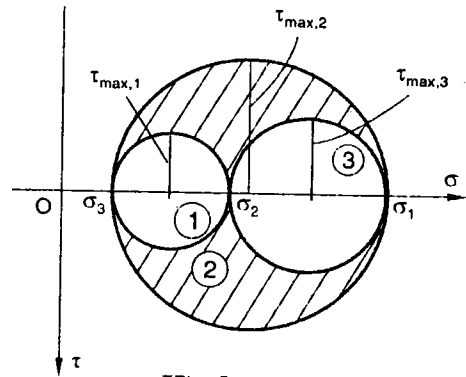


Hình 4.21 Các mặt nghiêng song song với trục chính

Trên hệ trục ta vẽ được vòng tròn ứng suất đi qua hai điểm có hoành độ σ_1 và σ_2 , tức là tương ứng với vòng tròn số 3 trên hình 4.22. Từ vòng tròn này, ta thấy trên những mặt song song với phương chính thứ ba, ứng suất pháp cực trị là σ_1 và σ_2 . Còn ứng suất tiếp cực đại (ký hiệu $\tau_{\max,3}$) bằng:

$$\tau_{\max,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Tương tự, đối với những mặt song song với phương chính thứ nhất và thứ hai, ta cũng vẽ được các vòng tròn ứng suất. Vòng tròn số 1 đi qua hai điểm có hoành độ σ_2 và σ_3 . Vòng tròn số 2 đi qua các điểm có hoành độ là σ_3 và σ_1 (H.4.22).



Hình 4.22

Ba vòng tròn Mohr ứng suất

Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh rằng giá trị của ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên một mặt bất kỳ của một phân tử trong trạng thái ứng suất khối có thể biểu thị bằng tọa độ của một điểm nằm trong miền gạch chéo giới hạn bởi ba vòng tròn ứng suất vẽ ở hình 4.22. Như vậy, ta nói rằng ba vòng tròn ứng suất vẽ trên hình biểu thị một trạng thái ứng suất khối. Qua hình vẽ, ta thấy các ứng suất pháp cực trị là σ_1 , σ_2 và σ_3 . Những ứng suất tiếp cực trị là:

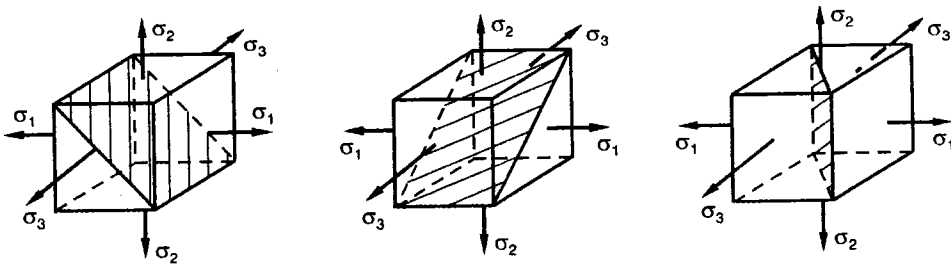
$$\tau_{\max,1} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \tag{4.24}$$

$$\tau_{\max,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.25)$$

$$\tau_{\max,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (4.26)$$

Trong ba ứng suất tiếp này, ứng suất tiếp $\tau_{\max,2}$ có giá trị lớn nhất tính theo công thức (4.25), được biểu thị bằng bán kính của vòng tròn lớn nhất (H.4.22).

Các mặt có ứng suất tiếp cực trị được biểu diễn trên H.4.23. Ứng suất tiếp $\tau_{\max,3}$ ở trên mặt song song với phương thứ ba và xiên góc 45° với hai mặt chính thứ nhất và thứ hai. Ứng suất tiếp $\tau_{\max,1}$ ở trên mặt song song với phương thứ nhất và xiên góc 45° với hai mặt chính thứ hai và thứ ba. Ứng suất tiếp $\tau_{\max,2}$ ở trên mặt song song với phương thứ hai và xiên góc 45° với hai mặt chính thứ nhất và thứ ba.



Hình 4.23 Các mặt tác dụng ứng suất tiếp cực trị

4.4 LIÊN HỆ ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

4.4.1 Định luật Hooke tổng quát

1- Liên hệ ứng suất pháp và biến dạng dài

Ở phần trên, khi nghiên cứu trạng thái ứng suất tại một điểm trong vật thể, ta đưa ra các phương trình hoàn toàn từ việc xét cân bằng tĩnh học chứ không đề cập tới tính chất của vật liệu. Song để tính toán biến dạng trong vật thể, chúng ta cần phải nghiên cứu tính chất vật liệu, tức là xét mối liên hệ giữa ứng suất và biến dạng đối với vật liệu cụ thể. Như đã giả thiết ở chương 1 vật liệu là liên tục, đồng chất, đẳng hướng và đàn hồi tuyến tính tức là tuân theo định luật Hooke. Với các giả thiết trên, ta có thể dễ dàng nhận được mối quan hệ giữa biến dạng và ứng suất trong vật thể.

- *Trạng thái ứng suất đơn*: trong chương 3, ta đã có công thức của định luật Hooke liên hệ giữa ứng suất pháp và biến dạng dài trong trạng thái ứng suất đơn:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

trong đó: ε là biến dạng dài tương đối theo phương ứng suất σ . Khi đó, theo phương vuông góc với σ cũng có biến dạng dài tương đối ε' ngược dấu với ε :

$$\varepsilon' = -\nu\varepsilon = -\nu\frac{\sigma}{E}$$

- *Trạng thái ứng suất khối*: bây giờ, giả sử ta có phân tử ở trạng thái ứng suất khối với các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ theo ba phương chính I, II, III (H.4.20).

Ta tìm biến dạng dài tương đối ε_1 theo phương chính I của phân tử. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta xét biến dạng dài tương đối do từng ứng suất gây ra theo phương I.

Biến dạng dài theo phương I do σ_1 gây ra: $\varepsilon_1(\sigma_1) = \frac{\sigma_1}{E}$

Biến dạng dài theo phương I do σ_2 gây ra: $\varepsilon_1(\sigma_2) = -\nu\frac{\sigma_2}{E}$

Biến dạng dài theo phương I do σ_3 gây ra: $\varepsilon_1(\sigma_3) = -\nu\frac{\sigma_3}{E}$

Biến dạng dài tương đối theo phương I do cả ba ứng suất $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sinh ra sẽ là tổng của ba biến dạng trên:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (4.27)$$

Lập luận tương tự đối với biến dạng dài tương đối theo hai phương chính còn lại, ta tính được:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 - \sigma_1)] \quad (4.28)$$

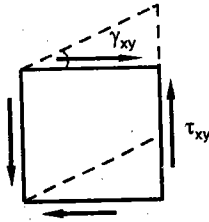
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (4.29)$$

- *Trạng thái ứng suất tổng quát*: lý thuyết đàn hồi đã chứng minh đối với vật liệu đàn hồi đẳng hướng, ứng suất pháp chỉ sinh ra biến dạng dài mà không sinh ra biến dạng trượt cũng như ứng suất tiếp chỉ sinh ra biến dạng trượt mà không sinh ra biến dạng dài. Vì vậy, trong trường hợp phân tố ở trạng thái ứng suất tổng quát với đầy đủ các thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp, những công thức trên vẫn đúng. Cho nên, khi lập liên hệ giữa biến dạng dài tương đối và ứng suất pháp theo ba phương vuông góc bất kỳ x, y, z , ta vẫn có công thức:

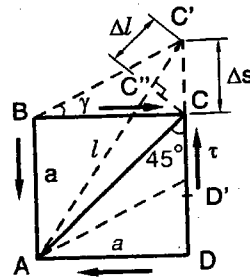
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Những công thức (4.27), (4.30) biểu thị *định luật Hooke tổng quát* đối với biến dạng dài.

2- Liên hệ giữa ứng suất tiếp và biến dạng góc



Hình 4.24 Ứng suất tiếp và biến dạng trượt



Hình 4.25 Liên hệ E, μ và G

- *Trạng thái ứng suất phẳng*: ta xét phân tố ứng suất ở trạng thái trượt thuần túy, trên mặt bên song song với trục z của phân tố chỉ có ứng suất tiếp τ_{xy} . Ứng suất tiếp sẽ làm biến dạng các mặt phân tố vuông góc với trục z làm cho những mặt này trở thành hình bình hành (H.4.24). Biến dạng góc (góc trượt) γ_{xy} biểu thị sự thay đổi góc vuông (góc trượt) giữa hai mặt x và y . Còn các mặt khác của phân tố

do không có ứng suất tiếp tác dụng nên không thay đổi hình dáng và vẫn là hình vuông. Giữa ứng suất tiếp và góc trượt có mối liên hệ bậc nhất gọi là *định luật Hooke về trượt*:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (4.31a)$$

trong đó: G là môđun đàn hồi trượt. Thứ nguyên của G là [*lực/(chiều dài)²*] và đơn vị thường dùng là N/m^2 hay MN/m^2 . Môđun đàn hồi trượt là một hằng số vật lý có thể suy ra từ môđun đàn hồi E và hệ số Poisson μ như sẽ trình bày ở phần sau.

- *Trạng thái ứng suất khối*: do ứng suất tiếp chỉ làm biến dạng bề mặt vuông góc với bề mặt mà nó tác dụng chứ không ảnh hưởng tới biến dạng góc trên các mặt khác, cho nên trong trường hợp ứng suất khối, ngoài (4.31a) ta cũng có các công thức khác liên hệ các thành phần ứng suất tiếp và các góc trượt còn lại như sau:

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (4.31b)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (4.31c)$$

Các công thức (4.5a,b,c) gọi là *định luật Hooke về trượt* liên hệ giữa ứng suất tiếp và biến dạng góc.

- *Liên hệ giữa các hằng số đàn hồi E , ν và G*

Xét phân tử phẳng hình vuông có cạnh là a ở trạng thái trượt thuần túy, trên các cạnh chỉ có ứng suất tiếp như trên hình 4.25. Sau biến dạng, mặt CD bị trượt đi so với mặt AB , mặt này được coi là cố định. Cạnh CD sẽ di chuyển tới $C'D'$ một đoạn là Δs . Các góc vuông sẽ thay đổi một góc γ gọi là góc trượt hay biến dạng góc. Đường chéo AC thành $A'C'$. Nếu từ C hạ đường vuông góc CC'' xuống AC' thì $C''C$ chính là độ dãn dài tương đối của đường chéo AC , ký hiệu là Δl . Do biến dạng bé, ta có: $\Delta l = \Delta s \cos 45^\circ$

Như vậy, biến dạng dài của đường chéo AC là:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s \cos 45^\circ}{a\sqrt{2}} = \frac{\Delta s}{2a}$$

vì:
$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta s}{a}$$

ta có:
$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2} \quad (a)$$

Mặt khác, phân tố ở trạng thái trượt thuần túy như trên H.4.18 nên các ứng suất chính là: $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, đường chéo AC cũng là phương chính thứ nhất. Áp dụng định luật Hooke tổng quát (4.27), biến dạng dài theo phương đường chéo có dạng:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_3) = \frac{1+\nu}{E}\tau$$

So sánh (a) và (b), trên cơ sở định luật Hooke trượt (4.31), ta rút ra liên hệ giữa E , ν và G như sau:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.32)$$

3- Định luật Hooke tổng quát

Như vậy ở trường hợp tổng quát, phân tố ở trạng thái ứng suất khối với đầy đủ sáu thành phần ứng suất, ta có *định luật Hooke tổng quát* bao gồm sáu biểu thức (4.30) và (4.31) ở trên kết hợp lại.

4.4.2 Định luật Hooke khối

Ta tính độ biến đổi thể tích của một phân tố hình hộp có các cạnh bằng da_1 , da_2 và da_3 . Giả sử các mặt của phân tố hình hộp đều là mặt chính. Trước khi biến dạng, thể tích ban đầu của phân tố là:

$$V_0 = da_1 da_2 da_3 \quad (4.33)$$

Dưới tác dụng của các ứng suất chính, phân tố sẽ bị biến dạng. Các cạnh dài của phân tố sẽ trở thành: $da_1 + \Delta da_1$, $da_2 + \Delta da_2$, $da_3 + \Delta da_3$.

Sau biến dạng, phân tố có thể tích là:

$$V_1 = (da_1 + \Delta da_1)(da_2 + \Delta da_2)(da_3 + \Delta da_3)$$

Khai triển vế phải và bỏ qua những đại lượng vô cùng bé bậc cao, ta được:

$$V_1 = da_1 da_2 da_3 \left(1 + \frac{\Delta da_1}{da_1} + \frac{\Delta da_2}{da_2} + \frac{\Delta da_3}{da_3} \right)$$

Theo định nghĩa biến dạng dài tương đối:

$$\frac{\Delta da_1}{da_1} = \varepsilon_1, \quad \frac{\Delta da_2}{da_2} = \varepsilon_2, \quad \frac{\Delta da_3}{da_3} = \varepsilon_3$$

Thể tích sau biến dạng có thể biểu diễn qua các biến dạng dài như sau:

$$V_1 = da_1 da_2 da_3 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = V_o (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (a)$$

Gọi *biến dạng thể tích tương đối* là θ , ta có:

$$\theta = \frac{V_1 - V_o}{V_o} = \frac{V_1}{V_o} - 1$$

dựa vào (a), ta có thể xác định θ bằng biểu thức sau:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (4.34)$$

Biểu thức trên đúng với mọi loại vật liệu, dù có tuân theo định luật Hooke hay không. Ta cũng nhận thấy biến dạng góc không có ảnh hưởng gì tới sự thay đổi thể tích.

Đối với vật liệu đàn hồi tuân theo định luật Hooke, ta thế các biến dạng dài theo (4.31) vào (4.34) và nhận được biểu thức xác định biến dạng thể tích tương đối:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.35)$$

đặt tổng ứng suất pháp là: $\Sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

ta viết lại công thức (4.35): $\Sigma = \frac{E}{1 - 2\nu} \theta$ (4.36)

công thức (4.36) được gọi là *định luật Hooke khối* biểu thị quan hệ tuyến tính giữa tổng ứng suất pháp và biến dạng thể tích tương đối.

Từ công thức (4.36), ta nhận thấy nếu vật liệu có hệ số Poisson $\nu = 0,5$ (chẳng hạn cao su), thì θ luôn luôn bằng không tức là có thể tích không đổi dưới tác dụng của ngoại lực. Công thức trên cho thấy θ phụ thuộc vào tổng ứng suất pháp chứ không phụ thuộc vào riêng từng ứng suất pháp. Như vậy, nếu cũng với phân tố ấy ta thay các ứng suất chính bằng một ứng suất trung bình σ_{tb} có giá trị bằng trung bình cộng của ba ứng suất chính nói trên:

$$\sigma_{tb} = \frac{\Sigma}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (4.37)$$

thì biến dạng thể tích tương đối của phân tử trên vẫn không thay đổi. Thật vậy, với những ứng suất chính, biến dạng thể tích bằng:

$$\theta_1 = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1-2\nu}{E} \Sigma$$

trong trường hợp thay các ứng suất chính bằng ứng suất trung bình tính theo (4.36), ta có cùng kết quả:

$$\theta_1 = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{tb} + \sigma_{tb} + \sigma_{tb}) = \frac{1-2\nu}{E} \Sigma$$

Kết quả trên có ý nghĩa như sau: với phân tử ban đầu là hình lập phương, trong hai trường hợp trên ta thấy thể tích phân tử đều biến đổi như nhau.

- Tuy nhiên, trong trường hợp đầu khi các ứng suất chính khác nhau, phân tử vừa biến đổi thể tích vừa biến đổi hình dáng tức là trở thành phân tử hình hộp sau khi biến dạng.
- Còn trong trường hợp thứ hai, khi thay các ứng suất chính bằng ứng suất trung bình, phân tử chỉ biến đổi về thể tích mà không biến đổi hình dáng, nghĩa là sau khi biến dạng phân tử vẫn giữ hình lập phương.

4.5 THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

Ở chương 3, ta đã thiết lập công thức tính thể năng biến dạng đàn hồi riêng của phân tử ở trạng thái ứng suất đơn (thanh bị kéo hoặc nén):

$$u = \frac{\sigma \varepsilon}{2}$$

Trong trạng thái ứng suất khối, sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng, ta có thể năng biến dạng đàn hồi riêng bằng:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2} \quad (4.38)$$

thay $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ theo định luật Hooke trong (4.27) - (4.29) vào (4.38), ta được:

$$u = \frac{1}{2E} \{ \sigma_1 [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] + \sigma_3 [\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1)] \}$$

hay rút gọn lại:

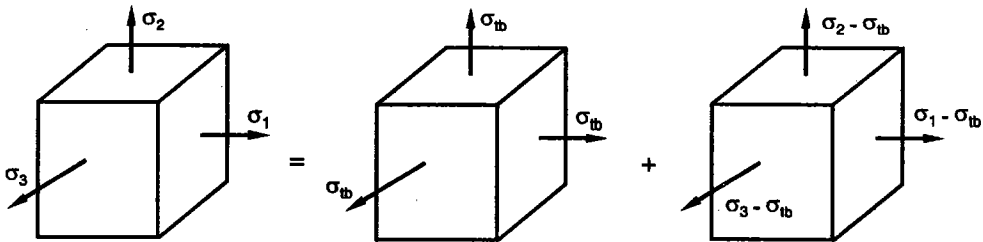
$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] \quad (4.39)$$

ta có thể phân tích thế năng biến dạng đàn hồi u thành hai thành phần:

- Thành phần do sự thay đổi thể tích gọi là *thế năng biến đổi thể tích* u_{tt}
- Thành phần do sự thay đổi hình dáng gọi là *thế năng biến đổi hình dáng* u_{hd}

Ta có:
$$u = u_{tt} + u_{hd} \quad (4.40)$$

Để tính thế năng biến đổi thể tích và thế năng biến đổi hình dáng, ta thay các ứng suất σ_1 , σ_2 và σ_3 bằng ứng suất trung bình σ_{tb} tính theo công thức (4.37), tác dụng lên các mặt phân tử. Như đã nhận xét ở mục 2 phần 4.4, với ứng suất trung bình, phân tử chỉ biến đổi thể tích mà không biến đổi hình dáng và có sự biến đổi thể tích đúng bằng sự biến đổi thể tích do các ứng suất chính σ_1 , σ_2 và σ_3 gây ra.



Hình 4.26 Phân tích trạng thái ứng suất thành hai trạng thái ứng suất

Ta thay trạng thái ứng suất đã cho bằng tổng của hai trạng thái ứng suất: trạng thái thứ nhất chỉ có ứng suất trung bình σ_{tb}

- Trạng thái thứ hai có các ứng suất $\sigma_1 - \sigma_{tb}$, $\sigma_2 - \sigma_{tb}$ và $\sigma_3 - \sigma_{tb}$.
- Áp dụng định luật Hooke tổng quát (4.35) cho trạng thái ứng suất thứ hai, ta được $\theta = 0$, tức là với trạng thái ứng suất này, thể tích phân tử không thay đổi.

Như vậy, quá trình biến dạng có thể phân tích thành hai quá trình như trên hình 4.26: quá trình biến đổi thể tích với các ứng suất σ_{tb} và quá trình biến đổi hình dáng với các ứng suất: $\sigma_1 - \sigma_{tb}$, $\sigma_2 - \sigma_{tb}$ và $\sigma_3 - \sigma_{tb}$.

Thay σ_1, σ_2 và σ_3 bằng σ_{tb} vào (4.39) ta tính được thế năng biến đổi thể tích:

$$u_{tt} = 3 \frac{1-2\nu}{2E} \sigma_{tb}^2$$

thay σ_{tb} theo (4.37) vào công thức trên, ta có:

$$u_{tt} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (4.41)$$

từ công thức (4.40), suy ra: $u_{hd} = u - u_{tt}$

Từ (4.39) và (4.40), ta có thế năng biến đổi hình dáng bằng:

$$u_{hd} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

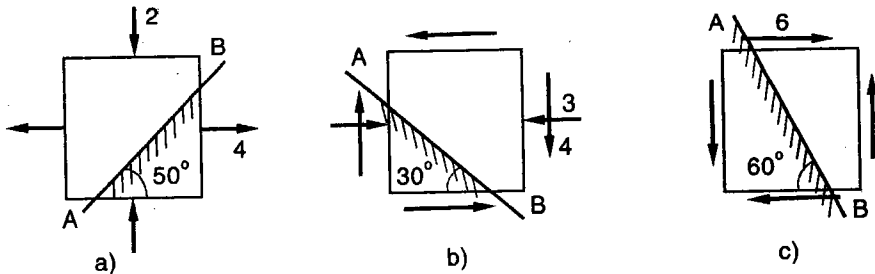
hay:
$$u_{hd} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) \quad (4.42)$$

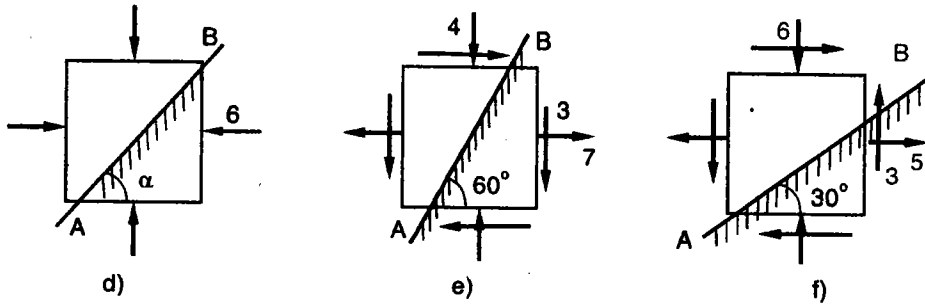
Trong trường hợp đơn giản, khi phân tố ở trạng thái ứng suất đơn, thay $\sigma_1 = \sigma; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = 0$ vào (4.39), (4.41) và (4.42), ta thu được thế năng riêng, thế năng biến đổi thể tích và thế năng biến đổi hình dáng như sau:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}; \quad u_{tt} = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma^2; \quad u_{hd} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma^2 \quad (4.43)$$

4.6 BÀI TẬP CHƯƠNG 4

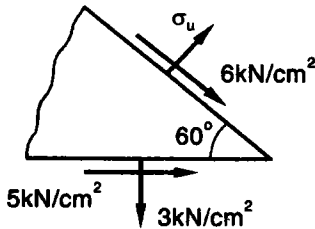
4.1 Tìm giá trị ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt AB của phân tố như trên hình 4.27 bằng phương pháp giải tích và đồ thị. Đơn vị ứng suất tính bằng kN/cm^2 .



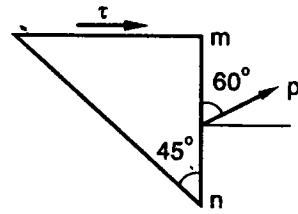


Hình 4.27

- 4.2 Trên hai mặt tạo với nhau một góc $\alpha = 60^\circ$ và đi qua một điểm ở trạng thái ứng suất phẳng có các ứng suất như trên hình 4.28. Hãy tính các ứng suất chính tại điểm đó, ứng suất pháp σ_u và biến dạng tương đối ε_u theo phương u . Cho: $E = 2.10kN/cm^2$; $\nu = 0,3$.



Hình 4.28



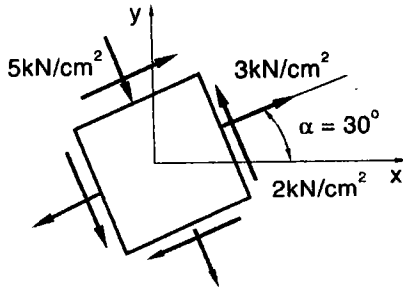
Hình 4.29

- 4.3 Trên mặt cắt $m - n$ đi qua một điểm trong vật thể ở trạng thái ứng suất phẳng có ứng suất toàn phần $p = 3000N/cm^2$, ứng suất này có phương tạo thành góc 60° với mặt cắt. Trên mặt vuông góc với mặt cắt đó chỉ có ứng suất tiếp (H.4.29).

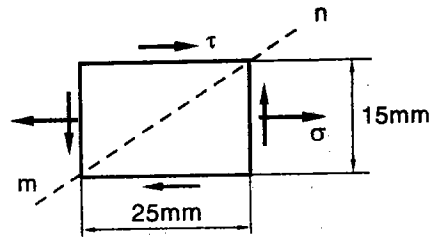
Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt hợp với mặt cắt $m - n$ một góc 45° . Tính ứng suất pháp lớn nhất tại điểm đó.

- 4.4 Tại một điểm trên bề mặt của vật thể, ứng suất tác dụng lên phân tố nghiêng một góc 30° với trục x có trị số và hướng như trên hình 4.30.

- Xác định ứng suất chính và phương chính.
- Xác định ứng suất tiếp cực trị và ứng suất pháp trên bề mặt có ứng suất tiếp cực trị. Biểu diễn các ứng suất đó trên hình 4.30.



Hình 4.30

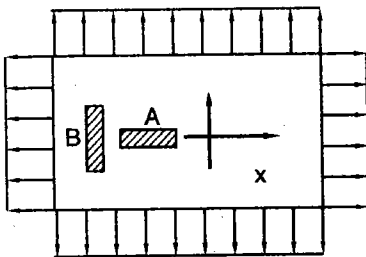


Hình 4.31

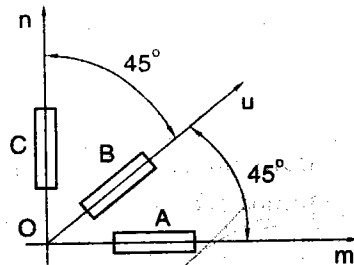
4.5 Một tấm mỏng có kích thước như trên hình 4.31 chịu tác dụng của ứng suất kéo $\sigma = 30 \text{ kN/cm}^2$ theo phương chiều dài của tấm và ứng suất tiếp $\tau = 15 \text{ kN/cm}^2$.

- Xác định ứng suất pháp theo phương đường chéo mn và phương vuông góc với đường chéo.
- Tính biến dạng dài tuyệt đối của đường chéo mn. Cho $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$, $\nu = 0,3$.

4.6 Một tấm thép mỏng hình chữ nhật chịu ứng suất pháp phân bố đều σ_x và σ_y như trên hình 4.32. Các tấm điện trở A và B được gắn lên tấm theo hai phương x và y cho các số đo như sau: $\epsilon_x = 4,8.10^{-4}$ và $\epsilon_y = 1,3.10^{-4}$. Tính σ_x và σ_y , biết $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,3$.



Hình 4.32

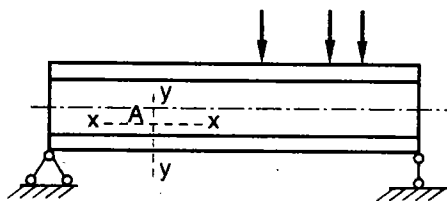


Hình 4.33

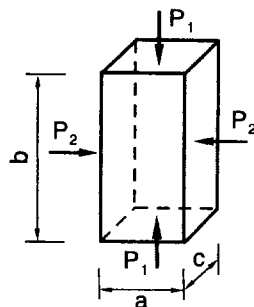
4.7 Tại một điểm trên mặt vật thể chịu lực, người ta gắn các tấm điện trở A, B, C để đo biến dạng tỷ đối theo các phương Om, On và Ou (H.4.33). Các số đo thu được: $\epsilon_m = -2,81.10^{-4}$; $\epsilon_n = -2,81.10^{-4}$; $\epsilon_u = 1,625.10^{-4}$.

Xác định ứng suất chính, phương chính tại điểm đó. Cho $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\nu = 0,3$.

- 4.8 Tại điểm A của một dầm cầu có gắn hai tenxômét để đo biến dạng theo phương nằm ngang và phương thẳng đứng (H.4.34). Khi xe chạy qua cầu, người ta đo được: $\epsilon_x = 0,0004$; $\epsilon_y = -0,00012$. Tính ứng suất pháp theo phương dọc và phương thẳng đứng của dầm. Cho biết $E = 2.10^4 kN/cm^2$; $\nu = 0,3$.



Hình 4.34



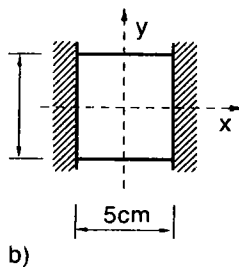
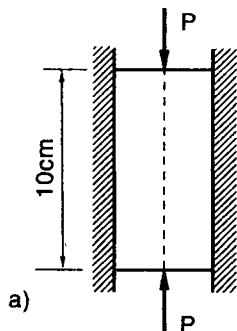
Hình 4.35

- 4.9 Có một phân tử hình hộp có các cạnh: $a = 2cm$; $b = 4cm$; $c = 2cm$, chịu tác dụng của các lực P_1, P_2 trên bốn mặt của phân tử (xem H.4.35). Cho $P_1 = 60kN$; $P_2 = 120kN$; $E = 2.10^4 kN/cm^2$; $\nu = 0,3$.

- Xác định các biến dạng dài $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ của các cạnh a, b, c và biến đổi thể tích của phân tử hình hộp.
- Muốn biến đổi thể tích $\Delta V = 0$ thì phải đặt thêm lực pháp tuyến P_3 bằng bao nhiêu vào hai mặt còn lại?

Tính τ_{max} trong trường hợp này.

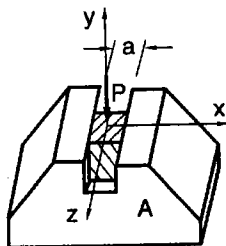
- 4.10 Một khối hình hộp làm bằng thép có kích thước cho trên hình 4.36, được đặt giữa hai tấm cứng tuyệt đối, chịu lực nén $P = 250kN$. Tính lực tác dụng tương hỗ giữa mặt tiếp xúc của hình hộp với các tấm cứng. Cho $\nu = 0,3$.



Hình 4.36

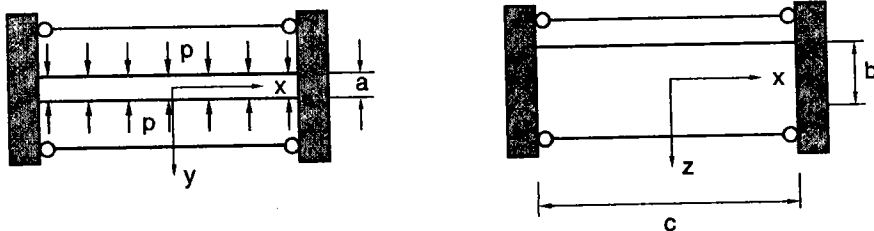
4.11 Một khối lập phương bằng bê tông đặt vừa khít rãnh của vật thể A chịu áp suất phân bố đều ở mặt trên $P = 1\text{kN/cm}^2$ (H.4.37).

Xác định áp lực nén vào vách rãnh và độ biến dạng thể tích tuyệt đối. Cho cạnh $a = 5\text{cm}$; $E = 8.10^2\text{kN/cm}^2$; $\nu = 0,36$. Vật thể A coi như cứng tuyệt đối.



Hình 4.37

4.12 Một tấm thép kích thước $a \times b \times c$ đặt giữa hai tấm tuyệt đối cứng, hai tấm này được liên kết với nhau bằng bốn thanh như hình 4.38. Khi tấm thép chịu áp lực p phân bố trên hai mặt bên thì ứng suất kéo của thanh là bao nhiêu? Tính ứng suất chính trong tấm thép. Cho $E_{tấm} = E_{thanh}$ và diện tích A của thanh.



Hình 4.38

LÝ THUYẾT BỀN

5.1 KHÁI NIỆM THUYẾT BỀN

Ở chương 3, chúng ta đã kiểm tra độ bền cho thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm (ở trạng thái ứng suất đơn). Điều kiện bền trong trường hợp này được viết như sau:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma]_k ; |\sigma_{\min}| = |\sigma_3| \leq [\sigma]_n$$

trong đó, ứng suất cho phép ở vế phải được tìm ra từ kết quả những thí nghiệm kéo hoặc nén. Ta đã biết:

$$[\text{Ứng suất cho phép}] = \frac{\text{Ứng suất nguy hiểm của vật liệu } (\sigma_o)}{\text{Hệ số an toàn}}$$

Ứng suất nguy hiểm:

- Đối với vật liệu dẻo là giới hạn chảy σ_{ch}
- Đối với vật liệu giòn là giới hạn bền σ_b .

Để kiểm tra độ bền ở một điểm của vật thể ở trạng thái ứng suất phức tạp (phẳng hay khối), ta cần phải có kết quả thí nghiệm phá hỏng những mẫu thử ở trong trạng thái ứng suất tương tự. Song việc thực hiện những thí nghiệm như thế rất khó khăn và phức tạp bởi vì:

- Ứng suất nguy hiểm không chỉ phụ thuộc vào độ lớn của các ứng suất chính mà còn phụ thuộc vào tỉ lệ giữa những ứng suất này. Do đó phải thực hiện một số lượng rất lớn các thí nghiệm mới đáp ứng được tỉ lệ giữa các ứng suất chính có thể gặp trong thực tế
- Thí nghiệm kéo, nén theo ba chiều đòi hỏi những thiết bị phức tạp, không phổ biến rộng rãi như thí nghiệm kéo nén một chiều.

Bởi vậy, người ta không thể căn cứ vào thí nghiệm trực tiếp mà phải dựa trên các phán đoán về nguyên nhân gây ra phá hỏng và giả thiết về độ bền của vật liệu hay còn gọi là những *thuyết bền*. Đó là những giả thiết về nguyên nhân cơ bản của sự phá hoại vật liệu, không phụ thuộc vào trạng thái ứng suất của vật liệu, nhờ đó ta có thể đánh giá được độ bền của vật liệu ở mọi trạng thái ứng suất khi ta chỉ biết độ bền của vật liệu ở trạng thái ứng suất đơn.

Nghĩa là, với phân tố ở trạng thái bất kỳ có các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, ta phải tìm ứng suất tính theo thuyết bền là một hàm của $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ rồi so sánh với $[\sigma]_k$ hay $[\sigma]_n$ ở trạng thái ứng suất đơn.

Như vậy, điều kiện bền của vật liệu có thể biểu diễn dưới dạng tổng quát như sau: $\sigma_t = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma]_k$

Vế trái của bất đẳng thức trên được gọi là *ứng suất tính* hay *ứng suất tương đương*. Vấn đề là phải xác định hàm f hay là tìm được thuyết bền tương ứng. Độ chuẩn xác của các thuyết bền được đánh giá thông qua các kết quả áp dụng trong thực tế. Cho đến nay, người ta đã xây dựng những lý thuyết bền khác nhau, mỗi lý thuyết đề ra một quan điểm về nguyên nhân phá hoại của vật liệu. Sau đây là một vài thuyết bền tương đối phổ biến, thường được dùng trong kỹ thuật.

5.2 CÁC THUYẾT BỀN

1- Thuyết bền ứng suất pháp lớn nhất (thuyết bền thứ nhất)

Theo lý thuyết này, nguyên nhân gây ra sự phá hỏng vật liệu là do ứng suất pháp lớn nhất của phân tố ở trạng thái ứng suất khối đạt tới ứng suất nguy hiểm ở trạng thái ứng suất đơn.

Nếu ký hiệu: σ_{0k} hay σ_{0n} - ứng suất nguy hiểm về kéo và nén
 n - hệ số an toàn.

Ta có thể viết điều kiện bền như sau:

$$\sigma_{t1} = \sigma_1 \leq \frac{\sigma_{0k}}{n} = [\sigma]_k \quad (5.1a)$$

$$\sigma_{t1} = |\sigma_3| \leq \frac{\sigma_{0n}}{n} = [\sigma]_n \quad (5.1b)$$

trong đó: σ_{t1} là ứng suất tính hay ứng suất tương đương theo thuyết bền thứ nhất.

Nếu ở điểm kiểm tra chỉ có ứng suất kéo hoặc ứng suất nén, ta dùng một trong hai công thức trên.

Thuyết bền ứng suất pháp cực đại tuy ra đời sớm nhất nhưng trong nhiều trường hợp, thuyết bền này không phù hợp với thực tế. Chẳng hạn, trong thí nghiệm mẫu thử chịu áp lực giống nhau theo ba phương (áp lực thủy tĩnh), dù áp lực lớn, người ta thấy hầu như vật liệu không bị phá hoại. Song theo thuyết bền thứ nhất thì vật liệu sẽ bị phá hỏng khi áp lực đạt tới giới hạn bền của trường hợp nén theo một phương. Như vậy, do còn thô sơ, không kể đến ảnh hưởng của các ứng suất khác cho nên thuyết bền này chỉ đúng đối với trạng thái ứng suất đơn.

2- Thuyết bền biến dạng dài tương đối lớn nhất (thuyết bền thứ hai)

Theo thuyết bền này, nguyên nhân gây ra sự phá hỏng vật liệu là do biến dạng dài lớn nhất của phân tử ở trạng thái ứng suất khối đạt đến biến dạng dài ở trạng thái nguy hiểm của phân tử ở trạng thái ứng suất đơn.

Gọi ϵ_1 là biến dạng dài tương đối lớn nhất của phân tử ở trạng thái ứng suất khối và ϵ_{0k} là biến dạng dài tương đối ở trạng thái nguy hiểm của phân tử bị kéo theo một phương (ở trạng thái ứng suất đơn).

Theo định luật Hooke, ta có:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (a)$$

$$\epsilon_{0k} = \frac{\sigma_{0k}}{E} \quad (b)$$

Như vậy, đối với phân tử ở trạng thái ứng suất đơn, nếu kể đến hệ số an toàn n , từ công thức (b) ta suy ra biến dạng dài lớn nhất phải có giới hạn là:

$$\frac{[\sigma]}{E} = \frac{1}{n} \frac{\sigma_{0k}}{E} \quad (c)$$

Kết hợp (a) và (c), ta có thể viết công thức kiểm tra độ bền như sau:

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{1}{n} \frac{\sigma_{0k}}{E} \quad (d)$$

hay là:
$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \frac{\sigma_{0k}}{n} \quad (e)$$

Gọi vế trái là ứng suất tính hay ứng suất tương đương theo thuyết bền hai và ký hiệu là σ_{t2} , ta có *điều kiện bền*:

$$\sigma_{t2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_k \quad (5.2)$$

Thuyết bền biến dạng dài có tiến bộ hơn so với thuyết bền ứng suất pháp và có kể đến ảnh hưởng của cả ba ứng suất chính. Song thuyết bền này cũng không đúng trong trường hợp mẫu thử chịu áp lực theo ba phương. Thực nghiệm cho thấy thuyết bền này chỉ phù hợp với vật liệu giòn và ngày nay ít được sử dụng trong thực tế.

3- Thuyết bền ứng suất tiếp cực đại (thuyết bền thứ ba)

Theo thuyết bền thứ ba, nguyên nhân gây ra sự phá hỏng vật liệu là do ứng suất tiếp lớn nhất của phân tử ở trạng thái ứng suất khối đạt tới ứng suất tiếp nguy hiểm của phân tử ở trạng thái ứng suất đơn.

Gọi: τ_{max} - ứng suất tiếp lớn nhất của phân tử ở trạng thái ứng suất khối; τ_{0max} - ứng suất tiếp nguy hiểm của phân tử bị kéo theo một phương (ở trạng thái ứng suất đơn). Ta có điều kiện bền theo thuyết bền thứ ba:

$$\tau_{max} \leq \frac{\tau_0}{n} \quad (g)$$

trong đó, theo công thức (4.25), chương 4, ta có:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{0k} = \frac{\sigma_{0k}}{2} \quad (h)$$

Thay τ_{max} và τ_{0k} theo (h) vào (g), ta có:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_{0k}}{2n}$$

hay công thức kiểm tra độ bền theo thuyết bền ba:

$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_k \quad (5.3)$$

Thuyết bền ứng suất tiếp cực đại phù hợp với thực nghiệm hơn nhiều so với hai thuyết bền trên. Tuy không kể tới ảnh hưởng của

ứng suất chính σ_2 song thuyết bền này tỏ ra khá thích hợp với vật liệu dẻo và ngày nay được sử dụng nhiều trong tính toán cơ khí. Nó cũng phù hợp với kết quả mẫu thử chịu áp lực theo ba phương. Tuy vậy, đối với vật liệu có độ bền kéo và nén khác nhau, thuyết này tỏ ra không thích hợp.

4- Thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng cực đại

(thuyết bền thứ tư)

Ở thuyết bền thứ tư, người ta cho rằng nguyên nhân gây ra sự phá hỏng vật liệu là thế năng biến đổi hình dáng của phân tử ở trạng thái ứng suất khối đạt tới thế năng biến đổi hình dáng ở trạng thái nguy hiểm của phân tử ở trạng thái ứng suất đơn.

Gọi u_{hd} là thế năng biến đổi hình dáng của phân tử ở trạng thái ứng suất khối và $(u_{hd})_o$ là thế năng biến đổi hình dáng ở trạng thái nguy hiểm của phân tử bị kéo theo một phương (ở trạng thái ứng suất đơn).

Ở phần 4.5 của chương 4, ta đã có:

$$\begin{aligned} u_{hd} &= \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \\ (u_{hd})_o &= \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{0k}^2 \end{aligned} \quad (i)$$

Như vậy, đối với phân tử ở trạng thái ứng suất đơn, nếu kể đến hệ số an toàn n , từ công thức (i) ta suy ra thế năng biến đổi hình dáng phải có giới hạn là:

$$\frac{1+\nu}{3E} [\sigma]_k^2 \quad (k)$$

Kết hợp (i) và (k), lấy căn bậc hai của hai vế ta có thể viết công thức kiểm tra độ bền như sau:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]_k$$

hay là:

$$\sigma_{t4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]_k \quad (5.4)$$

trong đó σ_{t4} là ứng suất tương đương theo thuyết bền thứ tư.

Thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng được dùng phổ biến trong kỹ thuật vì khá phù hợp với vật liệu dẻo. Thuyết này cũng tỏ ra phù hợp với thực tế, đặc biệt trong trường hợp mẫu thử chịu áp lực theo ba phương.

Ví dụ 5.1 Viết điều kiện bền theo thuyết bền ứng suất tiếp và thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng cho trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt (H.4.17, chương 4) và trạng thái ứng suất trượt thuần túy (H.4.18, chương 4).

Giải a) Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt có các ứng suất chính như sau:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \sigma_2 = 0$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp (5.3):

$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (5.5)$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng (5.4):

$$\sigma_{t4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_1 - \sigma_3\sigma_2} \leq [\sigma]$$

Ta có:
$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (5.6)$$

b) Đối với trạng thái ứng suất trượt thuần túy, các ứng suất chính được xác định như sau:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|; \quad \sigma_2 = 0$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp:

$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2|\tau| \leq [\sigma]$$

hay:
$$|\tau| \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (5.7)$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng:

$$\sigma_{t4} = \sqrt{3\tau^2} \leq [\sigma]$$

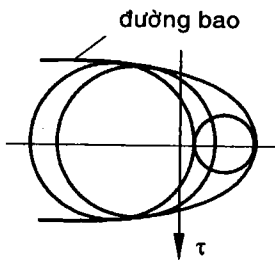
hay:
$$|\tau| \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (5.8)$$

5- Thuyết bền về các trạng thái ứng suất giới hạn

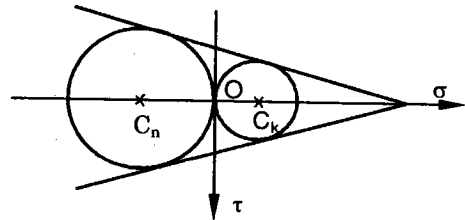
(thuyết bền thứ năm hay là thuyết bền Mohr)

Thuyết bền Mohr được xây dựng trên cơ sở các kết quả thực nghiệm, khác với các thuyết bền trước xây dựng trên cơ sở các giả thuyết.

Ở phần 4.4, chương 4, ta đã biết một trạng thái ứng suất khối với ba ứng suất chính σ_1 , σ_2 và σ_3 có thể biểu diễn bằng ba vòng tròn Mohr 1, 2 và 3 với đường kính tương ứng là $\sigma_2 - \sigma_3$, $\sigma_1 - \sigma_3$ và $\sigma_1 - \sigma_2$ như trên hình 4.22, chương 4. Nếu vật liệu ở trạng thái nguy hiểm thì những vòng tròn tương ứng với trạng thái ứng suất nguy hiểm được gọi là những vòng tròn Mohr giới hạn. Thực nghiệm cho thấy, ứng suất pháp σ_2 ít ảnh hưởng đến sự phá hoại của vật liệu nên ta chỉ để ý đến vòng tròn Mohr lớn nhất gọi là *vòng tròn chính* xác định bởi đường kính $\sigma_1 - \sigma_3$.



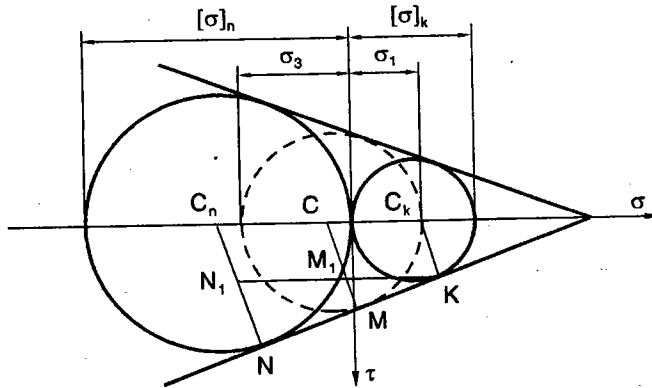
Hình 5.1 Các vòng tròn Mohr giới hạn và đường cong giới hạn



Hình 5.2 Đường bao giới hạn đơn giản hóa

Tiến hành thí nghiệm cho các trạng thái ứng suất khác nhau và tìm trạng thái giới hạn tương ứng của chúng, trên mặt phẳng tọa độ σ , τ ta vẽ được một họ các đường tròn chính giới hạn như ở hình 5.1. Nếu vẽ đường bao những vòng tròn đó ta sẽ thu được một *đường cong giới hạn*, đường cong này cắt trục hoành ở điểm tương ứng với trạng thái có ba ứng suất chính là ứng suất kéo có giá trị bằng nhau. Giả thiết rằng đường bao là duy nhất đối với mỗi loại vật liệu, ta nhận thấy nếu trạng thái ứng suất nào biểu thị bằng một vòng tròn chính nằm trong đường bao thì vật liệu đảm bảo bền, vòng tròn chính tiếp xúc với đường bao thì trạng thái ứng suất đó ở giới hạn bền còn nếu vòng tròn chính cắt qua đường bao thì vật liệu bị phá hỏng.

Việc phải thực hiện một số lượng lớn các thí nghiệm để xác định các vòng tròn giới hạn và vẽ chính xác đường cong giới hạn là không đơn giản. Vì vậy, người ta thường vẽ gần đúng đường bao bằng cách dựa trên cơ sở hai vòng tròn giới hạn kéo và nén theo một phương với đường kính tương ứng là $[\sigma]_k$ và $[\sigma]_n$. Ở đây, để cho tiện ta thay thế các ứng suất nguy hiểm σ_{ok} và σ_{on} bằng ký hiệu ứng suất cho phép $[\sigma]_k$ và $[\sigma]_n$ tức là đã có kể tới hệ số an toàn. Đường bao được thay thế bằng đường thẳng tiếp xúc với hai vòng tròn giới hạn như trên hình 5.2.



Hình 5.3 Trạng thái ứng suất giới hạn và đường bao

Xét một trạng thái ứng suất khối có vòng tròn Mohr lớn nhất σ_1 và σ_3 tiếp xúc với đường bao, nằm ở giới hạn về độ bền. Trên hình 5.3, vòng tròn này được vẽ bằng đường nét đứt. Sau đây, ta thiết lập liên hệ giữa những ứng suất chính σ_1 và σ_3 với các ứng suất cho phép $[\sigma]_k$ và $[\sigma]_n$. Từ hình vẽ ta có tỷ lệ thức:

$$\frac{NN_1}{KN_1} = \frac{MM_1}{KM_1}$$

Thay thế các trị số:

$$NN_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_n - [\sigma]_k); \quad N_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_n + [\sigma]_k)$$

$$MM_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k); \quad KM_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_k - (\sigma_1 + \sigma_3))$$

vào tỷ lệ thức trên, ta nhận được điều kiện giới hạn:

$$\frac{[\sigma]_n - [\sigma]_k}{[\sigma]_n + [\sigma]_k} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k}{[\sigma]_k - (\sigma_1 + \sigma_3)}$$

hoặc:
$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \sigma_3 = [\sigma]_k$$

Như vậy, điều kiện bền theo thuyết bền Mohr (thuyết bền thứ năm) được viết là:

$$\sigma_1 - \alpha \sigma_3 \leq [\sigma]_k \quad (5.9a)$$

với hệ số:
$$\alpha = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \quad (5.9b)$$

Tuy bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất chính σ_2 và đơn giản hóa đường cong giới hạn thành đường thẳng, thuyết bền Mohr có ưu điểm hơn những thuyết bền trên vì nó không dựa vào giả thuyết nào mà căn cứ trực tiếp vào trạng thái giới hạn của vật liệu. Thực tế cho thấy thuyết này phù hợp nhiều với vật liệu giòn, tuy nhiên nó cho kết quả chính xác chỉ khi vòng tròn giới hạn của trạng thái ứng suất đang xét nằm trong khoảng hai vòng tròn giới hạn kéo và nén.

5.3 VIỆC ÁP DỤNG CÁC THUYẾT BỀN

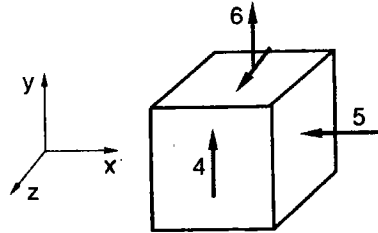
Trên đây là những thuyết bền được dùng tương đối phổ biến. Việc áp dụng thuyết này hay thuyết khác để giải quyết bài toán cụ thể phụ thuộc vào loại vật liệu sử dụng và trạng thái ứng suất của điểm kiểm tra.

Đối với phân tố ở trạng thái ứng suất đơn, người ta dùng thuyết bền thứ nhất để kiểm tra độ bền.

Đối với phân tố ở trạng thái ứng suất khối, nếu là vật liệu giòn, người ta thường dùng thuyết bền thứ năm (thuyết bền Mohr) hay thuyết bền thứ hai. Nếu là vật liệu dẻo người ta dùng lý thuyết thứ ba hoặc thứ tư.

Hiện nay, có nhiều thuyết bền mới được xây dựng, tổng quát hơn và phù hợp hơn với kết quả thực nghiệm. Tuy vậy, những thuyết này cũng có những nhược điểm nhất định nên chưa được sử dụng rộng rãi.

Ví dụ 5.2 Kiểm tra bền phân tố vật thể ở trạng thái ứng suất khối như trên hình 5.4. Ứng suất cho theo kN/cm^2 . Cho biết: $[\sigma] = 16kN/cm^2$.



Hình 5.4

Giải Chọn hệ tọa độ như trên hình 5.4.

Theo quy ước ta có:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -5kN/cm^2 & \sigma_y &= 6kN/cm^2 \\ \sigma_z &= 0 & \tau_{zy} = \tau_{yz} &= 4kN/cm^2 \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= 0 & \tau_{zx} = \tau_{xz} &= 0 \end{aligned}$$

Mặt vuông góc với trục x là mặt chính với ứng suất chính $\sigma_x = -5kN/cm^2$. Hai ứng suất chính còn lại nằm trong mặt phẳng vuông góc với ứng suất chính đã cho và có giá trị bằng:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = 3 \pm 5 = \begin{cases} 8kN/cm^2 \\ -2kN/cm^2 \end{cases}$$

Do đó: $\sigma_1 = 8kN/cm^2$; $\sigma_2 = -2kN/cm^2$; $\sigma_3 = -5kN/cm^2$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp:

$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 8 - (-5) = 13kN/cm^2 < 16kN/cm^2$$

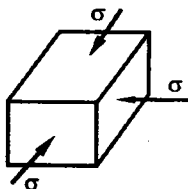
Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng:

$$\begin{aligned} \sigma_{t4} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \\ &= \sqrt{8^2 + 2^2 + 5^2 - (-2) \times 8 - 8(-5) - (-2)(-5)} \\ &= 11,79 kN/cm^2 < 16 kN/cm^2 \end{aligned}$$

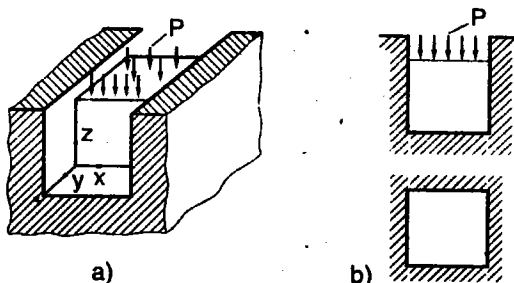
Như vậy, theo cả hai thuyết bền phân tố này đảm bảo bền.

5.4 BÀI TẬP CHƯƠNG 5

- 5.1 Khi nén vật liệu theo ba phương cùng với trị số ứng suất pháp (H.5.5), người ta thấy vật liệu không bị phá hoại. Hãy kiểm tra bền đối với phân tố trên bằng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất và thể năng biến đổi hình dáng lớn nhất.



Hình 5.5



Hình 5.6

- 5.2 Dùng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất để tính áp lực p lớn nhất tác dụng trên khối thép trên hình 5.6. Khối thép đó được đặt khít vào trong khối thép lớn.

$$\text{Cho } E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2; \nu = 0,28; [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

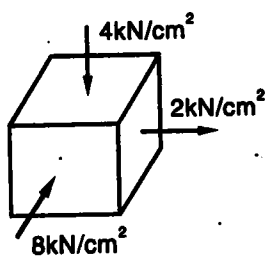
- 5.3 Cho trạng thái ứng suất như hình 5.7. Tính ứng suất tương đương (về trái của công thức kiểm tra bền) theo thuyết thể năng biến đổi hình dáng lớn nhất và thuyết bền Mohr. Cho $\sigma_{ok}/\sigma_{on} = 0,25$.

- 5.4 Cho trạng thái ứng suất tại một điểm của vật thể chịu lực như hình 5.8:

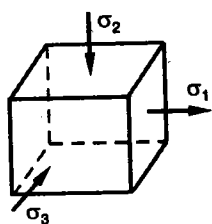
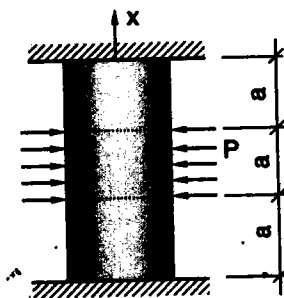
$$\sigma_1 = 20 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = -40 \text{ kN/cm}^2; \sigma_3 = -80 \text{ kN/cm}^2$$

Kiểm tra độ bền theo lý thuyết bền thứ ba và thứ tư, biết $[\sigma] = 120 \text{ kN/cm}^2$.

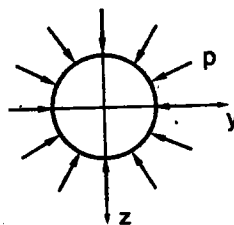
- 5.5 Một trụ tròn bằng thép ($\nu = 0,3$) đặt khít giữa hai tường cứng như hình 5.9. Phần giữa của trụ chịu áp lực p phân bố đều. Tính ứng suất tương đương theo lý thuyết thể năng biến đổi hình dạng ở phần giữa và phần đầu của hình trụ.



Hình 5.7



Hình 5.8

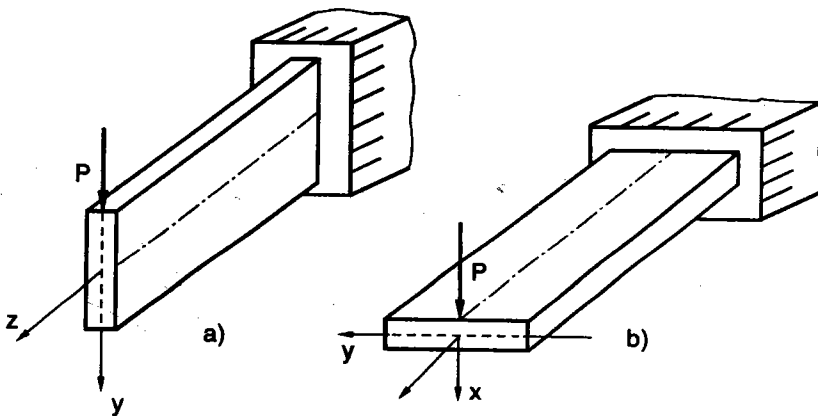


Hình 5.9

ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

6.1 KHÁI NIỆM

Ở chương 3, khi tính sự chịu lực của thanh chịu kéo (nén) ta nhận thấy ứng suất trong thanh chỉ phụ thuộc vào độ lớn của diện tích mặt cắt ngang A . Trong những trường hợp khác, như thanh chịu uốn, xoắn... thì ứng suất trong thanh không chỉ phụ thuộc vào diện tích A mà còn phụ thuộc vào hình dáng, cách bố trí mặt cắt... nghĩa là vào những yếu tố khác mà người ta gọi chung là *đặc trưng hình học của mặt cắt ngang*.



Hình 6.1 Dầm chịu uốn trong hai trường hợp
a) Tiết diện đứng; b) Tiết diện nằm ngang

Chẳng hạn, xét thanh chịu uốn trong hai trường hợp mặt cắt đặt khác nhau như trên hình 6.1. Quan sát thanh biến dạng uốn, ta thấy độ cong của thanh sẽ khác nhau khi đặt chiều hẹp của thanh theo phương ngang và khi đặt chiều hẹp của thanh theo phương thẳng

đứng. Bằng trực giác, ta dễ dàng nhận thấy trong trường hợp thứ nhất, thanh sẽ có khả năng chịu lực tốt hơn là trong trường hợp thứ hai, tuy rằng trong hai trường hợp diện tích của thanh vẫn như nhau. Như vậy, khả năng chịu lực của thanh còn phụ thuộc vào cách sắp đặt và vị trí mặt cắt ngang đối với phương tác dụng của lực. Cho nên, ngoài diện tích A ta phải nghiên cứu các đặc trưng hình học khác của mặt cắt để tính toán độ bền, độ cứng, độ ổn định và thiết kế mặt cắt của thanh cho hợp lý.

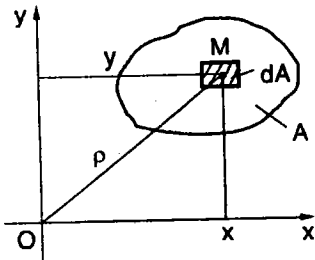
6.2 MÔMEN TÍNH. TRỌNG TÂM

Xét một hình phẳng biểu diễn mặt cắt ngang A như trên hình 6.2. Xác lập một hệ tọa độ vuông góc Oxy trong mặt phẳng của mặt cắt. $M(x,y)$ là một điểm bất kỳ trên hình. Lấy chung quanh M một vi phân diện tích dA .

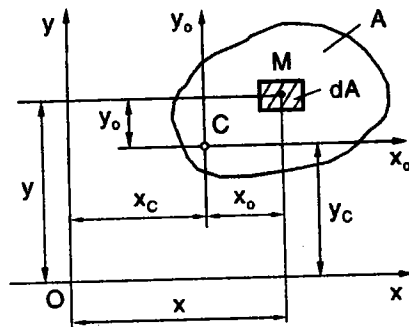
Mômen tĩnh của diện tích A đối với trục x (hay y) là tích phân:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA \quad (6.1)$$

vì x, y có thể âm hoặc dương nên mômen tĩnh có thể có trị số âm hoặc dương. Thứ nguyên của mômen tĩnh là [(chiều dài)³].



Hình 6.2 Hình phẳng A



Hình 6.3 Hình A và trọng tâm C

Trục trung tâm là trục có mômen tĩnh của diện tích A đối với trục đó bằng không. Trọng tâm là giao điểm của hai trục trung tâm của mặt cắt. Như vậy, mômen tĩnh đối với một trục đi qua trọng tâm bằng không. Từ đó, ta suy ra cách xác định trọng tâm C của diện tích A như sau:

Qua C dựng hệ trục x_oCy_o song song với hệ trục xOy ban đầu (H.6.3). Mối quan hệ của tọa độ điểm M trong hai hệ trục tọa độ được biểu diễn như sau:

$$x = x_C + x_o; \quad y = y_C + y_o$$

Thay vào công thức (6.1), ta được:

$$S_x = \int_A (y_C + y_o) dA = y_C \int_A dA + \int_A y_o dA = y_C A + S_{x_o}$$

vì x_o là trục trung tâm nên $S_{x_o} = 0$, suy ra:

$$S_x = y_C A \quad (6.2)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } S_y = x_C A \quad (6.3)$$

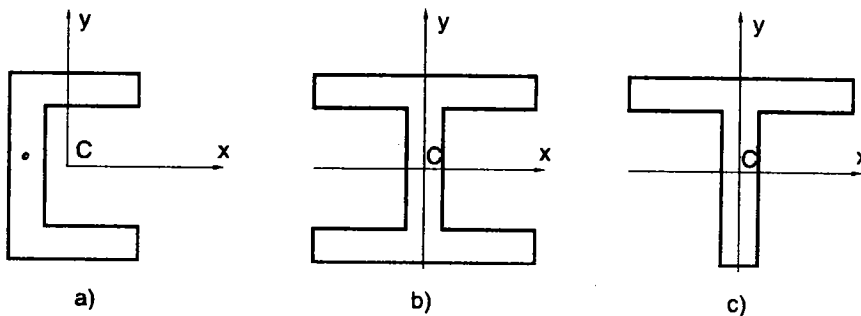
Từ (6.2) và (6.3), ta có:

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A} \quad (6.4)$$

Kết luận: Tọa độ trọng tâm $C(x_C, y_C)$ được xác định trong hệ trục xOy ban đầu theo mômen tĩnh S_x, S_y và diện tích A theo công thức (6.4). Ngược lại, nếu biết trước tọa độ trọng tâm, ta có thể sử dụng công thức (6.2), (6.3) để xác định các mômen tĩnh.

Nhận xét: Nếu mặt cắt có trục đối xứng, trọng tâm sẽ nằm trên trục này vì mômen tĩnh đối với trục bằng không.

Chẳng hạn, trọng tâm mặt cắt có trục đối xứng x trên hình 6.4a sẽ nằm trên trục x , trọng tâm mặt cắt có trục đối xứng y trên hình 6.4b sẽ nằm trên trục y . Nếu mặt cắt có hai trục đối xứng như trên hình 6.4c, trọng tâm sẽ nằm ở giao điểm hai trục đối xứng.



Hình 6.4 a) Mặt cắt có trục x đối xứng
b) Mặt cắt có trục y đối xứng; c) Mặt cắt có hai trục đối xứng

Trong thực tế, ta hay gặp những mặt cắt ngang có hình dáng phức tạp được ghép từ nhiều hình đơn giản. Căn cứ vào định nghĩa, suy ra tính chất sau của mômen tĩnh:

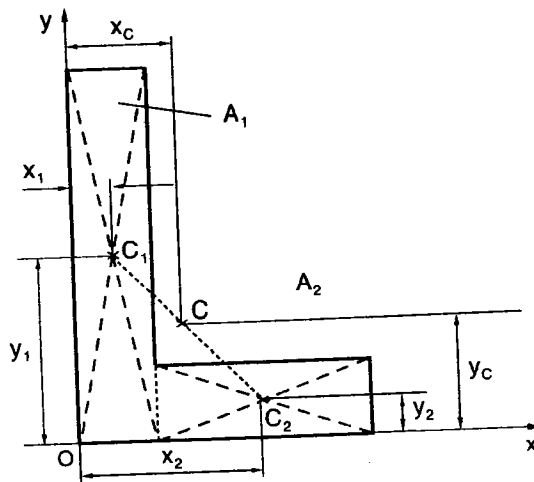
Tính chất: Mômen tĩnh của hình phức tạp bằng tổng mômen tĩnh của các hình đơn giản.

Với những hình đơn giản như hình chữ nhật, hình tròn, tam giác hoặc mặt cắt các loại thép định hình I, U, thép góc đều cạnh, thép góc không đều cạnh... ta đã biết trước diện tích, vị trí trọng tâm hoặc có thể tra theo các bảng trong phần phụ lục. Vì vậy, có thể dễ dàng tính được mômen tĩnh của hình phức tạp:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = \sum_1^n A_i y_i \quad (6.5)$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = \sum_1^n A_i x_i$$

trong đó: A_i, x_i, y_i - diện tích và tọa độ trọng tâm của hình đơn giản thứ i, n - số hình đơn giản.



Hình 6.5 Trọng tâm hình phức tạp ghép từ hai hình đơn giản

Từ công thức trên, ta có thể xác định được trọng tâm của một hình phức tạp trong hệ tọa độ xy . Để minh họa cách xác định trọng tâm, ta xét trường hợp đặc biệt với mặt cắt chữ L chỉ gồm hai hình chữ nhật như trên hình 6.5. Tọa độ trọng tâm C của hình trên là:

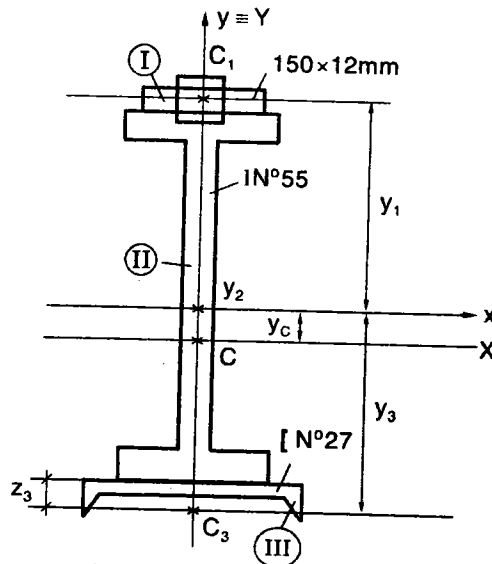
$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2}; \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

Trọng tâm của cả hình nằm trên đường nối hai trọng tâm của từng hình chữ nhật, như trên hình 6.5.

Tổng quát hơn, đối với trường hợp hình phức tạp gồm n hình đơn giản, tọa độ trọng tâm là:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

Ví dụ 6.1 Một thanh ghép gồm hai thanh thép định hình và một thanh hình chữ nhật như trên hình 6.6. Thép chữ I số hiệu N°55, thép chữ [số hiệu N°27, mặt cắt chữ nhật kích thước $150 \times 12\text{mm}$. Xác định trọng tâm C của mặt cắt.



Hình 6.6 Trọng tâm C của hình ghép

Giải Tra bảng, ta có các số liệu mặt cắt ngang:

- Đối với thép chữ I N°55:

$$h_2 = 550\text{mm}$$

$$t = 16,5mm$$

$$A_2 = 113cm^2$$

- Đối với thép chữ [N°27:

$$h_3 = 270mm$$

$$A_3 = 35,2cm^2$$

$$z_3 = 2,47cm$$

- Diện tích hình chữ nhật:

$$A_1 = 150mm \times 12mm = 18cm^2$$

Nếu lấy hệ trục tọa độ xy qua gốc C_2 thì tọa độ trọng tâm của ba hình trên là:

$$y_1 = \frac{550}{2} + \frac{12}{2} = 281mm; y_2 = 0$$

$$y_3 = \frac{550}{2} + 24,7 = 299,7mm$$

Diện tích và mômen tĩnh của toàn mặt cắt là:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 18 + 113 + 35,2 = 166,2 cm^2$$

$$S_x = y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3$$

$$= 281 \times 1800 + 0 - 299,7 \times 3520 = -549144 mm^3$$

vì y là trục đối xứng, trọng tâm C sẽ nằm trên trục này. Như vậy tọa độ điểm C là:

$$x_C = 0; y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{-549144}{16620} = -33,04 mm$$

Dấu (-) cho thấy trọng tâm C nằm phía dưới trục x .

Chú ý rằng, trục x có thể chọn tùy ý song ở ví dụ này ta đặt trục x đi qua trọng tâm C_2 của mặt cắt chữ I cho tiện tính toán.

6.3 MÔMEN QUÁN TÍNH. BÁN KÍNH QUÁN TÍNH

1- Mômen quán tính

Mômen quán tính của mặt cắt (hay mômen quán tính độ cực) đối với điểm O được định nghĩa bằng biểu thức tích phân:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (6.7)$$

trong đó: ρ - khoảng cách từ điểm M , tâm của phần tử diện tích dA đến gốc tọa độ O , (H.6.2).

Nếu thay khoảng cách ρ bằng khoảng cách từ M đến một trục nào đó, ta sẽ có *mômen quán tính* đối với trục ấy. Chẳng hạn, thay ρ bằng x và y , ta nhận được *mômen quán tính đối với trục y và x* :

$$I_y = \int_A x^2 dA; \quad I_x = \int_A y^2 dA \quad (6.8)$$

Mômen quán tính ly tâm của mặt cắt đối với hệ trục x, y được định nghĩa bằng biểu thức tích phân:

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (6.9)$$

Từ định nghĩa các mômen quán tính, ta nhận thấy:

- Mômen quán tính có thứ nguyên là $[\text{chiều dài}]^4$
- Trong khi mômen quán tính đối với điểm, với trục luôn luôn dương, mômen quán tính ly tâm có thể dương, âm hoặc bằng không.

Vì: $\rho^2 = x^2 + y^2$

mômen quán tính độc cực bằng tổng mômen quán tính đối với hai trục vuông góc x, y có gốc tại điểm cực:

$$I_p = I_x + I_y \quad (6.10)$$

Nếu lấy hai trục u, v bất kỳ vuông góc với nhau, có gốc tại điểm O ta cũng có:

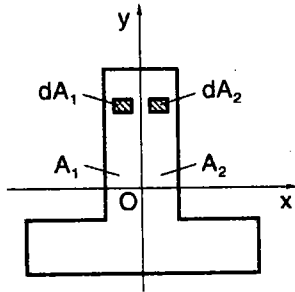
$$I_p = I_u + I_v$$

suy ra: $I_x + I_y = I_u + I_v = \text{const} \quad (6.11)$

Như vậy, tại một điểm, tổng của mômen quán tính đối với hai trục vuông góc là một hằng số. Tổng này gọi là *bất biến của mômen quán tính*. Dựa vào định nghĩa, giống như mômen tĩnh, mômen quán tính cũng có tính chất sau:

Tính chất: *Mômen quán tính của một hình phức tạp bằng tổng mômen quán tính của từng hình đơn giản.*

2- Hệ trục quán tính chính trung tâm (QTCTT)



Hình 6.7 Hình có một trục đối xứng

Một hệ trục tọa độ có mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục đó bằng không được gọi là hệ trục quán tính chính.

Nhận xét: Tại mỗi điểm trên mặt phẳng A ta đều tìm thấy một hệ trục quán tính chính. Điều này sẽ được chứng minh ở mục 6.6.

Hệ trục quán tính chính đi qua trọng tâm mặt cắt được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm. Đối với hệ trục này, ta có:

$$S_x = 0; S_y = 0; I_{xy} = 0 \tag{6.12}$$

Tính chất: Khi diện tích A có một trục đối xứng thì bất kỳ hệ trục vuông góc nào chứa trục đối xứng đều là hệ trục quán tính chính của mặt cắt.

Thực vậy, chẳng hạn với hình A có trục đối xứng là y như trên hình 6.7. Ta luôn tìm được những cặp vi phân diện tích đối xứng để:

$$I_{xy} = \int_A yx dA = \int_{A_1+A_2} yx dA = \int_{A_1} (xy - yx) dA_1 = 0$$

Nhận xét: Kết hợp với nhận xét phần 6.2, ta nhận thấy bất kỳ trục nào vuông góc với trục đối xứng đi qua trọng tâm cũng hợp với nó thành một hệ trục QTCTT.

Mômen quán tính đối với trục chính trung tâm được gọi là mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

3- Bán kính quán tính

Một đặc trưng hình học nữa hay được dùng trong tính toán kết cấu là bán kính quán tính được xác định như sau:

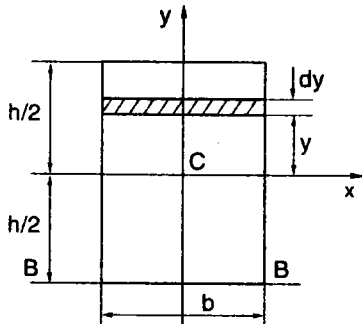
$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{6.13}$$

Bán kính quán tính đối với các trục chính được gọi là bán kính quán tính chính và có thứ nguyên là [chiều dài].

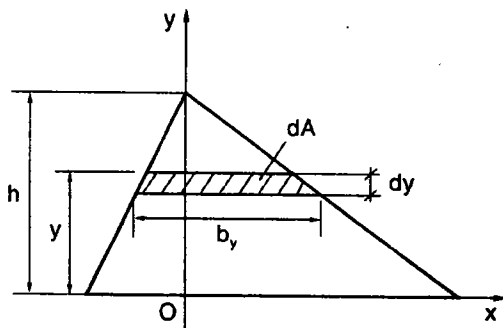
6.4 MÔMEN QUÁN TÍNH CHÍNH TRUNG TÂM CỦA MỘT SỐ HÌNH ĐƠN GIẢN

1- Hình chữ nhật

Ta xác định mômen quán tính chính trung tâm của hình chữ nhật kích thước $b \times h$ (H.6.8).



Hình 6.8 Mômen quán tính của hình chữ nhật



Hình 6.8 Mômen quán tính của hình tam giác

Hệ có hai trục x, y là hai trục đối xứng nên đồng thời là hệ QTCTT. Để tính I_x , ta lấy diện tích vi phân dA là một dải bề rộng b , bề dày dy , khoảng cách đến trục là y . Ta có:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12} \quad (6.14)$$

Tương tự, đổi vai trò của x và y , b và h , ta được:

$$I_y = \frac{hb^3}{12} \quad (6.15)$$

2- Hình tam giác

Ta cần tính mômen quán tính của diện tích tam giác đối với trục x đi qua đáy (H.6.9). Dải vi phân diện tích dA song song với đáy, có chiều dày là dy , khoảng cách đến trục x là y và có bề rộng b_y được tính như sau:

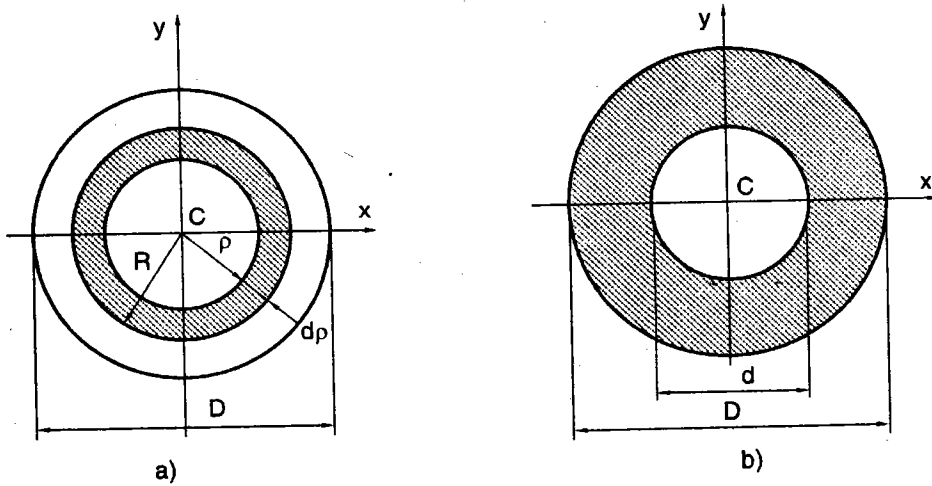
$$b_y = \frac{b(h-y)}{h}$$

Ta có:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b(h-y)}{h} dy$$

$$= \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy = \frac{b}{h} \left(\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{bh^3}{12}$$

3- Hình tròn - Hình vành khăn



Hình 6.10

a) Mômen quán tính độc cực của hình tròn; b) Hình vành khăn

Để đơn giản, trước hết ta tìm mômen quán tính độc cực đối với trọng tâm O. Xét vòng tròn bán kính R ở hình 6.10a. Lấy phân tố diện tích dA ở dạng một vành tròn mảnh bán kính rho và bề dày d rho. Như vậy,

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

Mômen quán tính độc cực của toàn bộ hình tròn:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \cong 0,1D^4$$

Do đối xứng, ta có: $I_x = I_y$

Theo tính chất của mômen quán tính độc cực, ta nhận được:

$$I_p = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y$$

suy ra:
$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4 \quad (6.16)$$

Theo tính chất của mômen quán tính đối với trục đã biết ở mục 6.3, ta có mômen quán tính của mặt cắt hình tròn rỗng hay hình vành khăn (H.6.10b) là hiệu mômen quán tính của hai đường tròn đặc đường kính D và d :

$$I_x = I_x^{(D)} - I_x^{(d)} = 0,05D^4 - 0,05d^4$$

Như vậy:
$$I_x = I_y \approx 0,05D^4(1 - \eta^4)$$

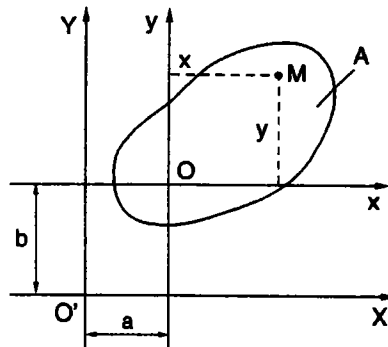
với:
$$\eta = \frac{d}{D}$$

Trong trường hợp mặt cắt có hình dáng phức tạp hơn, việc tính các mômen quán tính sẽ khó khăn hơn. Trong trường hợp đó, chúng ta phải sử dụng các công thức chuyển trục và xoay trục được trình bày ở phần sau.

6.5 CÔNG THỨC CHUYỂN TRỤC SONG SONG

Giả sử ta đã biết các mômen quán tính của hình phẳng A trong hệ trục tọa độ Oxy . Ta cần xác định mômen quán tính của hình phẳng này trong hệ trục $O'XY$ song song với hệ trục đã cho (H.6.11). Gọi a và b là tọa độ của O trong hệ tọa độ $O'XY$. Trong hình vẽ, ta thấy tọa độ của điểm trong hai hệ trục liên hệ với nhau bằng công thức sau:

$$X = a + x, Y = b + y$$



Hình 6.11 Mặt cắt A và các trục song song

Theo định nghĩa:

$$\begin{aligned} I_X &= \int_A Y^2 dA = \int_A (b + y)^2 dA \\ &= \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + \int_A b^2 dA \\ &= I_x + 2bS_x + b^2 A \end{aligned} \quad (6.17a)$$

tương tự:

$$I_Y = I_y + 2aS_y + a^2 A \quad (6.17b)$$

Đối với mômen quán tính ly tâm:

$$\begin{aligned} I_{XY} &= \int_A XY dA = \int_A (a + x)(b + y) dA \\ &= \int_A xy dA + b \int_A x dA + a \int_A y dA + ab \int_A dA \\ &= I_{xy} + bS_y + aS_x + abA \end{aligned} \quad (6.18)$$

Nếu hệ trục Oxy là hệ trục trung tâm của hình A thì các công thức trên có dạng:

$$I_X = I_x + b^2 A; \quad I_Y = I_y + a^2 A; \quad I_{XY} = I_{xy} + abA \quad (6.19)$$

Công thức (6.19) thường được sử dụng để tính các mômen quán tính chính trung tâm của một hình phức tạp khi đã biết mômen quán tính chính trung tâm của từng hình đơn giản.

Từ công thức này, ta nhận thấy *trong tất cả các trục song song thì mômen quán tính đối với trục trung tâm luôn có giá trị nhỏ nhất.*

Ví dụ 6.2 Tính mômen quán tính đối với trục BB đi qua đáy của hình chữ nhật (H.6.8).

Giải Dùng công thức chuyển trục song song để tính I_{BB} :

$$I_{BB} = I_x + \left(\frac{h}{2}\right)^2 A = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 hb = \frac{bh^3}{3}$$

I_{BB} lớn hơn mômen quán tính đối với trục x . Mômen quán tính tăng dần khi di chuyển trục song song xa dần trọng tâm. Mômen quán tính chính trung tâm I_x có giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 6.3 Xác định mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt ở ví dụ 6.1 (H.6.6).

Giải Ta lấy lại kết quả ví dụ 6.1:

$$A_1 = 18\text{cm}^2; \quad A_2 = 113\text{cm}^2; \quad A_3 = 35,2\text{cm}^2; \quad A = 166,2\text{cm}^2$$

$$y_1 = 281\text{mm}; \quad y_3 = 299,7\text{mm}; \quad y_C = 33,04\text{mm}$$

Mômen quán tính của ba mặt cắt thành phần đối với các trục trung tâm của chúng như sau:

$$I_{x_1}^I = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12} (150)(12)^3 = 21600 \text{ mm}^4 = 2,16 \text{ cm}^4$$

Tra bảng, ta có:

$$I_{x_2}^{II} = 54810\text{cm}^4; \quad I_{x_3}^{III} = 262\text{cm}^4$$

$$I_y^{II} = 1350\text{cm}^4; \quad I_y^{III} = 4100\text{cm}^4$$

Ta sử dụng công thức chuyển trục song song để tính mômen quán tính đối với trục X đi qua C , của từng mặt cắt:

$$\begin{aligned} I_X^I &= I_{x_1}^I + (y_1 + y_C)^2 \times A_1 \\ &= 2,16 + (31,4)^2 \times 18 = 17749,44 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_X^{II} &= I_{x_2}^{II} + y_C^2 \times A_2 \\ &= 54180 + (3,3)^2 \times 113 = 5604,57 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_X^{III} &= I_{x_3}^{III} + (y_3 - y_C)^2 \times A_3 \\ &= 262 + (26,67)^2 \times 35,2 = 25299,37 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Mômen quán tính chính trung tâm I_X của toàn bộ mặt cắt:

$$I_X = I_X^I + I_X^{II} + I_X^{III} = 99089,38 \text{ cm}^4$$

Mômen quán tính chính trung tâm I_Y :

$$\begin{aligned} I_Y &= I_Y^I + I_Y^{II} + I_Y^{III} \\ &= \frac{1}{12} (150)^3 (12) + 1350 + 4100 = 57875 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

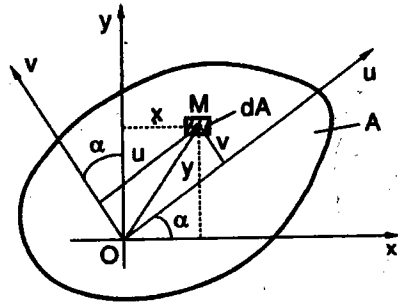
Các bán kính quán tính chính:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{99089,38}{166,2}} = 24,41 \text{ cm}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{57875}{166,2}} = 18,66 \text{ cm}$$

6.6 CÔNG THỨC XOAY TRỤC

Giả sử ta đã biết các mômen quán tính của A trong hệ trục tọa độ Oxy . Ta xoay hệ trục ban đầu Oxy quanh gốc tọa độ O một góc α ngược chiều kim đồng hồ và thu được hệ trục mới ký hiệu là Ouv như trên hình 6.12. Khi hệ trục quay, các mômen quán tính của A đối với hệ trục mới cũng thay đổi theo.



Hình 6.12 Xoay trục

Tọa độ của điểm trong hệ trục mới và hệ tọa độ cũ được liên hệ như sau:

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha \tag{6.20}$$

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

Khi đó, mômen quán tính đối với trục u sẽ là:

$$\begin{aligned} I_u &= \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA \\ &= \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA \end{aligned}$$

hoặc biểu diễn theo các mômen quán tính đối với hệ trục x, y như sau:

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \tag{a}$$

Ta sử dụng các công thức lượng giác:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

Khi đó biểu thức (a) trở thành:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (6.21)$$

Tương tự, thu được mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục uv :

$$I_{uv} = (I_x - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (b)$$

Sử dụng các hệ thức lượng giác, biểu thức (b) trở thành:

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad (6.22)$$

Lặp lại quá trình tính tương tự như tính mômen I_u , ta thu được mômen quán tính I_v (hoặc bằng cách thế trực tiếp α bằng $\alpha + 90^\circ$ trong phương trình (6.21)):

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha \quad (6.23)$$

Các công thức (6.21), (6.23) gọi là *công thức xoay trục* biểu diễn sự biến thiên của các mômen quán tính I_u , I_v và I_{uv} phụ thuộc vào góc cực α khi xoay trục tọa độ. Bởi vậy, các phương trình này còn được gọi là *phương trình chuyển đổi mômen quán tính*. Lấy tổng (6.21) và (6.23), ta nhận lại được bất biến của mômen quán tính đã biết ở mục 6.3:

$$I_u + I_v = I_x + I_y = \text{const} \quad (6.24)$$

6.7 VÒNG TRÒN MOHR QUÁN TÍNH. CÁCH XÁC ĐỊNH HỆ TRỤC QUÁN TÍNH CHÍNH TRUNG TÂM CỦA HÌNH PHẪNG BẤT KỲ

1- Cách xác định hệ trục quán tính chính

Theo định nghĩa ở mục 6.3, hệ trục quán tính chính là hệ trục có mômen quán tính ly tâm bằng không. Để xác định hệ trục này, cho I_{uv} trong biểu thức (6.22) bằng không, ta tìm được:

$$\text{tg} 2\alpha = - \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (6.25)$$

trong đó: α là góc xác định trục quán tính chính.

Phương trình (6.25) luôn có hai nghiệm 2α sai khác nhau một góc 180° . Như vậy, tồn tại hai nghiệm α sai biệt nhau một góc 90° , nghĩa là luôn tìm được hai trục chính vuông góc với nhau. Đó chính là nhận xét 6.2 đã được phát biểu ở mục 6.3.

Để tìm góc α sao cho mômen quán tính có trị số lớn nhất hoặc nhỏ nhất, ta lấy đạo hàm của vế phải phương trình (6.21) theo α và cho bằng không:

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -2 \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha - 2I_{xy} \cos 2\alpha = 0 \quad (a)$$

Để thấy nghiệm α của (a) cũng là nghiệm của (6.25). Ta cũng nhận được kết quả trên nếu lấy đạo hàm của I_v trong (6.23) theo α và cho bằng không.

Như vậy đối với hệ trục chính vuông góc, mômen quán tính có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất, gọi là *mômen quán tính chính*. Thế ngược lại 2α từ (6.25) vào (6.21) và (6.23), ta thu được trị số các mômen quán tính chính:

$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (6.26)$$

và:
$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (6.27)$$

2- Vòng tròn Mohr quán tính

Về mặt toán học, ta nhận thấy có sự tương đồng giữa *phương trình chuyển đổi mômen quán tính* và *phương trình chuyển đổi ứng suất* với:

I_u tương ứng với σ_u

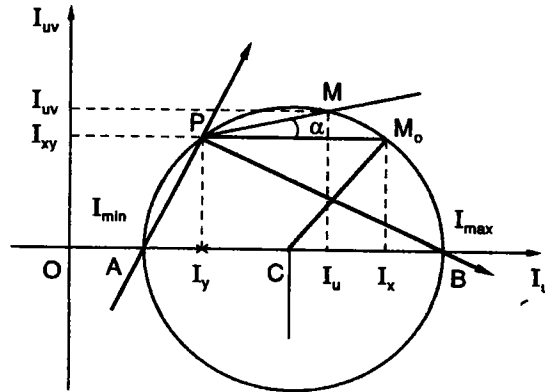
I_{uv} tương ứng với $-\tau_{uv}$

I_x tương ứng với σ_x

I_y tương ứng với σ_y

I_{xy} tương ứng với $-\tau_{xy}$.

Vì vậy, nếu dùng một hệ trục tọa độ với trục hoành biểu diễn I_u và trục tung biểu diễn I_{uv} thì quan hệ giữa I_u và I_{uv} là tương quan của một đường tròn gọi là *vòng tròn Mohr quán tính* (H.6.13). Tương tự như vòng tròn Mohr ứng suất, ta tìm thấy các phương của trục quán tính chính là PA và PB , nếu phương của trục hoành song song với trục Ox trên hình phẳng A.



Hình 6.13 Vòng tròn Mohr quán tính

Ở đây, khác với vòng tròn ứng suất, trục tung I_{uv} hướng lên trên và vòng tròn quán tính luôn nằm bên phải trục tung vì I_x , I_y và I_u luôn dương. Điểm M_0 với tọa độ I_x, I_y được gọi là điểm gốc, bán kính CM_0 là bán kính gốc còn điểm P gọi là điểm cực.

3- Cách xác định hệ trục QTCTT của một hình phẳng bất kỳ

Trong trường hợp tổng quát, khi diện tích A không có trục đối xứng, hệ trục QTCTT được xác định theo trình tự như sau:

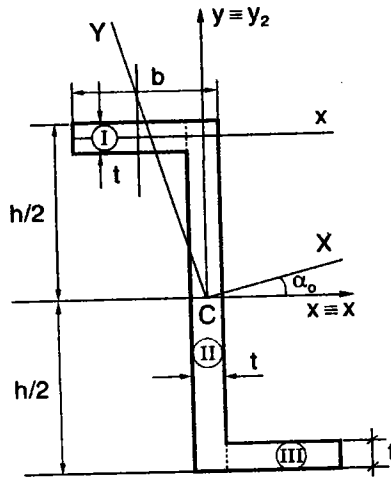
- Chọn hệ trục Oxy bất kỳ ban đầu. Xác định trọng tâm của hình trong hệ trục này
- Chuyển trục song song về trọng tâm của hình. Tính các mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm
- Xoay trục để tìm phương chính đi qua trọng tâm.

Việc xác định hệ trục QTCTT cũng như tính toán các mômen quán tính chính là rất cần thiết trong việc tính toán ứng suất, chuyển vị của thanh chịu uốn, xoắn... mà ta sẽ nghiên cứu ở các chương sau.

Ví dụ 6.4 Xác định hệ trục QTCTT và mômen QTCTT của mặt cắt chữ Z trên hình 6.14, với các kích thước: $h = 400\text{mm}$; $b = 175\text{mm}$; $t = 28\text{mm}$.

Giải Chia mặt cắt Z làm ba hình chữ nhật:

- Hình I và III (nằm ngang) bề dày t , bề rộng $b - t$
- Hình II bề dày t , chiều cao h .



Hình 6.14 Hệ trục QTCTT của mặt cắt Z

Tuy không có trục đối xứng, song mặt cắt lại có điểm đối xứng (hay tâm đối xứng), trùng với trọng tâm hình II, sao cho mọi đường thẳng trên mặt cắt đi qua điểm C_2 đều đối xứng đối với điểm này. Để thấy trọng tâm mặt cắt C trùng với tâm đối xứng.

Chọn hệ trục tọa độ xy để tính toán, đi qua trọng tâm C . Mômen quán tính đối với các trục x, y là:

$$\begin{aligned}
 I_x &= I_x^{II} + 2I_x^I = \frac{ht^3}{12} + 2 \left[\frac{(b-t)t^3}{12} + \left(\frac{h-t}{2} \right)^2 (b-t) \times t \right] \\
 &= \frac{28(400)^3}{12} \text{ mm}^4 + 2 \left[\frac{147 \times (28)^3}{12} + (186)^2 \times 147 \times 28 \right] \text{ mm}^4 \\
 &= 43467 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= I_y^{II} + 2I_y^I = \frac{ht^3}{12} + 2 \left[\frac{t(b-t)^3}{12} + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \times (b-t) \times t \right] \\
 &= \frac{400 \times (28)^3}{12} \text{ mm}^4 + 2 \left[\frac{28(147)^3}{12} + \left(\frac{175}{2} \right)^2 \times 147 \times 28 \right] \text{ mm}^4 \\
 &= 7858 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

Mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục xy là:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{xy}^{II} + 2I_{xy}^I = 0 + 2 \left[0 + \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) \left(-\frac{b}{2} \right) (b-t)t \right] \\ &= -\frac{bt}{2} (h-t)(b-t) \\ &= -\frac{175 \times 28}{2} \times 372 \times 147 \text{mm}^4 = -13398 \text{cm}^4 \end{aligned}$$

Để ý rằng, mômen quán tính của hai hình I và III bằng nhau. Mômen quán tính ly tâm của hai hình trên đều âm vì nằm ở góc tọa độ thứ hai và thứ tư.

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = 0,7525$$

Phương của hệ trục QTCTT so với trục Ox :

$$2\alpha_o = 37^\circ \text{ và } 217^\circ$$

$$\text{suy ra: } \alpha_o^{(1)} = 18^\circ 30' \text{ và } \alpha_o^{(2)} = 108^\circ 30'$$

thế giá trị của α_o vào (6.21), tính được trị số mômen quán tính $I_u = 47944 \text{cm}^4$ và $I_v = 3381 \text{cm}^4$.

Như vậy, mômen QTCTT và phương hệ trục QTCTT tương ứng là:

$$I_X = 47994 \text{cm}^4; \quad \alpha_o^{(1)} = 18^\circ 30'$$

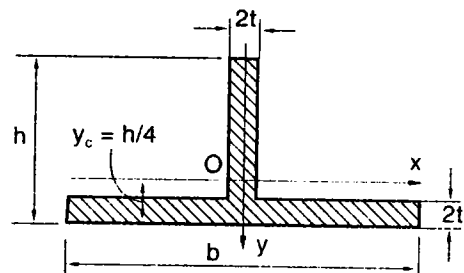
$$I_Y = 3381 \text{cm}^4; \quad \alpha_o^{(2)} = 108^\circ 30'$$

Hệ trục quán tính chính trung tâm CXY được biểu diễn như trên hình vẽ.

6.8 BÀI TẬP CHƯƠNG 6

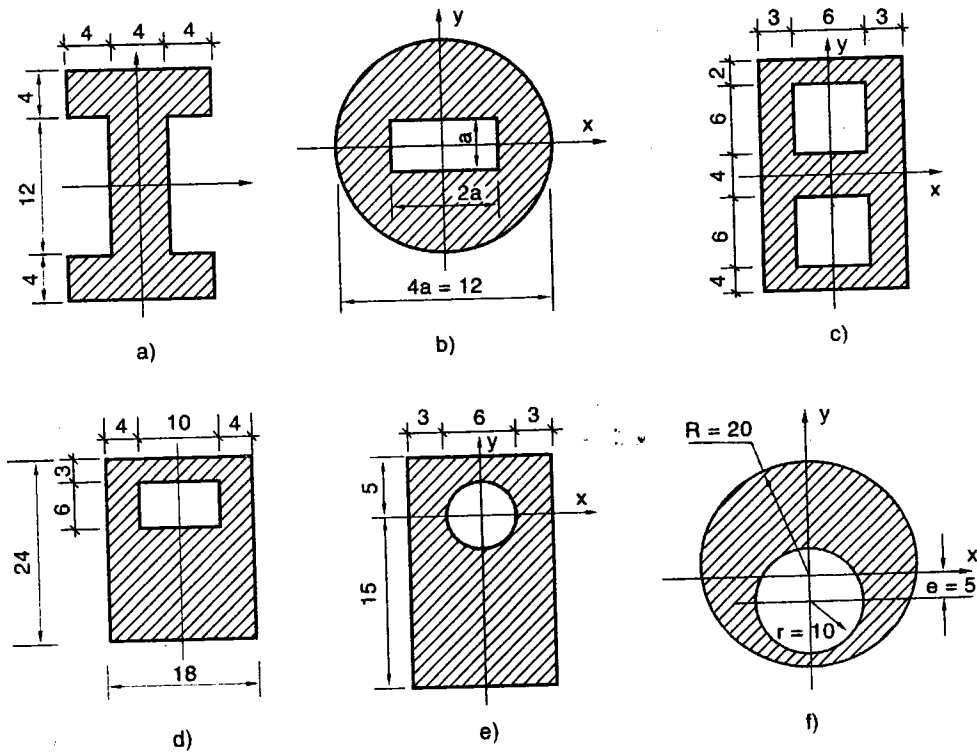
6.1 Xác định chiều cao h của mặt cắt ngang hình chữ T biết trục $x-x$ ở vị trí cách đáy một khoảng bằng $h/4$.

Cho $b = 20 \text{cm}$, $t = 1 \text{cm}$.
Xác định mômen QTCTT của các mặt cắt.



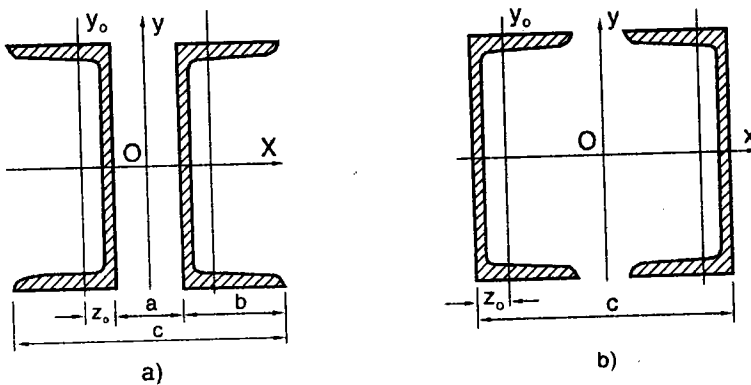
Hình 6.15

6.2 Tính mômen QTCTT của các hình 6.16. Kích thước ghi bằng cm.



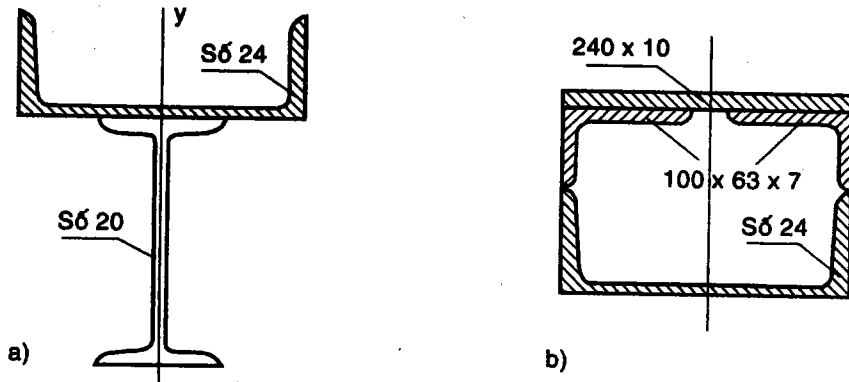
Hình 6.16

6.3 Tìm khoảng cách c của mặt cắt gồm hai thép chữ [số hiệu 30 được bố trí như hình 6.17 để có $I_x = I_y$.



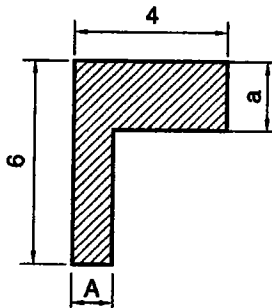
Hình 6.17

6.4 Hãy tính các mômen QTCTT của các hình 6.18.

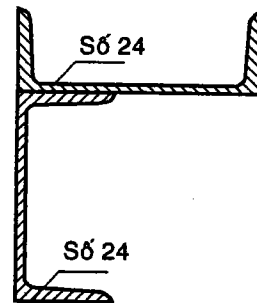


Hình 6.18

6.5 Xác định mômen QTCTT và các trục QTCTT của hình phẳng như hình 6.19.



Hình 6.19



Hình 6.20

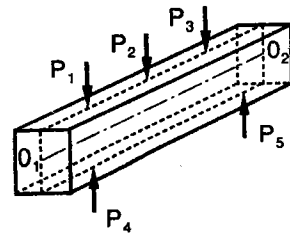
6.6 Một thanh ghép bởi hai thép hình chữ [số 24. Xác định mômen quán tính chính và hệ trục QTCTT của mặt cắt (H.6.20).

UỐN PHẪNG THANH THẲNG

7.1 KHÁI NIỆM CHUNG

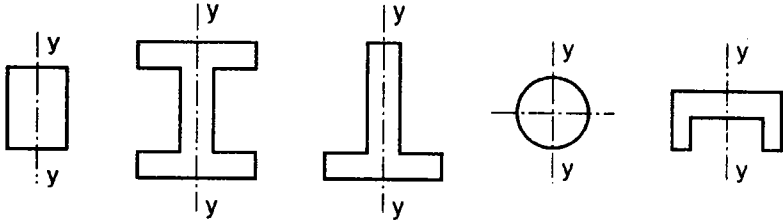
Một thanh lẳng trụ có trục bị uốn cong khi chịu tác dụng của tải trọng nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh và có phương vuông góc với trục thanh. Khi đó ta nói thanh chịu uốn và được gọi là dầm. Như thế dầm khác với thanh chịu kéo (hoặc nén) đúng tâm và thanh chịu xoắn thuần túy bởi phương tác dụng của tải trọng. Thật thế, thanh chịu kéo (nén) đúng tâm khi chịu tải hướng dọc theo trục thanh, và một thanh chịu xoắn thuần túy khi chịu các ngẫu lực có vectơ nằm dọc theo trục thanh. Còn ngoại lực gây ra uốn có thể là lực tập trung hay phân bố có đường tác dụng vuông góc với trục dầm hoặc do những ngẫu lực nằm trong mặt phẳng chứa trục dầm.

Hình 7.1 diễn tả hệ tải trọng làm cho dầm chịu uốn; các tải trọng đều nằm trong một mặt phẳng chứa trục dầm và ta gọi đó là *mặt phẳng tải trọng*. Giao tuyến của mặt phẳng tải trọng với mặt cắt ngang được gọi là *đường tải trọng*.



Hình 7.1 Tải trọng tác dụng lên dầm

Trong chương này, chúng ta chỉ khảo sát những trường hợp mặt cắt ngang có ít nhất một trục đối xứng. *Mặt phẳng đối xứng này là một mặt phẳng quán tính chính trung tâm*, và ta giả thiết rằng tải trọng nằm trong mặt phẳng đối xứng như trên hình 7.2. Khi đó trục dầm sau khi bị biến dạng vẫn nằm trong mặt phẳng này nên sự uốn còn được gọi là *uốn phẳng*.

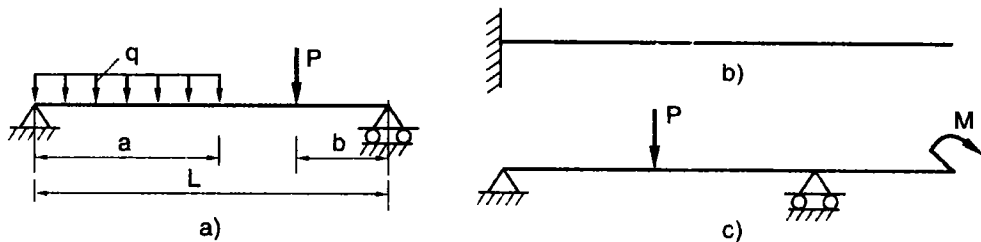


Hình 7.2 Các mặt cắt ngang dầm thường dùng

Các phản lực của các gối tựa để cân bằng với các ngoại lực tác dụng lên dầm, dĩ nhiên cũng phải nằm trong cùng mặt phẳng tải trọng. Chúng ta đã biết cách xác định chúng trong chương 1. Ta chỉ khảo sát ở đây những trường hợp dầm đơn giản nhất như trên hình 7.3. Các dầm này còn được xem là kết cấu phẳng bởi vì tải trọng chỉ nằm trong mặt phẳng.

- Dầm trên hình 7.3a có gối tựa khớp cố định một đầu và gối tựa di động một đầu kia, được gọi là *dầm tựa đơn*.
- Dầm trên hình 7.3b bị ngàm một đầu, còn đầu kia tự do, được gọi là *dầm công-xon*.
- Dầm trên hình 7.3c thể hiện một đoạn mút thừa *BC* với đầu *C* tự do và tựa đơn tại *A* và *B*. Người ta còn gọi là *dầm có một đầu mút thừa*.

Ngoài ra, còn có nhiều cách sắp đặt các gối tựa khác cho dầm tùy theo trường hợp tác dụng của tải trọng. Tuy nhiên, những ví dụ đơn giản ở đây cũng đủ để minh họa những khái niệm cơ bản.



Hình 7.3 Các loại dầm

a) *Dầm tựa đơn*; b) *Dầm công-xon*; c) *Dầm có đầu mút thừa*

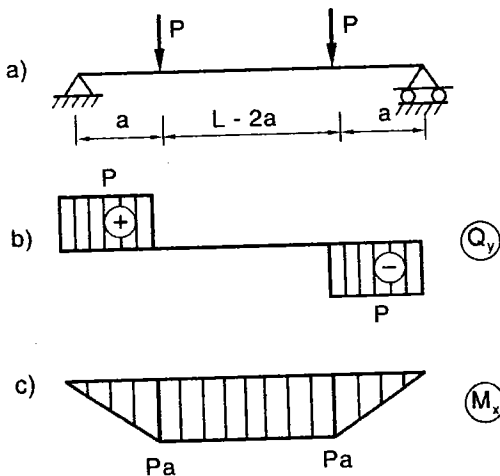
Dưới tác dụng của các tải trọng, trên các mặt cắt ngang của dầm xuất hiện các nội lực mà hợp lực của chúng là lực cắt hoặc mômen

uốn. Ta phân biệt hai loại uốn phẳng: uốn thuần túy phẳng và uốn ngang phẳng.

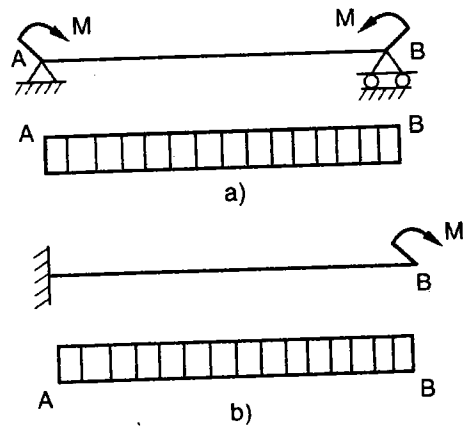
Uốn thuần túy phẳng dùng để chỉ sự uốn của các dầm với mômen uốn hằng số, nghĩa là lực cắt bằng không (bởi vì $Q = dM/dz$).

Uốn ngang phẳng được đề cập đến trong trường hợp uốn với sự hiện diện của lực cắt, nghĩa là mômen uốn thay đổi dọc theo trục dầm.

Để minh họa các khái niệm trên ta hãy xét một dầm tựa đơn chịu tác dụng của hai lực tập trung P cách đều hai gối tựa như trên hình 7.4a. Biểu đồ lực cắt và mômen uốn được biểu diễn trên hình 7.4b và hình 7.4c. Ta nhận thấy vùng trong khoảng giữa hai lực tập trung có biểu đồ mômen là hằng số trong khi lực cắt trong vùng này không có. Vùng này chịu uốn thuần túy. Còn hai vùng có chiều dài a ở hai đầu có mômen uốn thay đổi trong khi lực cắt khác không. Hai vùng này chịu uốn ngang phẳng. Những trường hợp ví dụ khác về uốn thuần túy được biểu diễn trên hình 7.5.



Hình 7.4 Dầm với vùng ở giữa chịu uốn thuần túy



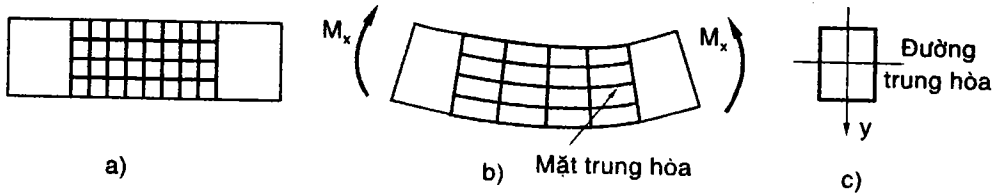
Hình 7.5 Dầm chịu uốn thuần túy

Trong phần kế tiếp chúng ta sẽ xác định các biến dạng dài do uốn và ứng suất pháp trong trường hợp chịu uốn thuần túy và tiếp theo đó là ứng suất tiếp trong trường hợp uốn ngang.

7.2 UỐN THUẦN TÚY PHẪNG

1- Xét một thanh chịu uốn thuần túy phẳng (H.7.5a)

Tại một mặt cắt $m - m$ bất kỳ ở cách gối tựa A một đoạn z , chỉ tồn tại một thành phần nội lực khác không là mômen uốn M_x . Vấn đề của chúng ta là xác định thành phần ứng suất tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang và trị số lớn nhất của ứng suất này.



Hình 7.6 a) Thanh trước khi biến dạng
b) Sau biến dạng; c) Mặt cắt ngang sau biến dạng

Vạch lên mặt ngoài một thanh thẳng chịu uốn như trong hình 7.6a, những đường song song với trục thanh tượng trưng cho các thớ dọc và những đường vuông góc với trục thanh tượng trưng cho các mặt cắt ngang; các đường này tạo thành các lưới ô vuông (H.7.6a).

Sau khi biến dạng (H.7.6b) ta nhận thấy các đường thẳng song song với trục thanh biến thành các đường cong song song với trục thanh; những đường vuông góc với trục thanh thì sau biến dạng vẫn còn vuông góc với trục thanh, nghĩa là các góc vuông luôn được bảo toàn trong quá trình biến dạng. Khi này lưới ô vuông đã biến thành lưới ô chữ nhật.

Dựa trên những điều quan sát bên trên người ta đưa ra các giả thiết tính toán như sau:

- Giả thiết mặt cắt ngang phẳng của Béc-nu-li (Bernoulli): trước và sau biến dạng, mặt cắt ngang của thanh luôn phẳng;
- Giả thiết về thớ dọc: trong quá trình biến dạng, các thớ dọc không ép và đẩy lên nhau;
- Giả thiết vật liệu vẫn còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi nghĩa là quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Húc (Hooke).

Ngoài ra, nếu quan sát thanh thì thấy các thớ bên dưới bị dãn ra và các thớ bên trên bị co lại. Như thế, từ thớ bị dãn sang thớ bị co sẽ tồn tại các thớ mà chiều dài không thay đổi trong quá trình biến dạng, gọi là *thớ trung hòa*. Các thớ trung hòa tạo thành *lớp trung hòa*. Giao tuyến của lớp trung hòa với mặt cắt ngang tạo thành *đường trung hòa*. Vì mặt cắt ngang có chiều rộng bé nên đường trung hòa xem như thẳng (H.7.6.c).

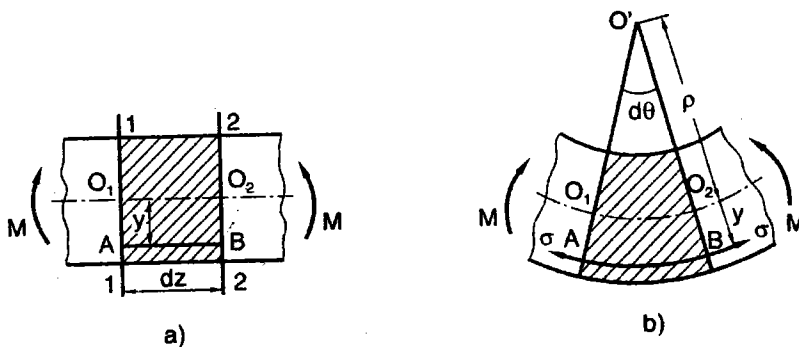
2- Biến dạng của một thớ bất kỳ

Xét đoạn thanh vi phân giới hạn bởi hai mặt cắt ngang 1-1 và 2-2 cách nhau một đoạn dz (H.7.7a). Sau biến dạng, trục thanh bị uốn cong, các mặt cắt ngang 1-1 và 2-2 do vậy sẽ cắt nhau tại tâm cong O' (H.7.7b) và hợp thành một góc $d\theta$. Gọi ρ là bán kính cong của thớ trung hòa, tức khoảng cách từ O' đến thớ trung hòa. Độ dãn dài tương đối của một thớ ab ở cách thớ trung hòa một khoảng cách y cho bởi:

$$\epsilon_z = \frac{a_1b_1 - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\theta - dz}{dz} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} = \kappa y \quad (7.1)$$

trong đó: κ là độ cong của thớ trung hòa.

Hệ thức này chứng tỏ biến dạng dọc trục dầm thì tỉ lệ với độ cong và biến thiên tuyến tính với khoảng cách y từ thớ trung hòa. Chú ý rằng, biểu thức (7.1) được suy ra hoàn toàn từ điều kiện biến dạng hình học của dầm và độc lập với tính chất của vật liệu. Do vậy, hệ thức trên không tùy thuộc vào dạng của biểu đồ ứng suất - biến dạng của vật liệu.



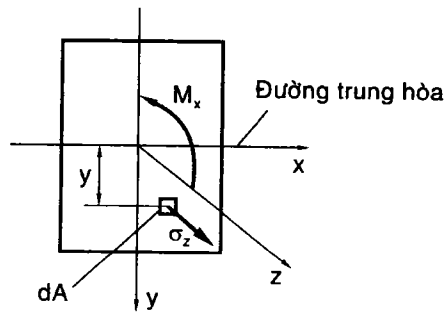
Hình 7.7 Đoạn dầm vi phân dz
 a) Trước biến dạng; b) Sau biến dạng

3- Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng

Xét một mặt cắt ngang nào đó, trên đó ta gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với Ox là trùng với đường trung hòa, Oy là trục đối xứng và Oz trùng với trục thanh (H.7.8). Tách một phân tố vi phân hình hộp, tại một điểm M cách trục x một khoảng y , bằng các mặt cắt song song với các trục tọa độ. Theo giả thiết mặt cắt ngang, trên các mặt của phân tố sẽ không tồn tại thành phần ứng suất tiếp. Ngoài ra, giả thiết về thứ dọc chứng tỏ không hiện hữu các thành phần ứng suất pháp theo phương vuông góc với trục thanh. Tóm lại, chỉ còn tồn tại một thành phần ứng suất pháp theo phương dọc trục thanh, σ_z , mà thôi. Nói khác đi, phân tố đang xét ở trạng thái ứng suất đơn. Nếu vật liệu là đàn hồi tuyến tính, định luật Hooke tương ứng với trạng thái ứng suất đơn, có kể đến (7.1) cho ta:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\kappa y \quad (7.2)$$

Điều này chứng tỏ ứng suất pháp tác dụng trên mặt cắt ngang biến thiên bậc nhất với khoảng cách y từ trục trung hòa. Bây giờ chúng ta hãy xét hợp lực của các ứng suất pháp trên toàn mặt cắt ngang.



Hình 7.8 Ứng suất pháp và mômen uốn trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn

Để có thể xác định các hợp lực này, ta hãy xét diện tích vi phân dA trên mặt cắt ngang ở khoảng cách y từ trục trung hòa (H.7.8). Lực tác dụng trên phần tử này thì vuông góc với mặt cắt ngang và có trị số là $\sigma_z dA$. Bởi vì không có nội lực theo phương z nên tích phân của $\sigma_z dA$ trên toàn diện tích mặt cắt ngang phải triệt tiêu, do đó:

$$N_z = \int_A \sigma_z dA = \int_A E\kappa y dA = 0 \quad (7.3)$$

Bởi vì độ cong κ và môđun đàn hồi E là hằng số nên ta có thể đem ra ngoài dấu tích phân và suy ra:

$$\int_A y dA = 0 \quad (7.4)$$

đối với dầm chịu uốn thuần túy.

Hệ thức này diễn tả rằng mômen tĩnh của diện tích mặt cắt ngang đối với trục trung hòa x triệt tiêu; điều này chứng tỏ rằng trục trung hòa x đi qua trọng tâm mặt cắt ngang dầm khi vật liệu tuân theo định luật Hooke. Tính chất này cho phép ta xác định trục trung hòa của bất kỳ mặt cắt ngang nào. Dĩ nhiên chúng ta chỉ khảo sát trường hợp trục y là trục đối xứng. Theo hệ quả của chương 6, hệ trục (x, y) chính là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Chúng ta hãy khảo sát sau đây hợp mômen của các ứng lực gây ra bởi các ứng suất σ_z trên toàn mặt cắt ngang. Đó chính là hợp của các mômen vi phân do các lực $\sigma_z dA$ gây ra quanh trục x :

$$dM_x = \sigma_z y dA \quad (7.5)$$

Lưu ý rằng, lực $\sigma_z dA$ cũng gây ra mômen quanh trục y , $\sigma_z y dA$. Tuy nhiên mômen đó sẽ bị triệt tiêu bởi mômen $(-\sigma_z y dA)$ tại điểm đối xứng qua trục y , do ứng suất tại hai điểm là như nhau. Từ đó điều kiện $M_y = 0$ luôn được thỏa nên ta không cần xét đến.

Do vậy, tích phân của tất cả các mômen vi phân trên toàn tiết diện phải cân bằng với mômen M_x , nghĩa là:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \kappa E \int_A y^2 dA \quad (7.6)$$

hay có thể viết dưới dạng khác đơn giản hơn:

$$M_x = \kappa E I_x \quad (7.7)$$

trong đó: $I_x = \int_A y^2 dA$ (7.8)

là mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hòa x .

Biểu thức (7.7) có thể được viết lại như sau:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E I_x} \quad (7.9)$$

Hệ thức này chứng tỏ độ cong của trục thanh tỉ lệ với mômen uốn M_x , và tỉ lệ nghịch với đại lượng $E I_x$, gọi là độ cứng uốn của dầm.

Thay (7.9) vào (7.1) ta tìm được biểu thức tính ứng suất pháp tại một điểm trên mặt cắt ngang như sau:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad (7.10)$$

Biểu thức này chứng tỏ ứng suất pháp tỉ lệ thuận với mômen uốn M_x và tỉ lệ nghịch với mômen quán tính I_x của mặt cắt ngang. Ngoài ra, ứng suất còn biến thiên bậc nhất theo khoảng cách y từ trục trung hòa. Trong (7.10), mômen uốn M_x dương khi có khuynh hướng làm căng thớ y dương. Ta có thể nhận thấy rằng những điểm càng ở xa trục trung hòa có trị số ứng suất càng lớn và những điểm cùng có khoảng cách tới thớ trung hòa sẽ có cùng trị số ứng suất pháp.

Nếu mômen uốn dương, dầm bị uốn cong với mặt lồi hướng về phía dưới, các thớ trên bị nén ($y < 0$), trong khi các thớ bên dưới chịu kéo. Hình ảnh xảy ra ngược lại nếu mômen uốn âm. Do vậy trong thực hành, ta có thể sử dụng công thức kỹ thuật sau để tính ứng suất, trong đó ta không cần để ý đến dấu của mômen uốn M_x cũng như của y , mà chỉ cần xét xem mômen uốn đã cho gây ra kéo hoặc nén tại điểm đang xét

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| \quad (7.11)$$

ta sẽ lấy: dấu (+) nếu M_x gây kéo tại điểm cần tính ứng suất
dấu (-) nếu gây nén.

Ứng suất pháp khi kéo và khi nén lớn nhất ở trên dầm xảy ra tại những điểm ở xa đường trung hòa nhất. Gọi y_{\max}^k , y_{\max}^n lần lượt là khoảng cách thớ chịu kéo và thớ chịu nén ở xa đường trung hòa nhất. Khi đó ứng suất chịu kéo lớn nhất, σ_{\max} và ứng suất chịu nén lớn nhất, σ_{\min} sẽ tính bởi các công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{I_x} |y_{\max}^k| = \frac{|M_x|}{W_x^k} \quad (7.12a)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{|M_x|}{I_x} |y_{\max}^n| = \frac{|M_x|}{W_x^n} \quad (7.12b)$$

với:
$$W_x^k = \frac{I_x}{|y_{\max}^k|}; \quad W_x^n = \frac{I_x}{|y_{\max}^n|} \quad (7.13)$$

Các đại lượng W_x^k và W_x^n gọi là các *suất tiết diện* hoặc *mômen chống uốn* của mặt cắt ngang. Nếu trục x cũng là trục đối xứng thì:

$$|y_{\max}^k| = |y_{\max}^n| = \frac{h}{2}$$

khi đó: $W_x^k = W_x^n = W_x = \frac{2I_x}{h}$ (7.14)

và ứng suất nén và kéo cực đại có trị số bằng nhau:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{|M_x|}{W_x} \quad (7.15)$$

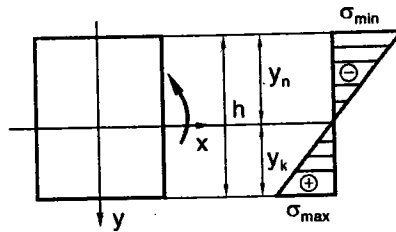
Đối với mặt cắt ngang hình chữ nhật với bề rộng b và chiều cao h , mômen quán tính và mômen chống uốn có trị số:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6} \quad (7.16)$$

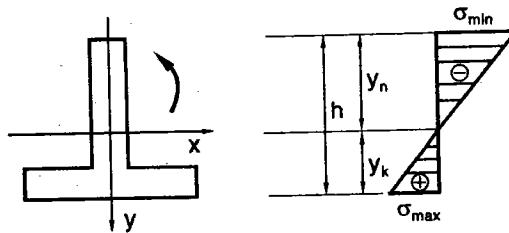
Đối với mặt cắt ngang hình tròn, các đặc trưng này cho bởi:

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4; \quad W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3 \quad (7.17)$$

Biểu đồ phân bố ứng suất pháp trong trường hợp mặt cắt ngang có hai trục đối xứng cho bởi hình 7.9 và trong trường hợp mặt cắt ngang chỉ có một trục đối xứng cho bởi hình 7.10.



Hình 7.9 Biểu đồ ứng suất pháp cho các mặt cắt có hai trục đối xứng



Hình 7.10 Biểu đồ ứng suất pháp cho các mặt cắt có một trục đối xứng

Điều kiện bền

Sau đây chúng ta viết điều kiện bền cho ứng suất kéo hoặc nén. Điều kiện này diễn tả rằng ứng suất cực đại không thể vượt qua ứng suất cho phép:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] \quad (7.18)$$

Từ điều kiện này ta suy ra rằng:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \quad (7.19)$$

nghĩa là mômen chống uốn của mặt cắt ngang xác định từ điều kiện bền phải lớn hơn hoặc bằng mômen uốn lớn nhất chia cho ứng suất cho phép.

Bởi vì W_x phụ thuộc vào hình dạng và kích thước của mặt cắt ngang dầm (chữ nhật, chữ T, dạng chữ I...) chúng ta có thể tìm kích thước của dầm sao cho mômen chống uốn bằng với trị số tìm được trong công thức (7.19).

Khi sử dụng các công thức (7.18), (7.19) chúng ta cần phân biệt hai trường hợp.

Trường hợp thứ nhất, đối với vật liệu dẻo ứng suất cho phép khi kéo và khi nén bằng nhau:

$$[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma] \quad (7.20)$$

Nếu mặt cắt ngang đối xứng qua trục x , mômen chống uốn khi kéo và nén như nhau và chúng ta không cần phân biệt thứ chịu kéo hay nén vì ứng suất kéo cực đại và ứng suất nén cực đại bằng nhau. Trong trường hợp tiết diện không đối xứng qua trục x , trong các công thức (7.18) và (7.19) ta cần thay W_x bằng W_x^k hoặc W_x^n .

Trường hợp thứ hai, khi dầm làm bằng loại vật liệu giòn có sức chịu khi kéo và khi nén khác nhau. Trong trường hợp này chúng ta cần viết hai điều kiện bền: một cho thứ chịu kéo và một cho thứ chịu nén:

$$\sigma_{\max} = + \frac{|M_{\max}|}{W_x^k} \leq [\sigma_k]; \quad |\sigma_{\min}| = \frac{|M_{\max}|}{W_x^n} \leq [\sigma_n] \quad (7.21)$$

Ý nghĩa vật lý của mômen chống uốn: *khi mômen chống uốn càng lớn dầm càng chịu được mômen uốn càng lớn mà không có nguy cơ bị phá hoại.*

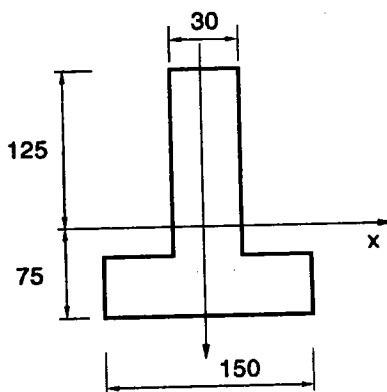
Mômen chống uốn đặc trưng cho hiệu ứng của hình dạng và kích thước mặt cắt ngang đến độ bền của dầm khi ứng suất không vượt quá giới hạn tỉ lệ. Các công thức (7.18), (7.19) không còn giá trị khi ứng suất vượt quá giới hạn tỉ lệ của vật liệu.

Từ đây ta có ba dạng bài toán cơ bản: kiểm tra bền, chọn kích thước mặt cắt ngang, chọn tải trọng cho phép.

Bài toán cơ bản 1: Kiểm tra bền

Đối với bài toán dạng này nếu ta biết tải trọng tác dụng, có nghĩa là ta có thể suy ra trị số mômen uốn M_x tại một tiết diện nào đó hoặc mômen uốn cực đại trên toàn dầm. Biết kích thước và hình dạng của mặt cắt ngang tức là biết W_x , đồng thời biết tính chất vật liệu, $[\sigma]$. Để kiểm tra xem điều kiện bền có được thỏa hay không, chúng ta chỉ cần sử dụng công thức (7.18) hoặc (7.21) tùy theo vật liệu làm dầm thuộc loại vật liệu dẻo hay giòn.

Ví dụ 7.1 Trên mặt cắt ngang của một dầm chữ T ngược như hình 7.11 chịu mômen uốn $M_x = 7200Nm$, làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép khi kéo và nén khác nhau:



Hình 7.11 Mặt cắt ngang của dầm chữ T chịu uốn

$$[\sigma_k] = 20MPa; [\sigma_n] = 30MPa$$

Kiểm tra bền biết rằng:

$$I_x = 5312,5cm^4$$

Giải Ta có:

$$y_{\max}^k = 75mm = 7,5 \cdot 10^{-2}m$$

$$y_{\max}^n = 125mm = 12,5 \cdot 10^{-2}m$$

$$W_x^k = \frac{I_x}{y_{\max}^k} = \frac{5312,5 \times 10^{-3}}{7,5 \times 10^{-2}} = 708,3 \times 10^{-6} m^3$$

$$W_x^n = \frac{I_x}{y_{\max}^n} = \frac{5312,5 \times 10^{-3}}{12,5 \times 10^{-2}} = 425 \times 10^{-6} m^3$$

$$s_{\max} = \frac{M_x}{W_x^k} = \frac{7200}{708,3 \cdot 10^{-6}} = 10,20 \cdot 10^6 Pa = 10,20 MPa < [s_k]$$

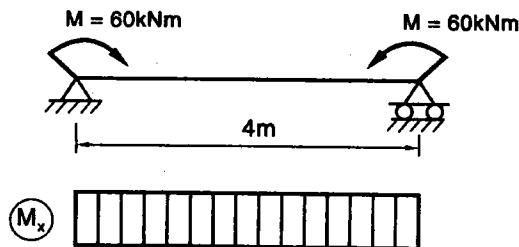
$$|\sigma_{\min}| = \frac{M_x}{W_x^n} = \frac{7200}{425 \cdot 10^{-6}} = 17 \cdot 10^6 Pa = 17 MPa < [\sigma_n]$$

vậy dầm đủ bền.

Bài toán cơ bản 2: Chọn kích thước mặt cắt ngang

Dạng bài toán này cho biết tải trọng tác dụng nghĩa là biết nội lực mômen uốn, biết hình dáng mặt cắt ngang nhưng chưa biết kích thước, và biết ứng suất cho phép của vật liệu. Ta phải tìm kích thước mặt cắt ngang sao cho thỏa điều kiện bền. Từ công thức của điều kiện bền tổng quát (7.21) ta có thể suy ra mômen chống uốn của mặt cắt ngang theo (7.17) và do đó kích thước của mặt cắt ngang được xác định.

Ví dụ 7.2 Cho một dầm chịu lực như hình 7.12. Dầm làm bằng hai thép chữ I, và ứng suất cho phép của thép là $[\sigma] = 160 MPa$. Hãy chọn số hiệu của thép chữ I để dầm thỏa điều kiện bền.



Hình 7.12 Dầm chịu uốn thuần túy và biểu đồ mômen uốn

Giải Ta thấy dầm chịu uốn thuần túy; trên mọi mặt cắt ngang của dầm có mômen uốn là $M_x = 60 kNm$. Áp dụng công thức (7.19) ta được:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 100}{16} = 375 cm^3$$

Tra bảng thép hình ta chọn 2 I 20 có $W_x = 2 \times 184 = 368 \text{ cm}^3$.
Kiểm tra lại điều kiện bền ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{60 \times 100}{368} = 16,3 \text{ kN/cm}^2 = 163 \text{ MPa}$$

sai số tương đối: $\frac{163 - 160}{160} \cdot 100\% = 1,9\%$

vậy đảm đủ bền. Chọn 2 I 20.

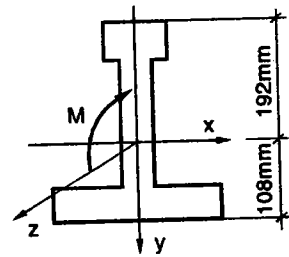
Bài toán cơ bản 3: Chọn tải trọng cho phép [P]

Đối với dạng bài toán này loại và vị trí của tải trọng được cho trước nhưng trị số của chúng phụ thuộc vào một thông số chưa biết P. Ngoài ra kích thước mặt cắt ngang và ứng suất cho phép của vật liệu đảm cũng biết trước. Ta phải chọn thông số tải trọng cho phép [P] để thỏa điều kiện bền. Như vậy trị số của mômen uốn sẽ phụ thuộc vào thông số P. Từ điều kiện bền (7.18) hay (7.21) ta suy ra trị số lớn nhất của mômen uốn:

$$M_{\max} \leq [\sigma]W_x$$

từ đó suy ra thông số [P].

Ví dụ 7.3 Một dầm bằng gang có kích thước và hình dáng mặt cắt ngang như hình 7.13. Xác định trị số mômen uốn cho phép. Cho biết ứng suất kéo cho phép của gang là $[\sigma_k] = 15 \text{ MPa}$ (chiều mômen uốn như H.7.13). Hỏi với trị số mômen uốn cho phép đó, ứng suất nén lớn nhất trong dầm là bao nhiêu? (cho biết $I_x = 25470 \text{ cm}^4$).



Hình 7.13

Giải Từ điều kiện bền (7.21) ta suy ra:

$$[M_x] = [\sigma_k] \frac{I_x}{y_{\max}^k} = 15 \times 10^6 \times \frac{25470 \times 10^{-8}}{10,8 \times 10^{-2}} = 3,54 \times 10^4 \text{ Nm}$$

tương ứng ta có:

$$\sigma_{\min} = -\frac{[M_x]}{I_x} |y_{\max}^n| = -\frac{3,54 \cdot 10^4}{2,547 \cdot 10^{-4}} \times 19,2 \times 10^{-2} = -26 \text{ MPa}$$

Trong phần trước đây, ứng suất pháp được đề cập đến trong trường hợp uốn thuần túy, nghĩa là không tồn tại lực cắt trên mặt cắt ngang. Trong trường hợp uốn ngang phẳng, sự xuất hiện của lực cắt gây ra sự vênh của mặt cắt ngang; như vậy giả thiết mặt cắt ngang phẳng không còn đúng nữa. Tuy nhiên, nhiều nghiên cứu thực nghiệm chứng tỏ rằng ứng suất pháp tính trong trường hợp uốn ngang phẳng không thay đổi đáng kể khi có sự hiện diện của lực cắt. Do vậy, công thức ứng suất pháp (7.10) được sử dụng cho cả trường hợp uốn thuần túy phẳng lẫn uốn ngang phẳng.

Công thức trên chỉ cho kết quả chính xác trong vùng của dầm tại đó không có sự thay đổi đột ngột của sự phân bố ứng suất gây ra do sự biến đổi đột ngột hình dạng của dầm hoặc sự không liên tục về tải trọng. Những sự không bình thường kể trên có thể gây ra các ứng suất cục bộ gọi là *sự tập trung ứng suất*, mà trị số có thể lớn hơn rất nhiều so với ứng suất tính bằng công thức do uốn.

7.3 UỐN NGANG PHẪNG

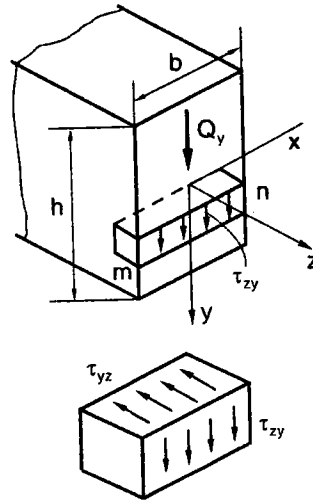
Khi dầm chịu uốn ngang phẳng, trên mặt cắt ngang tồn tại thành phần mômen uốn M_x và lực cắt Q_y . Ứng suất pháp σ_z , tương ứng với mômen uốn được xác định trong phần trên theo (7.10) như trong trường hợp uốn thuần túy phẳng. Trong phần này, chúng ta thử tìm quy luật phân bố của ứng suất tiếp τ_{zy} , phối hợp với lực cắt Q_y .

Trước tiên, chúng ta bắt đầu với dầm có mặt cắt ngang dạng chữ nhật có bề rộng b , và chiều cao h (H.7.14). Giả sử lực cắt dương Q_y tác dụng trên mặt cắt chịu uốn. Chúng ta hãy đưa ra các giả thiết sau đây đối với ứng suất tiếp τ_{zy} :

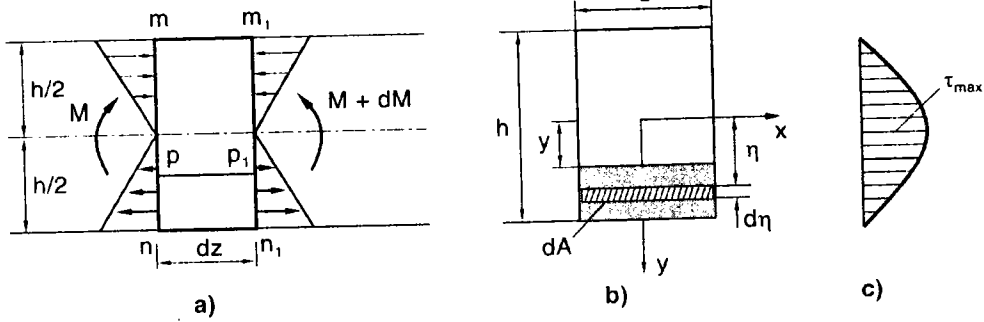
- Các ứng suất tiếp τ_{zy} hướng theo phương của lực cắt Q_y
- Sự phân bố của ứng suất tiếp thì đều theo bề rộng của mặt cắt (nghĩa là mọi điểm nằm cách đều đường trung hòa thì có cùng trị số ứng suất tiếp).

Cả hai giả thiết này được đưa ra bởi D.I. Zhuravskii. Lý thuyết đàn hồi chứng minh rằng các giả thiết trên có giá trị đối với dầm chữ nhật có chiều cao lớn hơn chiều rộng. Bây giờ chúng ta hãy thử xác định quy luật phân bố ứng suất tiếp dọc theo chiều cao của mặt cắt ngang.

Tách một phần tử vi phân giới hạn bởi hai mặt cắt ngang rất gần nhau cách nhau khoảng dz , và hai mặt song song với lớp trung hòa như phần tử mn trên hình 7.14. Theo các giả thiết đã nêu, các ứng suất tiếp τ_{zy} thẳng đứng có phương song song với lực cắt thì phân bố đều trên mặt thẳng đứng. Ngoài ra theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp đã đề cập đến trong chương 4, trên mặt vuông góc với mặt cắt ngang cũng tồn tại ứng suất tiếp τ_{yz} có giá trị bằng với τ_{zy} . Như vậy, tồn tại các thành phần ứng suất tiếp theo phương ngang giữa các lớp song song với trục dầm cũng như các ứng suất tiếp thẳng đứng trên các mặt cắt ngang của dầm. Tại một điểm, các ứng suất này có giá trị bằng nhau.



Hình 7.14 Ứng suất tiếp trên dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật



Hình 7.15 Sự phân bố của ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang của dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật

- a) Đoạn dầm giữa hai mặt cắt mn và m_1n_1
- b) Mặt cắt ngang; c) Sự phân bố ứng suất tiếp

Để xác định trị số của ứng suất tiếp ta hãy xét cân bằng của phần tử pp_1n_1n (H.7.15a) được tách ra từ đoạn dầm giữa hai mặt cắt

mn và m_1n_1 cách nhau đoạn dz . Mặt đáy của phần tử là mặt dưới của dầm và không có ứng suất; mặt trên của phần tử là mặt phẳng song song với mặt trung hòa và cách mặt này một khoảng cách y . Mặt trên này chịu tác dụng của các thành phần ứng suất tiếp nằm ngang τ_{yz} . Hai mặt hai bên chịu tác dụng của các thành phần ứng suất pháp σ_z gây ra bởi mômen uốn và các thành phần ứng suất tiếp thẳng đứng τ_{zy} , tuy nhiên các thành phần này không tham gia vào phương trình cân bằng theo phương nằm ngang.

Phương trình cân bằng theo phương nằm ngang z dọc trục thanh cho ta:

$$N_1 - N_2 + T = 0 \quad (7.22)$$

trong đó: N_1 là hợp của các lực tác dụng trên mặt pn được tính bởi:

$$N_1 = \int_{A^c} \sigma_z dA = \int_{A^c} \frac{M}{I_x} \eta dA \quad (7.23)$$

N_2 là hợp của các lực tác dụng trên mặt p_1n_1 được tính bởi:

$$N_2 = \int_{A^c} \sigma_z' dA = \int_{A^c} \frac{M_x + dM_x}{I_x} \eta dA \quad (7.24)$$

T là hợp của các lực tác dụng trên mặt trên của pp_1 của phần tử:

$$T = \tau_{yz} b^c dz \quad (7.25)$$

b^c là bề rộng tiết diện tại mức y .

Thay (7.23), (7.24), (7.25) vào (7.22) ta suy ra:

$$\int_{A^c} \frac{M_x}{I_x} \eta dA - \int_{A^c} \frac{M_x + dM_x}{I_x} \eta dA + \tau_{yz} b^c dz = 0 \quad (a)$$

từ đó suy ra:
$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{dM_x}{dz} \left(\frac{1}{I_x b^c} \right) \int_{A^c} \eta dA \quad (b)$$

thay $Q_y = dM_x/dz$ ta được:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y}{I_x b^c} \int_{A^c} \eta dA \quad (7.26)$$

Trong công thức (7.26), số hạng tích phân diễn tả mômen tĩnh của phần diện tích "bị cắt" (tức phần diện tích ở dưới mức y mà tại đó

có ứng suất pháp τ_{zy} tác động) đối với trục trung hòa x . Đặt số hạng này là S_x^c ta có:

$$S_x^c = \int_{A^c} \eta dA \quad (7.27)$$

suy ra:
$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b^c} \quad (7.28)$$

Để xác định quy luật phân bố của ứng suất tiếp ta tìm hiểu quy luật biến thiên của S_x^c :

- Đối với mặt cắt ngang có dạng chữ nhật (H.7.15), mômen tĩnh của phần diện tích bị cắt A^c đối với trục x có được bằng cách nhân diện tích của A^c với khoảng cách từ trọng tâm diện tích tới đường trung hòa, như vậy:

$$S_x^c = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(y + \frac{h/2 - y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (7.29)$$

Thay vào trong (7.28) ta được:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{2I_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (7.30)$$

Hệ thức này chứng tỏ ứng suất tiếp trong dầm tiết diện chữ nhật biến thiên theo quy luật bậc hai theo khoảng cách y từ trục trung hòa và biểu đồ theo chiều cao của dầm có dạng như trên hình 7.15c. Ứng suất tiếp bằng không khi $y = \pm h/2$, và có trị số cực đại tại trục trung hòa, tại đó $y = 0$, nghĩa là:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y h^2}{8I_x} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A} \quad (7.31)$$

trong đó: $A = bh$ là diện tích của mặt cắt ngang.

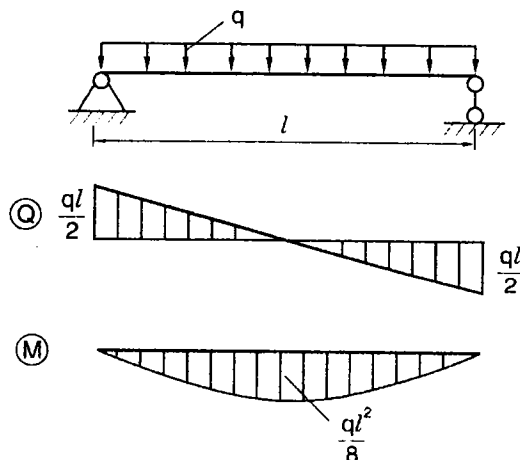
Như vậy, ứng suất tiếp cực đại lớn hơn ứng suất trung bình (bằng Q_y/A) 1,5 lần.

Cần lưu ý rằng, công thức tính ứng suất tiếp cho dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật kể trên chỉ đúng khi vật liệu dầm là đàn hồi tuyến tính với biến dạng bé. Công thức được xem là chính xác khi bề rộng bé so với chiều cao. Khi $b = h$, ứng suất tiếp cực đại thật lớn hơn trị số cho bởi công thức (7.31) khoảng 13%.

Ảnh hưởng của biến dạng trượt

Do ứng suất tiếp biến đổi theo quy luật parabol dọc theo chiều cao của mặt cắt ngang nên biến dạng trượt $\gamma_{zy} = \tau_{zy}/G$ cũng biến thiên theo cùng quy luật. Như vậy, mặt cắt ngang ban đầu phẳng bị vênh và giả thiết mặt cắt ngang phẳng không còn đúng nữa. Tuy nhiên, sự vênh của mặt cắt ngang hầu như không ảnh hưởng đến biến dạng của các thớ dọc theo dầm, do vậy công thức tính ứng suất pháp do uốn $\sigma = \frac{M}{I} y$ vẫn có thể được áp dụng cho uốn ngang phẳng, mặc dầu có sự hiện diện của lực cắt. Đối với lực tập trung, sự phân bố ứng suất xung quanh điểm đặt lực khá phức tạp và chỉ ảnh hưởng cục bộ chứ không lan rộng các vùng ở xa trên toàn dầm.

Ví dụ 7.4 Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp cực đại trên dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật với các dữ kiện sau đây: dầm tựa đơn chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều cường độ $q = 12kN/m$ trên suốt chiều dài dầm $l = 4m$; dầm chữ nhật có kích thước $h = 27cm$, $b = 18cm$ và làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma] = 1100N/cm^2$, $[\tau] = 220N/cm^2$.



Hình 7.16

Giải Mômen cực đại ở giữa dầm:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{12 \times 4 \times 400}{8} = 2400 \text{ kNcm}$$

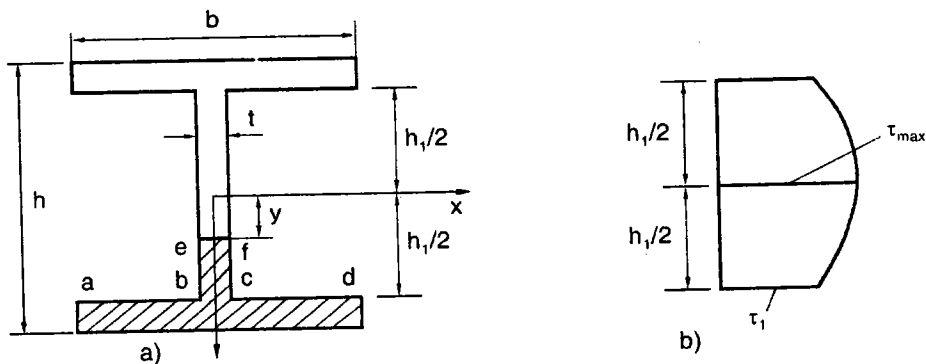
Lực cắt cực đại ở hai gối tựa:

$$Q_{\max} = \frac{ql}{2} = \frac{12 \times 4}{2} = 24 \text{ kN}$$

Ứng suất cực đại:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{2400 \times 6}{18 \times 27^2} = 1,095 \text{ kN/cm}^2 < 1,10 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_{\max}}{2bh} = \frac{3 \times 24}{2 \times 18 \times 27} = 0,075 \text{ kN/cm}^2 < 0,22 \text{ kN/cm}^2$$



Hình 7.17 Ứng suất tiếp trong lòng của dầm chữ **I**

- Đối với mặt cắt ngang hình chữ **I**, hay chữ **T**

Bởi vì các mặt cắt ngang dạng chữ **I** hay dạng chữ **T** có thể được xem như được cấu tạo bởi các hình chữ nhật nên với mức độ chính xác nhất định, các công thức suy ra cho dầm chữ nhật cũng áp dụng được cho các loại mặt cắt này. Các ứng suất tiếp tại một điểm bất kỳ ở cách trục trung hòa một đoạn y (H.7.17), được tính bằng công thức:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b^c}$$

Trong trường hợp tính ứng suất tiếp tại một điểm trong phần thân, bề rộng b^c chính là bề rộng phần thân $b^c = t$, còn S_x^c biểu diễn mômen tĩnh của phần diện tích gạch chéo dưới mức ef đối với trục trung hòa x . Diện tích này bao gồm hai phần: phần cánh và phần thân. Diện tích phần cánh và thân dưới mức ef :

$$A_{ca} = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \quad (7.32)$$

$$A_{th} = t \left(\frac{h_1}{2} - y \right) \quad (7.33)$$

Do đó mômen tĩnh của phần diện tích bị cắt là:

$$S_x^c = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \left(\frac{h_1}{2} + \frac{\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}}{2} \right) + t \left(\frac{h_1}{2} - y \right) \left(y + \frac{\frac{h_1}{2} - y}{2} \right) \quad (7.34)$$

sau khi đơn giản ta được:

$$S_x^c = \frac{b}{8} (h^2 - h_1^2) + \frac{t}{8} (h_1^2 - 4y^2) \quad (7.35)$$

Do đó, ứng suất tiếp trong phần thân của dầm chữ I là

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{8I_x t} [b(h^2 - h_1^2) + t(h_1^2 - 4y^2)] \quad (7.36)$$

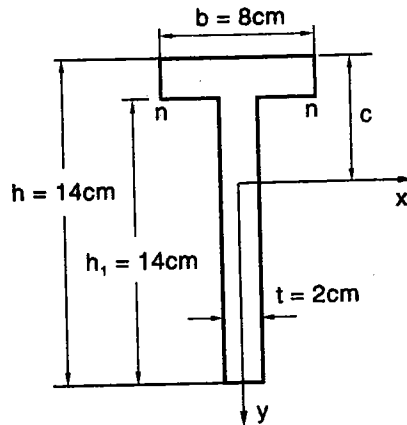
Từ biểu thức này ta nhận thấy rằng ứng suất tiếp trong phần thân của dầm chữ I biến thiên theo quy luật parabol dọc theo chiều cao của dầm. Ứng suất tiếp cực đại xảy ra trên trục trung hòa ($y = 0$), và ứng suất cực tiểu xảy ra chỗ tiếp giáp giữa thân và cánh ($y = \pm \frac{h_1}{2}$). Ta tìm thấy:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y}{8I_x t} (bh^2 - bh_1^2 + th_1^2) = \frac{3Q_y (bh^2 - bh_1^2 + th_1^2)}{2t(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3)} \quad (7.37)$$

và:
$$\tau_1 = \frac{Q_y}{8I_x t} (h^2 - h_1^2) = \frac{3Q_y b (h^2 - h_1^2)}{2t(bh^3 - bh_1^3 + th_1^3)} \quad (7.38)$$

Tùy theo kích thước của dầm, ứng suất tiếp cực đại trong phần thân lớn hơn ứng suất tiếp cực tiểu khoảng từ 10 ÷ 60%.

Ví dụ 7.5 Xác định ứng suất tiếp cực đại trong thân của dầm chữ T có mặt cắt ngang như trên hình 7.18 nếu $b = 8\text{cm}$, $t = 2\text{cm}$, $h = 16\text{cm}$, $h_1 = 14\text{cm}$, và $Q = 20\text{kN}$.



Hình 7.18

Khoảng cách c tới trọng tâm của mặt cắt ngang được xác định bởi:

$$c = \frac{6 \times 2 \times 1 + 16 \times 2 \times 8}{6 \times 2 + 16 \times 2} = 6,09 \text{ cm}$$

Mômen quán tính I_x của mặt cắt ngang:

$$I_x = \frac{8 \times 2^3}{12} + 8 \times 2 \times (6,09 - 1)^2 + \frac{2 \times 14^3}{12} + 14 \times 2 \times (9 - 6,09)^2 = 1144,54 \text{ cm}^4$$

Ứng suất tiếp cực đại xảy ra tại trục trung hòa; mômen tĩnh của phần diện tích dưới trục trung hòa đối với trục này là:

$$S_x^c = \frac{2 \times (16 - 6,09)^2}{2} = 98,208 \text{ cm}^3$$

Do đó:
$$\tau_{\max} = \frac{20 \times 98,208}{1144,54 \times 2} = 0,858 \text{ kN/cm}^2$$

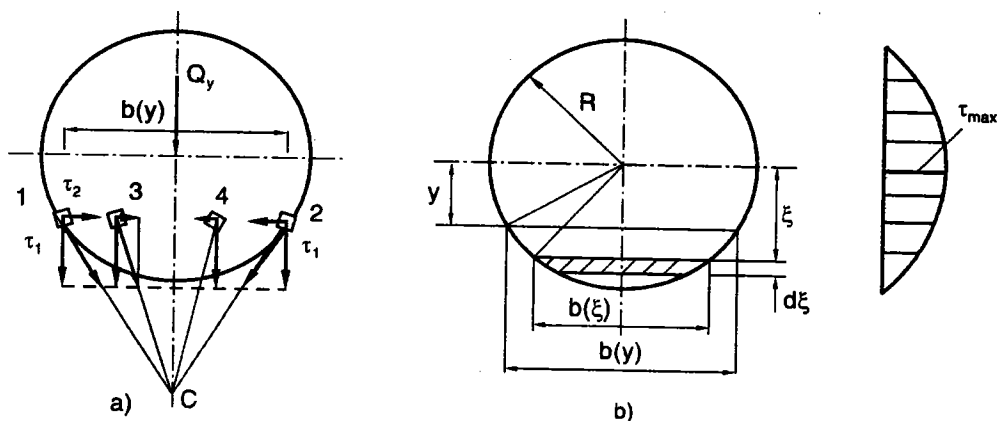
- Đối với mặt cắt ngang hình tròn và hình vành khăn

Khi dầm có mặt cắt ngang là hình tròn, ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang không còn song song với lực cắt nữa. Nếu không có lực tác dụng trên mặt ngoài của dầm, ứng suất tiếp trên hai diện tích vi phân tại các điểm 1 và 2 trên vùng sát chu vi của mặt cắt ngang phải hướng theo phương tiếp tuyến với chu vi này (H.7.19a).

Các tiếp tuyến này có phương đồng quy tại điểm C trên phương tác dụng của lực cắt. Bởi vì lực cắt Q_y là hợp của các ứng suất tiếp (H.7.19), nên các ứng suất tiếp tại các diện tích vi phân tại 3 và 4 có cùng khoảng cách y tới trục trung hòa sẽ có phương đi ngang điểm C .

Mỗi ứng suất tiếp này có thể phân thành hai thành phần: thành phần thẳng đứng τ_1 , và nằm ngang τ_2 . Các thành phần nằm ngang tác dụng trên hai phần trái và phải sẽ tự cân bằng nhau do tính đối xứng, trong khi các thành phần thẳng đứng hợp lại thành lực cắt Q_y .

Như vậy, trong dầm có mặt cắt ngang tròn, thành phần τ_1 sẽ đóng vai trò của τ trong dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật.



Hình 7.19 Ứng suất tiếp trên dầm có mặt cắt ngang hình tròn

Mômen tĩnh của phần diện tích giới hạn bởi biên dưới mặt cắt ngang và mặt cắt song song với mặt trung hòa ở khoảng cách y từ trục trung hòa x cho bởi:

$$S_x^c = \int_{A_c} \xi dA = \int_{A_c} \xi b(\xi) d\xi \quad (7.39)$$

ta có: $b^c = b(\xi) = 2\sqrt{R^2 - y^2}$ (7.40)

trong đó: R là bán kính của hình tròn mặt cắt ngang.

$$\text{Do vậy: } S_x^c = \int_y^r 2\sqrt{R^2 - y^2} \xi d\xi = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \quad (7.41)$$

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

và thành phần ứng suất tiếp theo phương thẳng đứng có trị số:

$$\tau_{zy} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{A} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) \quad (7.42)$$

Ứng suất tiếp cực đại xảy ra trên trục trung hòa tương ứng với $y = 0$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{A} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{\pi R^2} \quad (7.43)$$

Đối với dầm có mặt cắt ngang hình tròn rỗng bán kính trong và ngoài lần lượt là R_1 và R_2 , ứng suất tiếp dọc theo trục trung hòa cũng có phương thẳng đứng và phân bố đều. Chúng ta có thể áp dụng công thức (7.28) từ đó tìm ra ứng suất tiếp cực đại trong đó các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang là:

$$S_x^c = \frac{2}{3} (R_2^3 - R_1^3); \quad I_x = \frac{\pi}{4} (R_2^4 - R_1^4); \quad b^c = 2(R_2 - R_1)$$

và ứng suất tiếp cực đại là:

$$\tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3A} \frac{R_2^2 + R_2R_1 + R_1^2}{R_2^2 + R_1^2} \quad (7.44)$$

trong đó: $A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ là diện tích của hình vành khăn.

7.4 KIỂM TRA BỀN

Nói chung, trên mặt cắt ngang của một dầm chịu uốn ngang phẳng thường có hai loại ứng suất:

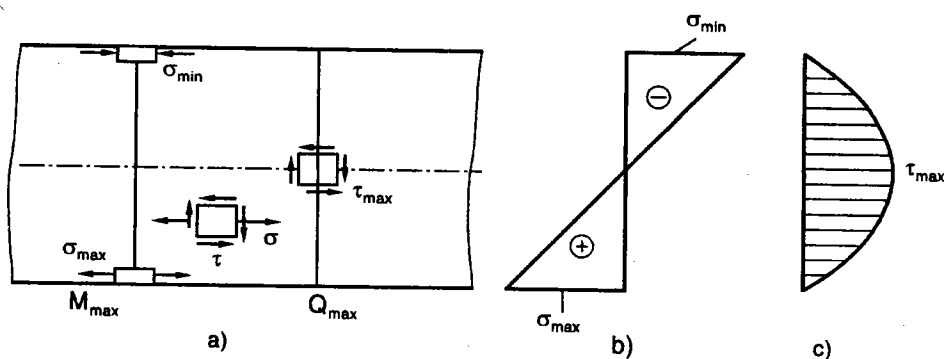
- Ứng suất pháp tương ứng với mômen uốn M_x ;
- Ứng suất tiếp tương ứng với lực cắt Q_y .

Tuy nhiên, không phải trạng thái ứng suất tại mọi điểm trên mặt cắt như nhau. Dựa trên biểu đồ phân bố ứng suất pháp và ứng suất tiếp theo chiều cao của mặt cắt ngang hình chữ nhật (H.7.20a), chúng ta nhận thấy có ba loại phân tố ở trạng thái ứng suất khác nhau:

- Tại những điểm ở biên trên và dưới của mặt cắt ngang ứng suất tiếp bằng không, chỉ có ứng suất pháp nên trạng thái ứng suất của các phân tố này là trạng thái *ứng suất đơn*;

- Tại những điểm nằm trên trục trung hòa, ứng suất pháp bằng không và chỉ có ứng suất tiếp nên trạng thái ứng suất của những phân tố này là *trượt thuần túy*;

- Tại các điểm khác ta thấy tồn tại cả hai thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp nên chúng ở trạng thái *ứng suất phẳng*.



Hình 7.20 a) Các phân tố ở trạng thái ứng suất khác nhau
b) Sự phân bố ứng suất pháp; c) Sự phân bố ứng suất tiếp

Do vậy, khi kiểm tra bền cho toàn dầm chúng ta phải bảo đảm mọi phân tố đều phải thỏa điều kiện bền. Vận dụng các thuyết bền thích hợp như đã trình bày trong chương 5, ta viết điều kiện bền cho ba loại phân tố kể trên:

a) *Đối với phân tố ở trạng thái ứng suất đơn* (những điểm ở trên biên trên và dưới của dầm), xét tại mặt cắt có $|M|_{\max}$ và sử dụng thuyết bền ứng suất pháp cực đại ta có:

- Nếu vật liệu làm dầm là vật liệu dẻo, $[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma]$, điều kiện bền được viết:

$$\max|\sigma| \leq [\sigma] \quad (7.45)$$

- Nếu vật liệu làm dầm là vật liệu giòn, $[\sigma_k] \neq [\sigma_n]$, điều kiện bền là:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &\leq [\sigma_k] \\ |\sigma_{\min}| &\leq [\sigma_n] \end{aligned} \quad (7.46)$$

b) Đối với phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy (những điểm nằm trên trục trung hòa), xét tại mặt cắt có $|Q_y|_{\max}$ ta có:

Dầm bằng vật liệu dẻo: ta có thể sử dụng thuyết bền ứng suất tiếp cực đại hoặc thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng cực đại. Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \quad (7.47)$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng cực đại:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (7.48)$$

Dầm bằng vật liệu giòn: sử dụng thuyết bền Mohr:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \alpha} \quad (7.49)$$

trong đó:
$$\alpha = \frac{[\sigma_k]}{[\sigma_n]} \quad (7.50)$$

c) Đối với phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt, ta xét tại mặt cắt có mômen uốn M_x và lực cắt Q_y cùng lớn, đồng thời chỉ cần thiết kiểm tra tại những nơi nguy hiểm như nơi tiếp giáp giữa lòng và đế của mặt cắt chữ I , chữ C ... Các thành phần ứng suất của phân tố này được tính bởi các công thức quen thuộc:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad \text{và} \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b^c}$$

Từ đó ta tính được các thành phần ứng suất chính tương ứng là:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \\ \sigma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.51)$$

Biết các thành phần ứng suất chính ta có thể suy ra các điều kiện bền theo các thuyết bền như sau:

Vật liệu làm dầm là vật liệu dẻo: ta có thể sử dụng thuyết bền ứng suất tiếp cực đại hoặc thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng cực đại.

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$\sigma_{t3} = |\sigma_1 - \sigma_3| = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma] \quad (7.52)$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng cực đại:

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \leq 2 [\sigma]^2 \quad (7.53)$$

sau khi đơn giản và rút gọn ta được:

$$\sigma_{t4} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq [\sigma] \quad (7.54)$$

Vật liệu làm dầm là vật liệu giòn: sử dụng thuyết bền Mohr ta được:

$$\sigma_{t5} = \frac{1-\alpha}{2} \sigma_z + \frac{1+\alpha}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma] \quad (7.55)$$

Từ đây ta cũng có ba bài toán cơ bản:

Bài toán cơ bản 1: kiểm tra bền đã nói ở trên

Bài toán cơ bản 2: chọn kích thước mặt cắt ngang

Đối với bài toán này ta sẽ dựa vào điều kiện bền của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn để chọn sơ bộ kích thước mặt cắt ngang dầm. Sau đó, tiến hành kiểm tra bền đối với các phân tố ở trạng thái ứng suất khác như đã nói. Nếu không đạt thì ta thay đổi kích thước mặt cắt ngang.

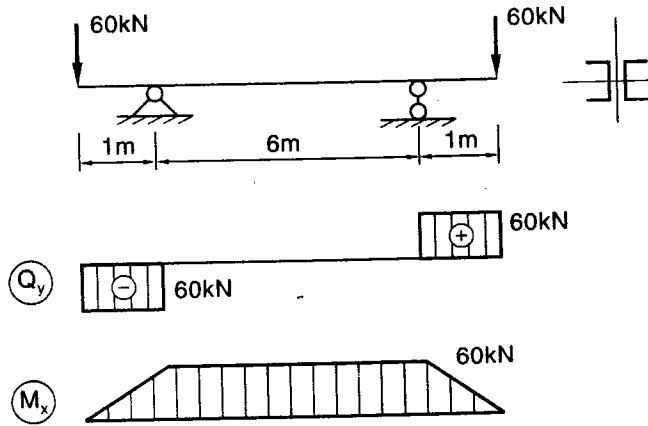
Bài toán cơ bản 3: định tải trọng cho phép.

Từ điều kiện bền của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn nguy hiểm ta xác định sơ bộ tải trọng cho phép sau đó tiến hành kiểm tra bền các phân tố còn lại.

Ví dụ 7.6 Xác định số hiệu mặt cắt ngang theo yêu cầu độ bền, nếu:

$$[\sigma] = 16kN/cm^2$$

Giải Mômen uốn cực đại và lực cắt cực đại xảy ra tại cùng một mặt cắt dưới tác dụng của tải trọng: $M_{max} = 60kNm$; $Q_{max} = 60kN$



Hình 7.21

Mômen chống uốn cần thiết là:

$$W_x = \frac{M_{x,\max}}{[\sigma]} = \frac{6000}{16} = 375 \text{ cm}^3$$

Tra bảng thép hình mặt cắt [ГОСТ 8240-56 ta chọn 2[22 với một [22 có: $d = 5,3\text{mm}$; $A = 26,7\text{cm}^2$; $W_x = 193\text{cm}^2$; $S_x = 111\text{cm}^3$; $I_x = 2120\text{cm}^4$; $h = 22\text{cm}$; $t = 0,96\text{cm}$; $b = 8,2\text{cm}$.

Kiểm tra bền thép hình mới chọn:

- Phân tố ở trạng thái ứng suất đơn: dương nhiên thỏa
- Phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy, tại mặt cắt có:

$$Q_{y,\max} = 60\text{kN}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b^c} \quad \text{với:} \quad \begin{cases} S_x^c = 2S_x = 2 \times 111 \text{ cm}^3 \\ I_x = 2 \times 2120 \text{ cm}^4 \\ b^c = 2d = 2 \times 0,53 \text{ cm} \\ Q_y = 60 \text{ kN} \end{cases}$$

suy ra:
$$\tau_{\max} = \frac{60 \times 2 \times 111}{2 \times 2120 \times 2 \times 0,53} = 2,96 \text{ kN/cm}^2$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2 > \tau_{\max}$$

vậy phân tố này thỏa điều kiện bền.

- Phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt: đó là phân tố ở nơi tiếp giáp giữa lòng và đế tại mặt cắt có:

$$|M_{x,\max}| = 60 \text{ kNm}$$

và $|Q_{y,\max}| = 60 \text{ kN}$

$$|\sigma_x^A| = \frac{6000}{2 \times 2120} \times (11 - 0,96) = 14,21 \text{ kN/cm}^2$$

$$S_x^c = 2 \times 8,2 \times 0,96$$

$$\times \left(11 - \frac{0,96}{2}\right) = 165,626 \text{ cm}^3$$

$$|\tau_A| = \frac{60 \times 165,626}{2 \times 2120 \times 2 \times 0,53} = 2,21 \text{ kN/cm}^2$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$\sigma_{t3} = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} = \sqrt{(14,21)^2 + (2,21)^2} = 14,38 \text{ kN/cm}^2$$

vậy phân tố này thỏa điều kiện bền.

Ví dụ 7.7 Xác định tải trọng cho phép $[P]$ của dầm cho trên hình 7.23. Cho $a = 80\text{cm}$, $[\sigma] = 16\text{kN/cm}^2$.

Biểu đồ lực cắt Q_y và mômen uốn M_x (H.7.23). Mặt cắt nguy hiểm có:

$$M_x = \frac{7}{4} Pa \text{ và } Q_y = \frac{7}{4} P$$

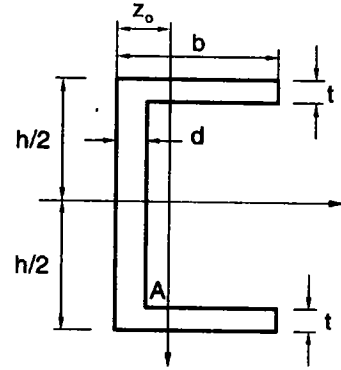
Mặt cắt I 10 có:

$$h = 10\text{cm}; I_x = 198\text{cm}^4; W_x = 39,7\text{cm}^3; S_x = 23\text{cm}^3$$

$$d = 0,45\text{cm}; t = 0,72\text{cm}; b = 5,5\text{cm}$$

Từ điều kiện bền của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn nguy hiểm ta có:

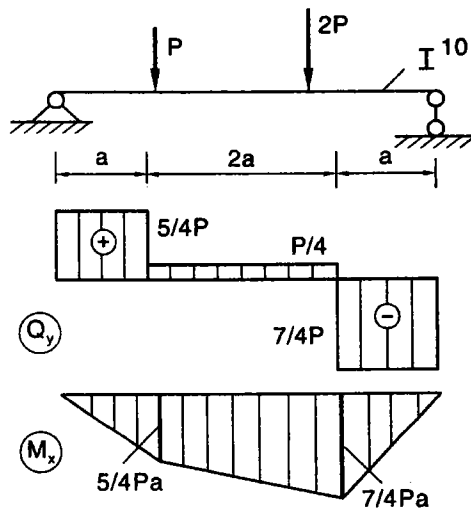
$$\frac{7Pa}{4W_x} \leq [\sigma]$$



Hình 7.22

$$\Rightarrow P \leq \frac{4 [\sigma] W_x}{7 a} = \frac{4}{7} \times \frac{16 \times 39,7}{80} = 4,537 \text{ kN}$$

Ta chọn $[P] = 4,53 \text{ kN}$.



Hình 7.23

Với trị số của P đã chọn, ta kiểm tra bên các phân tố còn lại ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy và trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt.

Phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy: ở trục trung hòa của mặt cắt có:

$$|Q_y| = \frac{7}{4} P = \frac{7}{4} \times 4,53 = 7,923 \text{ kN}$$

$$S_x^c = S_x = 23 \text{ cm}^3; b^c = d = 0,45 \text{ cm}; I_x = 198 \text{ cm}^4$$

suy ra:

$$\tau_{\max} = \frac{7}{4} \times \frac{4,53 \times 23}{198 \times 0,45} = 2,046 \text{ kN/cm}^2 < [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2$$

nên phân tố này thỏa điều kiện bền.

Phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt: ở nơi tiếp giáp giữa lòng và đế tại mặt cắt có:

$$M_x = \frac{7}{4} Pa = \frac{7}{4} \times 4,53 \times 0,8 = 6,342 \text{ kNm}$$

và: $Q_y = \frac{7}{4} P = 7,923 \text{ kN}$

$$S_x^c = 5,5 \times 0,72 \times \frac{(10 - 0,72)}{2} = 18,37 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{zy} = \frac{\frac{7}{4} \times 4,53 \times 18,37}{198 \times 0,45} = 1,634 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z = \frac{634,2}{198} \times \left(\frac{10}{2} - 0,72 \right) = 13,71 \text{ kN/cm}^2$$

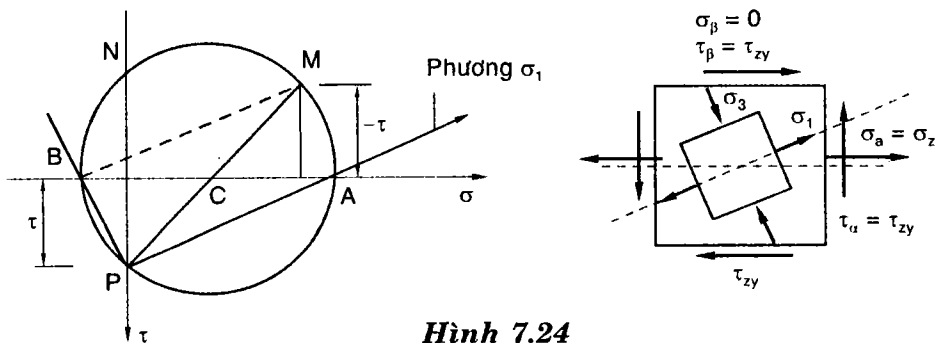
Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$\begin{aligned} \sigma_{t3} &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} = \sqrt{(13,71)^2 + 4 \times (1,634)^2} \\ &= 14,09 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

Vậy tải trọng cho phép $[P] = 4,53 \text{ kN}$.

7.5 QUỸ ĐẠO ỨNG SUẤT CHÍNH

Trong phần bên trên chúng ta chỉ mới xác định trị số của ứng suất chính đối với một phân tử bất kỳ mà chưa đề cập đến phương của chúng. Những kết quả đạt được khá tốt đối với vật liệu có ứng suất cho phép khi kéo và khi nén là như nhau. Tuy nhiên, đối với các vật liệu như bê tông cốt thép, việc xác định phương của ứng suất chính tại mọi điểm rất cần thiết, để từ đó có thể đặt cốt thép gia cường theo các phương này.

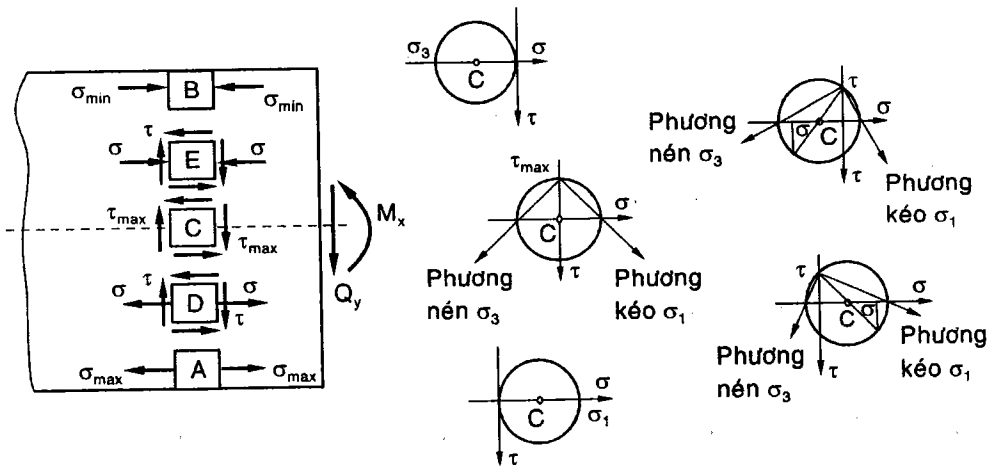


Ta có thể xác định phương của ứng suất chính thông qua vòng tròn Mohr. Giả sử σ_α và τ_α là các thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt phẳng vuông góc với trục dầm và có trị số dương:

$$\sigma_\alpha = +\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

và
$$\tau_\alpha = +\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b^c}$$

Sau khi vẽ vòng tròn Mohr ứng suất chúng ta nhận thấy phương chính là phương nối từ điểm cực $P(0, +\tau_{zy})$ với hai điểm A và B ở hai đầu đường kính của vòng tròn Mohr: PA chỉ phương ứng suất chính σ_1 , còn PB chỉ phương ứng suất chính σ_3 .

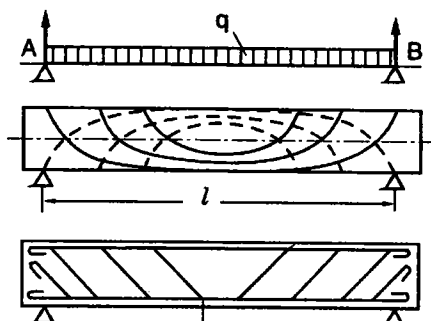


Hình 7.25

Hình 7.25 cho thấy, các vòng tròn Mohr ứng suất và các phương chính tại nhiều điểm khác nhau trên mặt cắt ngang. Ta giả sử rằng mômen uốn và lực cắt tại một mặt cắt mang dấu dương. Ứng suất chính thay đổi với biên mặt cắt ngang. Gần những biên, một trong các ứng suất chính bằng không, trong khi ứng suất chính kia có phương song song với trục dầm; còn ở trục trung hòa, các ứng suất chính có phương hợp với trục dầm một góc 45° .

Bằng phương pháp tương tự, ta có thể xác định được phương của ứng suất chính ở nhiều điểm trên dầm. Ta vẽ các đường cong có

tiếp tuyến là phương của ứng suất chính và gọi các đường đó là quỹ đạo ứng suất chính của dầm chịu uốn. Các quỹ đạo này hợp thành hai họ đường cong vuông góc nhau, một họ là quỹ đạo ứng suất kéo và một họ là quỹ đạo ứng suất nén. Các phương của ứng suất chính tùy thuộc vào loại tải trọng và điều kiện biên của dầm.



Hình 7.26 Quỹ đạo ứng suất chính của dầm tựa đơn chịu lực phân bố đều

Trên hình 7.26, quỹ đạo ứng suất kéo được biểu diễn bằng đường nét đậm còn quỹ đạo ứng suất nén biểu diễn bằng đường nét đứt.

Người ta thường dùng các phương pháp thực nghiệm để xác định quỹ đạo ứng suất chính như phương pháp quang đàn hồi, phương pháp dùng sơn dòn.

7.6 THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI CỦA DẦM CHỊU UỐN PHẪNG

Trong chương trạng thái ứng suất, ta đã có công thức tính thể năng riêng biến dạng đàn hồi của một phân tử là:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] \quad (7.56)$$

Trong trường hợp dầm chịu uốn ngang phẳng, trạng thái ứng suất của phân tử là phẳng nên một thành phần ứng suất chính bằng không, σ_2 chẳng hạn, khi đó biểu thức của thể năng riêng biến dạng đàn hồi có dạng:

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_3 \right] \quad (7.57)$$

trong đó: σ_1 và σ_3 là các ứng suất chính được suy từ σ_z và τ_{zy} theo công thức:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} \quad (7.58)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} \quad (7.59)$$

thay vào (7.57) ta có:

$$u = \frac{1}{2E} \left\{ 2\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + 2\left[\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2\right] - 2\nu \left[\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 - \tau_{zy}^2 \right] \right\}$$

rút gọn ta được:

$$u = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{zy}^2}{2} \cdot \frac{2(1+\nu)}{E} \quad (7.60)$$

Ngoài ra, giữa các hằng số của vật liệu E , G , ν tồn tại hệ thức sau:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7.61)$$

thay vào (7.60) và rút gọn, cuối cùng ta được:

$$u = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{zy}^2}{2G} \quad (7.62)$$

thay biểu thức của σ_z và τ_{zy} bằng (7.10) và (7.28) ta được:

$$u = \frac{M_x^2}{2EI_x^2} y^2 + \frac{Q_y^2 (S_x^c)^2}{2GI_x^2 (b^c)^2} \quad (7.63)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi trong một đoạn thanh dz là:

$$\begin{aligned} dU &= \int u dz \cdot dA = dz \int_A u dA \\ &= dz \left[\int_A \left(\frac{M_x^2}{2EI_x^2} y^2 + \frac{Q_y^2 \cdot (S_x^c)^2}{2GI_x^2 (b^c)^2} \right) dA \right] \quad (a) \end{aligned}$$

với: $\int_A y^2 dA = I_x$ và nếu ta ký hiệu:

$$\frac{F}{I_x^2} \int_A \frac{(S_x^c)^2}{(b^c)^2} dA = \eta \quad (b)$$

ta được:
$$dU = \frac{M_x^2}{2EI_x} dz + \eta \frac{Q_y^2}{2GA} dz \quad (c)$$

Do đó, thế năng biến dạng đàn hồi trong cả thanh với chiều dài L là:

$$U = \int_0^L \frac{M_x^2}{2EI_x} dz + \int_0^L \eta \frac{Q_y^2}{2GA} dz \quad (7.64)$$

Với thanh có độ cứng thay đổi từng đoạn hay luật biến thiên của M_x và Q_y thay đổi từng đoạn thanh, công thức trên có thể rút gọn lại:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_x^2}{2EI_x} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \eta \frac{Q_y^2}{2GA} dz \quad (7.65)$$

trong đó: L_i - chiều dài mỗi đoạn thanh, n - số đoạn thanh

η - hệ số điều chỉnh sự phân bố không đều của ứng suất tiếp.

Bằng cách áp dụng công thức tính η ta có thể tính được hệ số này đối với một số tiết diện thông thường

- Mặt cắt ngang hình chữ nhật: $\eta = 1,2$
- Mặt cắt ngang hình tròn: $\eta = 10/9$
- Mặt cắt ngang chữ I: $\eta = F / F_{lòng}$

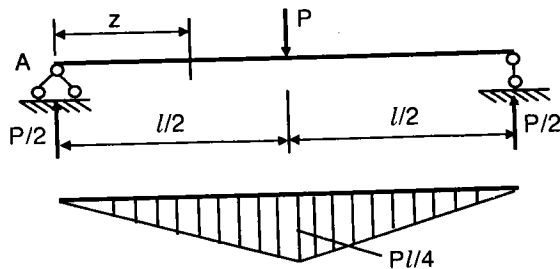
trong đó: F - diện tích toàn bộ mặt cắt

$F_{lòng}$ - diện tích phần lòng của chữ I.

7.7 DẦM CHỐNG UỐN ĐỀU

Trong trường hợp dầm có mặt cắt ngang không đổi, ta đã chọn kích thước của theo mặt cắt có mômen uốn lớn nhất. Cách sử dụng vật liệu như vậy chưa hợp lý vì khi ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên mặt cắt có mômen uốn lớn nhất đạt đến trị số ứng suất cho phép thì ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên các mặt cắt khác còn nhỏ

hơn rất nhiều so với ứng suất cho phép. Như vậy ta chưa sử dụng hết khả năng chịu lực của vật liệu ở các mặt cắt khác. Để tiết kiệm được vật liệu ta phải tìm hình dáng hợp lý của dầm sao cho ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên mọi mặt cắt ngang đều cùng đạt đến giá trị ứng suất cho phép. Dầm có hình dáng như vậy gọi là dầm *chống uốn đều*. Ta xét vài ví dụ cụ thể sau đây.



Hình 7.27

Giả sử, ta có dầm chịu lực như trên hình vẽ (hình 7.27), mômen uốn M_x và lực cắt Q_y trên mặt cắt 1-1 nào đó cách gối tựa A bên trái một khoảng cách có trị số là:

$$\begin{cases} M_x = \frac{P}{2} z \\ Q_y = \frac{P}{2} \end{cases}$$

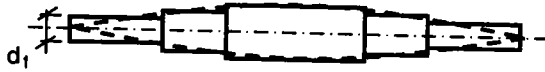
Ta giả thiết mặt cắt ngang có hình dáng là một hình tròn. Như vậy trị số ứng suất pháp lớn nhất trên mặt cắt được tính với công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{P.z}{0,1d^3}$$

Với điều kiện ứng suất cực đại trên mọi mặt cắt cùng đạt tới trị số ứng suất cho phép $[\sigma]$, ta tìm được luật biến thiên của đường kính d theo biến số z như sau:

$$d = \sqrt[3]{\frac{P.z}{0,1[\sigma]}} \quad (a)$$

Như vậy hình dáng của thanh phải có dạng đường nét đứt như trên hình vẽ (H.7.28).



Hình 7.28

Ta thấy tại hai đầu mút, mặt cắt có diện tích bằng không, điều đó hoàn toàn phù hợp với điều kiện biến thiên của mômen uốn, vì tại đó mômen uốn bằng không. Song, như vậy không thỏa mãn điều kiện bền của lực cắt Q_y . Quả vậy, trên mọi mặt cắt của dầm ta đều có một trị số lực cắt $Q_y = \frac{P}{2}$ và lực cắt đó sinh ra ứng suất tiếp lớn nhất

$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F}$. Vì thế diện tích của mặt cắt cần phải đủ để chịu cắt. Do đó, ta phải chọn đường kính với điều kiện:

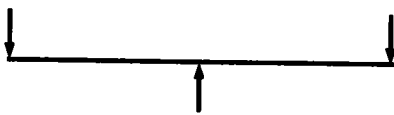
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F} \leq [\tau]$$

nghĩa là đường kính có trị số bé nhất cũng phải là:

$$d = d_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{3} \frac{Q_y}{[\tau] \cdot \pi}} \quad (b)$$

Vì điều kiện chế tạo, rất khó gia công để thanh có thể có hình dáng đường cong được biểu diễn theo biểu thức (a), nên trong thực tế người ta thường làm các trục hình bậc, nghĩa là đường kính của các mặt cắt thay đổi từng đoạn một, gần sát với đường chống uốn đều (H.7.28).

Các lò xo có sơ đồ chịu lực như hình 7.29, thường được ghép bởi các lá thép như hình 7.30. Các lá thép được ghép theo hình dáng của dầm chống uốn đều, hình dáng đó làm lò xo có trọng lượng nhỏ và chuyển vị lớn. Loại lò xo này thường dùng làm nhíp của các trục bánh xe.



Hình 7.29



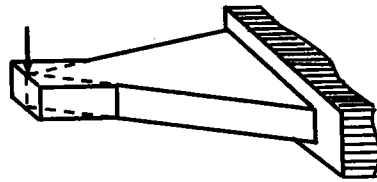
Hình 7.30

Đối với dầm có sơ đồ chịu lực như hình 7.31, nếu chiều cao của dầm không đổi thì dầm chống uốn đều có hình dáng như trên hình

7.32. Mặt cắt ở đầu tự do có diện tích khác không vì dầm còn chịu lực cắt. Diện tích đó được xác định tùy theo trị số của lực cắt.



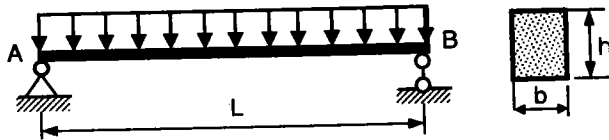
Hình 7.31



Hình 7.32

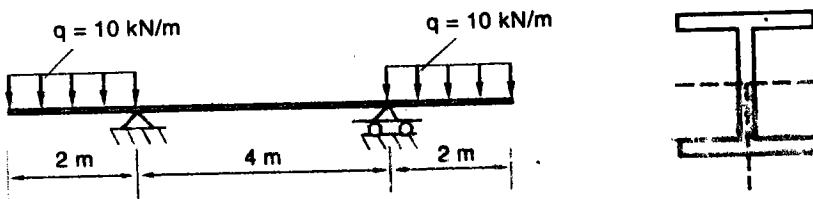
7.8 BÀI TẬP CHƯƠNG 7

7.1 Cho dầm đơn giản AB với chiều dài nhịp $L = 3,5m$, chịu tác dụng của tải phân bố đều cường độ $q = 6,4kN/m$ như trên hình 7.33. Xác định ứng suất pháp cực đại σ_{max} trong dầm do q . Biết dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật $b \times h = 140mm \times 240mm$.



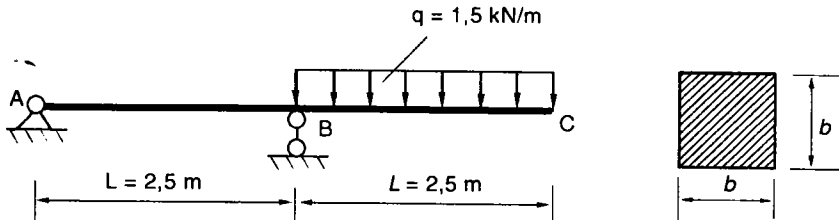
Hình 7.33

7.2 Một dầm thép mặt cắt ngang hình chữ I tựa đơn và có hai đầu mút thừa như trên hình 7.34. Dầm chịu tác dụng của lực phân bố đều cường độ $q = 10kN/m$ ở mỗi đầu mút thừa. Giả sử mặt cắt ngang chữ I có số hiệu 16 có mômen chống uốn (hay suất tiết diện) là $109 \times 10^3 mm^3$. Xác định ứng suất pháp cực đại σ_{max} trong dầm do uốn, do q .



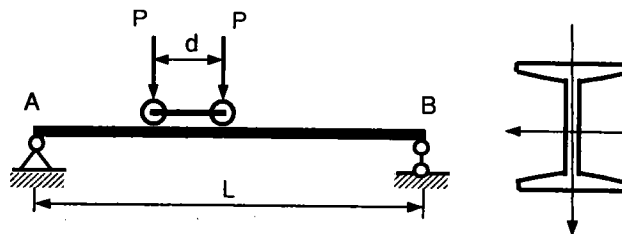
Hình 7.34

- 7.3** Một dầm bằng gỗ ABC có mặt cắt ngang hình vuông cạnh b , tựa đơn tại A và B chịu tải trọng phân bố đều $q = 1,5\text{kN/m}$ trên phần mút thừa BC (H.7.35). Tính cạnh của hình vuông b , giả sử chiều dài nhịp $L = 2,5\text{m}$ và ứng suất cho phép $[\sigma] = 12\text{MPa}$. Hãy kể đến trọng lượng riêng của dầm biết rằng trọng lượng riêng của gỗ là $\gamma = 5,5\text{kN/m}^3$.



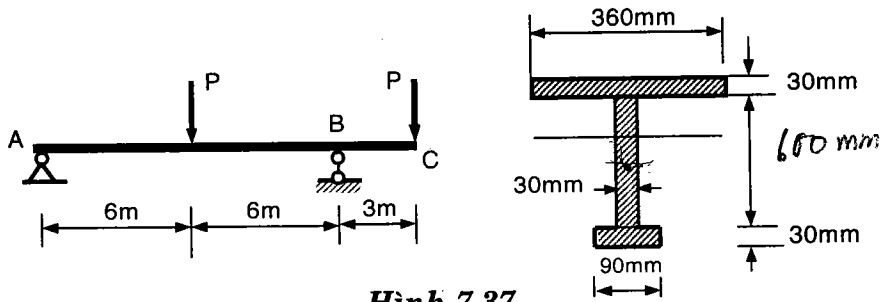
Hình 7.35

- 7.4** Cho dầm đơn giản AB với chiều dài nhịp $L = 7\text{m}$, chịu tác dụng của lực từ hai bánh xe cách khoảng $d = 1,5\text{m}$ như trên hình 7.36. Mỗi bánh xe truyền một lực $P = 14\text{kN}$ và xe có thể xuất hiện tại bất cứ vị trí nào trên dầm. Xác định ứng suất pháp cực đại σ_{\max} trong dầm do các bánh xe gây ra. Biết dầm có tiết diện chữ I và có mômen chống uốn (hay suất tiết diện) là $W = 265 \times 10^3\text{mm}^3$.



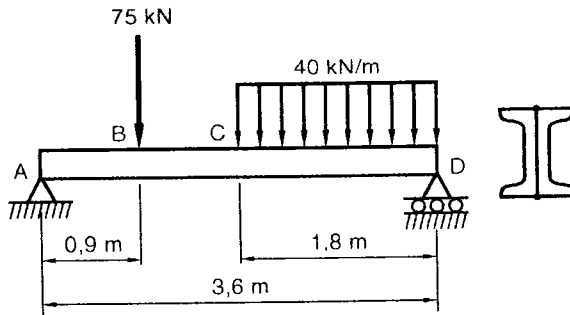
Hình 7.36

- 7.5** Xác định chiều dài nhịp lớn nhất cho dầm tựa đơn có mặt cắt ngang hình chữ nhật ($140\text{mm} \times 240\text{mm}$) chịu tác dụng của tải phân bố đều cường độ $q = 6,5\text{kN/m}$ (H.7.33). Biết ứng suất cho phép là $8,2\text{MPa}$ (trọng lượng của dầm đã kể trong q).
- 7.6** Cho dầm bằng thép ABC có đầu mút thừa BC , chịu hai lực tập trung P như hình 7.37. Tính lực P lớn nhất có thể, cho ứng suất pháp cho phép là $[\sigma] = 160\text{MPa}$.



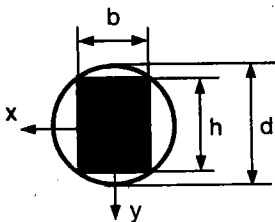
Hình 7.37

7.7 Hai dầm bằng thép hình U cán nóng được ghép lưng lại với nhau và chịu lực như hình 7.38. Biết ứng suất pháp cho phép là $[\sigma] = 190MPa$, hãy xác định loại tiết diện sao cho kinh tế nhất nhưng vẫn đảm bảo khả năng chịu lực.

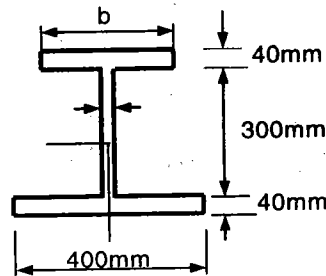


Hình 7.38

7.8 Cho một dầm gỗ tiết diện hình chữ nhật được xẻ từ khúc gỗ hình tròn đường kính d như trên hình 7.39. Hỏi kích thước $b \times h$ của dầm là bao nhiêu để dầm chịu được mômen uốn lớn nhất có thể?



Hình 7.39



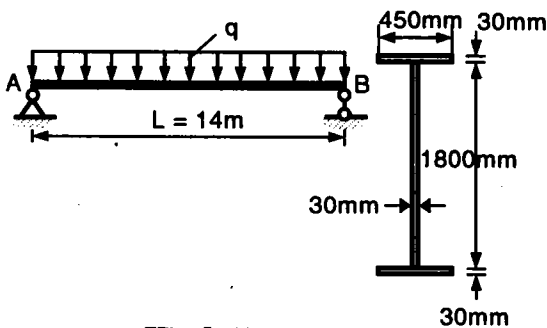
Hình 7.40

7.9 Một dầm có tiết diện chữ I không đều cạnh như hình 7.40, chịu mômen uốn quanh trục x . Xác định chiều rộng cánh trên b để tỉ lệ ứng suất pháp tại mép trên và mép dưới tiết diện là 4:3.

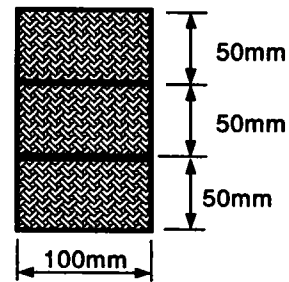
7.10 Cho dầm đơn giản AB chịu tải trọng phân bố đều q bao gồm trọng lượng bản thân dầm như trên hình 7.41. Xác định lực q lớn nhất có thể nếu cho:

a) Ứng suất pháp cho phép: $[\sigma] = 110MPa$.

b) Ứng suất tiếp cho phép: $[\tau] = 50MPa$.



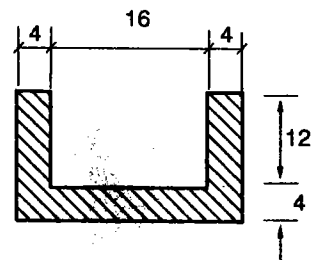
Hình 7.41



Hình 7.42

7.11 Dán ba dầm gỗ kích thước tiết diện $100mm \times 50mm$ lại với nhau để thành một dầm lớn có kích thước tiết diện $100mm \times 150mm$ như trên hình 7.42. Cho ứng suất tiếp cho phép của keo dán là $0,35MPa$ và ứng suất pháp cho phép của vật liệu dầm là $11MPa$. Biết dầm là dầm công-xon có chiều dài $1m$. Hãy tính lực P lớn nhất có thể đặt tại đầu tự do của dầm? (bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm).

7.12 Một máng nước có mặt cắt ngang như hình 7.43. Máng đặt lên hai cột cách nhau $6m$. Vật liệu làm máng có trọng lượng riêng $\gamma = 18kN/m^3$. Hỏi khi chứa đầy nước thì ứng suất pháp và ứng suất tiếp cực đại là bao nhiêu?



Hình 7.43